

T.C.  
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BOUSSINESQ TİPİ DENKLEMLERİN GALERKİN SONLU ELEMAN  
YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Berat KARAAĞAÇ

DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2016

Tezin Başlığı : BOUSSINESQ TİPİ DENKLEMLERİN GALERKİN SONLU  
ELEMEN YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ  
Tezi Hazırlayan : Berat KARAAĞAÇ  
Sınav Tarihi : 15.07.2016

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında  
Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

### Sınav Jüri Üyeleri

Tez Prof.Dr. Alaattin ESEN

Danışmanı: İnönü Üniversitesi

Eş Yrd. Doç. Dr. Yusuf UÇAR

Danışman: İnönü Üniversitesi

Doç. Dr. Mustafa Kemal ÖZDEMİR

İnönü Üniversitesi

Doç. Dr. Hasan BULUT

Fırat Üniversitesi

Doç. Dr. Dursun İRK

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. Alaattin ESEN  
Enstitü Müdürü

## ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Boussinesq Tipi Denklemlerin Galerkin Sonlu Eleman Yöntemi ile Nümerik Çözümleri” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Berat KARAAĞAÇ

# ÖZET

Doktora Tezi

## BOUSSINESQ TİPİ DENKLEMLERİN GALERKİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Berat KARAAĞAÇ

İnönü Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

147+x sayfa

2016

Danışman : Prof.Dr. Alaattin ESEN

Eş Danışman : Yrd. Doç. Dr. Yusuf UÇAR

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler ve bu denklemlerin çözüm tiplerinden biri olan soliton ve soliter dalgalar hakkında kısaca bilgi verildi.

İkinci bölümde, temel kavramlardan bahsedilirken, ele alınan model problemlerin nümerik çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan yöntemler tanıtıldı. Model problemlerin kuadratik ve kübik B-spline bazlar kullanılarak Galerkin sonlu eleman modeli kurulduktan sonra elde edilen adi diferansiyel denklem sistemleri dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile çözüldüğünden bu bölümde; sonlu eleman yöntemi, Galerkin sonlu eleman yöntemi, spline fonksiyonlar, B-spline fonksiyonlar, dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi ve yöntemin kararlık analizine değinildi.

Üçüncü bölümde, soliter dalga üreten Boussinesq tipi denklemlerden Good Boussinesq ve Bad Boussinesq denklemleri ele alındı. Kübik B-spline bazlar yardımıyla her iki denklemin Galerkin sonlu eleman modeli oluşturuldu. Daha sonra, Good Boussinesq denklemi için dalga hareketi, iki soliter dalganın etkileşimi ve dalga ayrılması problemleri incelendi. Ayrıca etkileşim problemi içerisinde soliter dalgaların

genlik seçimine göre dalga etkileşiminde karşılaşılan patlama problemlerine değinildi. Bad Boussinesq denklemi için ise soliter dalga hareketi ve iki soliter dalganın etkileşimi problemleri incelendi.

Dördüncü bölümde, Boussinesq tipi denklemlerden Improved Boussinesq, Improved Boussinesq-tipi ve modifiye edilmiş Improved Boussinesq denklemleri için kuadratik B-spline bazlar kullanılarak Galerkin sonlu eleman modelleri oluşturuldu. Model problemlerden Improved Boussinesq denklemi için dalga hareketi, iki soliter dalganın etkileşimi, dalga ayrılması ve çözüm patlaması problemleri ele alındı. Improved Boussinesq tipi denklem için dalga hareketi, soliter-antisoliter dalga etkileşimi problemi, modifiye edilmiş Improved Boussinesq denklemi için ise dalga hareketi ve dalga etkileşimi problemleri incelendi.

**ANAHTAR KELİMELELER:** Soliton, Soliter Dalga, Sonlu Eleman Yöntemi, Galerkin Yöntemi, Spline Fonksiyonlar, B-spline Fonksiyonlar, Runge-Kutta Yöntemi, Kararlılık Analizi, Boussinesq Tipi Denklemler

# ABSTRACT

Ph.D. Thesis

NUMERICAL SOLUTIONS OF BOUSSINESQ TYPE EQUATIONS USING  
GALERKIN FINITE ELEMENT METHOD

Berat KARAAĞAÇ

İnönü University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

147+x pages

2016

Supervisor : Prof.Dr. Alaattin ESEN

Co-Supervisor : Asst. Prof. Yusuf UÇAR

In the first chapter of this thesis consisting of four chapters, some information are given about nonlinear partial differential equations and solitons and solitary waves which are among solution types of these equation.

In the second chapter, while presenting fundamental concepts, numerical methods used to obtain numerical solutions of the model problem are explained. Since first the Galerkin finite element model of the model problems are constructed using quadratic and cubic B-spline base functions and then the obtained systems of differential equations are solved by the fourth order Runge-Kutta method, finite element method, Galerkin finite element method, spline functions, B-spline functions, the fourth order Runge-Kutta method and the stability analysis of the method are explained.

In the third chapter, Good Boussinesq and Bad Boussinesq equations among Boussinesq equations producing solitary wave are considered. Galerkin finite element method models for both equations are constructed. Then, solitary wave movement, the interaction of two solitary waves and wave break-up problems for Good Boussinesq

equation are considered and in interaction problem, the blow-up problems according to the choice of wave amplitudes are taken into consideration. For Bad Boussinesq equation, the solitary wave movement and the interaction of two solitary waves problems are considered.

In the fourth chapter, Galerkin finite element models for Improved Boussinesq, Improved Boussinesq-type and modified Improved Boussinesq equations using quadratic B-spline bases are constructed. For improved Boussinesq equation; wave movement, the interaction of two solitary waves, wave break-up and blow-up problems are taken into consideration. For improved Boussinesq-type equation wave movement, solitary-antisolitary wave interaction problem, and for modified Improved Boussinesq equation wave movement and wave interaction problems are considered.

**KEY WORDS:** Soliton, Solitary Wave, Finite Element Method, Galerkin Finite Element Method, Spline functions, B-spline Functions. Runge-Kutta Method, Stability Analysis, Boussinesq Type Equations.

## TEŐEKKÖR

“Boussinesq Tipi Denklemlerin Galerkin Sonlu Eleman Yöntemi ile Nümerik Çözümleri ” isimli tez çalışmasının konu olarak belirlenmesi ve tezin bölümlerinin oluşturulmasında her türlü yardım ve desteğini esirgemeyen değerli danışman hocalarım Prof. Dr. Alaattin ESEN ve Yrd. Doç. Dr. Yusuf UÇAR’a, Matematik bölüm başkanımız Prof. Dr. Sadık KELEŐ’e, akademik ve ahlaki bilgi ve birikimiyle bana her zaman yol gösteren hocamız Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY’a ve tezin yazımı süresince yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR ve Yrd. Doç. Dr. N. Murat YAĞMURLU’ya, eğitim ve öğretim hayatım boyunca büyük fedakarlıklar yapan aileme teşekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	iii
TEŞEKKÜR .....	v
İÇİNDEKİLER .....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	viii
TABLolar DİZİNİ .....	x
1. GİRİŞ .....	1
1.1. Soliton ve Soliter Dalgalar .....	3
2. TEMEL KAVRAMLAR .....	12
2.1. Sonlu Eleman Yöntemi .....	12
2.1.1. Tarihsel Gelişim .....	13
2.1.2. Sonlu Eleman Yöntemi Nasıl Çalışır? .....	16
2.1.3. Sonlu Eleman Yönteminin Avantajları ve Dezavantajları .....	25
2.2. Galerkin Sonlu Eleman Yöntemi .....	26
2.3. Spline Fonksiyonlar .....	29
2.3.1. B-spline Fonksiyonlar .....	31
2.4. Runge-Kutta Yöntemi .....	35
2.4.1. Kararlılık Analizi .....	37
3. BOUSSINESQ TİPİ DENKLEMLER .....	41
3.1. Boussinesq Tipi Denklemler için Galerkin Sonlu Eleman Modeli .....	46
3.1.1. Good Boussinesq Denklemi .....	57
3.1.2. Bad Boussinesq Denklemi .....	58
3.2. Kararlılık Analizi .....	59
3.3. Nümerik Örnekler ve Sonuçlar .....	60
3.3.1. Dalga Hareketi .....	61
3.3.2. İki Soliter Dalga Etkileşimi .....	70
3.3.3. Soliter Dalga Ayrılması .....	76
4. IMPROVED BOUSSINESQ DENKLEMLERİ .....	77

4.1.	Improved Boussinesq Denklemi .....	77
4.1.1.	IBq Denklemi için Galerkin Sonlu Eleman Modeli .....	81
4.1.2.	Kararlılık Analizi .....	90
4.1.3.	Nümerik Örnekler ve Sonuçlar .....	91
4.2.	Improved Boussinesq-Tipi Denklem .....	100
4.2.1.	IBq Tipi Denklem için Galerkin Sonlu Eleman Modeli .....	101
4.2.2.	Kararlılık Analizi .....	109
4.2.3.	Nümerik Örnekler ve Sonuçlar .....	110
4.3.	Modifiye Edilmiş Improved Boussinesq Denklemi .....	116
4.3.1.	MIBq Denklemi için Galerkin Sonlu Eleman Modeli .....	118
4.3.2.	Kararlılık Analizi .....	125
4.3.3.	Nümerik Örnekler ve Sonuçlar .....	127
	KAYNAKLAR .....	137
	ÖZGEÇMİŞ .....	147

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1	Russell'ın soliter dalgası: soliter dalga üretiminin öncesi ve sonrası [6]	4
Şekil 1.2	Soliter dalgayı tanımlayan parametreler [6] .....	4
Şekil 1.3	Harmonik dalga oluşumu [8]. .....	9
Şekil 1.4	İki soliter dalga etkileşiminin grafiksel sunumu [8]. .....	9
Şekil 2.1	Brachistochrone problemi için Johan Bernoulli'nin diyagramı [24]...	14
Şekil 2.2	Sonlu eleman yönteminin adımları.....	17
Şekil 2.3	Eleman seçimi [38]. .....	20
Şekil 2.4	Mekanik Spline .....	30
Şekil 2.5	Dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi için kararlılık bölgesi [69] .....	40
Şekil 3.1	GBq ve BBq: $N = 45$ ve $\Delta t = 0.001$ değerleri için $\lambda_j$ özdeğerlerinin kompleks düzlemdeki konumları .....	60
Şekil 3.2	GBq için $x \in [-80, 100]$ , $A = 0.369$ , $h = 0.3$ , $\Delta t = 0.001$ , $\tilde{x}_0 = 0$ , $t = 72$ değerlerinde soliter dalga hareketi .....	64
Şekil 3.3	GBq:İkincil dalgalar .....	65
Şekil 3.4	BBq için $x \in [-80, 100]$ , $A = 0.369$ , $h = 4$ , $\Delta t = 0.001$ , $\tilde{x}_0 = 0$ ve $t = 72$ değerlerinde soliter dalga hareketi .....	68
Şekil 3.5	GBq: Soliter dalga etkileşimi .....	72
Şekil 3.6	GBq: Soliter dalga etkileşiminde çözümün patlaması .....	73
Şekil 3.7	GBq için aynı yöne doğru hareket eden soliter dalgaların etkileşimi.	74
Şekil 3.8	BBq: Soliter dalga etkileşimi .....	75
Şekil 3.9	GBq için $x \in [-100, 100]$ , $A = 1.49999$ , $h = 0.5$ , $\Delta t = 0.025$ , $\tilde{x}_0 = 0$ ve $t = 70$ değerlerinde soliter dalga ayrılması .....	76

Şekil 4.1	IBq: $N = 44$ ve $\Delta t = 0.001$ değerleri için $\lambda_j$ özdeğerlerinin kompleks düzlemdeki konumları.....	91
Şekil 4.2	IBq için $x \in [-80, 140]$ , $A = 0.5$ , $h = 0.5$ , $\Delta t = 0.001$ , $\tilde{x}_0 = 0$ ve $t = 72$ değerlerinde soliter dalga hareketi .....	94
Şekil 4.3	IBq: Soliter dalga etkileşimi .....	97
Şekil 4.4	IBq için $x \in [-80, 140]$ , $A = 0.5$ , $h = 0.5$ , $\Delta t = 0.001$ , $\tilde{x}_0 = 30$ ve $t = 72$ değerlerinde dalga ayrılması .....	98
Şekil 4.5	IBq için $t = 1.4 - 1.6$ ve $t = 1.7 - 1.8$ zamanlarında çözüm patlaması	100
Şekil 4.6	IBq tipi: $N = 45$ ve $\Delta t = 0.001$ değerleri için $\lambda_j$ özdeğerlerinin kompleks düzlemdeki konumları .....	110
Şekil 4.7	IBq tipi için $x \in [-80, 100]$ , $A = 0.5$ , $h = 0.5$ , $\Delta t = 0.001$ , $\tilde{x}_0 = -20$ , ve $t = 70$ değerlerinde soliter dalga hareketi .....	113
Şekil 4.8	IBq tipi: Soliter dalga etkileşimi .....	116
Şekil 4.9	MIBq: $N = 66$ ve $\Delta t = 0.001$ değerleri için $\lambda_j$ özdeğerlerinin kompleks düzlemdeki konumları .....	126
Şekil 4.10	MIBq için $x \in [-150, 180]$ , $A = 0.5$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.01$ , $\tilde{x}_0 = 0$ ve $t = 70$ değerlerinde soliter dalga hareketi .....	130
Şekil 4.11	MIBq: ikincil dalgalar .....	131
Şekil 4.12	MIBq tipi için $A = 1$ , $A = 1.5$ , $A = 2$ ve $A = 2.5$ değerlerinde soliter dalga hareketi .....	132
Şekil 4.13	MIBq: soliter-soliter dalga etkileşimi .....	135
Şekil 4.14	MIBq: soliter-antisoliter dalga etkileşimi .....	136

## TABLULAR DİZİNİ

Tablo 3.1	GBq için farklı $\Delta t$ ve $h$ değerlerinde $L_\infty$ hata normları .....	63
Tablo 3.2	GBq için farklı $\Delta t$ ve $h$ değerlerinde $L_2$ hata normları .....	63
Tablo 3.3	GBq için $L_\infty$ hata normlarının Ref. [89, 90, 95] ile karşılaştırılması .	66
Tablo 3.4	GBq için $L_\infty$ hata normlarının Ref. [87] ile karşılaştırılması.....	66
Tablo 3.5	BBq için farklı $\Delta t$ ve $h$ değerlerinde $L_\infty$ hata normları .....	67
Tablo 3.6	BBq için farklı $\Delta t$ ve $h$ değerlerinde $L_2$ hata normları .....	67
Tablo 3.7	BBq için $L_\infty$ hata normlarının Ref. [89] ile karşılaştırılması .....	69
Tablo 3.8	BBq için $L_\infty$ hata normlarının Ref. [74, 88] ile karşılaştırılması ....	69
Tablo 3.9	BBq için farklı genlik değerleri için $L_\infty$ hata normlarının Ref. [74] ile karşılaştırılması .....	69
Tablo 4.1	IBq: Farklı $A$ , $\Delta t$ ve $h$ değerleri için elde edilen $L_2$ hata normları ...	93
Tablo 4.2	IBq: Farklı $A$ , $\Delta t$ ve $h$ değerleri için elde edilen $L_\infty$ hata normları ..	93
Tablo 4.3	IBq için $L_\infty$ hata normlarının Ref. [109] ile karşılaştırılması .....	94
Tablo 4.4	IBq tipi: Farklı $A$ , $\Delta t$ ve $h$ değerleri için elde edilen $L_2$ hata normları	112
Tablo 4.5	IBq tipi: Farklı $A$ , $\Delta t$ ve $h$ değerleri için elde edilen $L_\infty$ hata normları	112
Tablo 4.6	MIBq için farklı $A$ , $\Delta t$ ve $h$ değerlerinde $L_2$ hata normları.....	128
Tablo 4.7	MIBq için farklı $A$ , $\Delta t$ ve $h$ değerlerinde $L_\infty$ hata normları.....	129

# 1. GİRİŞ

Evreni anlamak ve hakkında bilgi edinmek için birkaç farklı yöntem vardır. Bu yöntemlerden birincisi, gözlemlerimiz sonucunda elde ettiğimiz verileri açıklamaya çalışmaktır. İkincisi ise deneyler yapmaktır. İki yöntem birbiriyle tamamen ilişkilidir. Evreni ve olayları deneyler ile açıklamaya çalışmak için tanımlamak istediğimiz olaya ait verileri sağlayacak modeller ve teoriler oluşturulmalıdır. Yaklaşık üç asır önce Galileo Galilei (1564-1642) “Tabiatın kitabı, matematiksel semboller ile yazılmıştır” ve “Evrenin kitabı matematik diliyle yazılmıştır” sözleriyle matematik ve evren hakkındaki düşüncelerini sunarak evrenin anlaşılmasında matematiğin önemini ifade etmiş ve Galileo’nun bu düşünceleri kendi dönemindeki birçok fizikçi tarafından onay görmüştür. Evrenin matematik diliyle modellenmeye çalışılması ise Leonardo da Vinci [1] tarafından, evreni anlamamanın üç kuralı ile temellendirilebilir. Bu kurallar;

- Yaşadığımız fiziksel dünyayı gözlemek, sayısal büyüklükleri listelemek,
- Tecrübelerimizle çelişse bile bu nicelikler arasında lineer ilişkileri kurmak,
- Bu lineer ilişkileri deneyler yaparak olarak ifade etmektir.

Bu üç kural, lineer ve lineer olmayan teorilerin kurulmasında önemli bir yol haritası olmuştur. Matematik sadece içinde bulunduğumuz olayı tanımlamakla kalmaz aynı zamanda olayı anlamamızı ve yeni özelliklerini bulmamızı sağlar. Dolayısıyla lineer olmayan olayları anlamak için fiziksel teoriler matematik terimleri ile ifade edilmelidir.

Zamana bağlı olarak gelişen olayların özelliklerinin anlaşılması adi veya kısmi diferansiyel denklemlerin analizi ile mümkündür. “Oluşum Denklemleri Teorisi” olarak

adlandırılan alanda yapılan çalışmalar ile kurulan modeller fizik, doğa bilimleri, mühendislik, ekonomi ve yapay sinir ağları gibi birçok farklı alanın gelişimine katkıda bulunur. Aynı zamanda kurulan modeller üzerinde bir çok teorik ve nümerik çalışma yapılmıştır. Matematiksel olarak formüle edilen bu denklemler lineer olmayan oluşum denklemleri olarak adlandırılır ve bağımsız değişkenlerinden biri  $t$  zamanı olan kısmi diferansiyel denklemlerdir. Navier Stokes, Euler denklemi, Lineer olmayan Reaksiyon Difüzyon denklemleri, Lineer olmayan Klein-Gordon denklemleri ve Lineer olmayan Schrödinger denklemleri karşılaşılan lineer olmayan oluşum denklemlerine örnek olarak verilebilir [2]. Bu denklemler, pratik problemlerde ilk olarak yüksek hızlı bilgisayar ve özel algoritmaların geliştirilmesi ile bilim ve teknoloji alanlarında ilerlemelere neden oldu. Örneğin; nükleer patlama simülasyonları, uçak tasarımları için rüzgar tünelleri simülasyonları yapıldı [3].

Lineer olmayan oluşum denklemlerinin çözümlerinin bulunması, fiziksel problemin yapısının kavranması, problemin fiziksel etkilerinin ve mekanizmasının anlaşılması açısından önemlidir. Bu nedenle oluşum denklemlerinin çözümlerine ulaşmak için birçok analitik ve nümerik yöntem geliştirilmiştir. Fakat oluşum denklemlerinin tam çözümlerinin elde edilmesi her zaman mümkün olmayabilir. Bu durumda denklemin sayısal çözümüne ulaşılması için nümerik yöntemler kullanılır. Tam çözüm yerine nümerik çözümlerin araştırılmasının iki temel nedeni vardır. Bunlar;

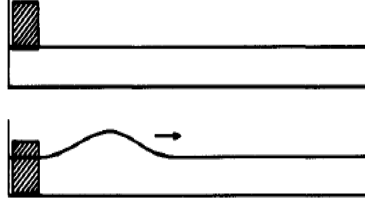
- Matematiksel olarak tanımlanmış olan problemin tam çözümünün bulunmasının mümkün olduğu bazı durumlarda çözüme ulaşmak zaman ve kaynak isfarına neden olabilir.
- Tam çözümün bulunmasının imkansız olduğu durumlarda çözümü elde etmek için nümerik yöntemler kullanılır.

Lineer olmayan oluşum denklemlerinin çözümleri genellikle,  $u(x, t) = f(x - t)$  formunda sunulan ilerleyen dalga (*travelling-wave*) çözümleri olarak ortaya çıkar. İlerleyen dalga çözümleri sabit bir hızla hareket eden kalıcı formda çözümlerdir. Sıklıkla lineer olmayan oluşum denklemlerinin çözümlerinin,  $c$  dalga hızı olmak üzere,  $\xi = x - ct$  dönüşümü ile çözümlerin  $u(x, t) = u(\xi)$  formunda adi diferansiyel denklem çözümüne indirgenmesi ile elde edilir [4]. Bir çok bilimsel alanda hızla gelişen dalga teorisi, soliter dalgalar ve solitonlar, periyodik çözümler, kink dalga çözümleri, peakon çözümler, kompaktlar gibi ilerleyen dalga çözümlerinin bir çok tipi ile ilgilenmiştir. Bu çalışmada çözüm modellerinden biri olan “soliton ve soliter dalga” tipi çözümler incelenecektir.

## 1.1 Soliton ve Soliter Dalgalar

Tarihsel olarak Soliter dalgaların ilk keşfi John Scott Russell tarafından 1834 yılında Union kanalında gerçekleştirilmiştir. Russell, şeklinde ve hızında herhangi bir değişim olmadan yaklaşık iki mil hareket eden yuvarlak ve pürüzsüz bir su öbeği gözlemlemiştir. Bu gözlemini kendi cümleleri ile [5];

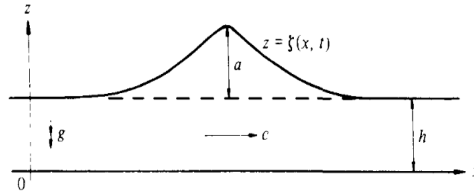
“Dar bir kanal boyunca bir çift at tarafından hızla çekilen bir teknenin hareketini gözlemliyordum, tekne aniden durduğunda kanalda teknenin harekete geçirdiği su kütlesi hareket etmeye başladı; şiddetli çalkalanma durumunda teknenin burun kısmı etrafında birikti ve daha sonra su öbeği aniden bulunduğu yerden ayrıldı; Büyük bir tek yükselti formunda, yuvarlak ve pürüzsüz bir su yığını hızla ileriye doğru yuvarlandı. Hızında bir azalma ve şeklinde bir değişiklik olmaksızın ilerlemeye devam etti. Saatte sekiz veya dokuz mil hız ile otuz fit uzunluğunda ve bir, bir buçuk



Şekil 1.1: Russell'ın soliter dalgası: soliter dalga üretiminin öncesi ve sonrası [6]

yarı yüksekliğinde şeklini koruyarak hala yuvarlanıyordu. Yüksekliği kademeli olarak azaldı ve bir iki mil onu kovaladıktan sonra kanalın kavislerinde onu kaybettim. Böylece, 1834 yılının Ağustos ayında “çevirimli dalga” olarak adlandırdığım yegâne ve güzel oluşum ile tanışma şansım oldu.” olarak ifade etmiştir.

Daha sonra Russell yapmış olduğu deneylerde Şekil 1.1 'de sunulan soliter dalganın üretiminin öncesi ve sonrasını gözlemledi. Russell bu çalışmalarda, soliter dalganın hızını  $c^2 = g(a + h)$  olarak hesapladı (Şekil 1.2). Burada  $a$  dalganın genliği,  $h$  suyun yüksekliği ve  $g$  yer çekimi ivmesini simgeler. Bu ifadeye göre dalganın hızı dalganın genliğine bağlıdır ve genliği büyük olan dalga daha hızlıdır. Russell yaptığı deneyler ile soliter dalganın sabit hızla hareket ettiği ve şeklini koruduğu, belirli bir genliğe sahip olan soliter dalganın iki veya daha fazla dalgaya ayrıldığı ve dalgaların yapısının tepcikler ve boşluklar formunda olduğu sonucuna vardı [6].



Şekil 1.2: Soliter dalgayı tanımlayan parametreler [6]

Russell, dalgaları sınıflandırarak gözlemlediği soliter dalgaları “birincil çevirimli” dalga olarak adlandırdı ve elde ettiği sonuçları “Dalgalar Raporu” isimli çalışmasında sundu. Fakat Russell’ın bu çalışması Airy ve Stokes tarafından eleştirildi. Ayrıca Airy, Russell’ın dalga hızı için verdiği formülün sığ sulardaki geniş dalga teorisi ile çeliştiğini vurgulayarak hiçbir geniş dalganın kanal boyunca şeklini koruyamayacağını iddia etti. Stokes ise “On the Theory of Oscillating Waves” (1847) isimli çalışmasında soliter dalganın viskozitesi olmayan sıvılarda bile var olmayacağı sonucuna vardı. Bu eleştiriler üzerine Russell [7];

“Bu en güzel ve olağanüstü bir olgudur: onu gördüğüm ilk gün hayatımın en mutlu günüydü. Hiç kimsenin bunu ilk olarak görme veya ne anlattığımı anlama şansı olmadı. Şimdi ise çevirimli soliter dalga olarak biliniyor. Daha önce hiç kimse soliter dalganın olası bir şey olduğunu düşünmüyordu. Sir John Herschel’e bunu tanımladığımda bunun sadece kesilmiş olan genel bir dalganın yarısı olduğunu ifade etti. Fakat böyle değildi, çünkü genel dalgalar kısmen yukarıda kısmen yüzey altında gider, bunun dışında genel dalgalardan şekli de farklıydı. Gözlemlediğim yarım bir dalga olmak yerine tam bir dalgaydı. Bu fark ile aşağıda ve yukarıda değil, dönüşümlü olarak sadece yukarıda olan bir dalgaydı. Bir su yığınının daha fazlasıydı yerinde durmuyor belirli bir mesafeye ilerliyordu.” kelimeleri ile soliter dalgaların varlığını ispat etmeye çalışırken yaşadığı zorlu süreci ve bu süreç boyunca inancını hiç kaybetmediğini vurgulamıştır [8].

19. yüzyılda bilim adamları soliter dalgaları önemli bir oluşum olarak gördü. 1872 yılında Joseph Valentine de Boussinesq (1842-1929) sığ sulardaki dalga kavramı konusuna farklı bir yaklaşım getirdi. Russell’ın soliter dalgalarının var olabileceğini ve şekilleri ile hızlarının yaklaşık olarak hesaplanabileceğini gösterdi. Bu çalışmaları

daha sonraları, Rayleigh (1876) ve Saint-Venant (1885)'in çalışmaları ile onaylanarak Russell'in formülünün geçerliliği kanıtlandı.

1895 yılında Alman bilim adamı Diederik Johannes Korteweg (1848-1941) ve öğrencisi Gustav de Vries, geniş dalgaların sığ suda yayılımını tanımlayan

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \left[ \frac{2}{3} \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right] \quad (1.1)$$

ile ifade edilen yeni bir lineer olmayan denklem türettiler [10]. (1.1) denkleminde  $x$  ve  $t$  sırasıyla konum ve zaman değişkenleridir.  $\eta(x, t)$  lineer olmayan dalganın yüksekliğindeki değişimi,  $h$  suyun derinliğini,  $\alpha$  suyun derinliği ile ilişkili bir sabiti,  $g$  yerçekimi ivmesini ve  $\sigma = h^3/3 - Th/\rho g$  olmak üzere  $\rho$  yoğunluğu,  $T$  ise su yüzeyi gerilimini temsil eder. Korteweg ve de Vries (1.1) denkleminin

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{2}{3} \alpha (6u + 1) \\ T &= \sqrt{\frac{2\alpha^3 g}{\sigma h}} t \\ \xi &= -\sqrt{\frac{2\alpha}{\sigma}} x \end{aligned}$$

dönüşümleri yardımıyla tekrar düzenlenmesi ile

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = 0 \quad (1.2)$$

Korteweg de Vries(KdV) denklemini elde ettiler. Bu ifadede, ikinci terimde bulunan 6 katsayısı yakınsaklık için seçilir ve  $u \rightarrow \beta u$  dönüşümü yoluyla düzenlenebilir [11].

Korteweg ve de Vries çalışmaları sonucunda, KdV denkleminin periyodik çözümlerinin pozitif dikey düzlemde yalnız bir tepe formunda sunulabileceğini gösterdiler. KdV denkleminin elde edilmesi ile soliter dalgalar matematikçiler ve fizikçiler açısından sadece sığ su dalgalarının dışında lineer olmayan birçok dalganın

tanımlanması bakımından önemlidir. Korteweg ve de Vries, KdV denkleminin ürettiği soliter dalgaların kararlılığı ve etkileşimden sonra dalgaların davranışı hakkında bir çalışma yapmadılar [8].

1950’li yıllarda E. Fermi, J. Pasta ve S. Ulam [12], Los Alamos laboratuvarlarında, katılarda ve metallerde ısının nasıl iletildiğini taklit etmek için bir bilgisayar simülasyonu hazırladılar. Araştırmalarında sadece sağa ve sola hareket edebilen ve birbirlerine termal dengeye getirilebilen yaylar ile bağlanan, her biri mod olarak adlandırılan 32 parçacıklı bir sistem tasarladılar. Bu sistemde tam bir dalga üretmek için gereken enerji seviyesinin ne olacağını araştırdılar. Sistemdeki enerjinin her bir moda eşit olarak bölüneceğini ve sistemin termal denge durumuna gelmesini bekliyorlardı. Çalışmalar sonucunda; enerjinin sistem içinde %97 oranında tek bir moda yoğunlaştığını fark ettiler. Bu beklenmedik sonuç “FPU’nun tekrarlanan olayı” olarak adlandırıldı. Bundan sonra yapılan araştırma ve çalışmalar deneysel matematiğin temelini oluşturdu [13].

E. Fermi, J. Pasta ve S. Ulam’ın bu beklenmedik sonuçları N. Zabusky ve M. Kruskal’ı problemi yeniden araştırmaya yönlendirdi. 1965 yılında Zabusky ve Kruskal [14], (1.2) denklemindeki değişkenleri normalize ederek

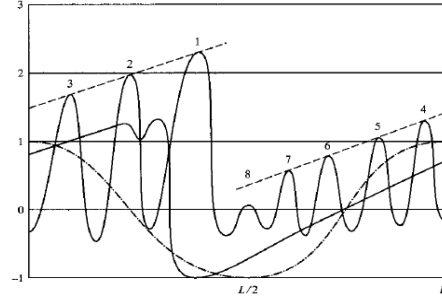
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (1.3)$$

formunda yazdı. Bu denklemi Fermi-Pasta-Ulam problemi için bir model alıp nümerik çözümlerini araştırdılar. Çalışmalarında iki soliter dalganın etkileşimi sonrasında dalgaların bozulabileceğini veya etkileşimden sonra ortaya çıkan fazla enerjinin yeni bir soliter dalga üretebileceğini düşünüyorlardı. Problemden, yüzeyde  $u(x, 0)$  biçiminde başlangıç şekli seçerek, zaman içerisinde dalganın gelişimini hesapladılar. Problemin

çalışıldığı  $x$  eksenini  $0 \leq x \leq L$  olan bir aralığa kısıtlayarak bilgisayar ile hesaplamaya uygun bir hale getirdiler. Bu amaçla, dalganın sınırlardan yansımalarını hesaba katarak  $u(x, t)$  üzerine periyodik sınır koşulları koydular [8]. Böylece Zabusky ve Kruskal, (1.3) ile verilen denklemin bütün terimlerini  $[0, 2]$  aralığında periyodik ve

$$u(x, 0) = \cos \pi x \quad 0 < x < 2$$

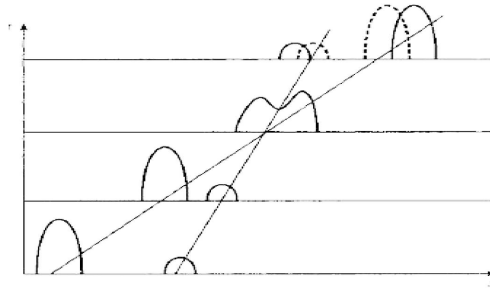
başlangıç koşulu ile ele aldılar. (1.3) denkleminde bulunan  $\delta$  parametresine  $\delta = 0.022$  gibi küçük bir değer atayarak Şekil 1.3 de verilen sonuçları elde ettiler. Şekil 1.3 'den görüleceği üzere, başlangıç dalgası kısa bir süre sonra dikleşiyor ve hemen hemen bir şok dalgası üretiyordu. Burada,  $\delta^2 u_{xxx}$  terimi yayılım ve nonlineerlik arasında bir denge kuruyordu. Zamana bağlı çözüm her biri  $\text{sech}^2$  fonksiyonu şeklinde ardışık dalgalar oluşturuyordu [6]. Dalganın başlangıç şekli Şekil 1.3 de çizgili noktalı eğrilerle gösterilmiştir. Herhangi bir  $t$  zamanındaki şekli ise çizgili eğri ile, sonraki  $2.5t$  zamanında ise koyu çizgi ile gösterilen soliter dalga dizileri şeklindedir. Burada, soliter dalgalar azalan genliklerine göre numaralandırılmıştır. (1) ile numaralandırılan soliter dalga genliği en yüksek olup sağa doğru hareket etmektedir. Her biri bir daire üzerinde hareket eden soliter dalgalardan hızlı olan sağ sınıra ulaşınca, sol sınırdaki tekrar görünmekte ve diğer soliter dalgaların arkasından ilerleyerek etkileşime girmektedir [8]. Soliter dalgalar birbirleriyle etkileşime girebilen ve etkileşimden sonra hızlarını ve şekillerini koruyabilen dalgalardır ve bu özelliklerinden dolayı parçacık benzeri davranış sergilerler. Soliter dalgaların bir diğer özelliği ise hızlı olan dalganın yavaş olan dalgayı geçtiğinde ilerlemeye devam etmesidir. Aynı yöne doğru hareket ederken etkileşime giren dalgalar Şekil 1.4 de sunulmuştur. Şekil 1.4'den görüldüğü gibi etkileşime giren dalgalardan genliği yüksek olan yani hızlı olan dalga genliği düşük



Şekil 1.3: Harmonik dalga oluşumu [8].

olan yani yavaş olan dalga ile etkileşime girdikten sonra hızlı olan dalga öne doğru “kaymış (*shifted*) ” yavaş olan ise geriye doğru “kaymış” durumdadır. Bu ise “faz kayması (*phase shift*)” olarak nitelendirilir. Şekil 1.4’de etkileşime giren dalgaların buldukları konumları düz çizgilerle, etkileşime girmedikleri durumdaki konumları ise kesikli çizgilerle gösterilmiştir [8].

Zabusky ve Kruskal [9] yaptıkları deneyler ile soliter dalgaların proton, nötron, foton gibi parçacıklara benzer özellikler taşıdığını düşünerek “soliter dalga” yerine “soliton” kelimesini kullandılar.



Şekil 1.4: İki soliter dalga etkileşiminin grafiksel sunumu [8].

Solitonu soliter dalgadan ayıran temel özellik birbirleriyle etkileşime girdikten sonra deforme olmadan ve enerji kaybetmeden ilerlemeye devam etmeleridir. Matematiksel olarak soliter dalgalar integrallenemeyen denklemlerin çözümleri iken solitonlar integrallenebilen denklemlerin çözümleridir [15].

Zabusky ve Kruskal'ın deneylerinden sonra soliton kavramı kabul edildi. Daha sonra Gardner vd. [16] soliter dalganın tam çözümlerini ters saçılım yöntemi ile elde etti. Bu çalışmalarında başlangıçta alınan soliter dalganın arkalarında yayılan kuyruklar bırakarak iki veya daha fazla dalgaya ayrıldığını gösterdiler. Lax [17], bu sonuçları geliştirerek lax çifti kavramını önerdi. Zakharov ve Shabat [18], lineer olmayan Schrödinger denkleminin tam çözümlerini elde etmek için Ters Saçılma yöntemini kullandı ve başlangıç dalgasının yayılan bir kuyruk içerdiğini gösterdi. Hirota [19], çoklu soliton etkileşimi problemini KdV denklemi için inceleyerek denklemin tam çözümlerini Hirota direkt yöntemi ile elde etti. Ablowitz [20], modifiye edilmiş KdV denklemi, lineer olmayan Schrödinger denklemi ve Sine-Gordon denklemi gibi birçok yeni denklemin çözümünü Ters Saçılma yöntemi ile elde etti. Böylece bir çok teknik ve yöntem geliştirilerek, lineer olmayan denklemlerin soliton çözümlerine ulaşıldı.

Genel olarak solitonların özellikleri;

**İntegrallenebilirlik:** Soliton çözümlerinin elde edilmesinden önce bilim adamları lineer olmayan oluşum denklemlerinin tam çözümlerine ulaşamayacağını düşünüyorlardı. Ters Saçılma yöntemi, Lax çiftleri veya Hirota teknikleri gibi yöntemler ile integrallenebilen lineer olmayan denklemlerin çözümlerine ulaşıldı.

**Parçacık tipi davranış:** Solitonlar bozulmadan ilerleyen etkileşime girdikten sonra şekillerini ve genliklerini çoğunlukla koruyan dalgalardır. Solitonların parçacık

tipi davranışı birçok lineer olmayan sistemde uygulama alanının bulmasına öncülük eder. Dolayısıyla parçacıkları anlamının en iyi yolu solitonlardır. Örneğin; okyanustaki iç dalgalar, doğal saydamlık ve fiber optik kablolardaki ışığın davranışı solitonlar yardımıyla tanımlanır.

### **Nonlineer süperpozisyon:**

Lineer denklemlerin aksine lineer olmayan denklemlerin çözümlerinin bir kombinasyonu çözüm değildir. Ancak solitonların keşfi ile soliton tipi çözüme sahip lineer olmayan dalgalar için nonlinear süperpozisyon ilkesi tanımlanmaktadır [21].

Solitonlar ve soliter dalgalar genel olarak mühendislik, fizik, kimya, biyoloji, hidrodinamik, akışkanlar mekaniği, kuantum mekaniği gibi birçok alanda karşımıza çıkmaktadır. Örneğin, yüksek hızlı veri iletimi için solitonlar kullanılır ve bu sayede önemli ölçüde veri transferi yapılır. Ayrıca soliton dalgaları lazer ışınları yardımıyla elektronları hasarlı dokuya ulaştırarak hücreye gerekli besinin sağlanması için DNA'yı uyarır ve böylece hücrenin onarımı mümkün olur.

Russell'in gözlemleriyle başlayan soliton ve soliter dalganın yolculuğu günümüzde hala devam etmektedir. Soliton ve soliter dalgalar hakkında Russell'in gözlemlerini destekleyen birçok araştırma ve çalışma yayınlanmıştır. Hala solitonlar üzerine yapılan çalışmalar devam etmektedir.

Bu çalışmada, Joseph Valentine de Boussinesq tarafından keşfedilen ve sığ suların yüzeyindeki uzun dalgaları modelleyen bir denklem olan Boussinesq ve Boussinesq tipi denklemlerin soliter dalga çözümleri üzerine incelemeler yapılacaktır.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Birinci bölümde lineer olmayan oluşum denklemleri ve bu denklemlerin, çözüm tiplerinden biri olan soliton ve soliter dalgalardan bahsedildi. Bu bölümde ise model problemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için kullanılan yöntemler ele alındı. Model problemlerin kuadratik ve kübik bazlar ile sonlu eleman modeli oluşturulduktan sonra elde edilen lineer adi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile yapıldı ve kararlılık analizlerine değinildi. Bu nedenle temel kavramlar adı altındaki bu bölümde sonlu eleman yöntemi, Galerkin yöntemi, spline fonksiyonlar, B-spline fonksiyonlar ve Runge-Kutta yöntemi ile yöntemin kararlılık analizi hakkında bilgiler verildi.

### 2.1 Sonlu Eleman Yöntemi

Matematiksel ifadeleri tanımlanan fiziksel, biyolojik veya mekanik olayların bilgisayar simülasyonu ile davranışını gözleme işlemine sayısal modelleme denir. Sayısal modelleme aşağıda belirtildiği gibi yapılır;

- İlgilenilen problemin tanımlanması,
- Problemin matematiksel modelinin oluşturulması,
- Elde edilen veriler ile bilgisayar simülasyonunun yapılmasıdır.

İlk adımda ölçmek istediğimiz niceliklerin bir idealizasyonu tanımlanır. Burada idealizasyon, karmaşık bir sistemin işlenebilir bir hale getirilmesi için basitleştirilmesi sürecidir. İdealizasyon tanımlanırken, ilgilenilen problemin iyi durumda (well-posed)

olmasına dikkat edilmelidir. Hadamard'ın ifadesiyle bir problemin iyi durumda olması problemin tek çözümünün bulunması ve çözümün davranışının başlangıç verileri ile değişmesidir. İkinci adım, idealizasyonu düşünülen problemin matematiksel modelini oluşturmaktır. Örneğin, Navier-Stokes denklemi akışkanların hareketini, elastisite denklemleri ise katı bir nesneye dış etki uygulandığında oluşan deformasyonu modeller [22].

Bazı karmaşık sistemleri modelleyen oluşum denklemlerinin tam çözümlerine ulaşılmadığı takdirde nümerik yöntemlere başvurulacağına değinildi. Bu kısımda ise kısmi diferansiyel denklem sistemlerini zaman ve konum adımları ile ayrıştırarak cebirsel veya diferansiyel denklem sistemlerine dönüştüren matematiksel bir metod olan yöntemlerden biri olan sonlu eleman yöntemi üzerinde durulacaktır.

### 2.1.1 Tarihsel Gelişim

Sonlu eleman yöntemi,

- Problemin varyasyonel veya ağırlıklı kalan formülasyonu,
- Parçalı polinom yaklaşımı

olmak üzere iki temel ilkedden oluşur. Bu yöntemin tarihçesi G.W. Leibnitz'in 1696 yılında Johan Bernoulli'ye (1667 – 1748) Brachistochrone Problemi için yönelttiği soruya dayanır. Brachistochrone Problemi Şekil 2.1 de gösterildiği üzere sürtünmesiz bir ortamda inişli bir eğride bir noktadaki cismin yerçekimi kuvvetinin etkisiyle başka bir noktaya ulaşmasıdır ve bu hareketin en kısa sürede tamamlanması için yol formülünün ne olması gerektiğidir? Doğru cevap ise düz bir doğru, parabol veya çember değildir. Leibnitz, eğriyi bir veya iki parçaya bölünmüş lineer eğri ile değiştirdi ve eğrilerin bağlantı noktalarını belirleyerek problemin çözümüne ulaştı [23]. Böylece,



1954 yılında Argyris ve Kelsey [30], enerji ilkesini kullanarak yapı analizinde matris yöntemini geliştirdi. Turner vd. [31], 1956 yılında iki boyutlu elemanları kullanıp düzlem gerilmelerinde kafes, kiriş, iki boyutlu üçgensel ve dikdörtgensel elemanlar için katsayılar matrisini oluşturup “Matris Deplasman Yöntemi” nin çerçevesini oluşturdular. Ray W. Clough vd [32], 1960 yılında üçgensel ve dikdörtgensel elemanları düzlemsel gerilme analizinde kullanarak “sonlu eleman” terimini ortaya çıkardılar.

1961 yılında Martin [33], 1962 yılında Gallagher [34] ve 1963 yılında Melosh [35] dört yüzlü elemanlar kullanıp sonlu eleman yönteminin üç boyutlu problemlere genişlemesini sağladılar.

Sonlu eleman yöntemi ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı gerinimler, küçük esnemeler, elastik madde davranışı ve statik yükler ile ilgiliydi. Aynı zamanda Turner vd. [36] geniş defleksiyon ve termal analizleri, Gallagher vd. [34], maddenin nonlineerliği ve Gallagher ve Padlog [37], Burkulma Problemini incelediler. Yöntemin yapısal olmayan uygulamalarda kullanılması 1963 yılında Melosh’ın [35]’ın yöntemi varyasyonel formülün terimleri ile ifade etmesi ile başladı. Böylece sonlu eleman yöntemi birçok farklı mühendislik ve fizik problemlerine uygulandı [38].

Daha sonra yöntem, kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü ile ilgilenen araştırmacıların da dikkatini çekti. G. Strang ve G. J. Fix [39], sonlu eleman yöntemini varyasyonel teoremlerden ortaya çıkan problemlere uygulayarak yöntemin matematiksel olarak ilk çalışmasını yaptılar. Yöntem üzerine yazılan ilk kitap 1967 yılında Zienkiewicz ve Cheung [40] tarafından kaleme alınan “The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics” dır. Yöntemin gelişimine Desai [29], Finlayson [41], Beckler vd. [42], Fletcher [43], Reddy [44, 45], Segerlind [46], Bickfond [47] katkıda bulunan araştırmacılardan bazılarıdır [48].

Günümüzde bilimin hemen hemen her alanında sonlu eleman yöntemi kullanılmaktadır. Sonuç olarak yöntem farklı disiplinleri birbirine bağlayan etkili bir yöntem olup birçok araştırmacının ilgisini çekmektedir.

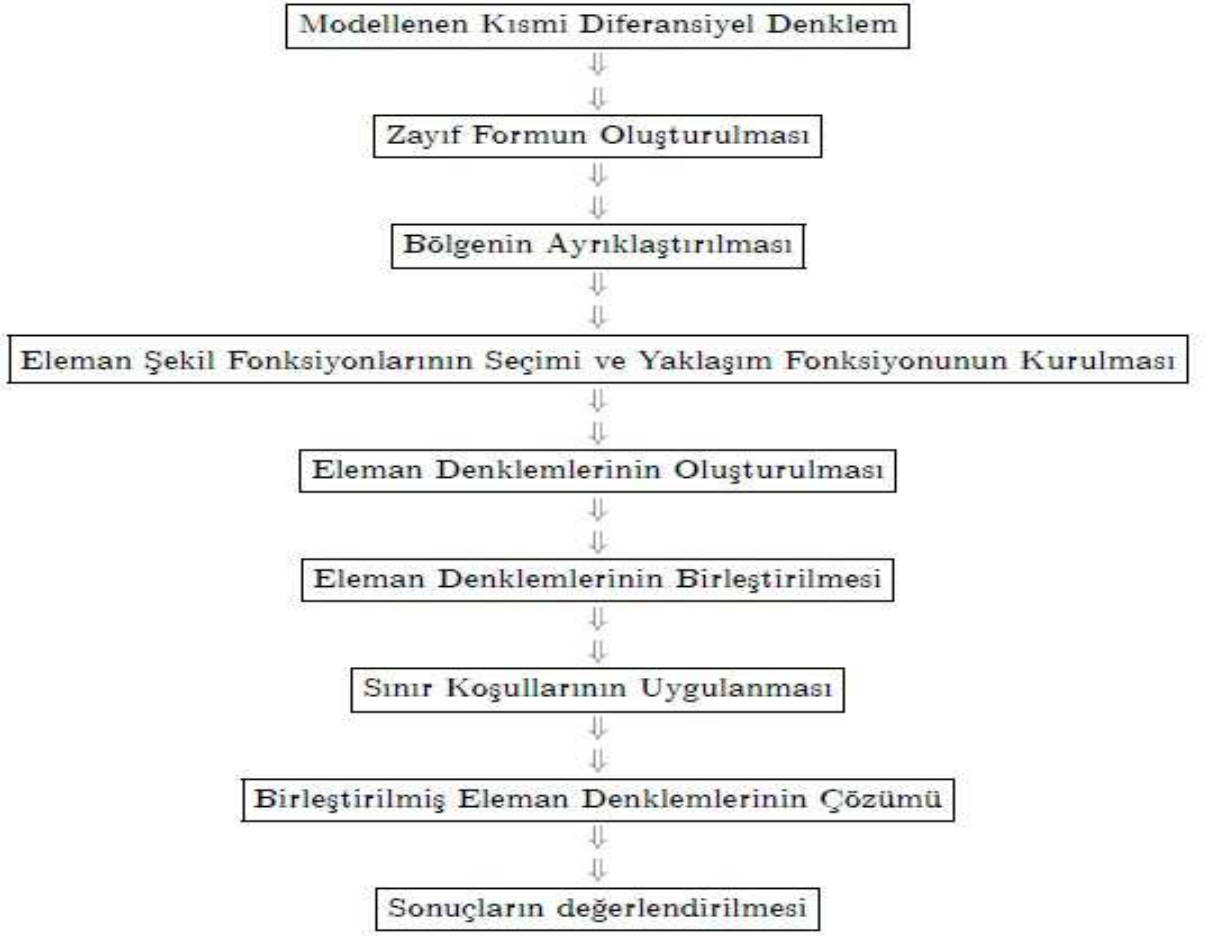
### **2.1.2 Sonlu Eleman Yöntemi Nasıl Çalışır?**

Sonlu eleman yöntemi, geometrisi karmaşık olan bölgelerdeki başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılan bir nümerik yöntemdir. Problemin çalışıldığı bölge kesişmeyen basit alt bölgelere ayrıştırılır. Bu alt bölgelerin her birine “sonlu eleman” adı verilir. Problemden bölgenin parçalanmasına “ayrıklaştırma”, elemanların kümesine ise “sonlu eleman meshleri” adı verilir [44]. Bölgenin küçük elemanlara bölünmesi karmaşık geometrilere, değişken malzeme özellikli problem bölgelerinin analiz edilmesine ve alt bölgelerde küçük yaklaşım hatalarına bağlı çözümlerin araştırılmasında avantaj sağlar. Ayrıklaştırılan bölgede her bir eleman üzerinde tam çözüm bir yaklaşım fonksiyonu ile temsil edilir. Bu yaklaşım fonksiyonu trigonometrik veya polinom fonksiyonlarının lineer birleşimi şeklindedir.

Sonlu eleman yönteminin iki önemli özelliği;

- Sonlu eleman yönteminde, basit yaklaşım fonksiyonları kullanılarak ve eleman sayısı artırılarak daha iyi hassasiyet sağlanır.
- Lokal olarak seçilen yaklaşım fonksiyonları, cebirsel denklem sistemine indirgenen problemin matrisinin seyrek matris olmasını sağlar [49].

Sonlu eleman yönteminin çalışma prensibi Şekil 2.2 de gösterildiği gibidir.



Şekil 2.2: Sonlu eleman yönteminin adımları

**Adım1: Zayıf formun oluşturulması** Zayıf form, probleme ait diferansiyel denklemi çözmek yerine bir integral özdeşliğini çözmektir. Zayıf form kullanılarak çözüm fonksiyonunun sağlaması gereken türevlenebilme şartları ve bağımlı değişkenler üzerindeki süreklilik gereksinimleri azaltılır. Böylece özellikle karmaşık geometrisi olan bölgelerde çalışırken daha kararlı ve yakınsak sonuçlar elde edilmesini sağlayan ayrıştırılmış denklem sistemleri elde edilir [50].

Bir diferansiyel denklemin zayıf formunu kurmak için şu adımlar izlenir;

- Diferansiyel denklemde bulunan her fonksiyon ağırlık (test) fonksiyonu olarak adlandırılan “ $W$ ” ile çarpılır,
- $W$  ile çarpılan diferansiyel denklem çalışılan bölge üzerinde integre edilir,
- Kısmi integrasyon uygulanarak türev mertebeleri minimuma indirgenir,
- Mümkün ise sınır koşulları türetilir [51].

Diferansiyel denklem üzerindeki türevlenebilme koşullarının zayıf form kurularak nasıl indirgendiğini  $u \in C^2$  ve  $f \in C^0$  olmak üzere, ikinci mertebeden bir boyutlu ve homojen olmayan  $u'' = f$  denklemi üzerinde açıklayalım. Önce  $u'' - f = 0$  denklemi  $W$  ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp integre edilirse;

$$\int_{\Omega} (Wu'' - Wf) d\Omega = 0$$

elde edilir. Buradan kısmi integrasyon uygulanması ile;

$$\int_{\Omega} (W'u' + Wf) d\Omega = Wu'|_{\Omega}$$

bulunur. Burada  $u, W \in C^1$  ve  $Wf \in L^2$  dir.

**2.Adım: Bölgenin Ayrıklaştırılması** Sonlu eleman yönteminin özelliklerinden biri çalışılan bölgeyi istenilen şekil ve büyüklüklerde sonlu elemanlara bölmektir. Tek kısıtlama elemanların üst üste gelmeyerek boşluk bırakmadan bölgenin tamamını kaplamasıdır. Burada elemanların ne kadar küçük seçileceği ve eleman sayısının yaklaşımı nasıl etkileyeceği dikkat edilmesi gereken unsurlardır [52].

Elemanlar zaman israfını engelleyecek kadar büyük ve hesaplama alanındaki değişimleri yansıtacak kadar küçük seçilmelidir. Gereksiz sayıda eleman kullanılması ile hesaplama süreci ve oluşan hatalar artar. Küçük elemanlar sonuçların hızla değiştiği

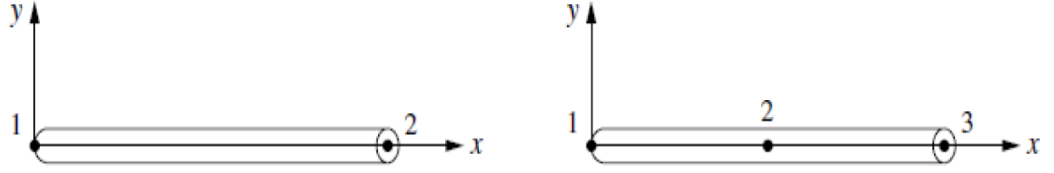
durumlarda, büyük elemanlar ise sonuçların nispeten sabit olduğu yerlerde kullanılır. Bölgenin geometrisi hesaplama hassasiyeti ve hesaplama yükü gibi birçok faktör yaklaşımı etkilemesine rağmen eleman seçimi için genellikle şöyle bir sınıflandırma yapılabilir [38]:

- Bir boyutlu elemanlar çubuk ve kiriş elemanlarından oluşur. Bunlar genellikle kafes yapılarını modellemek için kullanılır. Bu elemanlar lineer elemanlar olarak adlandırılır. Daha yüksek dereceden elemanları ise kuadratik, kübik, kuintik vb. elemanlar olarak adlandırılır (Şekil 2.3a).

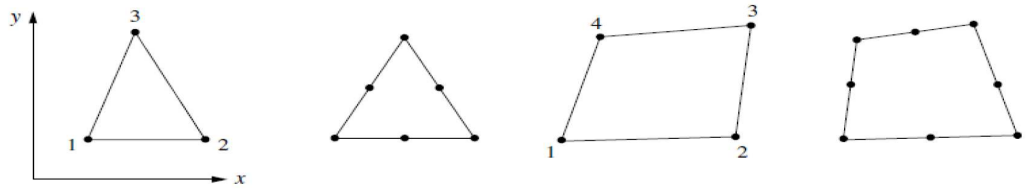
- İki boyutlu elemanlar üçgensel ve dörtgensel elemanlardır. Bunlar genellikle mühendislik problemlerini modellemek için kullanılır (Şekil 2.3b).

- Üç boyutlu elemanlar ise dörtyüzlüler ve altıyüzlülerdir. Bu elemanlar genellikle gerilme analizinde kullanılır(Şekil 2.3c).

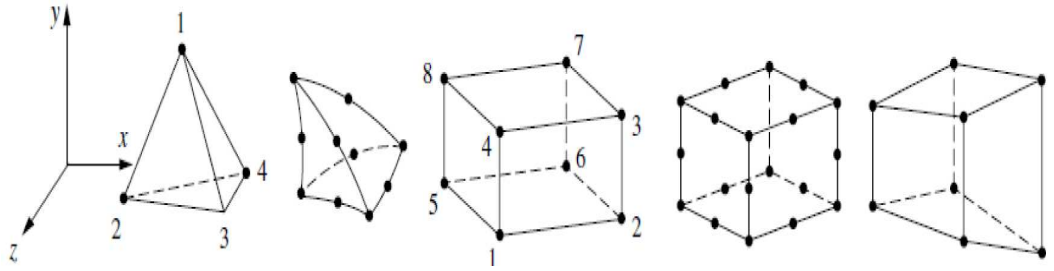
- Dönel elemanlar; üçgenlerin veya dörtgenlerin sabit bir eksen etrafında  $360^0$  dönmesi ile meydana gelir. Bunlar aksenal simetrisi olan geometrilerin modellenmesinde kullanılır (Şekil 2.3d).



(a) Lineer elemanlar



(b) Üçgensel, dörtgensel iki boyutlu elemanlar



(c) Üç boyutlu elemanlar



(d) Eksenel simetrik üçgensel ve dörtgensel elemanlar

Şekil 2.3: Eleman seçimi [38].

### 3.Adım: Eleman şekil fonksiyonlarının seçilmesi ve Yaklaşım fonksiyonun

**kurulması** Yaklaşım fonksiyonları interpolasyon fonksiyonlarının lineer birleşimi olarak oluşturulur. Farklı eleman tipleri için kendine özgü özellikleri olan farklı interpolasyon fonksiyonları kullanılır. Bu nedenle interpolasyon fonksiyonları “eleman şekil fonksiyonları” veya “baz fonksiyonları” olarak da adlandırılır.  $u(x)$  gibi bir tam çözüm için  $U_N(x)$  yaklaşım fonksiyonu aşağıdaki gibi

$$u(x) \simeq U_N(x) = \sum_j c_j \phi_j(x) \quad (2.1)$$

ifade edilir. Burada  $c_j$  bilinmeyen katsayılar ve  $\phi_j(x)$  ise şekil fonksiyonlarıdır. Her bir eleman üzerinde lokal olarak tanımlanan eleman şekil fonksiyonları ilgili eleman dışında sıfırdır. Genellikle eleman şekil fonksiyonları türev ve integral işlemlerinin kolay yapılması için polinom olarak tercih edilir. Yaklaşık çözümün yakınsaklığı şekil fonksiyonlarının seçimine dayanır. Genellikle yaklaşım fonksiyonunda bölgedeki mesh sayısının veya şekil fonksiyonlarının derecelerinin artırılması daha iyi bir yaklaşım sağlar [44]. Bununla birlikte yaklaşım fonksiyonlarının sağlaması gereken temel nicelikler aşağıda verilenlerdir;

**i) Yerel Destek:** Yerel destek özelliğinin temel fikri şekil fonksiyonları sadece bulunduğu düğüm noktasını etkiler ve bu elemanın dışında değeri sıfırdır. Bu özellik cebirsel denklem sistemine indirgenen denklemin katsayılar matrisinin seyrek matris olmasını sağlar. Bu nedenle yöntemde yerel destek özelliğine sahip olan parçalı polinom fonksiyonları kullanılır [53].

**ii) Linear Bağımsızlık:** Şekil fonksiyonlarının üst üste gelmemesi ve aralarında boşluk olmaması için bu fonksiyonlar lineer bağımsız seçilmelidir.

**iii) Tutarlılık:** Lax-Wendroff teoreminin sonlu eleman analogu olan tutarlılık; tamlık ve bağdaşma kısımlarından oluşur.

a) Tamlık:

Tamlık ifadesinin genel fikri yaklaşım fonksiyonu oluşturulurken en düşük dereceden en yüksek dereceye kadar olan hiçbir terimin ihmal edilmemesidir. Şöyle ki zayıf formda karşılaşılan en yüksek mertebeden türev mertebesi  $m$  olmak üzere kullanılan polinom fonksiyonları  $m$  dereceden küçük ve eşit olmalıdır. Bu şartı sağlayan şekil fonksiyonları kümesine  $m$ -tamlık denir. Örneğin, bir boyutlu problem göz önüne alınırsa  $m = 1$  için şekil fonksiyonu olarak  $x$  bağımlı değişkenini içeren bir polinom ve bir sabit bulunmalıdır. Eleman şekil fonksiyonu

$$\phi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

biçiminde olmalıdır. Bu şekilde  $\alpha$  sayısının her seçimi için yaklaşım fonksiyonu tam çözümü en iyi şekilde temsil eder.  $m = 2$  için ise eleman şekil fonksiyonu

$$\phi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

formunda seçilir. Sonlu eleman yönteminde bu özellik ile temel fonksiyonların yeterince yüksek dereceye kadar kullanılmasını sağlar. Örneğin ikinci mertebeden bir kısmi diferansiyel denklemin zayıf formunda denklemin birinci türevi bulunur. Bu nedenle en az lineer şekil fonksiyonları kullanılır [54].

b) Bağdaşma:

Bağdaşma birbirlerine düğüm noktaları ile bağlı olan elemanlar arasındaki sürekliliği sağlayan özelliktir ve “elemanlar arasında süreklilik” olarak isimlendirilir. Bu özellik

ile şekil fonksiyonları elemanların bağlantı noktalarında  $C^{m-1}$  mertebeden sürekli ve elemanlar içinde parçalı sürekli olmalıdır [54].

**4. Adım: Her eleman için eleman denklemlerinin oluşturulması** Elemanlar ve onların eleman şekil fonksiyonları seçildikten sonra her bir elemanın özelliklerini ifade eden cebirsel denklemlerin belirlenmesi sürecidir. Polinom olarak ifade edilen yaklaşım fonksiyonu diferansiyel denklemin zayıf formunda yerine yazılır ve her bir eleman için temel denklemler cebirsel denkleme dönüştürülür. Bir  $e$  elemanı için bu cebirsel denklem

$$K^e U_N^e = F^e$$

olarak ifade edilir. Burada  $K^e$ ,  $e$ -inci elemana ait katsayılar matrisi  $U_N^e$  bilinmeyenleri içeren vektör,  $F^e$  ise denklemin sağ tarafı yani kuvvet vektörüdür.

**5. Adım: Eleman denklemlerinin birleştirilmesi** Bu adımda eleman denklemleri birleştirilir ve genel denkleme ait cebirsel denklem oluşturulur. Genel denklem sisteminin özellikleri ayrıklaştırma işleminde kullanılan her eleman için elde edilen denklemlerin kombinasyonu olarak belirlenir. Her eleman için elde edilen denklemler ile sistemin tamamı için elde edilen denklemler aynı yapıdadır. Sistem daha çok düğüm noktasından oluştuğu için daha çok terim içerir. Yaklaşık çözümün değeri bitişik iki elemanın ortak düğüm noktasında aynıdır.

**6. Adım: Sınır koşullarının uygulanması** Bu adımda birleştirme işlemi ile elde edilen genel denklem sistemine sınır koşullarının uygulanması ve sınır koşullarının belirlenmesi üzerinde durulacaktır. Birçok problemde global katsayılar matrisi karesel ve simetriktir. Sınır koşulları uygulanmadan önce bu matris sistemi çoğunlukla

singülerdir ve determinantı sıfıra eşittir. Sınır koşulları uygulanarak singülerlik problemi ortadan kaldırılır [38].

Bu adımda sınır koşulları sınıflandırılabilir. Zayıf formda bulunan sınır terimleri yardımıyla problemin birincil ve ikincil değişkenleri belirlenir. Sınır terimi iki parçaya ayrılarak bu işlem gerçekleştirilir. Birinci parça ağırlık fonksiyonu ve onun türevlerini, ikinci parça ise bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin türevlerini içerir. Birinci parçadaki ağırlık fonksiyonu ve problemin bağımlı değişkeni aynı formda ise bu parça birincil değişken olarak adlandırılır. İkinci parça ise fiziksel niceliklerle ilgili olan ikincil değişkeni içerir. Birincil ve ikincil değişkenler tanımlandıktan sonra sınır koşulları belirlenir. Birincil değişken problemin sınırlarında değer alıyorsa temel, ikincil değişken sınırlarda değer alıyorsa doğal sınır koşulu adını alır [44]. İlgilenilen problemdeki en yüksek mertebeden türev  $2m$  olmak üzere, sınır koşulları şu şekilde de sınıflandırılabilir;

- 0 dan  $(m - 1)$  mertebeye kadar olan sınır koşulları temel,
- $m$  den  $(2m - 1)$  mertebeye kadar olan sınır koşulları doğal sınır koşulları olarak adlandırılır [55].

**7. Adım: Birleştirilmiş eleman denklemlerinin çözümü** Birleştirilen elemanlardan elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülerek düğüm noktalarındaki bilinmeyen değerler bulunur. Bu değerler elde edildikten sonra  $U_N(x)$  ile verilen yaklaşım fonksiyonunda kullanılarak sistemin düğüm noktalarında yaklaşık çözüme ulaşılır.

**8. Adım: Sonuçların değerlendirilmesi** Elde edilen sonuçlar tablo ve grafikler yardımıyla sunulur.

### 2.1.3 Sonlu Eleman Yönteminin Avantajları ve Dezavantajları

Sonlu eleman yönteminin avantajları şunlardır:

- Sonlu eleman yöntemi ısı transferi, gerilme analizi, manyetik alanlar, titreşim analizleri, dinamik, elektrostatik problemler, ısı problemleri gibi birçok farklı alandaki probleme uygulanabilir.
- Sonlu eleman yöntemi karmaşık geometrili birden fazla delik ve köşegenleri olan bölgelerde çalışılırken kolaylık sağlar. Çalışılan bölgenin geometrisi istenilen şekil ve boyutta düz veya kavisli elemanlar kullanılarak tam anlamıyla temsil edilir.
- Heterojen yapıya sahip sistemlerin çözümünde farklı özelliklere sahip elemanlar kullanılarak daha hassas hesaplamalar yapılabilir. Çünkü düğüm noktaları ile bağlı elemanlar aynı özelliklere sahip olmak zorunda değildir.
- Ana modeli oluşturulan sisteme sınır koşulları satır ve sütun işlemleri ile kolayca dahil edilir.
- Yöntem matematiksel olarak geliştirilebilir. Ana model oluşturulduktan sonra başlangıç ve sınır koşullarının değişmesi ile farklı problemler tek sistemde çözülebilir.

Dezavantajları;

- Yöntem, nümerik işlemler nedeniyle iç hatalar içerdiği için yaklaşık çözüm sunar.
- Programlama bilgisine ihtiyaç duyulur.
- Eleman boyutlarının çok küçük seçilmesi durumunda bilgisayar hafızası yetersiz kalacağından çözüm hassasiyeti kısıtlanır [44].

## 2.2 Galerkin Sonlu Eleman Yöntemi

Galerkin yöntemi yapı mekaniği, dinamik, akışkanlar mekaniği akustik ve mikrodalga teorisi gibi alanlarda ortaya çıkan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılır. Uzun yıllar boyunca geniş bir kullanım alanına sahip olan bu yöntem 1937 yılında Duncan'ın havacılık mühendisliğinin dinamiği konulu çalışmaları ile literatüre girdi ve günümüze kadar kullanılmaya devam edildi. Literatürde üç temel Galerkin yöntemi bulunur. Bunlar; Geleneksel Galerkin yöntemi, Spektral Galerkin Yöntemi ve Galerkin Sonlu Eleman Yöntemidir. Geleneksel ve Spektral Galerkin yöntemleri eleman şekil ve ağırlık fonksiyonlarının global sistemden seçilmesi ile kullanılır. Fakat, Galerkin Sonlu eleman yönteminde eleman şekil ve ağırlık fonksiyonları lokal sistemden seçilir [56]. Bu tezde, model problemlerin nümerik çözümleri Galerkin Sonlu Eleman yöntemi ile incelenecektir.

$L$  bir diferansiyel operatör olmak üzere

$$Lu = f \quad (2.2)$$

formunda bir diferansiyel denklem için yaklaşık çözüm araştırılırken yaklaşık çözüm (2.1) formunda bilinmeyen katsayılar ve eleman şekil fonksiyonları cinsinden ifade edilerek (2.2) denkleminde kullanılır. Genel olarak ağırlıklı kalan yöntemlerinde farklı  $W_i(x)$  ağırlık fonksiyonları ve  $\phi_j(x)$  eleman şekil fonksiyonları seçilir. Örneğin, kollokasyon yönteminde ağırlık fonksiyonu olarak Dirac-delta fonksiyonu kullanılır. Galerkin yönteminde ise ağırlık fonksiyonları ile eleman şekil fonksiyonları  $W_i(x) = \phi_j(x)$  olacak şekilde eşit olarak seçilir [57].

Sonlu eleman yönteminde bölge sonlu sayıda alt bölgelere ayrıştırıldığı için eleman şekil fonksiyonları her bir alt bölgede tanımlanır. Ağırlıklı kalan yönteminde ise tüm

bölge üzerinde şekil fonksiyonları kullanılır [34].

Galerkin sonlu eleman yönteminin basit bir uygulamasını

$$\begin{aligned} -u'' + u &= f & x \in (0, 1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

olarak verilen sınır değer problemini göz önüne alarak inceleyelim. Burada, (2.3) problemi için  $U_N$  fonksiyonunu yaklaşık çözüm olarak alalım. (2.3) ile verilen diferansiyel denklemdaki tüm terimleri  $W$  ağırlık fonksiyonu ile çarpılır ve bölge üzerinde integre edilirse denklemin ağırlıklı integral formu

$$\int_0^1 W (-u'' + u - f) dx = 0 \quad (2.4)$$

olarak elde edilir. (2.4) integral ifadesinde kısmi integrasyon uygulanması ile denklemin zayıf formu

$$\int_0^1 (W'u' + Wu - Wf) dx = [Wu']_0^1 \quad (2.5)$$

olarak elde edilir. Burada  $Wu'$  ifadesi sınır terimi olup birincil değişkendir.  $u(0) = 0$  ve  $u(1) = 0$  sınır koşulları ise temel sınır koşullarıdır. Tüm bölge üzerinde  $U_N$  yaklaşık çözümü şekil fonksiyonları ve bilinmeyen parametreler cinsinden

$$U_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) \quad (2.6)$$

olarak ifade edilir. Bölge,  $N$  sonlu elemana bölündükten sonra tipik bir  $[x_m, x_{m+1}]$  elemanı üzerinde problemin yaklaşık çözümü

$$U_N^e = \sum_j c_j^e \phi_j^e(x) \quad (2.7)$$

olarak yazılır. Tipik bir eleman üzerinde problemin zayıf formu

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} (W'u' + Wu - Wf) dx - [Wu']_{x_m}^{x_{m+1}} \quad (2.8)$$

olur. Galerkin yönteminde  $W$  ağırlık fonksiyonları eleman şekil fonksiyonları ile eşit seçilir ve (2.7) yaklaşık çözümü problemin (2.8) ile verilen zayıf formunda yazılırsa

$$\sum_j \int_{x_m}^{x_{m+1}} c_j (\phi'_i \phi'_j + \phi_i \phi_j - \phi_i f) dx = [\phi_i \phi'_j]_{x_m}^{x_{m+1}}$$

elde edilir. İntegrallerin hesaplanması ile elde edilen lineer denklem sistemi matris formunda;

$$[K] \{c_j\} = \{F\} \quad (2.9)$$

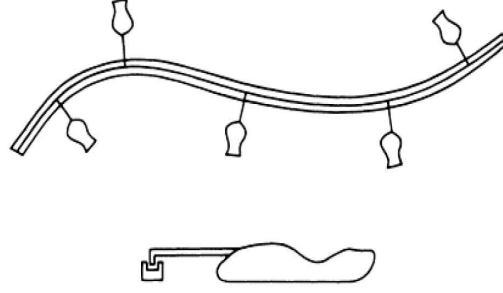
dir. Burada  $[K]$  cebirsel denklem sisteminin katsayılar matrisi,  $\{c_j\}$  bilinmeyenler vektörü,  $\{F\}$  ise homojen olmayan etki fonksiyonu ve sisteme dahil olan sınır terimleridir. (2.9) ile verilen denklem sisteminin çözülmesi ile  $c_j$  bilinmeyen parametreleri elde edilir ve (2.6) çözümünde yerine yazılarak ile  $U_N$  yaklaşık çözümüne ulaşılır. Yöntemde, eleman şekil fonksiyonları türev ve integral işlemlerinin kolay yapılması için genellikle trigonometrik veya polinom fonksiyonu olarak seçilir. Bu çalışmada, eleman şekil fonksiyonları olarak B-spline fonksiyonlar kullanılacaktır. Yukarıda ele alınan problem zamandan bağımsızdır. Fakat bu çalışmada zamana bağlı model problemler incelendi. Bu nedenle Galerkin sonlu eleman modeli oluşturulduktan sonra elde edilen diferansiyel denklem sistemleri dördüncü mertebeden Runge-Kutta (RK4) yöntemi ile çözüldü.

## 2.3 Spline Fonksiyonlar

Yaklaşım teorisinin temel yapısı bir fonksiyonu genelde bilgisayar ile kolayca hesaplanabilen daha basit fonksiyonlar yardımıyla ifade etmeye dayanır. Yaklaşım teorisinde fonksiyonun değerlerinin bilindiği varsayılır ve fonksiyona bir yaklaşım oluşturulur. Bir fonksiyona yaklaşım oluşturulurken dikkat edilmesi gereken iki durum vardır; Bunlardan ilki yaklaşım şartlarını sağlayan uygun fonksiyonlar kullanılması, diğeri ise uygun bir yöntem ve şema kullanılarak yaklaşık çözüme ulaşılmasıdır. Etkili bir yaklaşım uygun yaklaşım fonksiyonlarının seçilmesi ile mümkündür. Bu yaklaşım fonksiyonlarının sınıfı  $F$  ile temsil edilmek üzere en az şu özellikleri sağlar [58]:

- $F$  sınıfındaki fonksiyonlar düzgün (smooth) fonksiyon olmalıdır.
- Fonksiyonlar bilgisayarda kolayca depolanan, işlenen, türevleri ve integralleri kolayca hesaplanabilen fonksiyonlar olmalıdır.
- Keyfi fonksiyonlar seçerek daha iyi bir yaklaşım yapılabilmesi için  $F$  sınıfı yeterince geniş olmalıdır.

Bu kısımda yaklaşım teorisinin özel bir sınıfı olan “Spline fonksiyonlar” hakkında bilgi verilecektir. “Spline” kelimesi ahşap veya metal kıvrılabilir çita anlamına gelir. Uçak veya gemi dizaynı yapan mühendisler eğri yüzeyleri elde edebilmek için metal veya ahşap olan ince parçaları bükmeyi amaçladılar. Bu nedenle, parçaları Şekil 2.4 de verilen kurşun ağırlıklarla eğmeyi denediler. Kurşun ağırlıkları çizim yüzeyindeki belirlenmiş noktalara yerleştirdiler ve spline çubuğun bu noktalardan geçmesini denediler. Esnek olan tahta spline’lar kurşun ağırlıkların yerlerinin ve ağırlıklarının değiştirilmesi ile istenilen şekil elde ediliyordu. Böylece, gemiler ve tekneler bu şekilde inşa edildi.



Şekil 2.4: Mekanik Spline

Isaac Jacob Schoenberg [59], küçük esnemeler ile fiziksel spline şeklinin parçalı kübik polinomlar olacağını buldu ve matematiksel spline notasyonunun türetti. Böylece matematiksel model, tasarım ve ölçümler için kolaylık sağladı. İlerleyen yıllarda bilgisayarların geliştirilmesi ile özel programlarda spline fonksiyonlar kullanılmaya başlandı.

Matematiksel olarak spline fonksiyonlar, yüksek dereceden polinomlar yerine, alt bölgelerde daha düşük dereceden parçalı polinomlarla çalışma metodudur. Problemin tanımlandığı bölgede tam çözüm ya da yaklaşık çözümde kullanılan fonksiyonlar veya bu fonksiyonların çeşitli mertebeden türevleri bölgenin bazı noktalarında sürekli olmayabilir. Bu nedenle, düzgün parçalı polinomlar kullanarak daha etkili bir yaklaşım elde edilir.

Matematiksel olarak spline fonksiyonların tanımı aşağıdaki gibi verilebilir:

$[a, b]$  aralığı,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  olacak şekilde  $N$  eşit parçaya ayrıştırılsın.  $\{x_i\}_{i=0}^N$  düğüm noktalarını simgelemek üzere,  $[x_0, x_N]$  bölgesinde  $m$ inci mertebeden bir  $s(x)$  spline fonksiyonu

$$s(x) = \sum_{i=1}^N p_i(x)$$

olarak tanımlanır. Burada,  $p_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  olmak üzere her bir  $[x_i, x_{i+1}]$  aralığında

$m$ -inci dereceden polinom,  $p(x)$  polinomunun kendisi ve  $(m - 1)$ -inci mertebeden türevleri  $[x_0, x_N]$  bölgesinde süreklidir [60].

Sonuç olarak, spline fonksiyonlar  $m$ -inci dereceden parçalı polinomlar ile tanımlanır. Bu parçalı polinomlar  $(m - 1)$ -inci mertebeden sürekli türevlere sahiptir ve böylece  $(m - 1)$ -inci mertebeden türev ile süreklilik şartlarının sağlandığı noktalarda bağlanırlar [61].

Spline fonksiyonlar aşağıdaki bazı özelliklere sahiptir:

- Spline fonksiyonlar uygun bazlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
- Spline fonksiyonlar yeterince mertebeden türevlere sahip sürekli fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar türev ve integralleri kolay hesaplanan, bu işlemler sonucunda yine bir spline elde edilen fonksiyonlardır.

- Bilgisayarda hesaplanmaya ve depolanmaya uygun fonksiyonlardır.
- Düşük dereceli spline fonksiyonlar polinomlardaki gibi keskin salınım sergilemezler.

- Spline fonksiyonlar yardımıyla sadece fonksiyonlara değil aynı zamanda onların türevlerine de ulaşılabilir [58, 62].

Teknolojinin gelişmesi ile spline fonksiyonlar animasyonlar, tıbbi görüntülemeler, gemi ve uçak gövdelerinin modellenmesi gibi birçok alanda kullanılır.

### 2.3.1 B-spline Fonksiyonlar

B-spline fonksiyonlar parçalı polinom fonksiyonlardır. Her spline fonksiyon kendisi ile aynı derecedeki B-spline fonksiyonların lineer kombinasyonu olarak yazılır. Bir B-spline fonksiyon tanımlandığı aralıktaki tüm değerler için sıfırdan farklı olan bir spline fonksiyondur.

Şimdi B-spline fonksiyonların bazı özelliklerine değinip nasıl elde edileceği üzerinde duralım;  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  aralığının bir parçalanışı  $\Delta_n = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ve  $\{x_i\}_{i=0}^n$  ise parçalanışın düğüm noktalarını temsil etsin.  $\Delta_n$  parçalanışının her bir  $I = [x_i, x_{i+1}]$  alt aralığında tanımlanan  $k$ \_uncü dereceden polinomların kümesini ise  $S_k(\Delta_n)$  ile gösterelim. Düğüm noktaları arasındaki mesafe eşit olarak seçilirse  $\Delta_n$  parçalanışı düzenli, aksi takdirde düzensiz olarak adlandırılır. Bununla birlikte düğüm noktalarının kümesi  $i = 1, 2, 3, \dots$  için  $h = \frac{b-a}{n}$  ve  $x_i = x_0 + ih$  ile istenildiği kadar genişletilebilir.  $i \in \mathbb{Z}$  olmak üzere  $k$ \_uncü dereceden bir B-spline fonksiyonu  $B_i^k(x)$  ile belirtilirse B-spline fonksiyonlar için aşağıdaki özellikler verilebilir [63]:

- $B_i^k(x)$  fonksiyonu,  $[x_i, x_{i+k+1}]$  aralığında sıfırdan farklı bir polinomdur.
- $[x_i, x_{i+k+1})$  aralığında bulunan bütün  $p, k$  ve  $x$  değerleri için  $B_i^k(x) \geq 0$  dır.
- Herhangi bir  $[x_i, x_{i+1}]$  aralığını derecesi  $k$  olan sıfırdan farklı en fazla  $(k+1)$  baz fonksiyonu gerer.

B-spline baz fonksiyonları ilk olarak Cox ve Boor [64] tarafından

$$B_i^k(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x) \quad (2.10)$$

bağıntısı ile hesaplanmıştır. Bu bağıntı ile  $(k-1)$ \_uncü dereceden iki B-spline baz fonksiyonunun lineer kombinasyonu ile  $k$ \_uncü dereceden bir B-spline fonksiyonu kurulur.

**Sıfıncı dereceden B-spline baz fonksiyonu** En temel B-spline baz fonksiyonu olan sıfıncı dereceden B-spline baz fonksiyonu adım fonksiyonu formundadır ve

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir. Bu fonksiyon  $[x_i, x_{i+1})$  yarı açık aralığı dışındaki tüm noktalarda sıfırdır.  $k$ 'ya bağlı Cox-de Boor bağıntısı ile yüksek dereceli B-spline baz fonksiyonları

elde edilebilir. B-spline baz fonksiyonlarının kullanışlı bir formu ve elde edilişi Prenter [65] ve Rashidinia [63]'nin çalışmalarında mevcuttur. Bu tezde, B-spline baz fonksiyonlarının bu formları kullanılacaktır.

**Lineer B-spline baz fonksiyonu**  $[a, b]$  aralığının düzgün parçalanışı

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$$

ve  $x_m$  düğüm noktaları olmak üzere,  $h = x_{m+1} - x_m$  seçilsin.  $x_m$  düğüm noktalarında,  $L_m(x)$  lineer B-spline fonksiyonları ve  $m = 0(1)N$  olmak üzere

$$L_m(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} (x_{m+1} - x) - 2(x_m - x), & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+1} - x), & [x_m, x_{m+1}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

dır. Lineer B-spline fonksiyonları  $[x_m, x_{m+1})$  ve  $[x_{m+1}, x_{m+2})$  yarı aralıkları dışında sıfırdır. Her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı  $L_m(x)$  ve  $L_{m+1}(x)$  gibi iki şekil fonksiyonu ile örtülür.  $0 \leq \xi \leq h$  için  $\xi = x - x_m$  lokal dönüşümü ile bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı  $[0, 1]$  aralığına dönüşür. Böylece lineer B-spline fonksiyonlar  $[0, 1]$  aralığında  $\xi$  cinsinden

$$\begin{aligned} L_m &= 1 - \frac{\xi}{h} \\ L_{m+1} &= \frac{\xi}{h} \end{aligned}$$

dır [62].

**Kuadratik B-spline baz fonksiyonları**  $[a, b]$  aralığının düzgün parçalanması

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$$

ve  $x_m$  düğüm noktalarını temsil etmek üzere  $h = x_{m+1} - x_m$  seçilsin.  $m = -1(1)N$  olmak üzere  $\phi_m(x)$  kuadratik B-spline fonksiyonları

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 + 3(x_m - x)^2, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^2, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.11)$$

olarak tanımlanır. Kuadratik B-spline fonksiyonları ve birinci mertebeden türevleri  $[x_{m-1}, x_{m+2}]$  aralığı dışında sıfırdır. Her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı  $\phi_{m-1}(x)$ ,  $\phi_m(x)$ ,  $\phi_{m+1}(x)$  şekil fonksiyonları tarafından örtülür. Bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı  $0 \leq \xi \leq h$  için  $\xi = x - x_m$  lokal dönüşümü ile  $[0, 1]$  aralığına dönüşür. Böylece kuadratik B-spline fonksiyonlar  $[0, 1]$  aralığında  $\xi$  cinsinden;

$$\begin{aligned} \phi_{m-1} &= \frac{1}{h^2} (1 - \xi)^2 \\ \phi_m &= \frac{1}{h^2} (h^2 + 2h\xi - 2\xi^2) \\ \phi_{m+1} &= \frac{1}{h^2} \xi^2 \end{aligned}$$

dır [62].

**Kübik B-spline baz fonksiyonları**  $[a, b]$  aralığının düzgün parçalanması

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$$

ve  $x_m$  düğüm noktalarını temsil etmek üzere  $h = x_{m+1} - x_m$  seçilsin.  $m = -1 (1) N + 1$  olmak üzere  $\Phi_m(x)$  kübik B-spline fonksiyonları

$$\Phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.12)$$

dır. Kübik B-spline fonksiyonları ile birinci ve ikinci mertebeden türevleri  $[x_{m-2}, x_{m+2}]$  aralığı dışında sıfırdır. Her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı  $\Phi_{m-1}(x)$ ,  $\Phi_m(x)$ ,  $\Phi_{m+1}(x)$  ve  $\Phi_{m+2}(x)$  şekil fonksiyonları tarafından örtülür. Bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı  $0 \leq \xi \leq h$  için  $\xi = x - x_m$  lokal dönüşümü ile  $[0, 1]$  aralığına dönüşür. Böylece kübik B-spline fonksiyonlar  $[0, 1]$  aralığında  $\xi$  cinsinden

$$\begin{aligned}\Phi_{m-1} &= \frac{1}{h^3} (h - \xi)^3 \\ \Phi_m &= \frac{1}{h^3} (h^3 + 3h^2(h - \xi) + 3h(h - \xi)^2 - 3(h - \xi)^3) \\ \Phi_{m+1} &= \frac{1}{h^3} (h^3 + 3h^2\xi + 3h\xi^2 - 3\xi^3) \\ \Phi_{m+2} &= \frac{1}{h^3} \xi^3\end{aligned}$$

dır [62].

## 2.4 Runge-Kutta Yöntemi

Runge-Kutta yöntemleri  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  başlangıç değer probleminin nümerik çözümlerinin elde edilmesinde kullanılır [66, 67]. Runge-Kutta yöntemleri Euler yönteminin genelleştirilmiş halidir. Aynı adım uzunluğu için Euler yöntemine göre daha doğru sonuçlar verir. Fakat Runge-Kutta yöntemleri Euler yöntemine göre daha çok hesaplama gerektirdiğinden Runge-Kutta yöntemlerini kullanmak daha zordur. Klasik dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım;  $y$  fonksiyonunun  $x_{i+1}$  noktasındaki bilinmeyen  $y_{i+1}$  değeri ve bir  $x_i$  noktasındaki bilinen  $y_i$  değeri kullanılarak dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + h/2, y_i + k_1/2) \\
k_3 &= f(x_i + h/2, y_i + k_2/2) \\
k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3)
\end{aligned}$$

katsayıları ve

$$y_{i+1} = y_i + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

bağıntısı ile elde edilir.

Şimdi,  $y'' = f(x, y, y')$  formunda ve  $y(x_0) = a$  ve  $y'(x_0) = b$  başlangıç koşulları ile verilen yüksek mertebeden diferansiyel denklemi göz önüne alalım. Bu durumda,  $u(x)$  yardımcı değişkeni ile  $y'(x) = u(x)$  ayrıştırması yapılarak denklem

$$\begin{aligned}
y' &= f_1(x, y, u) \\
u' &= f_2(x, y, u)
\end{aligned}$$

şeklinde  $y(x_0) = a$  ve  $u(x_0) = b$  başlangıç koşulları ile verilen birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemine indirgenir ve yöntem benzer şekilde uygulanırsa denklem sisteminin  $y_{i+1}$  ve  $u_{i+1}$  bilinmeyen değerleri  $y_i$  ve  $u_i$  bilinen değerleri yardımıyla dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
k_1 &= f_1(x_i, y_i, u_i) \\
l_1 &= f_2(x_i, y_i, u_i) \\
k_2 &= f_1(x_i + h/2, y_i + k_1/2, u_i + l_1/2) \\
l_2 &= f_2(x_i + h/2, y_i + k_1/2, u_i + l_1/2)
\end{aligned}$$

$$k_3 = f_1(x_i + h/2, y_i + k_2/2, u_i + l_2/2)$$

$$l_3 = f_2(x_i + h/2, y_i + k_2/2, u_i + l_2/2)$$

$$k_4 = f_1(x_i + h, y_i + k_3, u_i + l_3)$$

$$l_4 = f_2(x_i + h, y_i + k_3, u_i + l_3)$$

katsayıları ve

$$y_{i+1} = y_i + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

$$u_{i+1} = u_i + h(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)/6$$

bağıntıları ile bulunur [68].

### 2.4.1 Kararlılık Analizi

Ayrıklaştırılan diferansiyel denklemler için kurulan nümerik algoritmalar nümerik olarak kararlı olmalıdır. Bazı algoritmalarda nümerik çözüm zamanın ilerlemesi ile yuvarlama hatalarının artması veya başlangıç verisindeki küçük bir kararsızlık ile tam çözümden uzaklaşır. Hesaplamalardaki nümerik hataların artmadığını ispatlamak için nümerik kararlılık analizi yapılır.

Bu çalışmada Galerkin sonlu eleman modeli oluşturularak elde edilen şemalar dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile çözüldü. Bu nedenle Runge-Kutta yönteminin kararlık analizinin nasıl yapılacağı üzerinde durulacaktır. Şimdi Runge-Kutta yöntemi uygulanan lineer diferansiyel denklem sistemlerin kararlılık analizini ele alalım.

Zamana bağlı birinci mertebeden başlangıç değer problemi

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad t_0 \leq t \leq T \quad (2.13)$$

olarak verilsin. Burada

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix},$$

$$f(t, y) = \begin{bmatrix} f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_N) \\ f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_N) \\ \vdots \\ f_N(t, y_1, y_2, \dots, y_N) \end{bmatrix},$$

ve

$$y_0 = \begin{bmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \\ \vdots \\ y_{N,0} \end{bmatrix}$$

dır.  $f$  fonksiyonunun kısmi türevleri  $j = 1, 2, \dots, N$  için  $\frac{\partial f_i}{\partial y_j} = a_{ij}$  olmak üzere  $A = [a_{ij}]$ ,  $n \times n$  şeklinde bir matris olsun. Bu durumda (2.13) sistemi

$$\frac{dy}{dt} = Ay \tag{2.14}$$

olarak ifade edilir [69].

Diferansiyel denklem sisteminin zaman içindeki davranışı  $A$  matrisinin özdeğerlerine bağlıdır. Sistemin kararlılığı için  $A$  matrisinin özdeğerlerinin belirli koşulları sağlaması gerekir. Kararlılık analizi için Jain [69] tarafından yapılan “ $\lambda$  negatif reel kısmımlı kompleks bir sabit olmak üzere  $y' = \lambda y$  diferansiyel denklem sistemine tek adımlı nümerik yöntemlerden biri uygulanırsa  $|y_{i+1}/y_i| \leq 1$  ile belirlenen kompleks düzlemdeki bölge kararlılık bölgesi olarak adlandırılır.”tanımı göz önüne alalım.  $A$  matrisinin özdeğerleri  $\lambda_j$  olmak üzere özdeğer problemi

$$Ay = \lambda y \tag{2.15}$$

formundadır. (2.14) ile verilen sistemde (2.15) eşitliği kullanılır ve bu eşitlik (2.13) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\frac{dy}{dt} = Ay = \lambda y = f(t, \lambda t) \quad (2.16)$$

elde edilir. Daha sonra, (2.16) ile verilen denklem sistemine tek adımlı yöntemlerden biri olan dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi uygulanırsa  $j = 1, 2, \dots, N$  için,

$$k_1 = hf(t_i, y_i) = h\lambda y_i$$

$$k_2 = hf(t_i + h/2, y_i + k_1/2) = h\lambda(y_i + k_1/2) = h\lambda(y_i + h\lambda y_i/2)$$

$$k_3 = hf(t_i + h/2, y_i + k_2/2) = h\lambda(y_i + k_2/2) = h\lambda(y_i + (h\lambda/2)(y_i + h\lambda y_i/2))$$

$$k_4 = hf(t_i + h, y_i + k_3) = h\lambda(y_i + k_3) = h\lambda(y_i + h\lambda(y_i + (h\lambda/2)(y_i + h\lambda y_i/2)))$$

bağıntıları

$$y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) / 6$$

formunda yazılırsa,

$$y_{i+1} = y_i + (6h\lambda + 3(h\lambda)^2 + (h\lambda)^3 + (h\lambda)^4 / 4) / 6$$

olmak üzere

$$y_{i+1} = y_i \left( 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{6} + \frac{(h\lambda)^4}{24} \right)$$

elde edilir. Burada  $q(h\lambda) = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{6} + \frac{(h\lambda)^4}{24}$  ise

$$\frac{y_{i+1}}{y_i} = q(h\lambda)$$

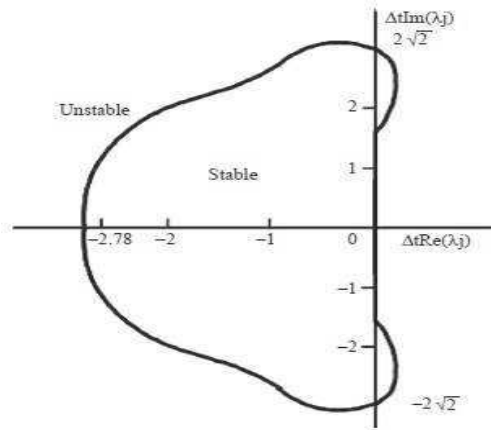
bulunur [70].

Yukarıda verilen tanım gereğince dördüncü mertebeden Runge-Kutta yönteminin kararlı olması için  $\lambda_j$  özdeğerleri

i) Bütün özdeğerler sadece reel ise  $-2.78 < h\lambda_j < 0$ .

ii) Bütün özdeğerler sadece sanal ise  $0 < |h\lambda_j| < 2\sqrt{2}$ .

iii) Özdeğerler reel ve sanal bileşenlerden oluşan kompleks bir yapıda ise  $h\lambda_j$  Şekil 2.5 ile verilen bölge içerisinde bulunmalıdır. Eğer kompleks özdeğerler varsa, özdeğerlerin reel kısımlarının küçük pozitif sayılar olabileceği toleransi vardır [69].



Şekil 2.5: Dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi için kararlılık bölgesi [69]

Lineer olmayan denklemlerin kararlılık analizindeki problem  $\frac{dy}{dt} = Ay$  formunda bulunan  $A$  katsayılar matrisinin lineer olmayan sistemden elde edilememesidir. Bu problem sistemin bir denge noktası civarında lineerleştirilmesi ile giderilir. Lineer olmayan sistemler denge civarında lineer sistemler gibi davranırlar [71].

Diferansiyel denklemler için denge noktası Brown [71]'in çalışmasında sınıflandırılmıştır. Çalışmada özdeğerler için verilen sınırlar Şekil 2.5'de verilen bölge ile uyum içerisindedir.

### 3. BOUSSINESQ TİPİ DENKLEMLER

Russell'in soliter dalgaları keşfi ile zaman içinde dağılmayan su dalgalarının varlığını kabul eden matematiksel teori kuruldu. 1870 li yıllarda Fransız matematikçi ve fizikçi Joseph Boussinesq [72], kanal ve nehirlerdeki suyun hareketi ile ilgili matematiksel analizler yapıyordu. Yaptığı analizler sonucunda dalganın genliğinin suyun derinliğinden daha küçük olduğunu kabul ederek dalgaların yayılımını tanımlayan Boussinesq denklemini elde etti. Bu denklem plazmadaki iyon ses dalgaları, plazmada manyetohidrodinamik dalgalar, elastik çubuklarda boylamsal yayılım dalgaları ve likit-gaz köpük karışımlarında bastırılmış dalgalar gibi birçok alanda uygulama alanına sahip olan ve bu dalgaların yayılımını modelleyen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerden biridir [73].

Tezin bu bölümünde göz önüne alınacak olan Boussinesq tipi denklem

$$u_{tt} = u_{xx} + qu_{xxxx} + (u^2)_{xx} \quad x \in \Omega, t > 0 \quad (3.1)$$

formundadır. Burada  $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  olmak üzere  $u = u(x, t)$  yeterince türevlenebilir bir fonksiyon ve  $q$  bir reel sabittir. (3.1) ile verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemi  $t \geq 0$  için  $u(x, 0)$  ve  $u_t(x, 0)$  başlangıç koşulları ile ele alınır. Literatürde Boussinesq denklemi (Bq),  $q = -1$  için “iyi” veya “iyi durumlu” Boussinesq Denklemi (GBq) ve  $q = 1$  için ise “kötü” veya “kötü durumlu” Boussinesq Denklemi (BBq) olarak ifade edilir [74]. BBq denklemi sığ sulardaki küçük genlikli dalgaların iki boyutlu akışkanlığını tanımlamak için kullanılır. Ayrıca, anharmonik kafeslerin termal iletkenliğinin sınırlılığını gösteren Fermi-Pasta-Ulam probleminin

sonraki çalışmalarında gözlenir [75]. BBq denkleminin  $N$ -soliton çözümleri Hirota [76]'nın çalışmasında mevcuttur. Bq denkleminin ürettiği soliter dalgaların etkileşimden sonra şekillerini ve hızlarını koruduklarını ve denklemin tamamen integrallenebilir olduğunu gösterir. Zakharov [77]'in çalışmasında BBq denkleminin ters saçılma yöntemi ile çözülmesi için gerekli olan operatör bulunur. BBq denklemi Cauchy problemini sağlamaz,  $x$  ekseninde yeterince küçük grid seçimleri kullanılarak bilgisayar yardımıyla çözümleri elde edilemez [78, 79].

Bir çok araştırmacı Boussinesq denkleminin nümerik olarak kararsız davranışı ile baş edebilmek için denklem üzerinde çeşitli çalışmalar yaptılar. Fakat daha sonra Boussinesq denkleminin iyi durumda diğer modellerinin de olabileceğini keşfettiler. Bunlardan biri (3.1) denkleminde  $q = -1$  alınması ile elde edilen Good Boussinesq denklemidir. Denklem, yer çekimi etkisi altında uzun su dalgalarının sığ sularda yayılımını tanımlar. Literatürde iyi ve kötü durumda Boussinesq denklemleri ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır. Bunlardan bazıları; Manoranjan [80], GBq denkleminin Petrov-Galerkin sonlu eleman yöntemi uyguladı. Yöntemde, ağırlık fonksiyonu olarak kübik B-spline bazlar ve eleman şekil fonksiyonu olarak ise lineer B-spline bazlar kullandı. Böylece başlangıç ve sınır koşulları ile verilen denklemi adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürdü. Çalışmasında ikinci mertebeden terimler için merkezi fark yaklaşımı kullanarak predictor- corrector şeması geliştirdi. Nümerik çalışma olarak soliton etkileşimi ve dalga ayrılması problemlerini ele aldı. Daha sonra Manoranjan vd. [81], GBq denklemi için soliter dalga etkileşimini incelediler. Bu çalışmalarında, soliter dalgaların üç temel özelliğini vurguladılar. Bunlar; soliter dalgaların ancak belirli bir hız aralığında mevcut oldukları etkileşimin soliter dalgaların doğasında olduğu ve soliter dalgaların birleşmesinin ve ayrılmasının mümkün olduğudur. Ayrıca

Gbq denklemi tarafından üretilen küçük genlikli soliter dalgaların şekillerinde ve hızlarında herhangi bir değişiklik olmadan etkileşimden çıktıkları, büyük genlikli soliter dalgaların ise etkileşimden sonra anti-soliter dalgaya dönüştüğü sonucuna vardılar. Ortega ve Sema [82], GBq denkleminin nümerik integrasyonu için sonlu fark yöntemi kullandılar. Yöntemin lineer olmayan kararlılığını ve yakınsaklığını araştırmak için açık ve kapalı sonlu fark şemaları geliştirdiler. Bu şemaları soliter dalgaların etkileşimi ve integrasyonunu analiz etmek için kullandılar. Yöntemlerinin kararlılığını ise analitik bir çerçevede içerisinde inceleyerek açık yöntem için kararlılık sınırını  $k < 0.5h^2$  olarak elde ettiler. Ayrıca, açık yöntemin kapalı yöntemden daha etkili olduğu sonucuna vardılar. Pani ve Saranga [83], Faedo-Galerkin yöntemini kullanarak GBq denkleminin  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ ,  $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$ ,  $u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0$  sınır koşulları ile zayıf çözümünün varlığı, tekliği ve düzenliliği ile ilgili sonuçlar elde ettiler. Daripa ve Hua [84], filtreleme ve düzenleme tekniklerini kullanarak BBq denklemi için nümerik çalışmalar yaptı. Zoheiry [85], Gbq denklemi için lineerleştirme tekniğine dayanan kapalı sonlu fark şeması oluşturdu. Bu nümerik şemanın şartsız kararlı olduğunu ise von Neumann kararlılık analizi ile gösterdi. Bu çalışmasında elde ettiği nümerik şema yardımıyla dalga ayrılması ve çözüm patlaması gibi problemlerin bilgisayar simülasyonunu yaptı. Uygun genlik değerleri için solitonların etkileşimden sonra şekillerinde ve hızlarında değişim olmadığını ancak dalgaların genlikleri yeterince büyük ise etkileşimin çözümün patlaması ile sonuçlandığını gösterdi. Wazwaz [86], Boussinesq denklemine Adomian ayrıştırma yöntemi uyguladı. Böylece, modifiye edilmiş bir şema ile periyodik ve soliton çözümlerini elde etti. Ismail ve Bratsos [87], GBq ve BBq denklemlerinde zamana ve konuma göre kısmi türevler için merkezi fark yaklaşımları yazarak üç zaman seviyeli sonlu fark şeması elde ettiler. Bu şema ile

oluşan lineer olmayan sistemin çözümü için Predictor-Corrector yöntemi kullandılar. Sonlu fark şemalarının kararlılık analizini ise von Neumann kararlılık analizi ile yaptılar ve her iki denklem için dalga hareketi ve etkileşim problemlerini incelediler. Bratsos vd. [88], bir boyutlu Boussinesq denklemi için parametrik sonlu fark şeması ile üç zaman seviyeli sonlu fark şeması oluşturdular. Lineerleştirmeler kullanarak iki farklı şema geliştirdiler. Çalışmalarında yöntemin kararlılığına değinerek GBq ve BBq denklemleri için dalga hareketi ve etkileşim problemlerini incelediler. Bratsos [74], BBq ve Gbq denklemleri için sonlu fark formülasyonunu kullandı ve denklemleri birinci mertebeden lineer olmayan başlangıç değer problemine dönüştürdü. Çalışmasında iki farklı metod tasarladı. Birincisinde yedi noktalı ve üç zaman seviyeli açık şema, ikincisinde onbeş noktalı üç zaman seviyeli kapalı şema elde etti. Elde ettiği lineer olmayan cebirsel sistemleri, lineerleştirmeler yaparak Gauss-Seidel yöntemi ile çözdü. Ayrıca, nümerik şemaların kararlılık, yakınsaklık ve lokal kesme hatalarının analizini yaptı. Daha sonra [89] çalışmasında GBq ve BBq denklemleri için Predictor-Corrector ve modifiye edilmiş Predictor-Corrector şemaları oluşturdu. Elde ettiği her iki şema [74] 'da verilen kapalı ve açık yöntemlere dayanıyordu. BBq ve GBq denklemlerinin her ikisi için elde ettiği şemaların etkinliğini dalga hareketi problemi ile test etti. Ayrıca, Bratsos [90] Gbq denklemine üçüncü zaman seviyeli ve üçüncü mertebeden rasyonel yaklaşımları kullanarak sonlu fark yöntemi uyguladı. Elde ettiği lineer olmayan sistemi Predictor-Corrector ve modifiye edilmiş Predictor-Corrector yöntemleri ile çözdü. Şemanın kararlılık analizini von Neumann kararlılık analizi ile yaptı ve çalışmasında oluşturduğu sonlu fark şemasını kullanarak dalga hareketi ve dalga etkileşimi problemlerini inceledi. Al Khaled ve Nusier [91] referanslı çalışmalarında temeli sinüs fonksiyonlarına dayanan Galerkin interpolasyon yöntemi ve Adomian ayrıştırma

yöntemi kullanarak Boussinesq denkleminin nümerik çözümlerini elde ettiler. Bulut [92], başlangıç ve sınır koşulları ile verilen GBq denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için denkleme Homotopi Perturbasyon yöntemi (HPM), Varyasyonel İterasyon yöntemi (VIM) ve Adomian Ayrışım yöntemi (ADM) olmak üzere üç farklı yöntem uyguladı. Çalışmasında her üç yöntem ile elde edilen sonuçların uyum içerisinde olduğunu fakat HPM yöntemi ile diğer yöntemlere göre daha iyi sonuçlar elde edildiğini belirtti. Dehghan ve Salehi [93], GBq ve BBq denklemlerinin nümerik çözümlerini elde etmek için ağırsız analog denklem yöntemi ile sınır düğüm yöntemini birleştirdiler. İnterpolasyon fonksiyonları olarak ise radyal baz fonksiyonları kullanarak elde ettikleri lineer olmayan sistemi Predictor-Corrector yöntemi ile çözdüler. Her iki denklem için de dalga hareketi ve etkileşim problemlerini çalıştılar. Siddiqi ve Arshed [94], kuintik B-spline bazlar kullanarak Gbq denklemine kollokasyon sonlu eleman yöntemini uyguladılar ve von Neumann kararlılık analizi ile şemanın şartsız kararlı olduğu sonucuna vardılar. Ismail ve Mosally [95], GBq denklemini bir ayrıştırma tekniği kullanarak birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemine dönüştürdüler. Daha sonra bu sistem için dördüncü mertebeden sonlu fark formülü kullanarak kapalı şema elde ettiler. Bu şemanın şartsız kararlı oluşunu von Neumann kararlılık analizi yardımıyla gösterdiler ve elde edilen lineer olmayan denklem sisteminin nümerik çözümlerini Newton yöntemi yardımıyla buldular. Nümerik örneklerde dalga hareketi ve dalga etkileşimini çalıştılar. Dalga etkileşimi problemi ile yeterince küçük genlikli solitonların etkileşimi tamamladıkları, genlikleri belirli bir limitin üstünde olduğunda etkileşimin çözümün patlaması olayı sergilediği sonucuna ulaştılar. Yine bu çalışmada aynı yöne doğru hareket eden dalgaların etkileşimi probleminde  $A \leq 1.15$  genlik seçimi için çözüm patlamasının gerçekleşmediği sonucuna vardılar.

### 3.1 Boussinesq Tipi Denklemler için Galerkin Sonlu Eleman Modeli

Bu kısımda

$$u_{tt} = u_{xx} + qu_{xxxx} + (u^2)_{xx} \quad (3.2)$$

ile verilen Boussinesq denklemi

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad x \in [a, b] \quad (3.3)$$

başlangıç koşulları ve

$$\begin{aligned} u(a, t) = u(b, t) &= 0 \\ u_x(a, t) = u_x(b, t) &= 0 \end{aligned} \quad t \in [0, T] \quad (3.4)$$

sınır koşulları ile ele alındı. Burada  $f(x)$  ve  $g(x)$  bilinen fonksiyonlar olmak üzere  $u = u(x, t)$  yeterince türevlenebilir bir fonksiyondur. Alt indis olarak belirtilen  $x$  ve  $t$  değişkenleri ise sırasıyla konuma ve zamana göre kısmi türevi simgelemektedir.  $A$ , (3.2) ile verilen Bq denkleminin ürettiği soliter dalganın genliği,  $c$  hızı ve  $\tilde{x}_0$  ise dalganın başlangıçtaki konumu,  $\tilde{b}$  ve  $q$  reel sabitler olmak üzere (3.2) denkleminin soliter dalga çözümü

$$\begin{aligned} u(x, t) &= q \left\{ A \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{A/6} (x - ct - \tilde{x}_0) \right) + \left( \tilde{b} - q/2 \right) \right\} \\ c &= \pm \left( 2q \left( \tilde{b} + A/3 \right) \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

formundadır [89].

Bu çalışmada (3.2) ile verilen Boussinesq denkleminde  $q = -1$  ve  $q = 1$  seçilmesi ile sırasıyla elde edilen Good Boussinesq ve Bad Boussinesq denklemlerinin nümerik çözümlerini elde etmek için kübik bazlar kullanılarak Galerkin sonlu eleman modeli oluşturuldu. Daha sonra verilen problemler ile ilişkili dalga hareketi, dalga etkileşimi,

dalga ayrılması ve çözümün patlaması problemleri ele alındı. (3.5) ile verilen tam çözümden de görüleceği gibi soliter dalganın hızı dalganın genliğine bağlıdır. Ayrıca,  $q = -1$  durumunda GBq denklemi için  $\tilde{b}$  parametresinin  $\tilde{b} < -A/3$  ve  $q = 1$  durumunda ise BBq için  $\tilde{b} > -A/3$  seçilmesi ile reel çözüm elde etmek mümkündür.  $\tilde{b} = 1/2$  durumundaki çözümler Scott vd. [96] tarafından verilmiştir. Ayrıca,  $\tilde{b} = 0$  için  $c = \pm(-2A/3)^{1/2}$  olup kompleks çözümlere ulaşılır [97]. (3.2) ile verilen Bq denkleminde Galerkin sonlu elemanlar yöntemini uygulamadan önce bir ayrıştırma tekniği kullanılacaktır. Ayrıştırma tekniğinin arkasındaki temel fikir “böl ve fethet” düşüncesidir. Nümerik hesaplamalarda birçok kompleks yapıdaki denklemlerle karşılaşılır ve bu denklemlere nümerik yöntemlerin uygulanması oldukça zor olabilir. Karşılaşılan zorlukların bir nebze olsun üstesinden gelebilmek için denklem ayrıştırılarak alt denklemlerin bir kümesi olarak modellenir. Her bir alt denklem ulaşılabilen en basit formdadır ve en pratik algoritma tipindedir. Bütün nümerik yöntemler her bir alt denklem için nümerik şema oluşturulması ve bu şemaların bir araya getirilerek çözümün oluşturulması formundadır. Ayrıştırma tekniği üç adım içerir;

- İlk önce  $v = f(u)$  olacak şekilde yardımcı fonksiyon seçilir.
- Bu değişkenler kombine edilerek model problem düzenlenir.
- İki veya daha fazla alt denkleme indirgenen sistem çözülerek çözümü yapılacak olan değişken elde edilir. Ayrıştırma tekniğinin uygulanmasının basit oluşu elde edilen denklemler kümesine nümerik yöntemlerin uygulanmasındaki kolaylık ve ayrıştırılmış denklemin ele alınan problemin tam çözümünün yapısal özelliklerini koruması, farklı denklemlere farklı yöntemlerin uygulanabilirliği gibi avantajları vardır. Bu avantajlar göz önüne alınarak  $v$  yardımcı fonksiyon olmak üzere (3.2) ile verilen Bq denklemi

$u_t = v$  seçimi ile ayrıştırılarak

$$\begin{aligned} u_t &= v \\ v_t &= u_{xx} + qu_{xxxx} + (u^2)_{xx} \end{aligned} \quad (3.6)$$

lineer olmayan denklem sistemine dönüştürülür. Bu nedenle (3.2) ile verilen Boussinesq denkleminin nümerik çözümlerinin elde edilmesi yerine (3.6) ayrıştırılmış sistemin nümerik çözümlerinin elde edilmesi aynı anlamdadır. Galerkin sonlu eleman yöntemini uygulamak için ilk adım olarak (3.6) da verilen ayrıştırılmış denklem sisteminin ağırlıklı kalan formunu ve bu form yardımıyla zayıf formunu elde etmektir. Böylece (3.6) ile verilen denklem sistemindeki denklemler  $W$  ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak problemin çalışıldığı bölge üzerinde integrali alınırsa (3.6) ile verilen denklem sistemin ağırlıklı kalan formu

$$\begin{aligned} \int_a^b W (u_t - v) dx &= 0 \\ \int_a^b W (v_t - u_{xx} - qu_{xxxx} - (u^2)_{xx}) dx &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

olarak elde edilir. (3.7) ile verilen sistemde bağımlı değişkenler üzerindeki türev şartını ağırlık fonksiyonuna dağıtılması amacı ile kısmi integrasyon uygulanır ve bu işlem sonucunda (3.6) ile verilen denklem sisteminin zayıf formu

$$\begin{aligned} \int_a^b (W u_t - W v) dx &= 0 \\ \int_a^b (W v_t + W_x u_x - q W_{xx} u_{xx} + 2 W_x u u_x) dx & \\ &= [W u_x + q (W u_{xxx} - W_x u_{xx}) + 2 W u u_x]_a^b \end{aligned} \quad (3.8)$$

olarak elde edilir. Sonlu eleman yönteminin ikinci adımında ise çalışma bölgesi olarak

alınan  $[a, b]$  aralığı daha küçük ve eşit alt aralıklara sahip  $N$  sonlu elemana

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$$

olacak şekilde bölünür. Burada  $m = 0, 1, 2, \dots, N$  olmak üzere  $\{x_m\}_{m=0}^N$  düğüm noktaları ve  $h = x_{m+1} - x_m$  dir. Daha sonra üçüncü adımda eleman şekil fonksiyonları seçilir ve yaklaşık çözüm fonksiyonu oluşturulur. Bu kısımda sonlu eleman yönteminde kübik bazlar kullanılacağı için eleman şekil fonksiyonları Bölüm 2 de (2.12) ile verilen kübik B-spline fonksiyonları seçilerek problemin  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  tam çözümlerine karşılık gelen sırasıyla  $U_N(x, t)$  ve  $V_N(x, t)$  yaklaşık çözümleri eleman şekil fonksiyonları cinsinden verilen bölge üzerinde

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-1}^{N+1} \delta_j(t) \Phi_j(x) \quad (3.9)$$

$$V_N(x, t) = \sum_{j=-1}^{N+1} \sigma_j(t) \Phi_j(x)$$

şeklinde oluşturulur. Burada  $\delta_j(t)$  ve  $\sigma_j(t)$  belirlenecek olan zamana bağlı parametrelerdir. (2.12) ile verilen kübik B-spline fonksiyonlarına  $0 \leq \xi \leq h$  olmak üzere  $\xi = x - x_m$  lokal koordinat dönüşümü uygulanarak tipik bir  $[x_m, x_{m+1}]$  elemanı üzerinde eleman matrislerini oluşturmak için standart bir işlem geliştirilir. Böylece bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı üzerinde kübik B-spline fonksiyonları

$$\begin{aligned} \Phi_{m-1} &= (h - \xi)^3 / h^3 \\ \Phi_m &= (h^3 + 3h^2(h - \xi) + 3h(h - \xi)^2 - 3(h - \xi)^3) / h^3 \\ \Phi_{m+1} &= (h^3 + 3h^2\xi + 3h\xi^2 - 3\xi^3) / h^3 \\ \Phi_{m+2} &= \xi^3 / h^3 \end{aligned} \quad (3.10)$$

olarak elde edilir. (3.9) ile verilen yaklaşık çözümler lokal koordinat sistemi ile ifade edilen ve (3.10) ile verilen kübik B-spline bazlar cinsinden tipik bir  $[x_m, x_{m+1}]$  elemanı için

$$U_N(\xi, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j(t) \Phi_j(\xi) \quad (3.11)$$

$$V_N(\xi, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \sigma_j(t) \Phi_j(\xi)$$

olarak ifade edilir. (3.10) ile verilen kübik B-spline fonksiyonları ile (3.9) yaklaşımlarının  $x_m$  noktasında  $U_N$  ve  $V_N$ 'nin  $\delta$  ve  $\sigma$  parametreleri cinsinden noktasal değerleri

$$U_N(x_m, t) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}$$

$$V_N(x_m, t) = \sigma_{m-1} + 4\sigma_m + \sigma_{m+1}$$

dir. Buradan, Bq denkleminin tipik bir  $[x_m, x_{m+1}]$  elemanı için zayıf formu ise

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} (Wu_t - Wv) dx$$

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} (Wv_t + W_x u_x - qW_{xx} u_{xx} + 2W_x u u_x) dx \quad (3.12)$$

$$- [Wu_x + q(Wu_{xxx} - W_x u_{xx}) + 2Wu u_x]_{x_m}^{x_{m+1}}$$

şeklinde bulunur.

Çalışmanın bu kısmına kadar Bq denkleminin tipik bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı üzerinde nasıl ifade edileceğine değinildi. Bundan sonraki adımda ise Boussinesq denkleminin Galerkin sonlu eleman formülasyonu oluşturacaktır. Galerkin sonlu eleman yöntemi uygulandığı için  $W_i$  ağırlık fonksiyonları,  $\Phi_j$  eleman şekil fonksiyonları ile eşit olacak şekilde seçilir. Ağırlık fonksiyonları ve (3.11) ile verilen yaklaşık çözümlerin (3.12) denkleminde yerine yazılması ile

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \left( \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\xi \right) \dot{\delta}_j^e - \left( \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\xi \right) \sigma_j^e \right\} \\
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \left( \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\xi \right) \dot{\sigma}_j^e + \left( \int_0^h \Phi_i' \Phi_j' d\xi \right) \delta_j^e - q \left( \int_0^h \Phi_i'' \Phi_j'' d\xi \right) \delta_j^e \right. \\
& \quad \left. + 2 \sum_{k=m-1}^{m+2} \left( \int_0^h \Phi_i' \Phi_j' \Phi_k d\xi \right) \delta_j^e \delta_k^e \right\} - \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ (\Phi_i \Phi_j') \delta_j^e + q (\Phi_i \Phi_j''' - \Phi_i' \Phi_j'') \delta_j^e \right. \\
& \quad \left. - 2 \sum_{k=m+1}^{m+1} (\Phi_i \Phi_j \Phi_k') \delta_j^e \delta_k^e \right\}_0^h \tag{3.13}
\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada  $i, j, k = m-1, m, m+1, m+2$  olup “ $\cdot$ ” ifadesi  $\delta^e = (\delta_{m-1}^e, \delta_m^e, \delta_{m+1}^e, \delta_{m+2}^e)$  ve  $\sigma^e = (\sigma_{m-1}^e, \sigma_m^e, \sigma_{m+1}^e, \sigma_{m+2}^e)$  eleman parametrelerinin  $t$  bağımsız değişkenine, “ $\prime$ ” ise eleman şekil fonksiyonlarının  $x$  bağımsız değişkenine göre kısmi türevini simgeler. (3.13) eşitliğinde eleman matrisleri

$$\tilde{A}_{ij}^e = \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\xi, \quad \tilde{B}_{ij}^e = \Phi_i \Phi_j \Big|_0^h,$$

$$B_{ij}^e = \int_0^h \Phi_i' \Phi_j' d\xi, \quad \tilde{C}_{ij}^e = \Phi_i \Phi_j''' \Big|_0^h,$$

$$C_{ij}^e = \int_0^h \Phi_i'' \Phi_j'' d\xi, \quad \check{C}_{ij}^e = \Phi_i' \Phi_j'' \Big|_0^h,$$

$$D_{ijk}^e(\delta) = 2 \int_0^h \Phi_i' \Phi_j' \Phi_k d\xi, \quad \tilde{D}_{ijk}^e(\delta) = 2 \Phi_i \Phi_j \Phi_k' \Big|_0^h$$

integrallerin hesaplanması ile

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ij}^e &= \frac{h}{140} \begin{bmatrix} 20 & 129 & 60 & 1 \\ 129 & 1188 & 933 & 60 \\ 60 & 933 & 1188 & 129 \\ 1 & 60 & 129 & 20 \end{bmatrix}, & \tilde{B}_{ij}^e &= \frac{3}{h} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ B_{ij}^e &= \frac{1}{10h} \begin{bmatrix} 18 & 21 & -36 & -3 \\ 21 & 102 & -87 & -36 \\ -36 & -87 & 102 & 21 \\ -3 & -36 & 21 & 18 \end{bmatrix}, & \tilde{C}_{ij}^e &= \frac{6}{h^3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 3 & -9 & 9 & -3 \\ -3 & 9 & -9 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \\ C_{ij}^e &= \frac{6}{h^3} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, & \check{C}_{ij}^e &= \frac{18}{h^3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} D_{ijk}^e(\delta) &= \frac{1}{140h} \begin{bmatrix} D_{11}(\delta) & D_{12}(\delta) & D_{13}(\delta) & D_{14}(\delta) \\ D_{21}(\delta) & D_{22}(\delta) & D_{23}(\delta) & D_{24}(\delta) \\ D_{31}(\delta) & D_{32}(\delta) & D_{33}(\delta) & D_{34}(\delta) \\ D_{41}(\delta) & D_{42}(\delta) & D_{43}(\delta) & D_{44}(\delta) \end{bmatrix}, \\ \tilde{D}_{ijk}^e(\delta) &= \frac{6}{h} \begin{bmatrix} \tilde{D}_{11}(\delta) & \tilde{D}_{12}(\delta) & \tilde{D}_{13}(\delta) & \tilde{D}_{14}(\delta) \\ \tilde{D}_{21}(\delta) & \tilde{D}_{22}(\delta) & \tilde{D}_{23}(\delta) & \tilde{D}_{24}(\delta) \\ \tilde{D}_{31}(\delta) & \tilde{D}_{32}(\delta) & \tilde{D}_{33}(\delta) & \tilde{D}_{34}(\delta) \\ \tilde{D}_{41}(\delta) & \tilde{D}_{42}(\delta) & \tilde{D}_{43}(\delta) & \tilde{D}_{44}(\delta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Burada

$$\begin{aligned}
D_{11}(\delta) &= (315, 1899, 801, 9) \delta & D_{12}(\delta) &= (195, 1929, 1353, 51) \delta \\
D_{13}(\delta) &= (-495, -3591, -1917, -45) \delta & D_{14}(\delta) &= (-15, -237, -237, -15) \delta \\
D_{21}(\delta) &= (195, 1929, 1353, 51) \delta & D_{22}(\delta) &= (321, 6825, 9075, 915) \delta \\
D_{23}(\delta) &= (-471, -6837, -6837, -471) \delta & D_{24}(\delta) &= (-45, -1917, -3591, -495) \delta \\
D_{31}(\delta) &= (-495, -3591, -1917, -45) \delta & D_{32}(\delta) &= (-471, -6837, -6837, -471) \delta \\
D_{33}(\delta) &= (915, 9075, 6825, 321) \delta & D_{34}(\delta) &= (51, 1353, 1929, 195) \delta \\
D_{41}(\delta) &= (-15, -237, -237, -15) \delta & D_{42}(\delta) &= (-45, -1917, -3591, -495) \delta \\
D_{43}(\delta) &= (51, 1353, 1929, 195) \delta & D_{44}(\delta) &= (9, 801, 1899, 315) \delta
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_{11}(\delta) &= (1, 0, -1, 0) \delta & \tilde{D}_{12}(\delta) &= 4(1, 0, -1, 0) \delta \\
\tilde{D}_{13}(\delta) &= (1, 0, -1, 0) \delta & \tilde{D}_{14}(\delta) &= (0, 0, 0, 0) \delta \\
\tilde{D}_{21}(\delta) &= 4(1, 0, -1, 0) \delta & \tilde{D}_{22}(\delta) &= (16, -1, -16, 1) \delta \\
\tilde{D}_{23}(\delta) &= 4(1, -1, -1, 1) \delta & \tilde{D}_{24}(\delta) &= (0, -1, 0, 1) \delta \\
\tilde{D}_{31}(\delta) &= (1, 0, -1, 0) \delta & \tilde{D}_{32}(\delta) &= 4(1, -1, -1, 1) \delta \\
\tilde{D}_{33}(\delta) &= (1, -16, -1, 16) \delta & \tilde{D}_{34}(\delta) &= 4(0, -1, 0, 1) \delta \\
\tilde{D}_{41}(\delta) &= (0, 0, 0, 0) \delta & \tilde{D}_{42}(\delta) &= (0, -1, 0, 1) \delta \\
\tilde{D}_{43}(\delta) &= 4(0, -1, 0, 1) \delta & \tilde{D}_{44}(\delta) &= (0, -1, 0, 1) \delta
\end{aligned}$$

olmak üzere  $\tilde{A}_{ij}^e$ ,  $B_{ij}^e$ ,  $C_{ij}^e$ ,  $\tilde{B}_{ij}^e$ ,  $\tilde{C}_{ij}^e$ ,  $\check{C}_{ij}^e$ ,  $D_{ijk}^e(\delta)$  ve  $\tilde{D}_{ijk}^e(\delta)$  eleman matrisleridir.

$D_{ijk}^e(\delta)$  ve  $\tilde{D}_{ijk}^e(\delta)$  matrisleri ise  $\delta$  parametresine bağlıdır. O halde tipik bir eleman üzerinde denklem sistemi matris formunda

$$\begin{aligned}
&\dot{\delta}^e - \sigma^e \\
&\tilde{A}^e \dot{\sigma}^e + \left( B^e - \tilde{B}^e - q \left( C^e + \tilde{C}^e - \check{C}^e \right) + D^e(\delta^e) - \tilde{D}^e(\delta^e) \right) \delta
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Böylece, sonlu eleman yönteminin dördüncü adımı olan her bir eleman için eleman denklemlerinin oluşturulması işlemi tamamlanmış olur. Şimdi tipik bir eleman için elde edilen matris sistemi çalışılan bütün bölge üzerine genişletilmelidir. Bu ise eleman

matrislerinin birleştirilmesi işlemi olan beşinci adımdır. Bu adım ile tek bir eleman üzerinde değil bütün bölge üzerinde yaklaşım fonksiyonunun elde edileceği matris sistemi oluşturulur. Bu adım sonunda birleştirilmiş matrislerin genel satırları

$$\tilde{A} : \frac{h}{140} (1, 120, 1191, 2416, 1191, 120, 1)$$

$$B : \frac{1}{10h} (-3, -72, -45, 240, -45, -72, -3)$$

$$C : \frac{6}{h^3} (1, 0, -9, 16, -9, 0, 1)$$

$$\tilde{B} : \frac{3}{h} (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\tilde{C} : \frac{6}{h^3} (-1, 0, 9, -16, 9, 0, -1)$$

$$\tilde{C} : \frac{18}{h^3} (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$D(\delta) : \frac{1}{140h} ((-15, -237, -237, -15, 0, 0, 0) \delta, (-45, -2412, -7182, -2412, -45, 0, 0) \delta, \\ (51, 882, -4713, -4713, 882, 51, 0) \delta, (9, 1716, 11295, 14280, 11295, 1716, 9) \delta \\ (0, 51, 882, -4713, -4713, 882, 51) \delta, (0, 0, -45, -2412, -7182, -2412, -45) \delta, \\ (0, 0, 0, -15, -237, -237, -15) \delta)$$

$$\tilde{D}(\delta) : \frac{6}{h} (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

dır. Elemanların birleştirilmesi ile oluşan sistem ise matris formunda

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \sigma \\ \dot{\sigma} &= -\tilde{A}^{-1} \left( B - \tilde{B} - q \left( C + \tilde{C} - \tilde{C} \right) + D(\delta) - \tilde{D}(\delta) \right) \delta \end{aligned} \quad (3.14)$$

şeklinde ifade edilir.

Burada  $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1})^T$  ve  $\sigma = (\sigma_{-1}, \sigma_0, \dots, \sigma_N, \sigma_{N+1})^T$  olup tüm bölge üzerinde elde edilmek istenen zamana bağlı parametrelerdir.

Böylece Boussinesq denklemi çözümü problemi sonlu eleman yönteminin uygulanması ile (3.14) ile verilen  $(N + 3)$  bilinmeyen ve  $(N + 3)$  denklemden oluşan ve eleman parametreleri cinsinden ifade edilen diferansiyel denklem sisteminin çözümü problemine indirgenir. Yöntemin altıncı adımı ise sınır koşullarının uygulanmasıdır. Bu ise, problemin tam çözümü ve çözümün  $t$  bağımsız değişkenine göre kısmi türevinde  $x_m$  noktasındaki değerlerin kullanılması ile

$$\begin{aligned} u(x_m, t) &= U_N(x_m, t) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \\ v(x_m, t) &= V_N(x_m, t) = \sigma_{m-1} + 4\sigma_m + \sigma_{m+1} \end{aligned}$$

uygulanır. Bu denklemler yardımıyla  $m = 0$  için her bir sistemden iki adet bilinmeyen olan  $\delta_{-1}$  ve  $\sigma_{-1}$  parametreleri sırasıyla  $\delta_0, \delta_1$  ve  $\sigma_0, \sigma_1$  cinsinden ve benzer düşünce ile  $m = N$  için  $\delta_{N+1}$  ve  $\sigma_{N+1}$  parametreleri de  $\delta_{N-1}, \delta_N$  ve  $\sigma_{N-1}, \sigma_N$  cinsinden ifade edilerek, sistemde basit cebirsel işlemlerle yok edilir. Yok etme işleminin ardından her biri  $(N + 1) \times (N + 1)$  tipinde iki matris sistemi elde edilir. (3.14) ile verilen ve artık  $(N + 1)$  denklem ve  $(N + 1)$  bilinmeyenden oluşan denklem sistemlerinin  $\delta_j$  ve  $\sigma_j$  parametrelerine göre çözümlerinin yapılması sonlu eleman yönteminin yedinci adımıdır. Bu sistemler uygun yöntemlerden herhangi biri ile çözülebilir. Bu çalışmada daha etkili ve daha yakınsak çözümler eldilmesi, yaklaşık çözümün tam çözüme hızlı yakınsaması ve uygulanmasındaki kolaylıktan dördüncü mertebeden Runge-Kutta (RK4) yöntemi kullanılacaktır. RK4 yönteminin kullanılması ile  $\delta^{n+1}$  ve  $\sigma^{n+1}$  parametreleri  $\delta^n$  ve  $\sigma^n$  parametreleri yardımıyla iteratif olarak elde edilir. İteratif işlemlere başlamak için  $t = 0$  zamanında  $\delta_j^0$  ve  $\sigma_j^0$  başlangıç değerlerinin bilinmesi gerekir. Bu parametreler başlangıç koşulları kullanılarak hesaplanabilir  $t = 0$  zamanında problemin başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \\ v(x, 0) &= g(x) \end{aligned}$$

ve yaklaşık çözümleri

$$\begin{aligned} U_N(x_m, 0) &= \delta_{m-1}^0 + 4\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0 \\ V_N(x_m, 0) &= \sigma_{m-1}^0 + 4\sigma_m^0 + \sigma_{m+1}^0 \end{aligned}$$

olmak üzere başlangıç koşullarının her bir  $x_m$  düğüm noktasındaki değeri  $m = 0(1)N$  için

$$\begin{aligned} u(x_m, 0) &= U_N(x_m, 0) \\ v(x_m, 0) &= V_N(x_m, 0) \end{aligned}$$

kullanılarak elde edilir. Bu sistem açık olarak yazılırsa

$$\begin{aligned} U_N(x_0, 0) &= \delta_{-1} + 4\delta_0 + \delta_1 = u(x_0, 0) \\ U_N(x_1, 0) &= \delta_0 + 4\delta_1 + \delta_2 = u(x_1, 0) \\ U_N(x_2, 0) &= \delta_1 + 4\delta_2 + \delta_3 = u(x_2, 0) \\ &\vdots \\ U_N(x_N, 0) &= \delta_{N-1} + 4\delta_N + \delta_{N+1} = u(x_N, 0) \end{aligned} \tag{3.15}$$

ve

$$\begin{aligned} V_N(x_0, 0) &= \sigma_{-1} + 4\sigma_0 + \sigma_1 = v(x_0, 0) \\ V_N(x_1, 0) &= \sigma_0 + 4\sigma_1 + \sigma_2 = v(x_1, 0) \\ V_N(x_2, 0) &= \sigma_1 + 4\sigma_2 + \sigma_3 = v(x_2, 0) \\ &\vdots \\ V_N(x_N, 0) &= \sigma_{N-1} + 4\sigma_N + \sigma_{N+1} = v(x_N, 0) \end{aligned} \tag{3.16}$$

şeklinde  $(N + 3)$  bilinmeyen ve  $(N + 1)$  denklemden oluşan denklem sistemleri elde edilir. Bu sistemlerin  $\delta^0$  ve  $\sigma^0$  parametrelerine göre çözülebilir olması için iki seçeneğimiz vardır bunlardan ilki her bir sistem kümesinden iki bilinmeyen  $\delta_{-1}$  ve  $\delta_{N+1}$  ile  $\sigma_{-1}$  ve  $\sigma_{N+1}$  yok edilir, diğeri ise her bir sisteme iki adet denklem eklenir. Bu kısımda  $U'_m$  ve  $V'_m$  ile ifade edilen yaklaşık çözümlerin  $x$  bağımsız değişkenine göre birinci türevlerinin sınırlardaki değerleri

$$\begin{aligned} U'_N(x_m, 0) &= \frac{3}{h} (\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) \\ V'_N(x_m, 0) &= \frac{3}{h} (\sigma_{m+1} - \sigma_{m-1}) \end{aligned}$$

kullanılarak  $m = 0$  ve  $m = N$  için bilinmeyenler sistemden yok edilir ve böylece  $(N + 1)$  bilinmeyenli,  $(N + 1)$  denklemden oluşan sistem elde edilir. Bu sistemler matris formunda

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{N-1} \\ \delta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(x_0, 0) \\ u(x_1, 0) \\ u(x_2, 0) \\ \vdots \\ u(x_{N-1}, 0) \\ u(x_N, 0) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

ve

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_{N-1} \\ \sigma_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(x_0, 0) \\ v(x_1, 0) \\ v(x_2, 0) \\ \vdots \\ v(x_{N-1}, 0) \\ v(x_N, 0) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

dır. (3.17) ve (3.18) ile verilen cebirsel sistemler çözülerek  $j = 0(1)N$  için  $\delta_j^0$  ve  $\sigma_j^0$  başlangıç parametreleri elde edilir. Böylece (3.14) sisteminde  $\delta_j^0$  ve  $\sigma_j^0$  başlangıç parametreleri kullanılarak istenilen  $t$  zamanındaki yaklaşık çözümler RK4 yöntemi ile iteratif olarak elde edilir.

### 3.1.1 Good Boussinesq Denklemini

(3.2) ile verilen Boussinesq denkleminde  $q = -1$  seçilmesi ile

$$u_{tt} = u_{xx} - u_{xxxx} + (u^2)_{xx} \quad (3.19)$$

Good Boussinesq denklemi elde edilir. (3.19) denkleminin tam çözümü;

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -A \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{A/6} (x - ct - \tilde{x}_0) \right) - \left( \tilde{b} + 1/2 \right) \\ c &= \pm \left( -2 \left( \tilde{b} + A/3 \right) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

dır. (3.19) ile verilen GBq denkleminin sonlu eleman formülasyonundan elde edilen denklem sistemi (3.14) de  $q = -1$  yazılarak

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \sigma \\ \dot{\sigma} &= -\tilde{A}^{-1} \left( B - \tilde{B} + C + \tilde{C} - \check{C} + D(\delta) - \tilde{D}(\delta) \right) \delta \end{aligned} \quad (3.20)$$

dır.

### 3.1.2 Bad Boussinesq Denklemi

(3.2) ile verilen Boussinesq denkleminde  $q = 1$  seçilmesi ile

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{xxxx} + (u^2)_{xx} \quad (3.21)$$

Bad Boussinesq denklemi elde edilir. (3.21) denkleminin tam çözümü;

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{A/6} (x - ct - \tilde{x}_0) \right) + \left( \tilde{b} - 1/2 \right) \\ c &= \pm \left( 2 \left( \tilde{b} + A/3 \right) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

dır. (3.21) ile verilen BBq denkleminin sonlu eleman formülasyonundan elde edilen denklem sistemi (3.14) de  $q = 1$  yazılarak

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \sigma \\ \dot{\sigma} &= -\tilde{A}^{-1} \left( B - \tilde{B} - C - \tilde{C} + \check{C} + D(\delta) - \tilde{D}(\delta) \right) \delta \end{aligned} \quad (3.22)$$

dır.

## 3.2 Kararlılık Analizi

Bu kısımda (3.1) ile verilen Boussinesq tipi denklemlerin kararlılık analizi incelendi. Boussinesq tipi denklemlerin (3.8) ile verilen zayıf formunda  $\alpha = \max_{0 \leq i \leq N} \{2u_i\}$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \sigma \\ \dot{\sigma} &= -\tilde{A}^{-1} \left( (1 + \alpha) B - (1 + \alpha) \tilde{B} - q \left( \tilde{C} + \check{C} - C \right) \right) \delta \end{aligned} \quad (3.23)$$

şeklindedir.  $k_{11} = k_{22} = [0]_{N \times N}$  sıfır matrisi,  $k_{12} = I_{N \times N}$  birim matris,  $k_{21} = -\tilde{A}^{-1} \left( (1 + \alpha) B - (1 + \alpha) \tilde{B} - q \left( \tilde{C} + \check{C} - C \right) \right)$  notasyonlarını kullanarak bir  $K$  matrisini

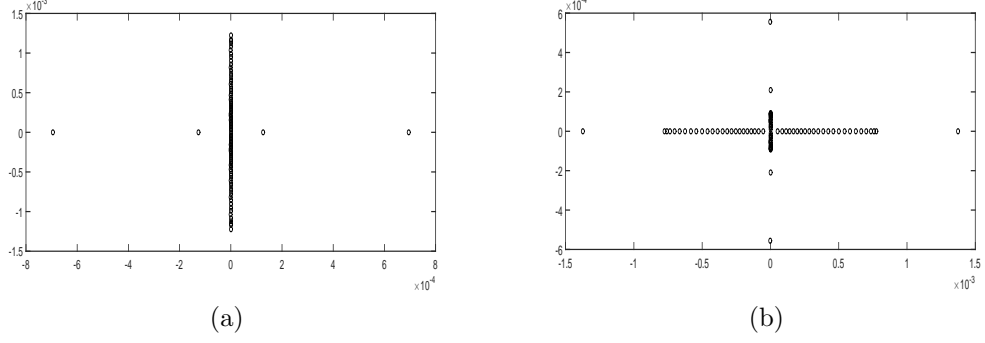
$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlayalım. O halde (3.23) ile verilen lineer denklem sistemi matris formunda

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \sigma \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

şeklinde ifade edilir. Bölüm 2 de açıklandığı üzere (3.14) ile verilen denklem sistemine uygulanan RK4 yönteminin kararlılığı (3.24) ile verilen  $K$  matrisinin özdeğerlerine bağlıdır.  $K$  matrisinin özdeğerleri  $j = 0, 1, 2, \dots, N$  için  $\lambda_j$  ler ile gösterilmek üzere sırasıyla  $q = -1$  için GBq ve  $q = 1$  için BBq denklemlerinin  $N = 45$  ve  $\Delta t = 0.001$  değerleri için  $\lambda_j$  özdeğerlerinin kompleks düzlemdeki konumları sırasıyla Şekil 3.1 (a) ve Şekil 3.1 (b) de gösterildi. Şekillerden görüldüğü üzere her iki denklem için de  $\lambda_j$  özdeğerleri Şekil 2.5 ile gösterilen Runge-Kutta kararlılık bölgesi içerisinde olduğu fakat çok az miktarda özdeğerin GBq için  $\Delta t \lambda_j \leq 8 \times 10^{-4}$  ve BBq için ise  $\Delta t \lambda_j \leq 15 \times 10^{-4}$  olacak şekilde pozitif reel kısma sahip olduğu görülmektedir. Bu durumda ise [69] ile verilen referanstaki tolerans kullanılarak Boussinesq tipi denklemlerin Galerkin sonlu eleman yöntemi ile ayrıklaştırılan nümerik

şemasının çözümü için kullanılan Runge-Kutta yönteminin kararlı olduğu sonucuna varılır.



Şekil 3.1: GBq ve BBq:  $N = 45$  ve  $\Delta t = 0.001$  değerleri için  $\lambda_j$  özdeğerlerinin kompleks düzlemdeki konumları

### 3.3 Nümerik Örnekler ve Sonuçlar

Bu kısımda Galerkin sonlu eleman yöntemi ile elde edilen (3.20) ve (3.22) şemaları kullanılarak denklemlerin yapısına uygun olan nümerik örnekler ele alındı. GBq denklemi için dalga hareketi, iki soliter dalganın etkileşimi ve dalga ayrılması problemleri incelendi. Ayrıca, etkileşim problemi içerisinde soliter dalgaların genlik seçimlerine göre karşılaşılan çözüm patlaması problemine değinildi. BBq denklemi için ise dalga ayrılması ve iki soliter dalganın etkileşimi problemleri ele alınarak elde edilen nümerik sonuçlar sunuldu.

Her iki denklem için dalga hareketi probleminde, sonlu eleman yöntemi kullanılarak elde edilen  $U_N(x, t)$  yaklaşık çözümlerinin,  $u(x, t)$  tam çözümü ile ne kadar uyumlu

olduğu, uygulanan yöntemin etkinliği ve doğruluğu literatürde  $L_2$  ve  $L_\infty$

$$\begin{aligned} L_2 &= \|u - U_N\|_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |u_j - (U_N)_j|^2} \\ L_\infty &= \|u - U_N\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq N} |u_j - (U_N)_j| \end{aligned} \quad (3.25)$$

olarak tanımlanan hata normları kullanılarak gösterildi.

### 3.3.1 Dalga Hareketi

Bilimin her alanında enerji dalgalar tarafından yapılan titreşimler ile taşınır ve bilimin en geniş teknik konularından biri olan dalga hareketi genel olarak belirli bir sinyali ortamın bir noktasından başka bir noktasına belirli bir hızla aktaran harekettir. Bütün dalga hareketi formlarında ortak amaç enerjinin aktarılması olduğu için su dalgalarının hareketi ile ışık ve sesin yayılım karakteristiği günlük hayatta benzer bir yapıdadır. Sonik patlama veya hareket halindeki trafikte lokalize daralmalar gibi modern problemler dalga hareketinin temel ilgi alanıdır. Diğer yandan bu problemler uzmanlar tarafından yoğun olarak çalışılmış ve bilim ve mühendisliğin hemen hemen her alanında dalga hareketi ile ilgilenilmiştir.

Bu kısımda (3.2) de verilen Boussinesq denklemi tarafından üretilen soliter dalganın hareketi (3.3) başlangıç ve (3.4) sınır koşulları ile göz önüne alındı. Başlangıç koşullarında görülen  $f(x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonları (3.5) ile verilen tam çözüm ve tam çözümün  $t$  bağımsız değişkenine göre kısmi türevinde  $t = 0$  seçilmesi ile

$$\begin{aligned} f(x) &= q \left\{ A \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{A/6} (x - \tilde{x}_0) \right) + \left( \tilde{b} - q/2 \right) \right\} \\ g(x) &= 2Acq \sqrt{A/6} \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{A/6} (x - \tilde{x}_0) \right) \tanh \left( \sqrt{A/6} (x - \tilde{x}_0) \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Her iki Boussinesq tipi denklem için, aralığın sağ ve sol uç noktalarında  $u \approx 0$  sağlanması göz önüne alınarak, problemin çalışıldığı aralık  $x \in$

$[-80, 100]$  olarak seçildi. Daha sonra farklı genlik, konum ve zaman adımları için problemlerin yaklaşık çözümleri nümerik olarak elde edildi ve soliter dalganın hareketi incelendi.

### Good Boussinesq denklemi için dalga hareketi

Bölüm 3.1 de (3.19) ile verilen Good Boussinesq denkleminin ürettiği soliter dalganın hareketini incelemek için başlangıç ve sınır koşulları sırasıyla

$$\begin{aligned} f(x) = u(x, 0) &= -A \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{A/6}(x - \tilde{x}_0)\right) - \left(\tilde{b} + 1/2\right) \\ g(x) = u_t(x, 0) &= -2Ac\sqrt{A/6} \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{A/6}(x - \tilde{x}_0)\right) \tanh\left(\sqrt{A/6}(x - \tilde{x}_0)\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} u(a, t) = u(b, t) &= 0 \\ u_x(a, t) = u_x(b, t) &= 0 \end{aligned}$$

olarak alındı. Problem için yapılan farklı çalışmalar referans alınarak reel çözümler elde edilmesi için  $\tilde{b} = -1/2$  seçildi. İlk olarak  $A = 0.369$  genliğe sahip olan soliter dalganın farklı zaman ve konum adımlarında yaklaşık çözümleri hesaplandı. Kullanılan yöntemin etkinliğini göstermek için yaklaşık çözüm ile tam çözüm arasındaki uyum (3.25) ile verilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile ölçülerek elde edilen sonuçlar sırasıyla Tablo 3.1 ve Tablo 3.2 de sunuldu. Tablolardan görüleceği üzere konum adımı  $h$  değerlerinin azalması ile hata normlarının genel anlamda azaldığı fakat zaman adımı  $\Delta t$  değerlerinin daha küçük seçilmesi ile hata normlarında önemli bir değişim olmadığı gözlemlendi.

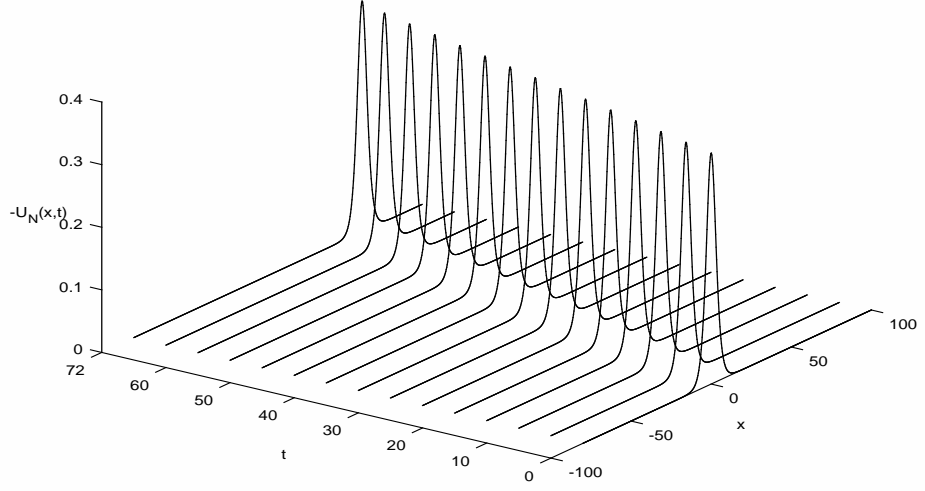
Tablo 3.1: GBq için farklı  $\Delta t$  ve  $h$  değerlerinde  $L_\infty$  hata normları

		$L_\infty \times 10^3$			
$h/\Delta t$	0.001	0.00125	0.002	0.003	0.01
0.2	0.008373	0.008373	0.002582	0.003033	0.004027
0.25	0.001698	0.001698	0.003071	0.004088	0.005559
0.5	0.007420	0.005692	0.005964	0.005625	0.004965
0.625	0.011909	0.011909	0.012425	0.014200	0.012349
0.75	0.026173	0.026475	0.028444	0.028969	0.027963
0.8	0.036819	0.036376	0.036748	0.036454	0.036057
0.9	0.062326	0.060322	0.060070	0.059530	0.012349
1	0.086751	0.094202	0.091278	0.090495	0.091810

Tablo 3.2: GBq için farklı  $\Delta t$  ve  $h$  değerlerinde  $L_2$  hata normları

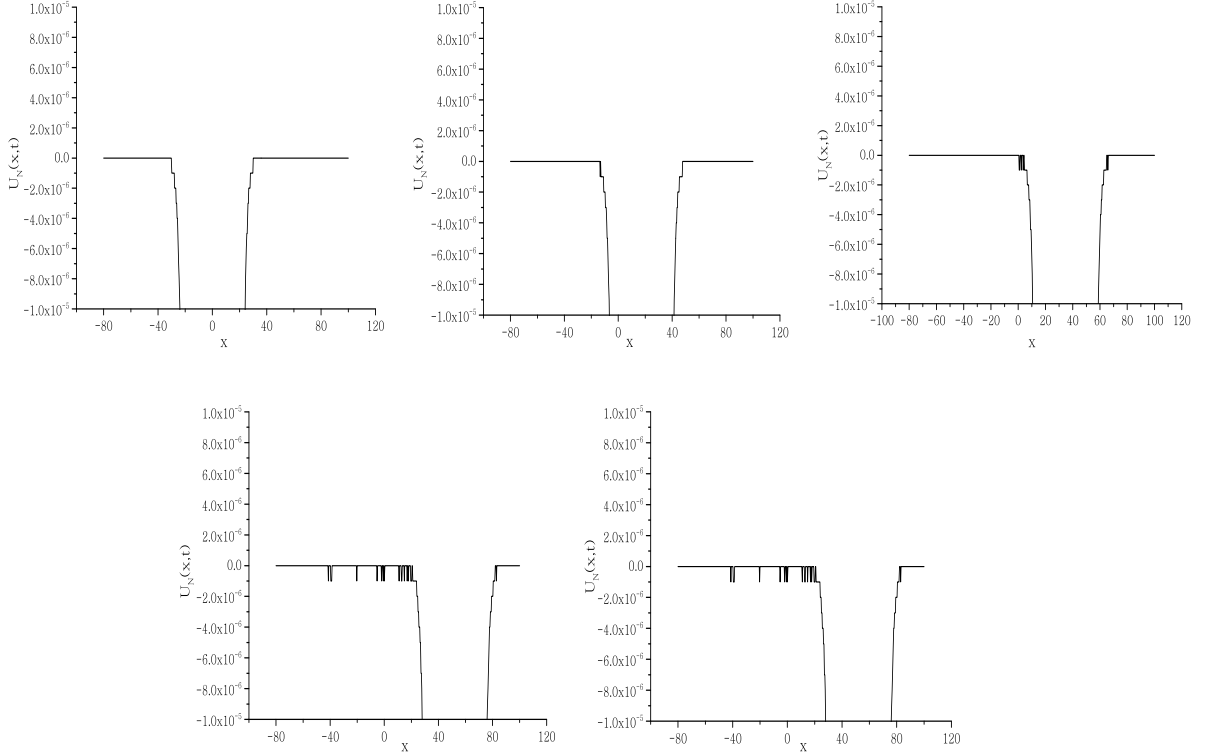
		$L_2 \times 10^3$			
$h/\Delta t$	0.001	0.00125	0.002	0.003	0.01
0.2	0.025572	0.025572	0.012755	0.013674	0.017339
0.25	0.005524	0.005524	0.009517	0.011410	0.016979
0.5	0.019855	0.014685	0.015546	0.013727	0.011417
0.625	0.027498	0.027498	0.029382	0.035532	0.028792
0.75	0.067092	0.068744	0.067281	0.060511	0.061352
0.8	0.084341	0.085968	0.086468	0.086664	0.086587
0.9	0.028792	0.140809	0.142178	0.141140	0.148450
1	0.220308	0.215134	0.218505	0.228489	0.203745

Soliter dalganın hareketi,  $x \in [-80, 100]$  aralığında  $A = 0.369$ ,  $h = 0.3$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $\tilde{x}_0 = 0$  ve  $t = 72$  değerleri için Şekil 3.2 de sunuldu. Manoranjan [80] çalışmasında zamanla dalganın genişliği artarken genliğinin azaldığını belirtmiştir. Fakat şekilden görüleceği üzere Manoranjan'ın bu çalışmasının aksine dalga genliğinde belirgin bir azalma olmadan ilerlemektedir ve dalganın arkasında görülebilir ikincil dalgalar bulunmamaktadır.



Şekil 3.2: GBq için  $x \in [-80, 100]$ ,  $A = 0.369$ ,  $h = 0.3$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $\tilde{x}_0 = 0$ ,  $t = 72$  değerlerinde soliter dalga hareketi

Dalganın grafiği  $t = 0, 20, 40, 60$  ve  $72$  zamanları için  $[-0.1 \times 10^{-5}, 0.1 \times 10^{-5}]$  aralığına kısıtlandı ve sırasıyla Şekil 3.3 de sunuldu. Şekilden görüleceği gibi başlangıç dalgasının her iki tarafında salınım yapan dalga trenleri formunda maksimum genliği  $d \approx 0.4 \times 10^{-5}$  olan ikincil dalgalar gözlenmektedir. Elde edilen sonuçlar Bratsos [90] 'un çalışması ile uyum içerisindedir.



Şekil 3.3: GBq:İkincil dalgalar

Tezde sunulan yöntemin doğruluğu ve etkinliğinin sunulması düşüncesi ile elde edilen nümerik sonuçlar literatürde yer alan bazı çalışmalarla karşılaştırılarak Tablo 3.3 ve Tablo 3.4 de sunuldu. Tablo 3.3 de  $x \in [-80, 100]$  aralığında  $A = 0.369$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $\tilde{x}_0 = 0$  ve  $t = 72$  değerleri için  $L_\infty$  hata normları ve Tablo 3.4’de ise  $x \in [-80, 100]$  aralığında  $A = 0.369$ ,  $\Delta t = 0.002$ ,  $\tilde{x}_0 = 0$  değerleri için farklı zamanlarda ve farklı konum adımları göz önüne alınarak  $L_\infty$  hata normlarının bir karşılaştırılması sunuldu. Tablolardan görüleceği gibi Galerkin sonlu eleman yöntemi ile elde edilen nümerik hatalar karşılaştırma yapılan çalışmalar ile uyum içerisinde olup hata miktarı daha düşüktür.

Tablo 3.3: GBq için  $L_\infty$  hata normlarının Ref. [89, 90, 95] ile karşılaştırılması

	$L_\infty$
[89]	$0.3779 \times 10^{-3}$
[90]	$0.3779 \times 10^{-3}$
[95]( <i>Linearization</i> )	$0.9750 \times 10^{-3}$
Galerkin Yöntemi	$0.8814 \times 10^{-5}$

Tablo 3.4: GBq için  $L_\infty$  hata normlarının Ref. [87] ile karşılaştırılması

$t$	$h$	[87]	Galerkin yöntemi
30	0.5	0.005501	$0.003274 \times 10^{-3}$
	0.3	0.001959	$0.000452 \times 10^{-3}$
	0.1	0.000126	$0.024854 \times 10^{-3}$
60	0.5	0.008277	$0.005033 \times 10^{-3}$
	0.3	0.002940	$0.001722 \times 10^{-3}$
	0.1	0.000325	$0.042511 \times 10^{-3}$
120	0.5	0.013058	$0.008235 \times 10^{-3}$
	0.3	0.004651	$0.004527 \times 10^{-3}$
	0.1	0.000512	$0.055376 \times 10^{-3}$

### Bad Boussinesq denklemi için dalga hareketi

Bu kısımda, Bölüm 3.1 de Galerkin sonlu eleman modeli oluşturulan Bad Boussinesq (BBq) denkleminin ürettiği soliter dalganın hareketi ele alındı. Problemin başlangıç koşulları

$$f(x) = u(x, 0) = A \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{A/6} (x - \tilde{x}_0) \right) + (\tilde{b} - 1/2)$$

$$g(x) = u_t(x, 0) = 2Ac\sqrt{A/6} \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{A/6} (x - \tilde{x}_0) \right) \tanh \left( \sqrt{A/6} (x - \tilde{x}_0) \right)$$

olarak elde edildi. Probleme ait sınır koşulları ise

$$u(a, t) = u(b, t) = 0$$

$$u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0$$

olmak üzere literatürde bulunan çalışmalar göz önüne alınarak  $\tilde{b} = 1/2$  seçildi. İlk olarak, genliği  $A = 0.369$  olan soliter dalganın farklı konum ve zaman adımları için nümerik çözümleri elde edildi. Nümerik çözümlerin tam çözüm ile ne kadar uyumlu olduğu (3.25) ile verilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları hesaplanarak ölçüldü. Elde edilen sonuçlar Tablo 3.5 ve Tablo 3.6 da sunuldu.

Tablo 3.5: BBq için farklı  $\Delta t$  ve  $h$  değerlerinde  $L_\infty$  hata normları

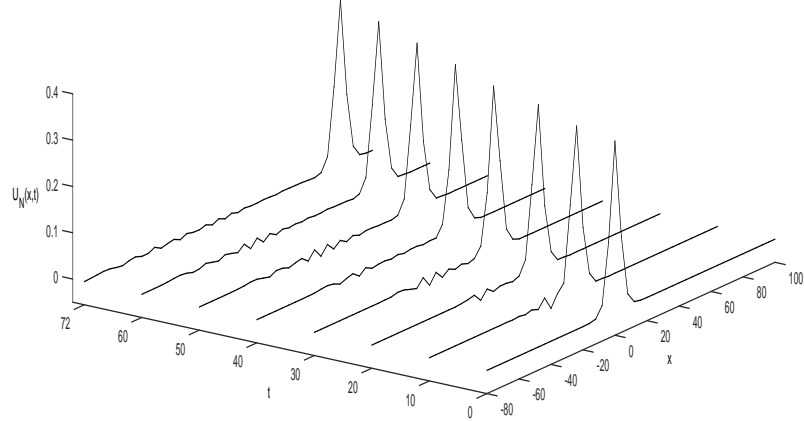
$h/\Delta t$	$L_\infty \times 10^3$						
	0.001	0.002	0.01	0.02	0.03	0.1	0.2
4	20.763350	20.760400	20.761790	20.761820	20.761540	20.759040	20.751880
5	46.469530	46.473090	46.473030	46.472230	46.472680	46.472960	46.475330

Tablo 3.6: BBq için farklı  $\Delta t$  ve  $h$  değerlerinde  $L_2$  hata normları

$h/\Delta t$	$L_2 \times 10^3$						
	0.001	0.002	0.01	0.02	0.03	0.1	0.2
4	62.242030	62.233630	62.237130	62.237110	62.236350	62.206930	62.116700
5	171.872500	171.881100	171.882800	171.878600	171.880100	171.869100	171.839700

Tablolardan görüleceği üzere  $h$  konum adımlarının küçük seçilmesi ile  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları önemli ölçüde azalmış, fakat  $\Delta t$  zaman adımlarının değişimi ile hata normlarında kayda değer bir değişim gözlenmemiştir. En yakın nümerik sonuçlar ise Bratsos [74]'un çalışmasında gözlendiği gibi  $h = 4$  değeri için elde edildi.  $x \in [-80, 100]$  aralığında  $\tilde{x}_0 = 0$  noktasına konumlandırılan  $A = 0.369$  genliğine sahip soliter dalganın hareketi ise  $h = 4$ ,  $\Delta t = 0.001$  ve  $t = 72$  değerleri için Şekil 3.4 de sunuldu. Şekilden görüleceği üzere başlangıç dalgası  $t = 72$  zamanına kadar şeklini koruyarak ilerler. Başlangıç dalgasının ardında her zaman adımında salınım yapan ve genlikleri artan ikincil dalgalar bulunur. Bu dalgaların maksimum genliği  $d \approx 0.004$  olup elde edilen yeni nümerik şema ile Bratsos'un [89] çalışmasında sunduğu  $d \approx 0.05$

değerinden daha küçük genliğe sahip ikincil dalgalar oluştuğu sonucuna varılır.



Şekil 3.4: BBq için  $x \in [-80, 100]$ ,  $A = 0.369$ ,  $h = 4$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $\tilde{x}_0 = 0$  ve  $t = 72$  değerlerinde soliter dalga hareketi

Galerkin sonlu eleman yöntemi ile elde edilen yeni sonuçlar; literatürde bulunan farklı çalışmalar ile karşılaştırılarak Tablo 3.7 ve Tablo 3.8 de sunuldu.  $L_\infty$  hata normları,  $x \in [-80, 100]$  aralığında  $A = 0.369$ ,  $h = 4$  ve  $\tilde{x}_0 = 0$  değerleri için Tablo 3.7 de farklı  $\Delta t$  değerleri için  $t = 48$  seçilerek ve Tablo 3.8 de ise farklı  $\Delta t$  değerleri ve  $t$  zamanları göz önüne alınarak sunuldu. Tablolardan görüleceği üzere Galerkin sonlu eleman yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçlar [74, 88, 89] referanslı çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile uyum içerisindedir ve daha iyi sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 3.7: BBq için  $L_\infty$  hata normlarının Ref. [89] ile karşılaştırılması

$L_\infty$		
$\Delta t$	[89]	Galerkin yöntemi
0.001	0.175345	0.011866
0.0001	0.133362	0.011885

Tablo 3.8: BBq için  $L_\infty$  hata normlarının Ref. [74, 88] ile karşılaştırılması

$L_\infty$					
$\Delta t$	$t$	[74]	[88] (M I)	[88] (M II)	Galerkin yöntemi
0.1	36	$0.360 \times 10^{-1}$	–	–	$0.118 \times 10^{-1}$
	72	$0.349 \times 10^{-1}$	–	–	$0.207 \times 10^{-1}$
0.01	36	$0.358 \times 10^{-1}$	$0.501 \times 10^{-1}$	$0.501 \times 10^{-1}$	$0.118 \times 10^{-1}$
	72	$0.347 \times 10^{-1}$	$0.535 \times 10^{-1}$	$0.571 \times 10^{-1}$	$0.207 \times 10^{-1}$

Daha sonra genliğin değişimi ile elde edilen hataların incelenmesi amacı ile  $x \in [-80, 100]$ ,  $A = 0.369$ ,  $h = 4$ ,  $\tilde{x}_0 = 0$  ve  $\Delta t = 0.1$  değerleri göz önüne alınarak elde edilen sonuçlar Bratsos [74]'un çalışması ile karşılaştırılarak Tablo 3.9 da sunuldu. Tablodan görüleceği üzere dalganın genliğinin azalması ile  $L_\infty$  hata normu azalmış ve karşılaştırılması yapılan çalışmadan daha iyi sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 3.9: BBq için farklı genlik değerleri için  $L_\infty$  hata normlarının Ref. [74] ile karşılaştırılması

$A$	[74]	Galerkin Yöntemi	
	$t = 36$	$t = 36$	$t = 72$
$0.100 \times 10^{-8}$	$0.119 \times 10^{-8}$	$0.120 \times 10^{-8}$	$0.123 \times 10^{-8}$
$0.100 \times 10^{-6}$	$0.107 \times 10^{-3}$	$0.121 \times 10^{-6}$	$0.123 \times 10^{-6}$
0.100	$0.262 \times 10^{-2}$	$0.147 \times 10^{-3}$	$0.532 \times 10^{-3}$
0.369	$0.360 \times 10^{-1}$	$0.118 \times 10^{-1}$	$0.207 \times 10^{-1}$
0.5	$0.569 \times 10^{-1}$	$0.340 \times 10^{-1}$	$0.913 \times 10^{-1}$
1	0.454	0.432	0.650

### 3.3.2 İki Soliter Dalga Etkileşimi

Bu tezde, ilgilenilen model problemler için dalga etkileşimi olayları göz önüne alındı. GBq ve BBq denklemleri için birbirlerine doğru hareket eden iki soliter dalganın etkileşimi göz önüne alınmakla beraber ayrıca GBq denklemi için aynı yöne doğru hareket eden iki soliter dalganın etkileşimi de incelendi. Diğer model problemler için ise problemlerin yapısına uygun olarak soliter-soliter dalga etkileşimi için genliği pozitif olan iki soliter dalga ve soliter-antisoliter dalga etkileşimi için ise birinin genliği pozitif olan soliter dalga ile diğerinin genliği negatif olan antisoliter dalganın etkileşimi ele alındı.

#### Good Boussinesq denklemi için soliter dalga etkileşimi

Bu kısımda GBq denklemi tarafından üretilen iki soliter dalganın etkileşimi konu alındı. GBq denklemi için iki dalganın etkileşim problemi [73]

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\sum_{i=1}^2 A_i \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{A_i/6} (x - c_i t - \tilde{x}_i) \right) - \left( \tilde{b}_i + 1/2 \right) \\ c_i &= \pm \left( -2 \left( \tilde{b}_i + A_i/3 \right) \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.26)$$

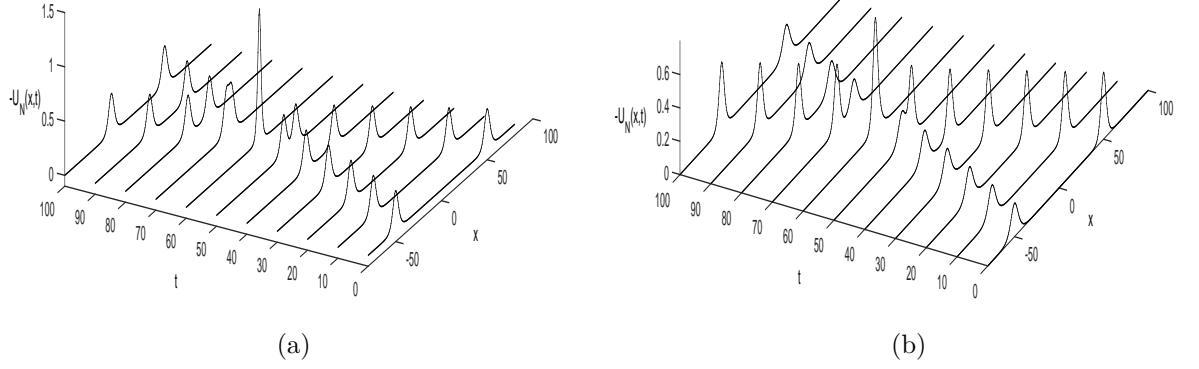
ile ifade edilir. Burada  $i = 1, 2$  olmak üzere (3.26) ile verilen çözüm,  $A_1$  ve  $A_2$  genliklerine sahip, başlangıçtaki  $\tilde{x}_1$  ve  $\tilde{x}_2$  noktalarına konumlandırılmış,  $c_1$  ve  $c_2$  hızları ile  $x$  ekseninde sağa doğru ilerleyen iki dalgayı temsil eder.

Bu çalışmada GBq denklemi için dalga etkileşimi problemi  $b_1 = b_2 = -1/2$  olmak üzere

$$f(x) = -A_1 \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{A_1/6} (x - \tilde{x}_1) \right) - A_2 \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{A_2/6} (x - \tilde{x}_2) \right)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= -2A_1 c_1 \sqrt{A_1/6} \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{A_1/6} (x - \tilde{x}_1) \right) \tanh \left( \sqrt{A_1/6} (x - \tilde{x}_1) \right) \\ &\quad - 2A_2 c_2 \sqrt{A_2/6} \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{A_2/6} (x - \tilde{x}_2) \right) \tanh \left( \sqrt{A_2/6} (x - \tilde{x}_2) \right) \end{aligned}$$

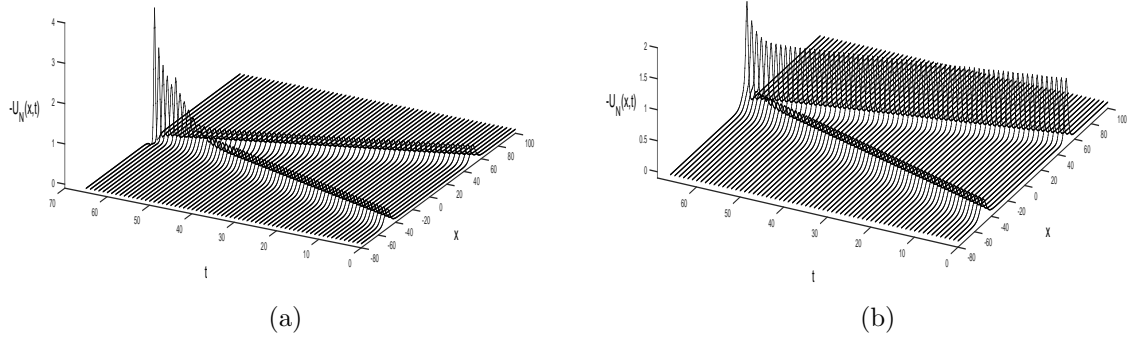
başlangıç koşulları ile eşit ve farklı genlikteki dalgalar göz önüne alınarak incelendi. Her iki durumda soliter dalgalar başlangıçta  $\tilde{x}_1 = -50$  ve  $\tilde{x}_2 = 50$  noktalarına konumlandırıldı ve problemin çalışıldığı aralık  $x \in [-80, 100]$ , zaman adımı  $\Delta t = 0.01$ , konum adımı  $h = 0.5$  ve  $t = 100$  seçildi. Daha sonra eşit genliğe sahip dalgalar için  $A_1 = A_2 = 0.369$  ve farklı genlikteki dalgalar için  $A_1 = 0.2$  ve  $A_2 = 0.4$  seçilerek soliter dalgaların  $c_1 = -c_2$  hızları ile birbirlerine doğru hareket ederek etkileşime girmeleri sağlandı. Eşit genliğe sahip dalgaların etkileşimi Şekil 3.5-(a), farklı genliğe sahip dalgaların etkileşimi ise Şekil 3.5-(b) de sunuldu. Şekillerden görüleceği üzere soliter dalgalar birbirlerinin varlığını algıladıkları andan itibaren yavaşça örtüşürler ve aynı genlikteki dalgalar yaklaşık olarak  $t \simeq 62$ , farklı genlikteki dalgalar yaklaşık olarak  $t \simeq 60$  da tek dalga formunda görünürler. Etkileşimden sonra ise dalgalar ayrılarak genliklerini ve şekillerini tekrar kazanırlar. Ayrıca, etkileşime giren soliter dalgalar arasında kalan bölgede görülebilir ikincil dalgalar bulunmamaktadır. Yani; etkileşim elastiktir. Bununla birlikte her iki durum içinde dalgalar örtüştüğünde bağlantı genliği iki dalganın genliğinin toplamından fazladır. Elde edilen sonuçlar literatürde bulunan [80, 81, 85, 87, 88, 90, 93, 95] referanslı çalışmalar ile uyum içerisindedir.



Şekil 3.5: GBq: Soliter dalga etkileşimi

Manoranjan [80] çalışmasında eşit genliğe sahip dalgaların etkileşim problemi için  $A > 0.369$  durumunda çözümün nümerik olarak patlayacağı fakat farklı genliğe sahip dalgaların etkileşimi probleminde bu durumun gözlenmeyeceğini rapor etmiştir. Bu nedenle eşit genlikli dalgalar için  $A_1 = A_2 = 0.4$  seçilerek problem ele alındı. Elde edilen sonuçlar Şekil 3.6 (a) de sunuldu. Şekilden dalgaların etkileşime girdikten sonra ayrılmadığı ve bağlantı anındaki dalğanın genliğinin hızla artarak yaklaşık  $t \simeq 65$  zamanında nümerik olarak patladığı gözlenmektedir. Farklı genlikteki dalgaların  $A > 0.369$  durumundaki etkileşim problemi ise  $A_1 = 0.2$  ve  $A_2 = 0.4$  seçimi için Şekil 3.5 (b) de sunulduğu gibidir. Genlik değerlerinin artışı için bu durumun incelenmesi amacı ile dalgaların genlikleri  $A_1 = 0.3$  ve  $A_2 = 1$  seçilerek nümerik sonuçlar Şekil 3.6 (b) de sunuldu. Şekilden görüleceği üzere Manoranjan [80]'nın aksine dalgalar etkileşime girdikten sonra tekrar ayrılmayıp bağlantı dalgasının genliği hızla artarak yaklaşık  $t \simeq 69$  zamanında çözüm patlamıştır. Sonuç olarak farklı genlikteki dalgaların

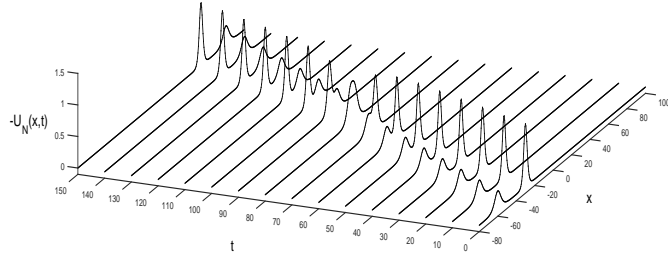
etkileşim problemi için Zoheiry [85]'nin de belirttiği gibi etkileşime giren dalgaların genliği yeterince büyük ise etkileşim problemi, çözümün patlaması ile sonlanacaktır.



Şekil 3.6: GBq: Soliter dalganın etkileşiminde çözümün patlaması

Ismail ve Mosally [95]'in çalışmalarında ise aynı yöne doğru hareket eden ve farklı genliklere sahip olan dalgaların etkileşimi probleminde genlik değerinin  $A \leq 1.15$  seçimi için çözümlerin nümerik olarak patlamayacağını ifade ettiler. Bu nümerik deneyimlere ulaşmak için problemin çalışıldığı aralık, zaman ve konum adımı eşit ve farklı genlikli dalgaların etkileşim problemi ile aynı seçildi. Aynı yöne doğru hareket eden dalgaların etkileşiminin tamamlanması için  $t = 150$  seçildi. Genlikleri  $A_1 = 0.3$  ve  $A_2 = 1$  olan ve başlangıçta  $\tilde{x}_1 = -60$  ve  $\tilde{x}_2 = -30$  noktalarına konumlandırılarak  $c_1$  ve  $c_2$  hızları ile  $x$  ekseninde sağa doğru hareket eden soliter dalgaların etkileşimi incelendi. Elde edilen nümerik sonuçlar ise Şekil 3.7 de sunuldu. Şekilden hızlı olan dalganın yavaş olan dalgaya yetişerek yavaş olan dalga ile etkileşime girdiği ve  $t \simeq 80$  zamanında etkileşen dalgaların örtüşerek tek bir dalga formunda olduğu, etkileşimden sonra ise her iki dalganın ayrılarak şeklini ve genliğini dolayısıyla hızını tekrar kazandıkları görülmektedir. Etkileşim sonrasında her iki dalganın arkasında kalan

bölgede görülebilir ikinci dalgalar bulunmamaktadır. Ayrıca birbirlerine doğru hareket eden dalgaların etkileşiminin aksine aynı yöne doğru hareket eden dalgalar örtüştüğünde bağlantı dalgasının genliği her bir dalganın genliğinin toplamından daha azdır. Elde edilen sonuçlar [95] referanslı çalışma ile uyum içerisindedir.



Şekil 3.7: GBq için aynı yöne doğru hareket eden soliter dalgaların etkileşimi

### Bad Boussinesq denklemi için soliter dalga etkileşimi

Bad Boussinesq denklemi tarafından üretilen iki soliter dalganın etkileşimi

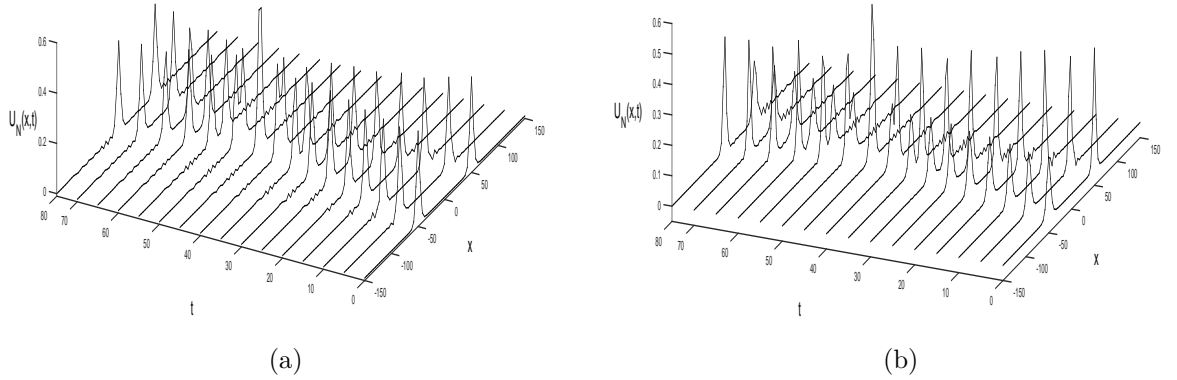
$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{i=1}^2 A_i \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{A_i/6} (x - c_i t - \tilde{x}_i) \right) + \left( \tilde{b}_i - 1/2 \right) \\ c_i &= \pm \left( 2 \left( \tilde{b}_i + A_i/3 \right) \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

çözüm formu ile ele alınır. Burada  $i = 1, 2$  ve  $A_i$  dalgaların genliklerini,  $\tilde{x}_i$  başlangıç konumlarını ve  $c_i$  ( $c_1 = -c_2$ ) dalgaların hızlarını simgelemek üzere birbirlerine doğru hareket eden iki soliter dalganın etkileşimi problemi  $b_1 = b_2 = 1/2$  seçilerek

$$f(x) = A_1 \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{A_1/6} (x - \tilde{x}_1) \right) + A_2 \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{A_2/6} (x - \tilde{x}_2) \right)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= 2A_1 c_1 \sqrt{A_1/6} \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{A_1/6} (x - \tilde{x}_1) \right) \tanh \left( \sqrt{A_1/6} (x - \tilde{x}_1) \right) \\ &\quad + 2A_2 c_2 \sqrt{A_2/6} \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{A_2/6} (x - \tilde{x}_2) \right) \tanh \left( \sqrt{A_2/6} (x - \tilde{x}_2) \right) \end{aligned}$$

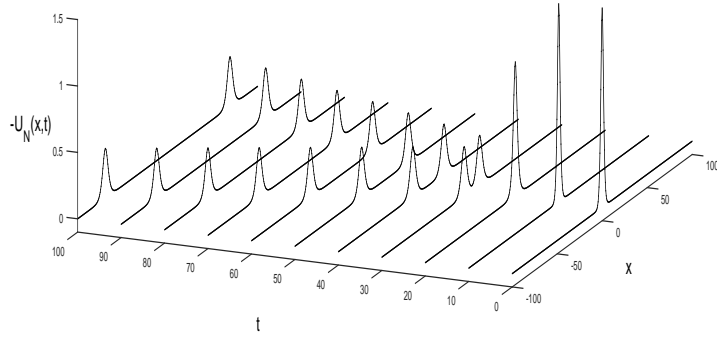
başlangıç koşulları ile ele alındı. İki soliter dalganın etkileşimi eşit ve farklı genlikteki dalgalar göz önüne alınarak incelendi. Her iki durumda da problemin çalışıldığı aralık etkileşimin tamamlanması amacı ile  $x \in [-150, 150]$  seçilerek dalgalar başlangıçta  $\tilde{x}_1 = -40$  ve  $\tilde{x}_2 = 40$  noktalarına konumlandırıldı. Eşit genliğe sahip dalgalar için  $A_1 = A_2 = 0.369$  ve farklı genliğe sahip dalgalar için  $A_1 = 0.2$  ve  $A_2 = 0.4$  seçilerek  $h = 4$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $t = 72$  değerleri ile elde edilen sonuçlar Şekil 3.8 (a) ve (b) de sırasıyla sunuldu. Her iki durumda da dalgaların zaman içerisinde örtüşerek tek bir dalga formunu aldığı, bağlantı noktasındaki genliğin her iki dalganın genliğinin toplamından daha büyük olduğu ve etkileşim sonrasında dalgaların genliklerinde ihmal edilebilir oranda bir değişim olduğu sonucuna varıldı. Elde edilen yeni sonuçlar literatürde bulunan [87, 88, 93] çalışmalar ile uyum içerisinde.



Şekil 3.8: BBq: Soliter dalga etkileşimi

### 3.3.3 Soliter Dalga Ayrılması

Dalga ayrılması, lineer olmayan oluşum denklemleri teorisinin önemli bir alanıdır. Burada konu alınan olay bir soliter dalganın ilerleyen zaman içinde iki veya daha fazla soliter dalgaya ayrılarak bir miktar radyasyon ortaya çıkarmasıdır. Bu problemde GBq denklemi tarafından üretilen soliter dalganın ayrılması soliter dalganın başlangıçtaki hızı  $c = 0$  seçilmesi ile elde edilen  $A = 1.5$  civarında genlik değerinin seçilmesi elde edilir. Problemin çalışıldığı aralık  $x \in [-100, 100]$  olmak üzere,  $\Delta t = 0.025$ ,  $h = 0.5$  ve  $t = 70$  değerleri için  $A = 1.49999$  genliğine sahip ve başlangıçta  $\tilde{x}_0 = 0$  noktasına konumlandırılmış olan soliter dalganın ayrılması Şekil 3.9 da sunuldu.



Şekil 3.9: GBq için  $x \in [-100, 100]$ ,  $A = 1.49999$ ,  $h = 0.5$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $\tilde{x}_0 = 0$  ve  $t = 70$  değerlerinde soliter dalga ayrılması

Şekilden görüleceği üzere başlangıç dalgası zamanın ilerlemesi ile  $t \approx 20$  zamanından sonra genlikleri yaklaşık  $A_1 = A_2 = 0.373831$  ve hızları  $c = 0.8665$  olan zıt yönlere ilerleyen iki simetrik dalgaya ayrılır. Elde edilen sonuçlar literatürde bulunan [81, 85, 87, 95] çalışmalarla uyum içerisindedir.

## 4. IMPROVED BOUSSINESQ DENKLEMLERİ

Bu kısımda Boussinesq tipi denklemlerden Improved Boussinesq denklemi (IBq), Improved Boussinesq (IBq) tipi denklem ve modifiye edilmiş Improved Boussinesq denklemi (MIBq) tanıtılarak denklemlerin literatür araştırmaları sunuldu. Daha sonra kuadratik B-spline baz fonksiyonları yardımıyla model problemlerin Galerkin sonlu eleman formülasyonları oluşturularak nümerik örnekler ve sonuçlar verildi.

### 4.1 Improved Boussinesq Denklemi

Bogolubsky [79, 98], Boussinesq denkleminin kısa dalga uzunlukları için Cauchy problemini sağlamadığını gösterdikten sonra Makhankov [78],  $u_{xxxx}$  teriminin  $u_{xxt}$  terimi ile değiştirerek ile fiziksel olarak kararlı, Cauchy problemini sağlayan ve bilgisayar simülasyonuna uygun

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{xxtt} + (u^2)_{xx}$$

Improved Boussinesq denklemini elde etti. IBq denklemi; iyon ses dalgalarının yayılımının modellenmesinde [78], lineer olmayan dalga dinamikleri ve ortamda zayıf dalga yayılımlarında, dairesel kesitlerle bölünmüş elastik çubuklardaki akustik dalgaların modellenmesinde karşılaşılan kısmi diferansiyel denklemlerden biridir [99].

IBq denklemi üzerine yapılan çalışmalardan bazıları:

Soerensen vd. [99], elastik çubuklarda boyamsal dalgalar için çalışmalar yapmak amacı ile kuadratik ve kübik nonlineerlik içeren IBq tipi denklemleri ele aldılar.

Çalışmalarında soliter-soliter ve soliter-antisoliter dalga etkileşimlerini incelediler. Her iki durumda da soliter dalgaların etkileşimden sonra hızlarını ve şekillerini korudukları fakat kübik durumda, kuadratik duruma göre daha güçlü radyasyon alanı oluştuğu ayrıca soliter-antisoliter etkileşiminde soliter-soliter etkileşimine göre daha güçlü radyasyon açığa çıktığı sonucuna vardılar. Zhang ve Lu [100], sonlu hacim yöntemi kullanarak IBq denklemi için bir nümerik şema elde ettiler. Yöntemi uygularken eleman şekil fonksiyonlarını Lagrange tipi kuadratik fonksiyonlardan seçtiler ve şemanın kararlılık analizini Von Neumann yöntemi ile yaptılar. Nümerik örnek olarak dalga hareketi, etkileşim, dalga ayrılması ve çözüm patlaması problemlerini ele aldılar. Iskandar ve Jain [101], IBq denkleminde sonlu fark yaklaşımı ve lineerleştirme tekniği uyguladılar. Böylece üç zaman seviyeli iteratif şema elde ettiler ve bu şemanın çözümünde Thomas algoritması kullandılar. Von Neumann kararlılık analizi ile oluşturdukları şemanın şartsız kararlı olduğunu gösterdiler. Nümerik örnek olarak dalga hareketi ve dalga etkileşimi problemlerini ele aldılar. Dalga etkileşimi problemi ile soliter dalgaların genliğinin  $A \ll 1$  olduğu durumda etkileşimin elastik,  $A \geq 1$  durumunda inelastik olduğu sonucuna vardılar. El-Zoheiry [102], temeli kompakt kapalı yönteme dayanan üç zaman seviyeli bir nümerik şema oluşturdu. Elde ettiği şemanın lineerleştirilmiş formuna von Neumann kararlılık analizi uygulayarak şartsız kararlı olduğunu gösterdi ve şemanın nümerik çözümlerini Thomas algoritması ile elde etti. Nümerik çalışmalarında ise dalga hareketi ve dalga etkileşimi konularını inceledi. Yang ve Wang [103], IBq denkleminin  $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$  türevli sınır koşulları ve  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x)$  başlangıç koşulları ile ele alarak çözümünün varlığı, tekliği ve çözüm patlaması problemleri üzerinde çalıştılar. Burada  $i = 0, 1, 2$  ve  $j = 1, 2$  için  $\varphi_i, \psi_j$  reel sabitler ve  $\varphi(x), \psi(x)$  sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$\varphi(x) = \varphi_0/2 + \varphi_1 \cos \pi x + \varphi_2 \cos 2\pi x$  ve  $\psi(x) = \psi_1 \cos \pi x + \psi_2 \cos 2\pi x$  dir. İnç ve Evans [104], IBq denklemini çözmek için Adomian ayrışım yöntemi kullandılar. Bu yöntemde çözümü, katsayılar ile yazılmış bir kuvvet serisi formunda ifade ettiler. Dalga hareketi problemi yardımıyla yöntemin doğruluğu ve etkinliğini gösterdiler. Ancak seride diferansiyeli ve integrasyonu ağır işlemler gerektiren kompleks terimler bulunmaktadır. Bu nedenle nümerik çözümler  $t$  'nin çok küçük değerleri için tam çözümlerle karşılaştırıldı. [105] ' de ise Wazwaz, IBq denkleminin değişkenlerini pozitif ve negatif üslerle ele aldı ve lineer olmayan değişkenlerin kompakt ve kompakt olmayan fiziksel yapılara neden olduğunu gösterdi. Bu değişkenlerin çözümü için bir sine-cosine yöntemi kullandı. Yaptığı analizler sonucunda çözümlerin kompaktlar, soliter modeller, periyodik çözümler ve solitonlar olabileceği sonucuna vardı. Bratsos [106, 107], iyi ve kötü durumlu IBq denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için temeli rasyonel yaklaşımlara dayanan ikinci mertebeden sonlu fark yaklaşımı kullanarak üç zaman seviyeli bir nümerik şema elde etti. Nümerik örnekler yardımıyla şemaların analizini yaptı ve hiçbir nümerik çalışmasında çözümün patlaması problemi ile karşılaşmadı. Elde ettiği sonuçların literatürde bilinen çalışmalarla benzer davranışlar sergilediğini belirtti. [107]'de ise IBq denkleminin nümerik çözümlerine ulaşmak için Predictor-Corrector yöntemi ile ilişkili kapalı sonlu fark şeması oluşturuldu. Bratsos, dalga hareketi ve etkileşim problemleri ile elde ettiği şemanın etkinliğini test etti ve çalışmalarını [101], [102] referanslı çalışmalar ile karşılaştırdı. Lin ve Wu [108], IBq denklemine lineer B-spline bazlar kullanarak Galerkin sonlu eleman yöntemi uyguladı. İkinci mertebeden zamana göre türev içeren denklemi bir yardımcı değişken ile zamana göre birinci mertebeden türev içeren iki denkleme dönüştürerek lineer olmayan sistem elde ettiler. Bu sistemi iç iterasyonlarla

lineerleştirdikten sonra Runge-Kutta-Verner yöntemi ile çözümlerini elde ettiler. Nümerik örnek olarak dalga hareketi, dalga etkileşimi, dalga ayrılması ve çözümün patlaması problemlerini ele aldılar. Irk ve Dağ [109], Improved Boussinesq denklemi için iki nümerik yöntem geliştirdiler. İlk nümerik yöntemde, beş nokta sonlu fark yaklaşımı yardımıyla denklem için bir şema oluşturdular ve zamana göre türev içeren terimler için merkezi sonlu farklar ve diğer tüm terimler için ise  $u = \alpha_1 u^{n+1} + \alpha_2 u^n + \alpha_3 u^{n-1}$  şeklinde bir yaklaşım uyguladılar.  $\alpha_j$  'leri doğruluğu en yüksek olacak şekilde belirleyerek sonlu fark şeması elde ettiler ve bu şemaları Thomas algoritması ile çözdüler. İkinci nümerik yöntem olarak denkleme kuintik B-spline bazlar yardımıyla kollokasyon sonlu eleman yöntemi uyguladılar ve yine  $\alpha_j$  nin farklı seçimleri için iki şema elde ederek bu şemaları da Thomas algoritması ile çözdüler. Nümerik örnek olarak ise dalga hareketi ve etkileşim konularını ele aldılar. Shokri ve Dehghan [110], denkleme radyal baz fonksiyonları kullanarak, ağırsız yöntem ile kollokasyon yaklaşımı uyguladılar. Elde ettikleri lineer olmayan sistemi çözmek için ise üç zaman seviyeli bir yaklaşım içeren Predictor-Corrector şeması geliştirdiler. Çalışmalarında dalga hareketi ve etkileşimi problemlerini ele aldılar. Etkileşim probleminde soliter dalgaların genlik değerlerinin  $A > 0.4$  olduğu durumda etkileşimin inelastik olduğu sonucuna vardılar. Abdou vd. [111], IBq denkleminin genelleştirilmiş soliter çözümlerini ve periyodik çözümlerini elde etmek için üstel fonksiyon yöntemi ile sembolik hesaplamayı kullandılar. Bulut vd. [113], IBq denklemi ve Burgers tipi denklemlerin bazı tam çözümlerini geliştirilmiş Tanh fonksiyon yöntemini kullanarak elde ettiler. Wang vd. [114], IBq denklemi için enerji koruyan sonlu hacim şeması dizayn ettiler. Amaçlanan şemanın enerji ve kütleyi koruduğunu göstererek, şemanın etkinliğini dalga hareketi, etkileşimi ve dalga ayrılması problemlerini çalışarak teorik analizler

ile gösterdiler.

Tezin bu kısmında IBq denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için kuadratik B-spline bazlar kullanılarak IBq denkleminin Galerkin sonlu eleman yöntemi uygulandı. Yöntemin uygulanmasından önce zamana göre ikinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem olan IBq denklemini ayrıştırma yöntemi ile zamana göre birinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem sistemine indirgendikten sonra denklemin sonlu eleman modeli oluşturuldu. Daha sonra bu model yardımıyla denklemin yapısına uygun olarak sırasıyla dalga hareketi, dalga etkileşimi, soliton doğumu olarak adlandırılan dalga ayrılması ve çözüm patlaması problemleri ele alındı.

#### 4.1.1 IBq Denklemi için Galerkin Sonlu Eleman Modeli

Bu kısımda

$$u_{tt} = u_{xx} + (u^2)_{xx} + u_{xxtt} \quad (4.1)$$

Improved Boussinesq denklemi

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad x \in [a, b] \quad (4.2)$$

başlangıç koşulları ve

$$\begin{aligned} u(a, t) = u(b, t) &= 0 \\ u_x(a, t) = u_x(b, t) &= 0 \end{aligned} \quad t \in [0, T] \quad (4.3)$$

sınır koşulları ile ele alındı. Burada  $f(x)$  ve  $g(x)$  bilinen fonksiyonlar olmak üzere  $u = u(x, t)$  yeterince türevlenebilir bir fonksiyondur. Alt indis olarak belirtilen  $x$  ve  $t$  değişkenleri sırasıyla konuma ve zamana göre kısmi türevi simgelemektedir.  $A$ , (4.1) ile verilen IBq denkleminin ürettiği soliter dalganın genliği,  $c$  hızı ve  $\tilde{x}_0$

ise dalganın başlangıçtaki konumu olmak üzere (4.1) denkleminin soliter dalga tipi çözümü

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{c} \sqrt{\frac{A}{6}} (x - ct - \tilde{x}_0) \right) \quad (4.4)$$

olup dalganın hızı

$$c = \pm (1 + 2A/3)^{1/2} \quad (4.5)$$

ile verilir [101].

Başlangıç koşulunda görülen  $f(x)$  fonksiyonu problemin tam çözümünde  $t = 0$  seçilmesi ve  $g(x)$  fonksiyonu ise tam çözüm fonksiyonunun  $t$  bağımsız değişkenine göre kısmi türevinde  $t = 0$  seçilmesi ile elde edilen yeterince türevlenebilen fonksiyonlardır. Daha önce ele alınan Boussinesq denkleminde yapılan ayrıştırma işlemi (4.1) ile verilen IBq denkleminde uygulanırsa,  $v$  yardımcı fonksiyon olmak üzere

$$u_t = v \quad (4.6)$$

$$v_t = u_{xx} + (u^2)_{xx} + v_{xxt}$$

şeklinde denklem sistemine indirgenir. Ayrıştırma tekniğinin avantajlarından söz edilirken ayrıştırılan denklemin orjinal denklemin özelliklerini koruduğundan söz edilmişti. Dolayısıyla (4.1) ile verilen Improved Boussinesq denkleminin nümerik çözümlerinin elde edilmesi yerine (4.6) ayrıştırılmış sistemin nümerik çözümlerinin elde edilmesi aynı anlamdadır. Galerkin sonlu eleman yöntemini uygulamak için ilk adım; (4.6) ile verilen ayrıştırılmış denklem sisteminin ağırlıklı kalan formunu ve bu form yardımıyla zayıf formunu elde etmektir. Böylece (4.6) ile verilen denklem sistemindeki her bir denklem  $W$  ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak problemin çalışıldığı bölge üzerinde integrali alınırsa (4.6) ile verilen denklem sisteminin ağırlıklı kalan

formu

$$\int_a^b W (u_t - v) dx = 0$$

$$\int_a^b W (v_t - u_{xx} - (u^2)_{xx} - v_{xxt}) dx = 0$$
(4.7)

olarak elde edilir. Sistemin ağırlıklı kalan formunda denklem üzerindeki diferansiyellenebilme şartının ağırlık fonksiyonu üzerine dağıtılması için (4.7) ile verilen sisteme kısmi integrasyon uygulanırsa (4.6) ile verilen denklem sisteminin zayıf formu

$$\int_a^b (W u_t - W v) dx = 0$$

$$\int_a^b (W v_t + W_x u_x + 2W_x u u_x + W_x v_{xt}) dx$$

$$= [W u_x + 2W u u_x + W v_{xt}]_a^b$$
(4.8)

olarak elde edilir. Yöntemin uygulanması için bir sonraki adımda çalışma bölgesi olarak alınan  $[a, b]$  aralığı

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

olacak şekilde daha küçük ve eşit alt aralıklar formunda  $N$  sonlu elemana bölünür ve  $m = 0, 1, 2, \dots, N$  için  $\{x_m\}_{m=0}^N$  düğüm noktalarını temsil etmek üzere her bir elemanın uzunluğu  $h = x_{m+1} - x_m$  seçilir. Bu problemde eleman şekil fonksiyonları Blüm 2. de (2.11) ile verilen kuadratik B-spline fonksiyonları olarak seçilir. Problemin sırasıyla  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  tam çözümlerine karşılık gelen  $U_N(x, t)$  ve  $V_N(x, t)$  yaklaşık çözümleri kuadratik bazlar cinsinden verilen bölge üzerinde

$$U_N(x, t) = \sum_{i=1}^N \delta_j(t) \Phi(x)$$

$$V_N(x, t) = \sum_{i=1}^N \sigma_j(t) \Phi(x)$$
(4.9)

şeklinde oluşturulur. Burada  $\delta_j(t)$  ve  $\sigma_j(t)$  belirlenecek olan zamana bağlı parametrelerdir. Eleman denklemlerinin sistematik bir biçimde türetilmesi ilkesi ile global bazlardan lokal bazlara geçiş yapılmalıdır böylece tipik bir  $[x_m, x_{m+1}]$  elemanı üzerinde (2.11) ile verilen kuadratik B-spline fonksiyonları,  $0 \leq \xi \leq h$  olmak üzere  $\xi = x - x_m$  dönüşümü yardımıyla

$$\begin{aligned}\phi_{m-1} &= (h - \xi)^2 / h^2 \\ \phi_m &= (h^2 + 2h\xi - 2\xi^2) / h^2 \\ \phi_{m+1} &= \xi^2 / h^2\end{aligned}\tag{4.10}$$

olarak elde edilir. (4.9) ile verilen  $U_N(x, t)$  ve  $V_N(x, t)$  yaklaşık çözümleri tipik bir  $[x_m, x_{m+1}]$  elemanı üzerinde kuadratik B-spline bazlar cinsinden

$$\begin{aligned}U_N &= \sum_{j=m-1}^{m+1} \delta_j(t) \phi_j \\ V_N &= \sum_{j=m-1}^{m+1} \sigma_j(t) \phi_j\end{aligned}\tag{4.11}$$

olarak ifade edilir. (4.10) ile verilen kuadratik B-spline fonksiyonları ile (4.11) yaklaşımlarının  $x_m$  noktasında  $U_N, V_N$  ve  $U'_N, V'_N$  'nin  $\delta$  ve  $\sigma$  parametreleri cinsinden noktasal değerleri

$$\begin{aligned}U_N(x_m, t) &= \delta_{m-1} + \delta_m \\ V_N(x_m, t) &= \sigma_{m-1} + \sigma_m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U'_N(x_m, t) &= \frac{2}{h} (\delta_m - \delta_{m-1}) \\ V'_N(x_m, t) &= \frac{2}{h} (\sigma_m - \sigma_{m-1})\end{aligned}$$

dır. IBq denkleminin tipik bir  $[x_m, x_{m+1}]$  elemanı için zayıf formu

$$\begin{aligned} & \int_{x_m}^{x_{m+1}} (Wu_t - Wv) dx \\ & \int_{x_m}^{x_{m+1}} (Wv_t + W_x u_x + 2W_x u u_x + W_x v_{xt}) dx \\ & - [Wu_x + 2Wu u_x + Wv_{xt}]_{x_m}^{x_{m+1}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

şeklindedir. (4.11) ile verilen yaklaşık çözüm fonksiyonları ve  $W_i = \phi_j$  formunda seçilen ağırlık fonksiyonlarının (4.12) ile verilen denklemin zayıf formunda yerine yazılması ile

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left( \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi \right) \dot{\delta}_j^e - \left( \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi \right) \sigma_j^e \right\} \\ & \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left( \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi \right) \dot{\sigma}_j^e + \left( \int_0^h \phi_i' \phi_j' d\xi \right) \delta_j^e + 2 \sum_{k=m-1}^{m+1} \left( \int_0^h \phi_i' \phi_j' \phi_k d\xi \right) \delta_j^e \delta_k^e \right. \\ & \quad \left. + \left( \int_0^h \phi_i' \phi_j' d\xi \right) \dot{\sigma}_j^e \right\} - \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ (\phi_i \phi_j') \delta_j^e \right. \\ & \quad \left. - 2 \sum_{k=m-1}^{m+1} (\phi_i \phi_j' \phi_k) \delta_j^e \delta_k^e + (\phi_i \phi_j') \dot{\sigma}_j^e \right\}_0^h \end{aligned} \quad (4.13)$$

denklemler sistemi elde edilir. Burada “ $\dot{\cdot}$ ” ifadesi eleman parametrelerinin  $t$  bağımsız değişkenine, “ $\prime$ ” ise eleman şekil fonksiyonlarının  $x$  bağımsız değişkenine göre kısmi

türevini simgeler. (4.13) sistemindeki eleman matrisleri

$$\tilde{A}_{ij}^e = \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi$$

$$B_{ij}^e = \int_0^h \phi_i' \phi_j' d\xi$$

$$C_{ijk}^e(\delta) = 2 \int_0^h \phi_i' \phi_j' \phi_k d\xi$$

$$D_{ij}^e = \phi_i \phi_j' \Big|_0^h$$

$$E_{ijk}^e(\delta) = 2 \phi_i \phi_j' \phi_k \Big|_0^h$$

olarak adlandırılır ve integral hesaplamaları yapılarak eleman matrisleri

$$\tilde{A}_{ij}^e = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{bmatrix},$$

$$B_{ij}^e = \frac{2}{3h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C_{ijk}^e(\delta) = \frac{h}{15} \begin{bmatrix} (24, -18, -6) \delta & (52, -24, -28) \delta & (4, 2, -6) \delta \\ (-18, 16, 2) \delta & (-24, 48, -24) \delta & (2, 16, -18) \delta \\ (-6, -2, 4) \delta & (-28, -24, 52) \delta & (-6, -18, 24) \delta \end{bmatrix},$$

$$D_{ij}^e = \frac{2}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_{ijk}^e(\delta) = \frac{4}{h} \begin{bmatrix} (1, -1, 0) \delta & (1, -1, 0) \delta & (0, 0, 0) \delta \\ (1, -1, 0) \delta & (1, -2, 1) \delta & (0, -1, 1) \delta \\ (0, 0, 0) \delta & (0, -1, 1) \delta & (0, -1, 1) \delta \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. O halde tipik bir eleman üzerinde (4.13) denklem sistemi matris formunda

$$\dot{\delta}^e - \sigma^e \\ \left( \tilde{A}^e + B^e - D^e \right) \dot{\sigma}^e + (B^e - D^e + C^e(\delta^e) - E^e(\delta^e)) \delta^e$$

şeklindedir. Her bir eleman için elde edilen matrislerin birleştirilmesi ile matrislerin genel satırları

$$\tilde{A} : \frac{h}{30} (1, 26, 66, 26, 1),$$

$$B : \frac{2}{3h} (-1, -2, 6, -2, -1),$$

$$C(\delta) : \frac{h}{15} ((-6, 2, 4, 0, 0) \delta, (-28, -42, 68, 2, 0) \delta, \\ (-6, -42, 96, -42, -6) \delta, (0, 2, 68, -42, -28) \delta, (0, 0, 4, 2, -6) \delta)$$

$$D : \frac{2}{h} (0, 0, 0, 0, 0),$$

$$E(\delta) : \frac{4}{h} (0, 0, 0, 0, 0)$$

dır. Birleştirilmiş matrisler ile tüm bölge üzerinde denklem sisteminin matrisler cinsinden ifadesi

$$\dot{\delta} = \sigma \\ \dot{\sigma} = - \left( \tilde{A} + B - D \right)^{-1} (B - D + C(\delta) - E(\delta)) \delta \quad (4.14)$$

biçimindedir. Burada  $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$  ve  $\sigma = (\sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_N)^T$  olmak üzere tüm bölge üzerinde elde edilmek istenen zamana bağlı parametrelerdir.

Böylece IBq denklemi çözümü problemi, sonlu eleman yönteminin uygulanması ile (4.14) ile verilen  $(N + 2)$  bilinmeyen ve  $(N + 2)$  denklemden oluşan diferansiyel denklem sisteminin çözümü problemine dönüşür. (4.14) ile verilen denklem sisteminin çözümüne başlamadan önce sınır koşullarının uygulanması adımına geçilmelidir. Bu adımda

$$u(x_0, t) = U_N(x_0, t) = \delta_{-1} + \delta_0$$

$$v(x_0, t) = V_N(x_0, t) = \sigma_{-1} + \sigma_0$$

$$u(x_N, t) = U_N(x_N, t) = \delta_{N-1} + \delta_N$$

$$v(x_N, t) = V_N(x_N, t) = \sigma_{N-1} + \sigma_N$$

sınır koşulları yardımıyla her bir sistemden  $\delta_{-1}$ ,  $\delta_N$  bilinmeyenleri  $\delta_0$ ,  $\delta_{N-1}$  ve  $\sigma_{-1}$ ,  $\sigma_N$  bilinmeyenleri  $\sigma_0$ ,  $\sigma_{N-1}$  cinsinden yazılarak sistemde yok edilir. Bu uygulamanın ardından her biri  $(N \times N)$  tipinde diferansiyel denklem sistemleri elde edilmiş olur. Denklem sistemlerinin  $\delta_j$  ve  $\sigma_j$  parametrelerine göre nümerik çözümleri uygun yöntemlerden herhangi biri ile elde edilebilir. Bu çalışmada uygulanma kolaylığı ve etkinliği nedeniyle dördüncü mertebeden Runge-Kutta (RK4) yöntemi kullanıldı. RK4 yönteminin kullanılması ile  $\delta^{n+1}$  ve  $\sigma^{n+1}$  parametreleri  $\delta^n$  ve  $\sigma^n$  parametreleri yardımıyla iteratif olarak elde edilir. İteratif işlemlere başlamak için  $t = 0$  zamanında  $\delta^0$  ve  $\sigma^0$  başlangıç değerlerinin bilinmesi gerekir. Bu değerler ise (4.9) yaklaşık çözümlerinin  $t = 0$  zamanındaki değerleri

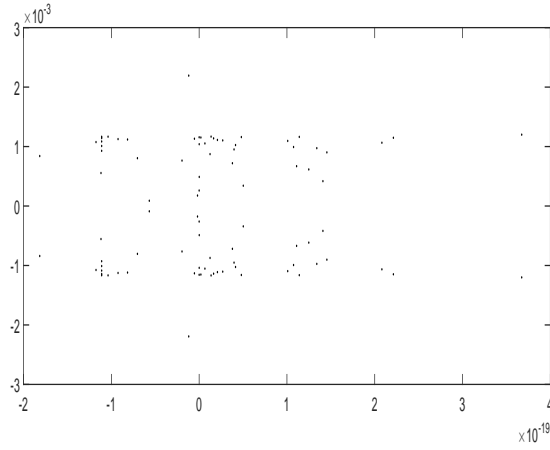
$$U_N(x_m, 0) = \sum_{j=-1}^N \delta_j^0 \phi_j$$

$$V_N(x_m, 0) = \sum_{j=-1}^N \sigma_j^0 \phi_j$$





şeklinde ifade edilir. Bölüm 2 de açıklandığı üzere (4.14) denklem sistemine uygulanan dördüncü mertebeden Runge-Kutta yönteminin kararlılığı (4.18) ile verilen  $K$  matrisinin özdeğerlerine bağlıdır.  $K$  matrisinin özdeğerleri  $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  için  $\lambda_j$  ler ile gösterilmek üzere,  $N = 44$  ve  $\Delta t = 0.001$  değerleri için  $\lambda_j$  özdeğerlerinin kompleks düzlemdeki konumları Şekil 4.1 de gösterildi. Şekilden görüldüğü üzere  $\lambda_j$  özdeğerleri, Şekil 2.5 ile gösterilen Runge-Kutta kararlılık bölgesi içerisinde olduğu fakat çok az miktarda özdeğerin  $\Delta t \lambda_j \leq 4 \times 10^{-19}$  olacak şekilde pozitif reel kısma sahip olduğu görülmektedir. Bu durumda ise [69] ile verilen referanstaki tolerans kullanılarak, Improved Boussinesq denkleminin nümerik çözümünde için kullanılan Runge-Kutta yönteminin kararlı olduğu sonucuna varılır.



Şekil 4.1: IBq:  $N = 44$  ve  $\Delta t = 0.001$  değerleri için  $\lambda_j$  özdeğerlerinin kompleks düzlemdeki konumları

### 4.1.3 Nümerik Örnekler ve Sonuçlar

Bir önceki kısımda (4.1) ile verilen IBq denkleminin sonlu eleman modeli oluşturuldu. Bu kısımda elde edilen model yardımıyla nümerik örnekler ve sonuçlar sunuldu.

Nümerik örnek olarak; dalga hareketi, dalga etkileşimi, dalga ayrılması ve çözüm patlaması problemleri incelendi. Dalga hareketi probleminde elde edilen  $U_N(x, t)$  yaklaşık çözümlerinin  $u(x, t)$  tam çözümü ile ne kadar uyumlu olduğu (3.25) ile verilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile ölçüldü.

### Dalga hareketi

Bu nümerik örnekte IBq denkleminin ürettiği soliter dalganın hareketi ele alındı. Denklemin tam çözümünde ve çözümün  $t$  bağımsız değişkenine göre kısmi türevinde  $t = 0$  seçilmesi ile başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} f(x) &= A \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{c}\sqrt{\frac{A}{6}}(x - \tilde{x}_0)\right) \\ g(x) &= 2A\sqrt{\frac{A}{6}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{c}\sqrt{\frac{A}{6}}(x - \tilde{x}_0)\right) \times \tanh\left(\frac{1}{c}\sqrt{\frac{A}{6}}(x - \tilde{x}_0)\right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

olarak elde edildi. Burada;  $A$  dalganın genliğini,  $c$  hızını ve  $\tilde{x}_0$  ise başlangıç durumunda konumlandığı yeri gösterir.

IBq denklemi tarafından üretilen soliter dalga, çözüm fonksiyonunun aralığın sınırlarında  $u \approx 0$  olmasını sağlamak için  $x \in [-80, 140]$  olarak seçildi. Çalışmamızda  $A$  genliğine sahip soliter dalga  $t = 72$  zamanına kadar  $c$  hızı ile  $x$  ekseninde sağa doğru hareket etmektedir.

Bu kısımda farklı genlik, zaman ve konum adımı seçimleri ile nümerik çözümler elde edildi. Hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları sırasıyla Tablo 4.1 ve Tablo 4.2 de sunuldu. Tablolardan,  $\Delta t$  zaman adımının azalan değerleri için hata normlarının azaldığı fakat  $h$  konum adımının azalması ile hata normlarında küçük bir değişim olduğu gözlemlendi.

Tablo 4.1: IBq: Farklı  $A$ ,  $\Delta t$  ve  $h$  değerleri için elde edilen  $L_2$  hata normları

$A$	$\Delta t$	$L_2 \times 10^3$			
		$h = 0.1$	$h = 0.2$	$h = 0.25$	$h = 0.5$
0.2	0.001	0.007553	0.011671	0.004031	0.010850
	0.025	0.011037	0.008618	0.008348	0.005628
	0.05	0.033356	0.032400	0.032269	0.029730
	0.1	0.129915	0.129233	0.129263	0.126512
	0.25	0.808817	0.808038	0.807795	0.805242
0.25	0.001	0.010282	0.001858	0.003809	0.006369
	0.025	0.018199	0.015802	0.015296	0.011082
	0.05	0.061957	0.060652	0.060590	0.056025
	0.1	0.242742	0.241996	0.241793	0.237292
	0.25	1.510986	1.511266	1.510769	1.506435
0.5	0.001	0.009214	0.052424	0.004880	0.036146
	0.025	0.111140	0.106918	0.104440	0.080297
	0.05	0.419592	0.415189	0.413469	0.389052
	0.1	1.658423	1.654639	1.653118	1.627687
	0.25	10.277500	10.273220	10.271300	10.246360

Tablo 4.2: IBq: Farklı  $A$ ,  $\Delta t$  ve  $h$  değerleri için elde edilen  $L_\infty$  hata normları

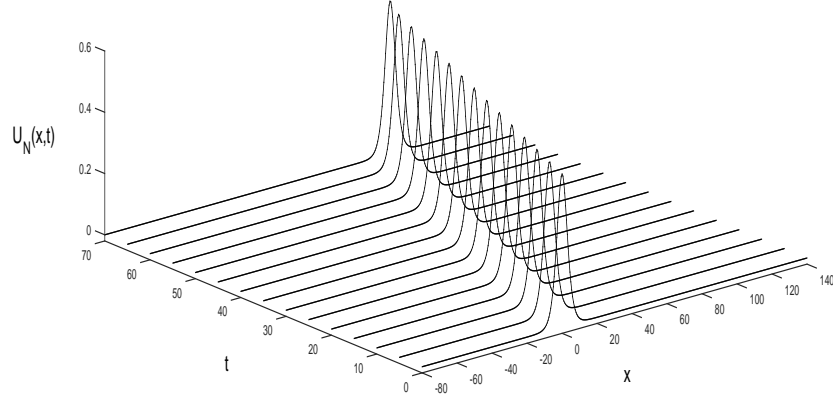
$A$	$\Delta t$	$L_\infty \times 10^3$			
		$h = 0.1$	$h = 0.2$	$h = 0.25$	$h = 0.5$
0.2	0.001	0.002031	0.004577	0.000991	0.001579
	0.025	0.002907	0.002941	0.002871	0.002093
	0.05	0.011855	0.012045	0.011965	0.011224
	0.1	0.048605	0.048796	0.048826	0.047817
	0.25	0.305993	0.306056	0.306006	0.304154
0.25	0.001	0.002390	0.000639	0.000980	0.002178
	0.025	0.005591	0.005647	0.005557	0.004167
	0.05	0.022888	0.022985	0.022962	0.021512
	0.1	0.092733	0.092827	0.092767	0.090906
	0.25	0.580247	0.580579	0.580728	0.576718
0.5	0.001	0.003711	0.008204	0.001400	0.015424
	0.025	0.042973	0.042469	0.041959	0.034386
	0.05	0.169141	0.168548	0.167993	0.160190
	0.1	0.674561	0.673786	0.672754	0.664029
	0.25	4.186985	4.183889	4.178461	4.170167

Elde edilen nümerik sonuçlar Irk ve Dağ [109]'ın sonuçları ile  $h = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.001$  değerleri için karşılaştırılarak Tablo 4.3 de sunuldu.

Tablo 4.3: IBq için  $L_\infty$  hata normlarının Ref. [109] ile karşılaştırılması

$A$	Galerkin yöntemi	[109]			
	$L_\infty \times 10^3$	$M1 \times 10^3$	$M2 \times 10^3$	$M3 \times 10^3$	$M4 \times 10^3$
0.25	0.000639	0.27403	0.00164	0.27290	0.00011
0.5	0.008204	1.02472	0.02404	1.004074	0.00080
0.75	0.003077	2.93470	0.13309	2.807873	0.00376
0.9	0.002708	5.00921	0.28976	4.73146	0.00785

Başlangıçta  $\tilde{x}_0 = 0$  noktasında konumlandırılan dalganın hareketinin nümerik simülasyonu ise  $A = 0.5$ ,  $\Delta t = 0.001$  ve  $h = 0.5$  değerleri için Şekil 4.2 de sunuldu. Dalganın şeklini ve hızını koruyarak  $t = 72$  zamanına kadar ilerlediği gözlemlendi.



Şekil 4.2: IBq için  $x \in [-80, 140]$ ,  $A = 0.5$ ,  $h = 0.5$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $\tilde{x}_0 = 0$  ve  $t = 72$  değerlerinde soliter dalga hareketi

$t = 0$  anında  $\tilde{x}_0 = 0$  noktasında konumlanan  $A = 0.5$  genlikli dalganın hızı teorik olarak (4.5) eşitliği yardımıyla  $c = 1.154701$  olarak elde edilir.  $t = 72$  zamanında ise dalganın konumu  $\tilde{x}_0 = 83$  olup genliği  $A = 0.499398$  dir. Dalganın aldığı ortalama

yolun, ortalama zamana oranı 1.152778 olup soliter dalganın büyük oranda sabit hızla ilerlediğini ve ihmal edilecek kadar az bir genlik kaybı olduğu ve soliter dalganın soliton tipi davranış sergilediği sonucuna varıldı. Elde edilen sonuçlar[100, 101, 102, 106, 107, 108, 109, 110, 114] çalışmalar ile uyum içerisindedir.

### İki soliter dalga etkileşimi

Dalga etkileşimi probleminde IBq denkleminin ürettiği ve karşılıklı ilerleyen iki soliter dalganın etkileşimi incelendi. (4.1) ile verilen Improved Boussinesq denklemi için iki soliter dalga etkileşimi

$$u(x, t) = A_1 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{c_1} \sqrt{\frac{A_1}{6}} (x - c_1 t - \tilde{x}_1) \right) + A_2 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{c_2} \sqrt{\frac{A_2}{6}} (x - c_2 t - \tilde{x}_2) \right) \quad (4.20)$$

ile ifade edilir. Denklem (4.2) ile verilen başlangıç koşullarında görülen  $f(x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonları (4.20)'den sırasıyla

$$f(x) = A_1 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{c_1} \sqrt{\frac{A_1}{6}} (x - \tilde{x}_1) \right) + A_2 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{c_2} \sqrt{\frac{A_2}{6}} (x - \tilde{x}_2) \right)$$

$$g(x) = 2A_1 \sqrt{\frac{A_1}{6}} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{c_1} \sqrt{\frac{A_1}{6}} (x - \tilde{x}_1) \right) \tanh \left( \frac{1}{c_1} \sqrt{\frac{A_1}{6}} (x - \tilde{x}_1) \right) + 2A_2 \sqrt{\frac{A_2}{6}} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{c_2} \sqrt{\frac{A_2}{6}} (x - \tilde{x}_2) \right) \tanh \left( \frac{1}{c_2} \sqrt{\frac{A_2}{6}} (x - \tilde{x}_2) \right)$$

olarak yazılır [101].

Bu başlangıç koşulları ile ilki  $A_1$  genliğine sahip,  $x$  ekseninde  $\tilde{x}_1$  noktasına konumlandırılmış ve  $c_1$  hızı ile sağa doğru hareket eden, ikincisi  $A_2$  genliği ile  $\tilde{x}_2$  noktasında konumlandırılmış  $c_2$  hızı ile sağa doğru hareket eden iki dalga modellendi. Bu çalışmada  $c_1 = (1 + 2A_1/3)^{1/2}$  ve  $c_2 = -(1 + 2A_2/3)^{1/2}$  seçimi ile iki dalganın birbirlerine doğru hareket etmesi ve etkileşime girmesi sağlandı.

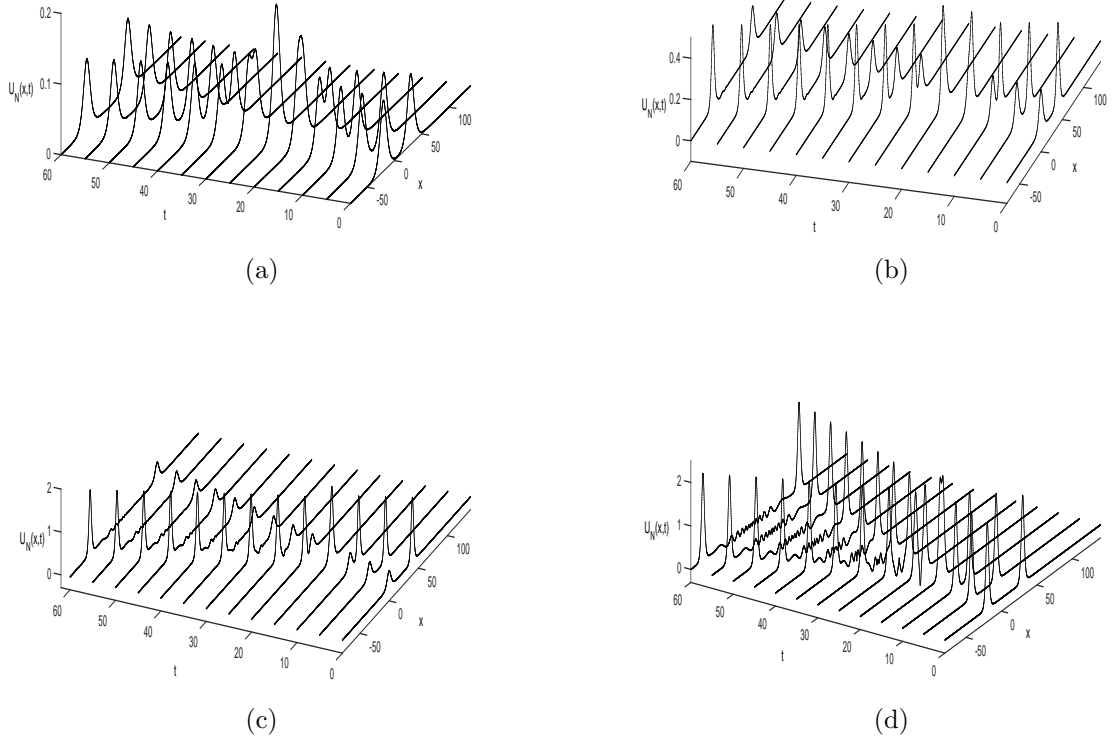
Soliter dalgaların etkileşimi eşit ve farklı genliklere sahip dalgalar için ele alındı. Daha önce yapılan nümerik çalışmalar örnek alınarak dalga genliği  $A < 0.5$  ve  $A \geq 0.5$  seçimleri için elastik ve elastik olmayan etkileşimler incelendi. Her iki durum için de üzerinde çalışılan bölge  $x \in [-80, 140]$ , zaman adımı  $\Delta t = 0.001$  ve konum adımı  $h = 0.1$  seçilerek etkileşim yapısı incelendi.

$A < 0.5$  durumunun incelenmesi için eşit genlikli dalgalar ele alındı böylece, birinci ve ikinci dalganın genliği  $A_1 = A_2 = 0.1$ , başlangıçta konumlandıkları noktalar  $\tilde{x}_1 = -20$  ve  $\tilde{x}_2 = 30$ , farklı genliklere sahip dalgaların etkileşimin incelenmesi amacı ile dalgaların genlikleri  $A_1 = 0.2$  ve  $A_2 = 0.4$ , başlangıçta konumlandıkları noktalar  $\tilde{x}_1 = 0$  ve  $\tilde{x}_2 = 40$  seçildi. Dalga etkileşimlerinin nümerik simülasyonları ise Şekil 4.3 (a) ve (b) de sırasıyla sunuldu. Şekillerden, her iki durumda dalgalar birbirlerinin varlıklarını algıladığı andan itibaren yavaşça örtüşmeye başlayarak üst üste geldikleri, etkileşimden sonra ise her iki dalganın şeklini ve hızını tekrar kazanarak ilerlemeye devam ettikleri gözlemlendi. Etkileşim sonrasında iki soliter dalganın arasındaki bölgede ihmal edilecek küçüklikte genliklere sahip ikincil dalgaların oluştuğu görüldü. Sonuç olarak, Şekil 4.3'den iki soliter dalganın, soliton benzeri davranış sergilediği ve etkileşimin elastik olduğu sonucuna varıldı. Elde edilen sonuçlar [101, 107] referanslı çalışmalar ile hemfikirdir.

$A \geq 0.5$  durumu için ise; eşit genlikler için  $A_1 = A_2 = 2$ , başlangıç konumundaki yerleri  $\tilde{x}_1 = -20$  ve  $\tilde{x}_2 = 30$  ve yine farklı genlikler için  $A_1 = 0.4$  ve  $A_2 = 1.5$ , başlangıç konumundaki yerleri  $\tilde{x}_1 = 0$  ve  $\tilde{x}_2 = 40$  olan dalgalar seçilerek etkileşim incelendi. Dalga etkileşimi Şekil 4.3 (c)-(d) de sırasıyla sunuldu. Şekillerden dalgaların etkileşim sırasında elastik etkileşim durumu ile benzer davranış sergiledikleri fakat etkileşimden sonra arkalarında daha belirgin, görülebilir ikincil dalgalar oluştuğu gözlemlendi.

Bu nedenle etkileşimin elastik olmadığı yani inelastik olduğu sonucuna varıldı. Elde edilen sonuçlar [100] çalışmasında verilen sonuçlar ile uyumludur.

Her dört durum için etkileşim anında gözlenen dalganın genliğinin her iki dalganın genliğinin iki katından daha büyük olduğu ve etkileşimin inelastikliğinin her iki dalganın genliklerinden herhangi birinin artması ile arttığı sonucuna varıldı. Elde edilen sonuçlar literatürde bulunan [101, 102, 107, 114] çalışmalarla uyum içindedir.



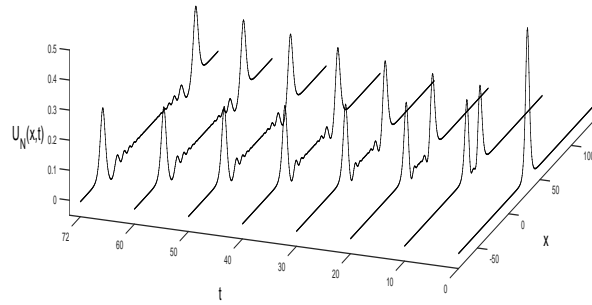
Şekil 4.3: IBq: Soliter dalga etkileşimi

## Soliter dalga ayrılması

Üçüncü problem olarak ele alınan bu nümerik çalışmada,  $f(x)$  ile verilen başlangıç koşulu problemin tam çözümünde  $t = 0$  alınması ile elde edilen (4.19) eşitliği ile aynı seçildi fakat ayrılma olayının gerçekleşmesi için dalganın başlangıç hızı olan  $g(x)$  fonksiyonu

$$g(x) = u_t(x, 0) = 0$$

olarak alındı. Problem  $x \in [-80, 140]$  bölgesinde,  $t = 72$  zamanına kadar çalışıldı. Dalga ayrılması oluşumunun simülasyonu, genliği  $A = 0.5$ , başlangıçta konumlandığı yer  $\tilde{x}_0 = 30$ ,  $h = 0.1$  ve  $\Delta t = 0.001$  değerleri için Şekil 4.4 de gösterildi. Şekil 4.4 'den görüleceği üzere, zaman içerisinde ilerleyen başlangıç dalgasının yaklaşık olarak  $t = 10$  zamanında,  $A = 0.26$  değerindeki eşit genliklere sahip dolayısıyla eşit hız ile zıt yönlere hareket eden iki simetrik dalgaya ayrıldığı ve oluşan yeni dalgaların arkalarında salınım yapan ikincil dalgaların olduğu gözlemlendi. Elde edilen sonuçların literatürde bulunan [102, 108, 114] çalışmaları ile tutarlıdır.



Şekil 4.4: IBq için  $x \in [-80, 140]$ ,  $A = 0.5$ ,  $h = 0.5$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $\tilde{x}_0 = 30$  ve  $t = 72$  değerlerinde dalga ayrılması

## Çözüm patlaması

Lineer olmayan denklemler teorisinin özel bir alanı “çözüm patlaması”dır. Lineer olmayan oluşum problemleri sınırsız çözümler olarak adlandırılan çözümlerin sonlu zamanda global olarak çözülemez olmasına izin verir. Diğer bir ifadeyle çözümler; sonlu zamanda sınırsız olarak büyür. Patlama problemi oluşum denklemlerinin zamana bağlı çözümünün  $t$  sonlu bir zamana yaklaşırken çözüm normunun sonsuzluğa eğilimini temsil eder.

Son nümerik problem olarak (4.1) ile verilen IBq denklemi için Zhinjian ve Wang [103], Lin ve Wu [108], Zhinjian [112], tarafından yapılan çalışmalarda incelenen çözüm patlaması problemi

$$\begin{aligned} f(x) &= -3 \sin(\pi x) \\ g(x) &= -\sin(\pi x) \end{aligned} \quad (4.21)$$

başlangıç koşulları ile  $x \in [0, 1]$  aralığında ele alındı. (4.1) denkleminin (4.21) ile verilen başlangıç koşulları ile lokal çözümü  $u \in C^2([0, T^0] : H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1))$ ,  $T^0 > 0$  için

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)} \rightarrow +\infty \quad t \rightarrow T^0$$

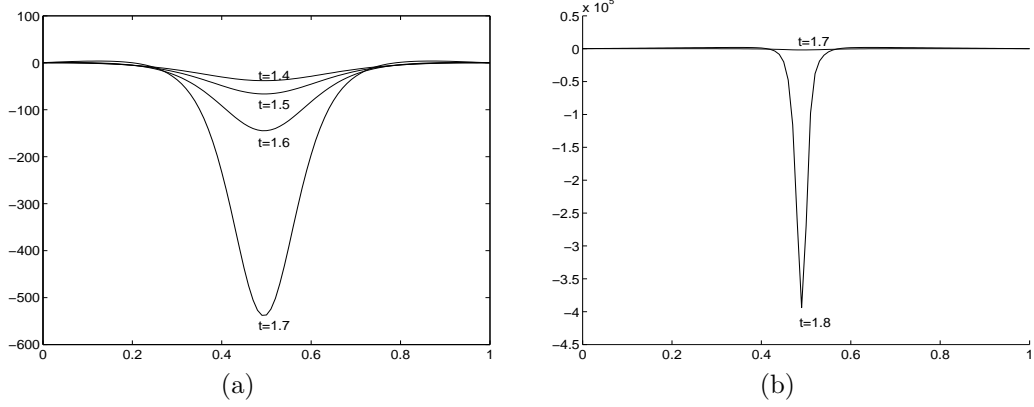
ve

$$I(t) = \int_0^1 u(x, t) \sin(\pi x) dx \rightarrow -\infty \quad t \rightarrow T^0$$

şartları ile vardır [112].

Problem  $x \in [0, 1]$  ve  $h = 0.005$  ve  $\Delta t = 0.00001$  için  $t = 1.8$  zamanına kadar çalışıldı. Farklı zaman adımlarındaki nümerik çözümlerin simülasyonu Şekil 4.5 (a) ve (b) de sunuldu. Şekil 4.5 (a) da görüldüğü üzere  $t = 1.4$  ve  $t = 1.6$  zamanları arasında nümerik çözümde küçük bir düşüş varken, Şekil 4.5 (b) de  $t = 1.7$  ve  $t = 1.8$  zamanları arasında daha fark edilebilir bir düşüş gözlenmektedir.  $t = 1.7$  zamanından sonra ise

dalganın genliğinde muazzam bir düşüş vardır ve bu durum çözümün patlaması olarak adlandırılır.



Şekil 4.5: IBq için  $t = 1.4 - 1.6$  ve  $t = 1.7 - 1.8$  zamanlarında çözüm patlaması

Sonuç olarak; bu nümerik çalışmada incelenen çözüm patlaması problemi için elde edilen sonuçların literatürdeki [100, 108] çalışmalarla uyumludur.

## 4.2 Improved Boussinesq-Tipi Denklem

Improved Boussinesq tipi denklem hidrodinamik hız “ $u$ ” nun terimleri cinsinden bir kısmi diferansiyel denklem ile

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{xxtt} - (u^2)_{xt}$$

formunda ifade edilir [98, 115]. IBq tipi denklem, küçük genlikteki iyon ses soliter dalgalarının dinamiklerini ve özel olarak küçük genlikli soliter dalgaların etkileşiminin elastik olduğunu tanımlamaktadır [78].

Iskandar ve Jain [115], IBq tipi denklem için lineerleştirme yaklaşımı ile sonlu fark yöntemini kombine ederek bir nümerik şema elde ettiler ve şemanın çözümünde

Thomas algoritması kullandılar. Lineerleştirilmiş şemanın kararlılık analizi için von Neumann kararlılık analizi yaparak şemanın şartsız kararlı olduğunu gösterdiler. Nümerik problemlerde ise dalga hareketi ve etkileşim problemlerini incelediler. Etkileşim problemi ele alınırken soliter-antisoliter etkileşimini çalıştılar ve dalgalardan herhangi birinin genliğinin artması ile etkileşimin inelastikliğinin arttığı sonucuna ulaştılar.

#### 4.2.1 IBq Tipi Denklem için Galerkin Sonlu Eleman Modeli

Bu kısımda Improved Boussinesq tipi

$$u_{tt} = u_{xx} - (u^2)_{xt} + u_{xxtt} \quad (4.22)$$

denklemini

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad x \in [a, b] \quad (4.23)$$

başlangıç koşulları ve

$$\begin{aligned} u(a, t) = u(b, t) &= 0 \\ u_x(a, t) = u_x(b, t) &= 0 \end{aligned} \quad t \in [0, T] \quad (4.24)$$

sınır koşulları ile ele alındı. Burada  $f(x)$  ve  $g(x)$  bilinen fonksiyonlar olmak üzere  $u(x, t)$  yeterince türevlenebilen bir fonksiyon olup  $x$  ve  $t$  sırasıyla konuma ve zamana göre bağımlı değişkeninin kısmi türevlerini simgeler.  $A$  soliter dalganın genliğini,  $c$  hızını ve  $\tilde{x}_0$  ise başlangıçta konumlandığı yeri ifade etmek üzere (4.22) ile verilen denklemin soliter dalga çözümü

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}^2 \left( (A/6c)^{1/2} (x - ct - \tilde{x}_0) \right) \quad (4.25)$$

ve ürettiği dalganın hızı

$$c = A/3 + (1 + A^2/9)^{1/2} \quad (4.26)$$

şeklindedir [115].

İlk olarak (4.22) denklemini daha basit alt denklemler kümesine dönüştürmek amacı ile  $v$  yardımcı değişkeni kullanılarak  $u_t = v$  ayrıştırma tekniği uygulanır ise (4.22) denklemi

$$u_t = v \quad (4.27)$$

$$v_t = u_{xx} - 2uv_x - 2u_xv + v_{xxt}$$

denklem sistemine indirgenir.

Bu kısımda (4.27) ile verilen denklem sistemine kuadratik B-spline bazlar yardımıyla Galerkin sonlu eleman yöntemi uygulamak için ilk olarak (4.27) denklem sisteminde bulunan bütün terimler  $W$  ağırlık fonksiyonu ile çarpılır ve daha sonra tüm bölge üzerinde integrali alınırsa (4.27) sisteminin ağırlıklı integral formu

$$\int_a^b W (u_t - v) dx = 0$$

$$\int_a^b W (v_t - u_{xx} + 2uv_x + 2u_xv - v_{xxt}) dx = 0$$

olarak elde edilir. Kısmi integrasyon uygulanması ile denklem sisteminin zayıf formu

$$\int_a^b (Wu_t - Wv) dx = 0$$

$$\int_a^b (Wv_t + W_xu_x + 2Wuv_x + 2Wu_xv + W_xv_{xt}) dx = [Wu_x + Wv_{xt}]_a^b$$

biçiminde ifade edilir. Problemin çalışıldığı  $[a, b]$  aralığı

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

olacak şekilde  $N$  eşit parçaya bölünür ve düğüm noktaları  $\{x_m\}_{m=0}^N$  ile belirtilirse bölge  $N$  eleman ve  $(N + 1)$  düğüm noktasına parçalanmış olur. Her bir elemanın uzunluğu  $h = x_{m+1} - x_m$  seçilir (4.27) sistemi için  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  tam çözümlerine sırasıyla karşılık gelen  $U_N(x, t)$  ve  $V_N(x, t)$  yaklaşık çözümleri Bölüm 2 de (2.11) ile verilen kuadratik B-spline fonksiyonları cinsinden

$$U_N(x, t) = \sum_{i=1}^N \delta_j(t) \Phi(x)$$

$$V_N(x, t) = \sum_{i=1}^N \sigma_j(t) \Phi(x)$$

olarak ifade edilir. Burada  $\delta_j(t)$  ve  $\sigma_j(t)$  belirlenecek olan zamana bağlı parametrelerdir. Tipik bir  $[x_m, x_{m+1}]$  elemanı üzerinde (4.27) denklem sisteminin zayıf formu

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} (Wu_t - Wv) dx$$

$$(4.28)$$

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} (Wv_t + W_x u_x + 2Wuv_x + 2Wu_x v + W_x v_{xt}) dx - [Wu_x + Wv_{xt}]_{x_m}^{x_{m+1}}$$

dır. Önceki problemlerde olduğu gibi  $\xi = x - x_m$  lokal koordinat dönüşümü yardımıyla (4.10) da verilen kuadratik B-spline bazlar cinsinden tipik bir  $[x_m, x_{m+1}]$  elemanı üzerinde yaklaşık çözüm fonksiyonları

$$U_N(\xi, t) = \sum_{i=m-1}^{m+1} \delta_j^e(t) \phi_j^e(\xi)$$

$$V_N(\xi, t) = \sum_{i=m-1}^{m+1} \sigma_j^e(t) \phi_j^e(\xi)$$

$$(4.29)$$

olarak ifade edilir. (4.10) kuadratik B-spline bazları ile (4.12) yaklaşımlarının  $x_m$

noktasında  $U_N, V_N$  ve  $U'_N, V'_N$  'nin  $\delta$  ve  $\sigma$  parametreleri cinsinden noktasal değerleri

$$\begin{aligned} U_N(x_m, t) &= \delta_{m-1} + \delta_m \\ V_N(x_m, t) &= \sigma_{m-1} + \sigma_m \end{aligned} \quad (4.30)$$

ve

$$\begin{aligned} U'_N(x_m, t) &= \frac{2}{h} (\delta_m - \delta_{m-1}) \\ V'_N(x_m, t) &= \frac{2}{h} (\sigma_m - \sigma_{m-1}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

dır. Probleme Galerkin yöntemi uygulandığı için  $W_i$  ağırlık fonksiyonları,  $\phi_j$  eleman şekil fonksiyonları ile aynı seçilir. Lokal koordinat sistemi kullanılarak (4.29) de verilen yaklaşık çözümler, (4.28) ile verilen denklemin zayıf formunda yerine yazılması ile

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left( \int_0^h \phi_i^e \phi_j^e d\xi \right) \dot{\delta}_j^e - \left( \int_0^h \phi_i^e \phi_j^e d\xi \right) \sigma_j^e \right\} \\ & \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left( \int_0^h \phi_i^e \phi_j^e d\xi \right) \dot{\sigma}_j^e + \left( \int_0^h (\phi_i^e)' (\phi_j^e)' d\xi \right) \delta_j^e + 2 \sum_{k=m-1}^{m+1} \left( \int_0^h \phi_i^e \phi_j^e (\phi_k^e)' d\xi \right) \sigma_k^e \delta_j^e \right. \\ & \quad \left. + 2 \sum_{k=m-1}^{m+1} \left( \int_0^h \phi_i^e \phi_k^e (\phi_j^e)' d\xi \right) \sigma_k^e \delta_j^e + \left( \int_0^h (\phi_i^e)' (\phi_j^e)' d\xi \right) \dot{\sigma}_j^e \right\} \\ & \quad - \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ (\phi_i^e (\phi_j^e)') \delta_j^e + (\phi_i^e (\phi_j^e)') \dot{\sigma}_j^e \right\}_0^h \end{aligned} \quad (4.32)$$

sistemi elde edilir. Bu sistemdeki eleman matrisleri  $i, j, k = m - 1, m, m + 1$

olmak üzere;

$$\tilde{A}_{ij}^e = \int_0^h \phi_i^e \phi_j^e d\xi,$$

$$B_{ij}^e = \int_0^h (\phi_i^e)' (\phi_j^e)' d\xi,$$

$$C_{ijk}^e(\delta) = \int_0^h \phi_i^e \phi_j^e (\phi_k^e)' d\xi,$$

$$\tilde{C}_{ijk}^e(\sigma) = \int_0^h \phi_i^e \phi_k^e (\phi_j^e)' d\xi,$$

$$D_{ij}^e = \phi_i^e (\phi_j^e)' \Big|_0^h$$

olarak adlandırılırsa (4.32) denklem sistemi matris formunda

$$\begin{aligned} & \dot{\delta}^e - \sigma^e \\ & \dot{\sigma}^e + \left( \tilde{A}^e + B^e - D^e \right)^{-1} \left( \left( B^e - D^e + 2\tilde{C}^e(\sigma^e) \right) \delta + 2C^e(\delta^e) \sigma \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\delta^e = (\delta_{m-1}^e, \delta_m^e, \delta_{m+1}^e)$  ve  $\sigma^e = (\sigma_{m-1}^e, \sigma_m^e, \sigma_{m+1}^e)$  tipik bir  $[x_m, x_{m+1}]$  elemanı üzerinde tanımlanan eleman parametreleri, ”.” ifadesi ise  $t$  zamanına göre kısmi türevi temsil eder. Eleman matrisleri

$$\tilde{A}_{ij}^e = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{bmatrix},$$

$$B_{ij}^e = \frac{2}{3h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C_{ijk}^e(\delta) = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} (-10, 8, 2) \delta & (-19, 12, 7) \delta & (-1, 0, 1) \delta \\ (-19, 12, 7) \delta & (-54, 0, 54) \delta & (-7, -12, 19) \delta \\ (-1, 0, 1) \delta & (-7, -12, 19) \delta & (-2, -8, 10) \delta \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}_{ijk}^e(\sigma) = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} (-10, 8, 2) \sigma & (-19, 12, 7) \sigma & (-1, 0, 1) \sigma \\ (-19, 12, 7) \sigma & (-54, 0, 54) \sigma & (-7, -12, 19) \sigma \\ (-1, 0, 1) \sigma & (-7, -12, 19) \sigma & (-2, -8, 10) \sigma \end{bmatrix},$$

$$D_{ij}^e = \frac{2}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Sonlu eleman yönteminin bir diğer adımı olan eleman matrislerinin birleştirilmesi işleminde problemin çözüm bölgesindeki tüm elemanlar kombine edilir ise global sistemdeki matrislerin genel satırları

$$\tilde{A} : \frac{h}{30} (1, 26, 66, 26, 1),$$

$$B : \frac{2}{3h} (-1, -2, 6, -2, -1),$$

$$C(\delta) : \frac{h}{30} ((-1, 0, 1, 0, 0) \delta, (-7, -31, 31, 7, 0) \delta, (-2, -62, 0, 62, 2) \delta, (0, -7, -31, 31, 7, 0) \delta, (0, 0, -1, 0, 1) \delta),$$

$$\tilde{C}(\sigma) : \frac{h}{30} ((-1, 0, 1, 0, 0) \sigma, (-7, -31, 31, 7, 0) \sigma, (-2, -62, 0, 62, 2) \sigma, (0, -7, -31, 31, 7, 0) \sigma, (0, 0, -1, 0, 1) \sigma),$$

$$D : \frac{2}{h} (0, 0, 0, 0, 0)$$

olarak elde edilir. Burada  $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$  ve  $\sigma = (\sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_N)^T$  global eleman parametrelerini temsil eder. (4.33) ile verilen denklem sisteminin global matrisler ile ifadesi

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \sigma \\ \dot{\sigma} &= - \left( \tilde{A} + B - D \right)^{-1} \left( \left( B - D + 2\tilde{C}(\sigma) \right) \delta + 2C(\delta) \sigma \right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

şeklindedir. Sonuç olarak (4.34) denklem sistemi ile  $(N+2) \times (N+2)$  tipinde iki matris sistemi elde edilir. (4.34) sisteminde  $\delta^{n+1}$  ve  $\sigma^{n+1}$  eleman parametreleri  $\delta^n$  ve

$\sigma^n$  eleman parametrelerinden dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile iteratif olarak elde edilir. Improved Boussinesq denklemi ile ilgili yapılan çalışmada olduğu gibi, sınır koşullarının uygulanması amacı ile (4.30) ile verilen denklemlerin kullanılması ile  $m = 0$  için her bir sistemden iki adet bilinmeyen olan  $\delta_{-1}$  ve  $\sigma_{-1}$  parametreleri sırasıyla  $\delta_0$  ve  $\sigma_0$  cinsinden ve benzer biçimde ile  $m = N$  için  $\delta_N$  ve  $\sigma_N$  parametreleri de  $\delta_{N-1}$  ve  $\sigma_{N-1}$  parametreleri cinsinden ifade edilerek, sistemde basit cebirsel işlemlerle yok edilir. Yok etme işleminin ardından her biri  $(N \times N)$  tipinde iki matris sistemi elde edilir. Daha sonra iteratif işlemlere başlanabilir.

İterasyona başlamak için bir başlangıç değerine ihtiyaç duyulur.  $t = 0$  zamanında  $\delta_j^0$  ve  $\sigma_j^0$  parametrelerinin değerleri ile iterasyona başlanabilir. Bu değerleri elde etmek için problemin tam çözümününün  $t = 0$  anındaki değerleri ve yaklaşık çözümler

$$\begin{aligned} u(x_m, 0) = U_N(x_j, 0) &= \sum_{j=-1}^N \delta_j^0 \phi_j \\ v(x_m, 0) = V_N(x_j, 0) &= \sum_{j=-1}^N \sigma_j^0 \phi_j \end{aligned}$$

kullanılır. Bu sistemler açık bir şekilde

$$\begin{aligned} U_N(x_0, 0) &= \delta_{-1} + \delta_0 = u(x_0, 0) \\ U_N(x_1, 0) &= \delta_0 + \delta_1 = u(x_1, 0) \\ U_N(x_2, 0) &= \delta_1 + \delta_2 = u(x_2, 0) \\ &\vdots \\ U_N(x_N, 0) &= \delta_{N-1} + \delta_N = u(x_N, 0) \end{aligned} \tag{4.35}$$

ve

$$\begin{aligned} V_N(x_0, 0) &= \sigma_{-1} + \sigma_0 = v(x_0, 0) \\ V_N(x_1, 0) &= \sigma_0 + \sigma_1 = v(x_1, 0) \\ V_N(x_2, 0) &= \sigma_1 + \sigma_2 = v(x_2, 0) \\ &\vdots \\ V_N(x_N, 0) &= \sigma_{N-1} + \sigma_N = v(x_N, 0) \end{aligned} \tag{4.36}$$



## 4.2.2 Kararlılık Analizi

Bu kısımda (4.22) ile verilen Improved Boussinesq tipi denklemin kararlılık analizi incelendi. (4.34) ile verilen IBq tipi denklemin zayıf formu  $\alpha_1 = \max_{0 \leq i \leq N} \{u_i\}$  ve  $\alpha_2 = \max_{0 \leq i \leq N-1} \{v_i\}$  birer reel sayı olmak üzere

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \sigma \\ \dot{\sigma} &= - \left( \tilde{A} + B - D \right)^{-1} \left( (B - D + 2\alpha_2 C) \delta + 2\alpha_1 C \sigma \right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

şeklinde ifade edilir ve  $C$  matrisi, genelleştirilmiş satırı;

$$C : \frac{1}{6} (-1, -10, 10, 1)$$

olan  $(N \times N)$  tipinde bir matrisdir.  $k_{11} = [0]_{N \times N}$  sıfır matrisi,  $k_{12} = I_{N \times N}$  birim matris,  $k_{21} = - \left( \tilde{A} + B - D \right)^{-1} (B - D + 2\alpha_2 C)$  ve  $k_{22} = - \left( \tilde{A} + B - D \right)^{-1} (2\alpha_1 C)$  olmak üzere bir  $K$  matrisini,

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

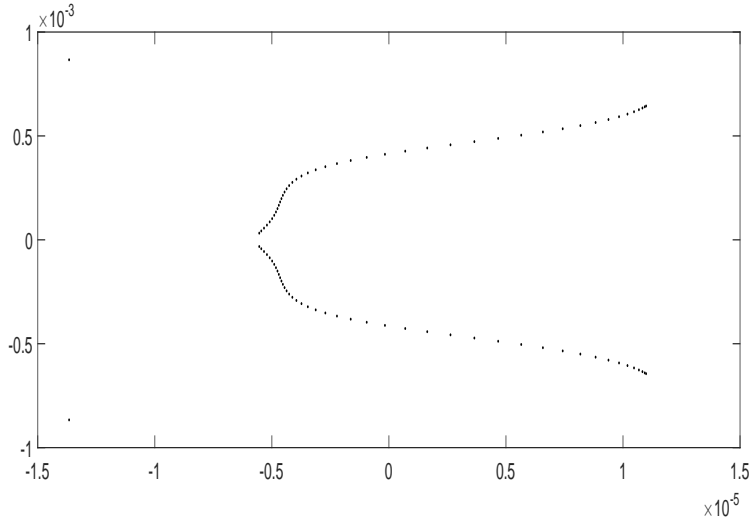
biçiminde tanımlayalım. O halde (4.37) ile verilen lineer denklem sistemi matris formunda

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \sigma \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

şeklinde ifade edilir. Bölüm 2 de açıklandığı üzere (4.34) denklem sistemine uygulanan dördüncü mertebeden Runge-Kutta yönteminin kararlılığı  $K$  matrisinin özdeğerlerine bağlıdır.  $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$  olmak üzere  $K$  matrisinin özdeğerleri  $\lambda_j$  ler ile gösterilsin.

Jain [69]'nin çalışmasında  $K$  matrisinin bütün özdeğerleri sadece reel kısımdan oluşuyor ise özdeğerlerin  $-2.78 < h\lambda_j < 0$  aralığında, eğer bütün özdeğerler sadece imajinel kısımdan oluşuyor ise özdeğerlerin  $0 < |h\lambda_j| < 2\sqrt{2}$  aralığında bulunması

gerektiği ve özdeğerler sanal ve imajinel kısımların her ikisine de sahip ise bu durumda özdeğerlerin bu her iki aralığı kapsayan ve Şekil 2.5 ile gösterilen kararlılık bölgesinde olması gerektiği ifade edilmiştir.  $N = 45$  ve  $\Delta t = 0.001$  değerleri için  $\lambda_j$  özdeğerlerinin kompleks düzlemdeki konumları Şekil 4.6 da gösterildi. Şekilden görüldüğü üzere  $\lambda_j$  özdeğerleri bahsedilen kararlılık bölgesi içerisinde yer almaktadır fakat çok az miktarda özdeğer  $\Delta t \lambda_j \leq 15 \times 10^{-6}$  olacak şekilde pozitif reel kısma sahiptir. Bu durumda ise [69] ile verilen referanstaki tolerans kullanıldığında IBq tipi denklemin Galerkin sonlu eleman yöntemi ile elde edilen şemanın çözümü için kullanılan Runge-Kutta yöntemi kararlıdır.



Şekil 4.6: IBq tipi:  $N = 45$  ve  $\Delta t = 0.001$  değerleri için  $\lambda_j$  özdeğerlerinin kompleks düzlemdeki konumları

### 4.2.3 Nümerik Örnekler ve Sonuçlar

Bölüm 4.2 de (4.22) ile verilen IBq tipi denklemin kuadratik B-spline bazlar yardımıyla Galerkin sonlu eleman modeli oluşturuldu. Bu kısımda oluşturulan model yardımıyla

IBq tipi denkleme ait olan iki problem ele alındı. Bu problemler dalga hareketi ve dalga etkileşimidir. Dalga hareketi problemi ile oluşturulan modelin nümerik geçerliliği test edilirken elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile ne kadar uyumlu olduğu  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile ölçüldü. Dalga etkileşimi probleminde ise biri pozitif genliğe sahip soliter dalga ve diğeri negatif genliğe sahip antisoliter dalganın etkileşimi ele alındı.

### Dalga hareketi

Bu problemde (4.22) ile verilen IBq tipi denklemin ürettiği soliter dalganın hareketi incelendi. Problemin başlangıç koşullarında görülen  $f(x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonları (4.25) ile verilen tam çözümde ve tam çözümün  $t$  değişkenine göre kısmi türevinde  $t = 0$  seçilmesi ile

$$\begin{aligned} f(x) &= A \operatorname{sech}^2 \left( \left( \frac{A}{6c} \right)^{1/2} (x - \tilde{x}_0) \right) \\ g(x) &= 2A \left( \frac{Ac}{6} \right)^{1/2} \operatorname{sech}^2 \left( \left( \frac{A}{6c} \right)^{1/2} (x - \tilde{x}_0) \right) \tanh \left( \left( \frac{A}{6c} \right)^{1/2} (x - \tilde{x}_0) \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada  $A$  soliter dalganın genliği,  $c$  hızı ve  $\tilde{x}_0$  dalganın başlangıç zamanında konumlandığı yeri temsil eder. Problem için yapılan tüm hesaplamalar  $x \in [-80, 100]$  aralığında  $t = 70$  zamanına kadar yapıldı. Aralığın seçimi sağ ve sol sınırlarında  $u \approx 0$  sağlanacak şekilde belirlendi. Farklı  $h$ ,  $\Delta t$  ve  $A$  genlik değerleri için  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları sırasıyla Tablo 4.4 ve Tablo 4.5 de sunuldu.

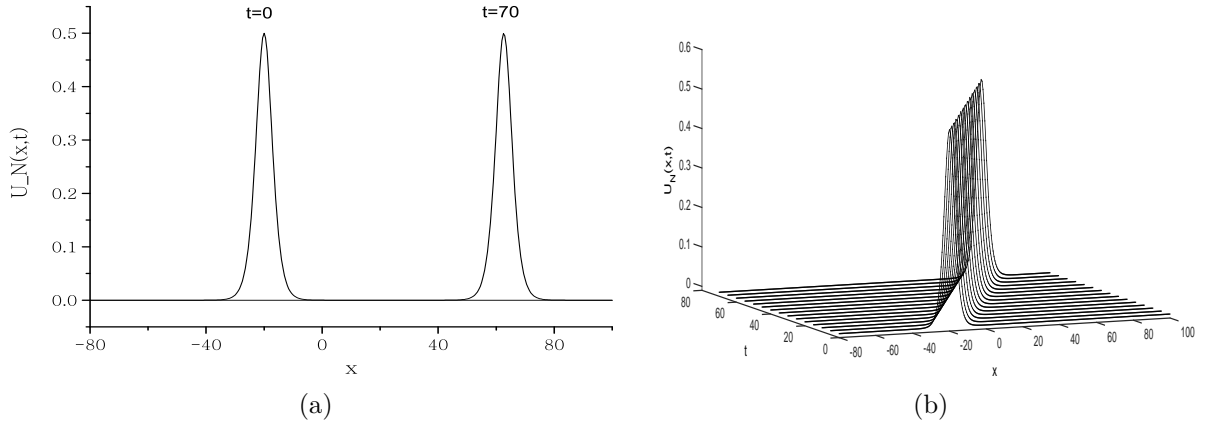
Tablo 4.4: IBq tipi: Farklı  $A$ ,  $\Delta t$  ve  $h$  değerleri için elde edilen  $L_2$  hata normları

$A$	$\Delta t$	$L_2 \times 10^3$			
		$h = 0.1$	$h = 0.2$	$h = 0.5$	$h = 1$
0.2	0.01	0.037187	0.002376	0.004123	0.006920
	0.02	0.033875	0.006364	0.007862	0.012032
	0.025	0.032034	0.008767	0.011819	0.014354
	0.05	0.029393	0.038753	0.041705	0.043026
	0.1	0.134721	0.158512	0.161045	0.161473
0.25	0.01	0.067361	0.005233	0.006619	0.010439
	0.02	0.061750	0.013096	0.017625	0.020669
	0.025	0.058873	0.020508	0.025073	0.027777
	0.05	0.074462	0.086191	0.089782	0.093794
	0.1	0.315346	0.348644	0.353120	0.357072
0.5	0.01	0.493379	0.065049	0.071508	0.081449
	0.02	0.142416	0.231832	0.247384	0.259691
	0.025	0.559208	0.362282	0.379210	0.389187
	0.05	1.447291	1.461305	1.477449	1.488496
	0.1	5.816489	5.897358	5.911793	5.926361

Tablo 4.5: IBq tipi: Farklı  $A$ ,  $\Delta t$  ve  $h$  değerleri için elde edilen  $L_\infty$  hata normları

$A$	$\Delta t$	$L_\infty \times 10^3$			
		$h = 0.1$	$h = 0.2$	$h = 0.5$	$h = 1$
0.2	0.01	0.014180	0.000545	0.000799	0.001176
	0.02	0.012898	0.001627	0.002021	0.002663
	0.025	0.012049	0.002316	0.003183	0.003526
	0.05	0.009433	0.011033	0.011931	0.012215
	0.1	0.037074	0.046002	0.046428	0.046539
0.25	0.01	0.027757	0.001340	0.001530	0.002052
	0.02	0.024337	0.003388	0.004622	0.005106
	0.025	0.022258	0.005406	0.006926	0.007244
	0.05	0.024854	0.024224	0.025717	0.026440
	0.1	0.083691	0.100310	0.102227	0.103151
0.5	0.01	0.185889	0.019600	0.021008	0.023720
	0.02	0.037763	0.064059	0.074786	0.078337
	0.025	0.216712	0.103118	0.115243	0.118134
	0.05	0.418981	0.443490	0.455764	0.458700
	0.1	1.673325	1.834811	1.847026	1.850930

Tablolardan da görüldüğü üzere  $\Delta t$  zaman adımının azalması ile  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları da azalmaktadır. Soliter dalganın hareketinin nümerik simülasyonu ise  $A = 0.5, h = 0.5, \Delta t = 0.001$  ve  $t = 70$  değerleri için Şekil 4.7 de gösterildi. Şekilden, soliter dalganın  $t = 70$  zamanına kadar şeklini koruyarak ilerlediği ve hızında önemli bir değişim olmadığı görülmektedir.  $t = 0$  zamanında genliği  $A = 0.5$  ve başlangıçtaki konumu  $\tilde{x}_0 = -20$  olan dalganın hızı (4.26) ile teorik hesaplama yapılarak  $c = 1.18046$  olarak elde edildi.  $t = 70$  de dalganın bulunduğu konum  $\tilde{x}_1 = 62.5$  olup genliği  $A = 0.499367$  dir. Dalganın aldığı yol zamana oranlanır ise ortalama hız yaklaşık  $c = 1.17857$  olarak elde edilir. Bu ise teorik değerler ile uyumludur.



Şekil 4.7: IBq tipi için  $x \in [-80, 100]$ ,  $A = 0.5$ ,  $h = 0.5$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $\tilde{x}_0 = -20$ , ve  $t = 70$  değerlerinde soliter dalga hareketi

## İki soliter dalga etkileşimi

Bu problemde, soliter-antisoliter dalgaların etkileşimi farklı genlik değerleri için ele alındı. IBq tipi denklem için soliter-antisoliter dalga etkileşimi

$$u(x, t) = A_1 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{A_1}{6c_1} (x - c_1 t - \tilde{x}_1) \right) - A_2 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{A_2}{6c_2} (x - c_2 t - \tilde{x}_2) \right)$$

şeklinde ifade edilir. (4.22) ile verilen IBq tipi denklemin  $f(x)$  ve  $g(x)$  ile verilen başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} f(x) &= A_1 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{A_1}{6c_1} (x - \tilde{x}_1) \right) - A_2 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{A_2}{6c_2} (x - \tilde{x}_2) \right) \\ g(x) &= 2A_1 \left( \frac{A_1 c_1}{6} \right)^{1/2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{A_1}{6c_1} (x - \tilde{x}_1) \right) \tanh \left( \frac{A_1}{6c_1} (x - \tilde{x}_1) \right) \\ &\quad + 2A_2 \left( \frac{A_2 c_2}{6} \right)^{1/2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{A_2}{6c_2} (x - \tilde{x}_2) \right) \tanh \left( \frac{A_2}{6c_2} (x - \tilde{x}_2) \right) \end{aligned} \quad (4.39)$$

olarak alındı. (4.39) eşitliğinden görüleceği üzere  $A_1$  genliğine sahip birinci dalganın başlangıçta bulunduğu konum  $x = \tilde{x}_1$  dir. Dalganın genliği pozitif olduğu için tepe noktası yukarı doğru olan soliter dalgadır.  $A_2$  genliğine sahip ikinci dalga başlangıçta  $x = \tilde{x}_2$  noktasında bulunan, genliği negatif olduğundan dolayı tepe noktası aşağı doğru olan ve antisoliter olarak adlandırılan dalga modelidir.  $i = 1, 2$  olmak üzere iki dalga  $c_i = A_i/3 + (1 + A_i/9)^{1/2}$  hızı ve  $c_1 = -c_2$  seçimi ile birbirlerine doğru hareket ederler. Bu çalışmada önceki bölümde tüm nümerik deneyimlerin simülasyonu farklı genlik değerleri için  $x \in [-80, 100]$  aralığında  $h = 0.1$  ,  $\Delta t = 0.001$  değerleri için  $t \in [0, 60]$  zaman aralığında yapıldı.

Birinci durum olarak dalgaların genlikleri  $A_1 = 0.1$  ve  $A_2 = -0.1$  olmak üzere eşit ve zıt yönlü seçildi. Farklı genliklere sahip soliter dalgalar için ise dalga genlikleri  $A_1 = 0.2$  ve  $A_2 = -0.4$  seçilerek sırasıyla Şekil 4.8 (a)-(b) de sergilendi, her iki etkileşim oluşumu için de soliter dalgalar  $t = 0$  başlangıç zamanında  $\tilde{x}_1 = -30$  ve  $\tilde{x}_2 = 30$

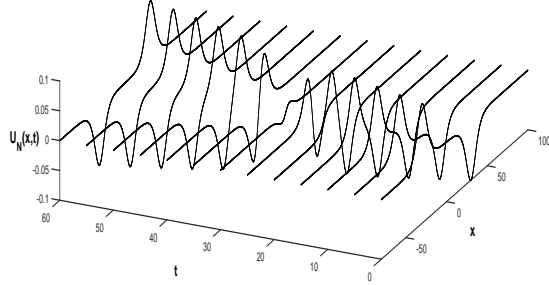
noktalarına konumlandırıldı. Şekil 4.8 (a)-(b) den görüldüğü üzere dalgalar birbirine doğru hareket ederken birbirlerinin varlıklarını algıladıkları andan itibaren dalgaların ön kısımları dikleşerek, genlikleri sürekli olarak azalır. Etkileşim anında iki dalga hemen hemen görülmeyecek hale gelir ve bir müddet sonra etkileşimin ardından iki soliter dalga tekrar görünmeye başlar ve orjinal şekillerini tekrar kazanırlar. Etkileşen dalgalar arasında kalan bölgede ihmal edilebilir küçüklikte ikincil dalgalar vardır. Bu nedenle etkileşimin elastik olduğu sonucuna varılır.

İkinci durumda ise genliklerin artırılmasının soliter dalgaların etkileşimi üzerindeki etkisini gözlemlemek amacı ile eşit genlikler için  $A_1 = 1$  ve  $A_2 = -1$  ve farklı genlikler için  $A_1 = 2.5$  ve  $A_2 = -2$  seçilerek dalgalar başlangıçta  $\tilde{x}_1 = -40$  ve  $\tilde{x}_2 = 40$  noktalarına konumlandırıldı ve iki dalganın etkileşimi Şekil 4.8 (c)-(d) de sunuldu.

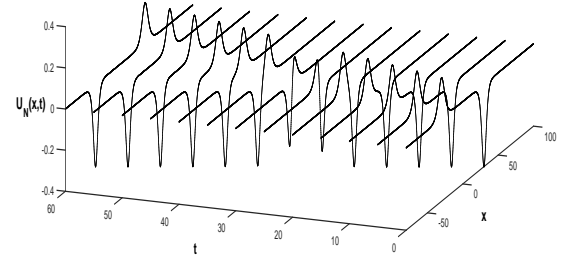
Şekilden görüldüğü üzere birinci durumdakine benze soliter-antisoliter etkileşimi gerçekleşti. Fakat etkileşimden sonra dalgaların ardında daha belirgin ikincil dalgaların oluştuğu gözlemlendi. Bu durumda etkileşimin elastik olmayan (inelastik) etkileşim olduğu, ayrıca etkileşime giren dalgaların inelastikliğinin dalgaların genliklerinin artması ile arttığı sonucuna varıldı.

Çalışmanın sonucunda soliter dalgaların genliğinin yeterince büyük alındığında soliter dalga etkileşiminin inelastik olduğu sonucuna varıldı.

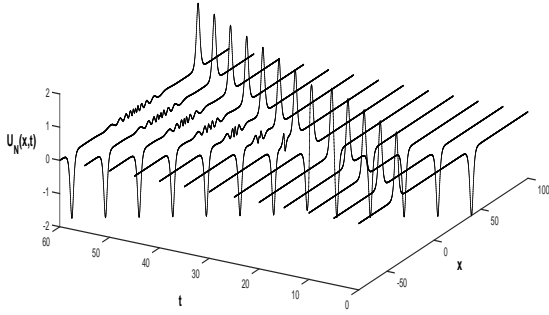
Improved Boussinesq tipi denklem için incelenen soliter dalga hareketi ve iki soliter dalganın etkileşimi problemlerinin ele alınması ile ulaşılan sonuçlar [78] ve [115] referanslarında bulunan sonuçlar ile uyum içerisindedir.



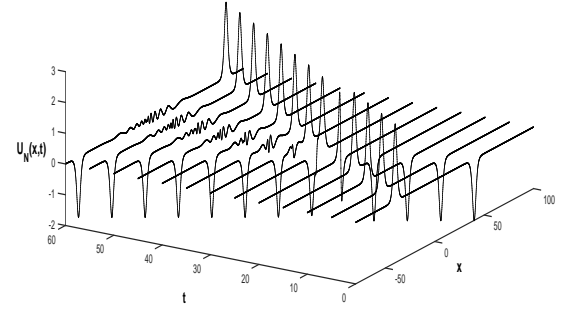
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 4.8: IBq tipi: Soliter dalga etkileşimi

### 4.3 Modifiye Edilmiş Improved Boussinesq Denklemi

Improved Boussinesq denkleminin modifiye edilmesi ile kübik nonlineerliğe sahip

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{xxtt} + \alpha (u^3)_{xx}$$

formunda modifiye edilmiş Improved Boussinesq (MIBq) denklemi elde edilir [98].

Burada  $\alpha$  bir reel sabit olmak üzere MIBq denklemi anharmonik kafes özellikleri ve lineer olmayan Alfvén dalgalarını çalışmak için kullanılmasının yanı sıra basınç azaltma ve kompresyon (sıkıştırma) dalgaların etkileşiminin inelastik olarak meydana

gelmesini tanımlar [78].

MIBq denklemi üzerine yapılan nümerik çalışmalardan biri Iskandar ve Jain'e ait olan [115] referanslı çalışmadır. Bu çalışmada yazarlar, MIBq denklemi için üç seviyeli iteratif fark şeması oluşturdular ve şemanın şartsız kararlı olduğunu von Neumann kararlılık analizi ile gösterdiler. Üç zaman seviyeli şemanın çözümünü ise aynı çalışmada inceledikleri IBq tipi denklem için elde ettikleri şemanın çözümü için kullandıkları Thomas algoritması ile yaptılar. Nümerik çalışmalarında ise dalga hareketi ve etkileşimini konu aldılar ve etkileşim probleminde soliter-soliter dalga etkileşiminin yapısını  $A \ll 1$  ve  $A \geq 1$  durumları için incelediler. Birinci durumda soliter dalgaların soliton tipi davranış sergileyip elastik etkileşim gerçekleştirdiklerini ve ikinci durumda ise etkileşimin inelastik olduğunu ve inelastiklik katsayısının dalgaların genliklerinin artması ile arttığını vurguladılar. IBq denklemi ile ilgili literatür araştırmaları sunulurken Soerensen tarafından yapılan [99] referanslı çalışmada IBq denklemi ve kübik nonlinearliğe sahip olan MIBq denklemi için soliter-soliter ve soliter-antisoliter dalga etkileşimini konu alan çalışmalarını ve karşılaştırmalarından bahsedildi. Denklemin çözümünün varlığı ve tekliği üzerine yapılan çalışmalardan biri ise Yang ve Wang'a ait olan [103] referanslı çalışmadır. Yang ve Wang söz konusu bu çalışmalarında reel bir sabit olan  $\alpha > 0$  için denklemi  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x)$  başlangıç koşulları ve  $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$  sınır koşulları ile ele alarak global çözümlerinin varlığı ve yokluğu üzerine çalışmalar yaptılar. Daha sonra basit bir sonlu fark şeması yardımıyla  $\alpha = -1$  için çözümün patlaması problemini nümerik olarak elde ettiler ve iki örnek ile grafiksel olarak sundular. MIBq denkleminin çözümlerinin lokal ve global varlığı ile ilgili çalışmalar [116, 117, 118, 119] referanslarda bulunabilir.

### 4.3.1 MIBq Denklemi için Galerkin Sonlu Eleman Modeli

Daha önceki nümerik örneklerde Improved Boussinesq denklemi ve aynı tipte olan farklı bir Improved Boussinesq denkleminin nümerik çözümleri ele alındı. Bu kısımda ise (4.1) ile verilen Improved Boussinesq denkleminde  $(u^2)_{xx}$  nonlineer teriminin  $(u^3)_{xx}$  terimi ile değiştirilmesi ile elde edilen

$$u_{tt} = u_{xx} + \alpha (u^3)_{xx} + u_{xxtt} \quad (4.40)$$

modifiye edilmiş Improved Boussinesq denklemini

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad x \in [a, b] \quad (4.41)$$

başlangıç koşulları ve

$$\begin{aligned} u(a, t) = u(b, t) &= 0 \\ u_x(a, t) = u_x(b, t) &= 0 \end{aligned} \quad t \in [0, T] \quad (4.42)$$

sınır koşulları ile ele alındı. Denklemın kuadratik B-spline bazlar yardımıyla Lumped Galerkin sonlu eleman modeli oluşturularak nümerik çözümleri elde edildi.  $\alpha = 1$  için problemin tam çözümü,  $A$  dalğanın genliği,  $c$  hızı ve  $\tilde{x}_0$  ise başlangıçta konumlandığı yer olmak üzere

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A \operatorname{sech} \left( (A/c\sqrt{2}) (x - ct - \tilde{x}_0) \right) \\ c &= (1 + A^2/2)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.43)$$

ile verilir [115]. Daha önceki örneklerde ele alındığı gibi (4.40) denklemini daha basit denklemlerin bir kolleksiyonuna indirgemek için  $u_t = v$  seçilerek bir ayrıştırma tekniği uygulanırsa (4.40) denklemine denk olan

$$u_t = v \quad (4.44)$$

$$v_t = u_{xx} + \alpha (u^3)_{xx} + v_{xxt}$$

denklem sistemi elde edilir. Çalışmada tüm hesaplamalar  $\alpha = 1$  için yapılacaktır. (4.44) ile verilen denklem sisteminin ağırlıklı kalan formu

$$\int_a^b W (u_t - v) dx = 0$$

$$\int_a^b W (v_t - u_{xx} - (u^3)_{xx} - v_{xxt}) dx = 0$$

olup kısmi integrasyon yardımıyla (4.44) denklem sisteminin zayıf formu

$$\int_a^b (W u_t - W v) dx = 0$$

$$\int_a^b (W v_t + W_x u_x + 3W_x u^2 u_x + W_x v_{xt}) dx = [W u_x + 3W u^2 u_x + W v_{xt}]_a^b$$
(4.45)

şeklinde elde edilir.

Sonlu eleman formülasyonunun oluşturulması için problemin tanımlandığı  $[a, b]$  aralığı  $N$  sonlu elemana bölünür ve  $(N + 1)$  düğüm noktası elde edilir. Bu düğüm noktalarını  $\{x_m\}_{m=0}^N$  ile temsil edilerek her bir elemanın uzunluğu  $h = x_{m+1} - x_m$  olarak seçilir. Bölüm 2 de (2.11) ile verilen kuadratik B-spline bazlar cinsinden  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  tam çözümleri için  $U_N(x, t)$  ve  $V_N(x, t)$  yaklaşık çözümleri

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-1}^N \delta_j(t) \phi_j(x)$$

$$V_N(x, t) = \sum_{j=-1}^N \sigma_j(t) \phi_j(x)$$
(4.46)

olarak yazılır.  $\xi = x - x_m$ ,  $0 \leq \xi \leq h$  koordinat dönüşümü ile global bazlardan lokal bazlara geçilir ise sonlu elemanlara ayrıştırdığımız bölgede tipik bir  $[x_m, x_{m+1}]$

elemanı için  $U_N(\xi, t)$  ve  $V_N(\xi, t)$  yaklaşık çözümleri

$$U_N(\xi, t) = \sum_{j=m-1}^{m+1} \delta_j^e(t) \phi_j^e(\xi) \quad (4.47)$$

$$V_N(\xi, t) = \sum_{j=m-1}^{m+1} \sigma_j^e(t) \phi_j^e(\xi)$$

olarak yeniden yazılır ve (4.10) verilen kuadratik B-spline fonksiyonları ile (4.47) yaklaşımlarının  $x_m$  noktasında  $U_N, V_N$  ve  $U'_N, V'_N$  'nin  $\delta$  ve  $\sigma$  parametreleri cinsinden noktasal değerleri

$$U_N(x_m, t) = \delta_{m-1} + \delta_m$$

$$V_N(x_m, t) = \sigma_{m-1} + \sigma_m$$

$$U'_N(x_m, t) = \frac{2}{h} (\delta_m - \delta_{m-1})$$

$$V'_N(x_m, t) = \frac{2}{h} (\sigma_m - \sigma_{m-1})$$

dır. (4.45) zayıf formunun yine tipik bir  $[x_m, x_{m+1}]$  elemanı üzerinde ifadesi ise

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} (Wu_t - Wv) dx$$

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} (Wv_t + W_x u_x + 3W_x u^2 u_x + W_x v_{xt}) dx - [Wu_x + 3Wu^2 u_x + Wv_{xt}]_{x_m}^{x_{m+1}}$$
(4.48)

olacaktır. (4.48) sistemlerinde bulunan  $3u^2$  terimi  $Z_m$  reel bir değeri simgelemek üzere  $Z_m = 3u^2$  ataması yapılarak  $3u^2$  terimi üzerinde lineerleştirme işlemleri yapılır. Burada  $Z_m$  lumped parametresi olarak adlandırılır. (4.48) sistemine Galerkin yöntemi uygulandığı için  $j = m-1, m, m+1$  olmak üzere  $W_i$  ağırlık fonksiyonları  $\phi_j$  eleman şekil fonksiyonları ile aynı seçilir. Daha sonra  $Z_m = 3u^2$  teriminin reel bir değer olduğu

göz önüne alınarak (4.47) yaklaşık çözümleri (4.48) sisteminde yerlerine yazılır ise

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left( \int_0^h \phi_i^e \phi_j^e d\xi \right) \dot{\delta}_j^e - \left( \int_0^h \phi_i^e \phi_j^e d\xi \right) \sigma_j^e \right\} \\
& \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left( \int_0^h \phi_i^e \phi_j^e d\xi \right) \dot{\sigma}_j^e + \left( \int_0^h (\phi_i^e)' (\phi_j^e)' d\xi \right) \delta_j^e + Z_m \left( \int_0^h (\phi_i^e)' (\phi_j^e)' d\xi \right) \delta_j^e \right. \\
& \quad \left. + \left( \int_0^h (\phi_i^e)' (\phi_j^e)' d\xi \right) \dot{\sigma}_j^e \right\} - \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ (\phi_i^e (\phi_j^e)') \delta_j^e \right. \\
& \quad \left. + Z_m (\phi_i^e (\phi_j^e)') \delta_j^e + (\phi_i^e (\phi_j^e)') \dot{\sigma}_j^e \right\} \tag{4.49}
\end{aligned}$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Burada  $\delta^e = (\delta_{m-1}^e, \delta_m^e, \delta_{m+1}^e)$  ve  $\sigma^e = (\sigma_{m-1}^e, \sigma_m^e, \sigma_{m+1}^e)$  tipik bir  $[x_m, x_{m+1}]$  elemanı üzerinde tanımlanan eleman parametreleri ve ”” ifadesi ise  $t$  zamanına göre kısmi türevi temsil eder. (4.49) da ifade edilen eleman matrisleri

$$\tilde{A}_{ij}^e = \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi,$$

$$B_{ij}^e = \int_0^h \phi_i' \phi_j' d\xi,$$

$$C_{ij}^e = \phi_i \phi_j \Big|_0^h$$

şeklinde olup ve hesaplama işlemleri yapılırsa

$$\tilde{A}_{ij}^e = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{bmatrix},$$

$$B_{ij}^e = \frac{2}{3h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C_{ij}^e = \frac{2}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. (4.49) ile verilen diferansiyel denklem sistemi tipik bir eleman için eleman matrisleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \dot{\delta}^e - \sigma^e \\ \dot{\sigma}^e + \left( \tilde{A}^e + B^e - C^e \right)^{-1} (B^e - C^e + Z_m (B^e - C^e)) \delta^e \end{aligned} \quad (4.50)$$

dır. (4.50) ile verilen denklem sisteminde  $Z_m$  terimi  $B^e$  ve  $C^e$  eleman matrisleri ile çarpım durumundadır.  $Z_m$  terimi matrislerin içinde düğüm noktalarının değişimi ile farklı değerler alarak lineerleştirme yapılacaktır.  $Z_m$  terimi matrislerin içerisinde yer almadan önce bu terim için bir lineerleştirme seçimi yapılır. Bir çok lineerleştirme tekniği olmasına rağmen bu çalışmada  $u(x, t)$  bağımlı değişkeni için  $u = (u_m + u_{m+1})/2$  seçilerek  $x_m$  düğüm noktalarında  $Z_m$  terimi

$$Z_m = (3/4) (\delta_{m-1} + 2\delta_m + \delta_{m+1})^2$$

dır. Daha sonra sonlu eleman yönteminin önemli adımlarından biri olan eleman matrislerinin birleştirilmesi işlemine geçilebilir. Tüm bölge üzerinde çözüm elde etmek

için eleman denklemlerinin birleştirilmesi ile  $Z_m$  lumped parametresini içeren diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \sigma \\ \dot{\sigma} &= - \left( \tilde{A} + B - C \right)^{-1} \left( B - C + \tilde{B}(Z_m) - \tilde{C}(Z_m) \right) \delta\end{aligned}\quad (4.51)$$

olarak yazılır. Yine tekrar edelim ki, (4.51) denklem sistemi global formdadır ve  $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$  ve  $\sigma = (\sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_N)^T$  global parametreler olmak üzere  $\tilde{A}$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $\tilde{B}(Z_m)$  ve  $\tilde{C}(Z_m)$  global matrislerdir. Her bir global matrisin  $m$ -inci genelleştirilmiş satırları

$$\tilde{A} : \frac{h}{30} (1, 26, 66, 26, 1)$$

$$B : \frac{2}{3h} (-1, -2, 6, -2, -1)$$

$$C : \frac{2}{h} (0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\tilde{B}(Z_m) : \frac{2}{3h} (-Z_{m0}, -Z_{m0} - Z_{m1}, 2Z_{m0} + 2Z_{m1} + 2Z_{m2}, -Z_{m1} - Z_{m2}, -Z_{m2})$$

$$\tilde{C}(Z_m) : \frac{2}{h} (0, -Z_{m0} + Z_{m1}, Z_{m0} - 2Z_{m1} + Z_{m2}, Z_{m1} - Z_{m2}, 0)$$

ve

$$Z_{m0} = (3/4) (\delta_{m-1} + 2\delta_m + \delta_{m+1})^2,$$

$$Z_{m1} = (3/4) (\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^2,$$

$$Z_{m2} = (3/4) (\delta_{m+1} + 2\delta_{m+2} + \delta_{m+3})^2$$

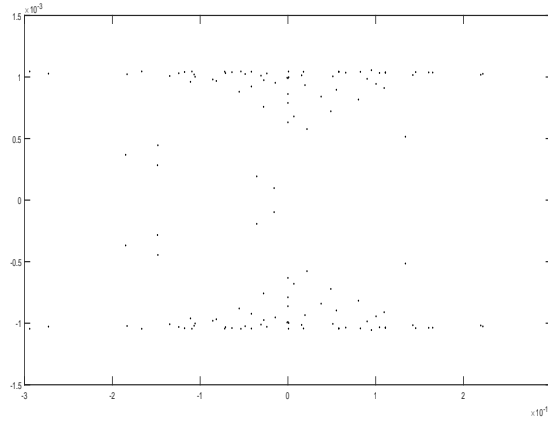
şeklindedir.

Matrislerin birleştirilmesi ile (4.51) ile verilen  $(N + 2) \times (N + 2)$  tipinde iki denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemlerinin çözümüne geçilmeden önce sisteme sınır





$K$  matrisinin özdeğerlerine bağlıdır.  $K$  matrisinin özdeğerleri  $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  için  $\lambda_j$  ler ile gösterilsin. Jain [69], dördüncü mertebeden Runge-Kutta yönteminin kararlı olması için  $K$  matrisinin özdeğerlerinin kompleks düzlemde sağlaması gereken koşullardan söz etmiştir. Buna göre eğer  $K$  matrisinin bütün  $\lambda_j$  özdeğerleri sadece reel kısımdan oluşuyor ise özdeğerlerin  $-2.78 < h\lambda_j < 0$  aralığında, sadece imajinel kısımdan oluşuyor ise  $0 < |h\lambda_j| < 2\sqrt{2}$  aralığında, eğer özdeğerler reel ve imajinel bileşenlere sahip ise Şekil 2.5 ile gösterilen Runge-Kutta kararlılık bölgesi içerisinde yer alması gerekmektedir. Bu nedenle,  $K$  matrisinin özdeğerlerinin üzere  $N = 66$  ve  $\Delta t = 0.001$  değerleri için kompleks düzlemdeki konumları Şekil 4.9 da gösterildi. Şekilden görüldüğü üzere  $\lambda_j$  özdeğerleri Şekil 2.5 ile gösterilen Runge-Kutta kararlılık bölgesi içerisinde yer almaktadır. Fakat birkaç özdeğer  $\Delta t\lambda_j \leq 3 \times 10^{-19}$  olacak şekilde pozitif reel kısma sahiptir. Bu durumda ise [69] ile verilen referanstaki tolerans kullanılarak, modifiye edilmiş Improved Boussinesq tipi denklemin galerkin sonlu eleman yöntemi ile ayrıklaştırılan nümerik şemasının çözümü için kullanılan Runge-Kutta yönteminin kararlı olduğu sonucuna varılır.



Şekil 4.9: MIBq:  $N = 66$  ve  $\Delta t = 0.001$  değerleri için  $\lambda_j$  özdeğerlerinin kompleks düzlemdeki konumları

### 4.3.3 Nümerik Örnekler ve Sonuçlar

Bölüm 4.3 de modifiye edilmiş Improved Boussinesq denkleminin kuadratik B-spline bazlar kullanılarak Lumped Galerkin sonlu eleman modeli oluşturuldu. Elde edilen model ile problemin yapısına uygun olan iki problem dalga hareketi ve dalga etkileşimi ele alındı. İlk nümerik problem olan dalga hareketi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile ne kadar uyumlu olduğu (3.25) ile verilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile ölçüldü. İkinci problem olan dalga etkileşiminde ise ikiside pozitif genliğe sahip olan soliter-soliter dalga etkileşimi ve biri pozitif diğeri negatif genliğe sahip olan soliter dalga ve antisoliter dalganın etkileşimi ele alınarak bu iki etkileşim arasındaki farklılıklar incelendi.

#### Dalga hareketi

Bu problemde modifiye edilmiş Improved Boussinesq denkleminin ürettiği soliter dalganın hareketi ele alındı. (4.40) ile verilen MIBq denkleminin tam çözümü ve tam çözümün  $t$  bağımsız değişkenine göre kısmi türevinde  $t = 0$  alınması ile

$$\begin{aligned} f(x) = u(x, 0) &= A \operatorname{sech} \left( (A/c\sqrt{2}) (x - \tilde{x}_0) \right) \\ g(x) = u_t(x, 0) = v(x, 0) &= (A^2/\sqrt{2}) \operatorname{sech} \left( (A/c\sqrt{2}) (x - \tilde{x}_0) \right) \times \\ &\quad \tanh \left( (A/c\sqrt{2}) (x - \tilde{x}_0) \right) \end{aligned} \quad (4.56)$$

başlangıç koşulları elde edildi. (4.56) eşitliği MIBq denklemi tarafından üretilen ve genlik değeri  $A$ , hızı  $c$  ve başlangıçtaki konumlandığı nokta  $\tilde{x}_0$  olup  $x$  ekseninde sağ tarafa doğru hareket eden soliter dalgayı temsil eder. Problemin çalışıldığı bölge  $[-150, 180]$  olarak seçildi. Dalga hareketi incelenirken üzerinde çalışılan bölgenin seçiminde; seçilen farklı genlik, zaman adımı ve konum adımı değerleri için yaklaşık çözüm ve tam çözüm değerlerinin bölgenin sağ ve sol uçlarında sınır değerlerinin

$u \approx 0$  olması göz önüne alındı. Farklı  $A$ ,  $\Delta t$  ve  $h$  değerleri için  $t = 70$  de elde edilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları Tablo 4.6 ve Tablo 4.7 de sunuldu.

Tablo 4.6: MIBq için farklı  $A$ ,  $\Delta t$  ve  $h$  değerlerinde  $L_2$  hata normları

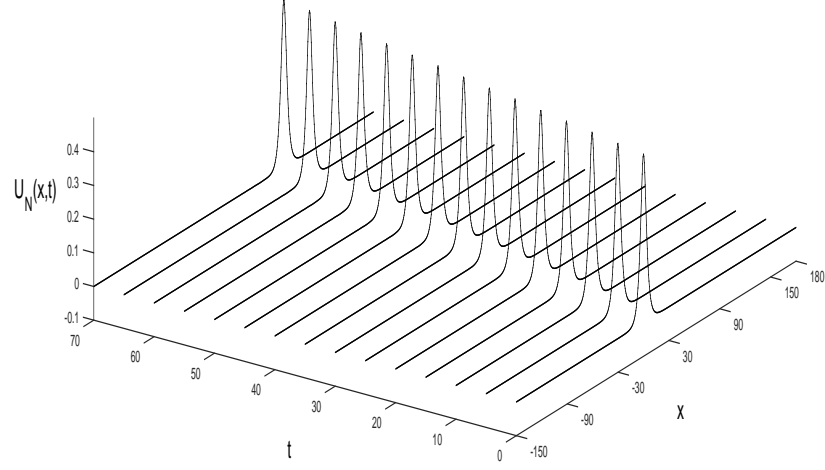
$A$	$\Delta t$	$L_2 \times 10^3$				
		$h = 0.1$	$h = 0.2$	$h = 0.5$	$h = 0.625$	$h = 1$
0.2	0.01	0.003517	0.010551	0.062799	0.097987	0.248152
	0.02	0.003616	0.010354	0.063026	0.097902	0.248340
	0.05	0.005016	0.010771	0.063489	0.098607	0.248774
	0.1	0.006695	0.013217	0.065216	0.100466	0.250598
	0.2	0.013119	0.020699	0.072923	0.108059	0.258291
0.25	0.01	0.008302	0.025281	0.155530	0.242644	0.617641
	0.02	0.008342	0.025418	0.155783	0.242847	0.617957
	0.05	0.009315	0.026680	0.157046	0.244025	0.618954
	0.1	0.013655	0.031317	0.161599	0.248744	0.623690
	0.2	0.032117	0.050153	0.180575	0.267618	0.642671
0.5	0.01	0.072425	0.272540	1.697739	2.657717	6.890560
	0.02	0.074415	0.274592	1.699360	2.659512	6.892127
	0.05	0.090743	0.291180	1.715635	2.675136	6.907578
	0.1	0.149280	0.350552	1.772805	2.731729	6.961596
	0.2	0.399403	0.595447	2.005275	2.960539	7.180371

Tablo 4.7: MIBq için farklı  $A$ ,  $\Delta t$  ve  $h$  değerlerinde  $L_\infty$  hata normları

		$L_\infty \times 10^3$				
$A$	$\Delta t$	$h = 0.1$	$h = 0.2$	$h = 0.5$	$h = 0.625$	$h = 1$
0.2	0.01	0.001110	0.003140	0.018486	0.028671	0.072481
	0.02	0.001309	0.003199	0.018457	0.028709	0.072630
	0.05	0.001556	0.003183	0.018658	0.028925	0.072801
	0.1	0.002117	0.003959	0.019187	0.029469	0.073345
	0.2	0.003667	0.005898	0.021534	0.031845	0.075722
0.25	0.01	0.002644	0.007623	0.044770	0.069767	0.177756
	0.02	0.002526	0.007505	0.044772	0.069837	0.177852
	0.05	0.002918	0.007923	0.045193	0.069957	0.178106
	0.1	0.004098	0.009176	0.046504	0.071355	0.179477
	0.2	0.009598	0.014311	0.051878	0.076619	0.184787
0.5	0.01	0.022512	0.084774	0.531020	0.818710	2.134930
	0.02	0.023123	0.086232	0.531854	0.819880	2.135362
	0.05	0.028181	0.093191	0.538485	0.826578	2.139281
	0.1	0.053767	0.119238	0.562424	0.849354	2.152588
	0.2	0.154460	0.219016	0.655966	0.938634	2.206992

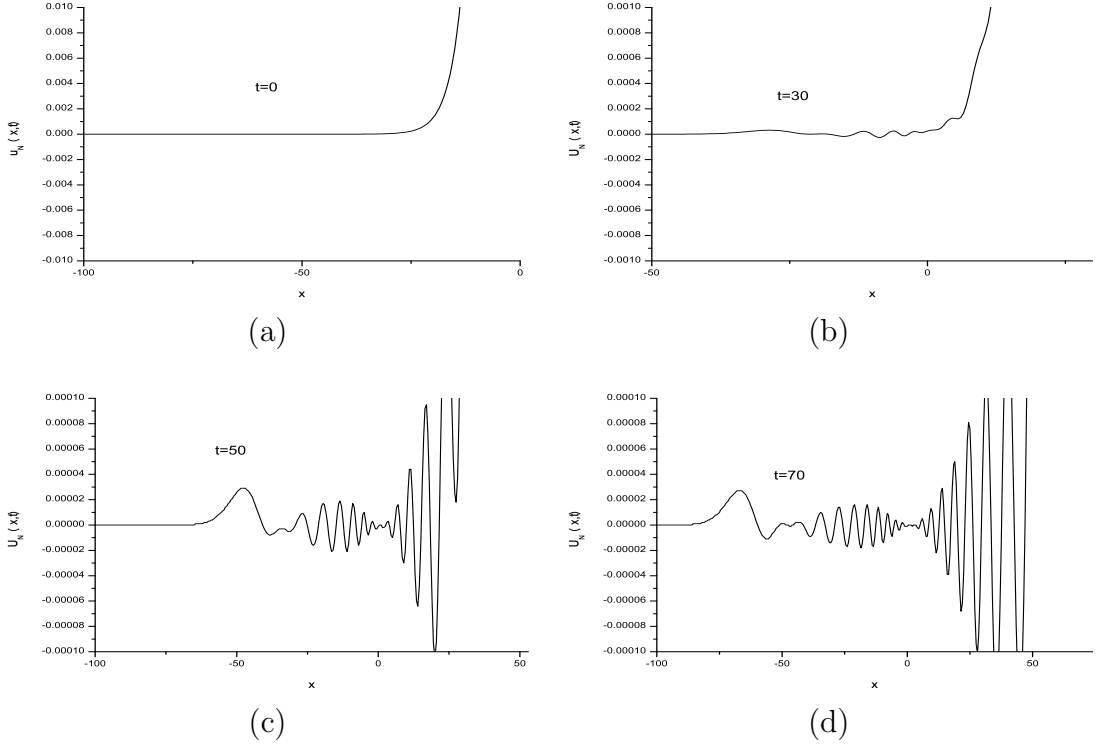
Tablolardan görüleceği üzere  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının minimum değeri  $h$  konum adımının farklı seçimleri için  $\Delta t = 0.01$  zaman adımında elde edildi. Daha küçük zaman ve konum adımı kullanılması ile yaklaşık çözümün tam çözüme daha çok yaklaştığı, zaman ve konum adımlarının bölüntü sayısı arttırıldıkça  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının azaldığı gözlemlendi.

Genliği  $A = 0.5$  ve başlangıç zamanındaki konumu  $\tilde{x}_0 = 0$  olan solitary dalganın  $h = 0.1$  ve  $\Delta t = 0.01$  değerleri için nümerik simülasyonu ise Şekil 4.10 de sunuldu. Şekilden görüleceği üzere soliter dalga şeklinde, genliğinde ve dolayısıyla hızında önemli bir değişim olmadan hareket etmektedir.



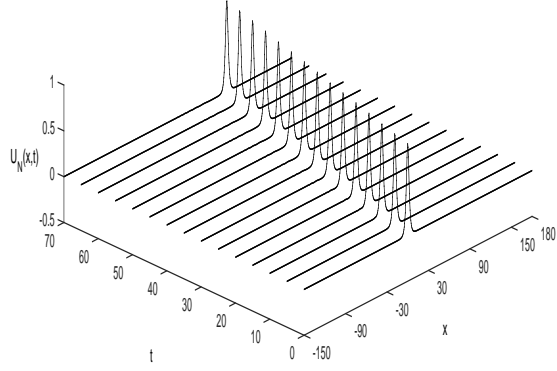
Şekil 4.10: MIBq için  $x \in [-150, 180]$ ,  $A = 0.5$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $\tilde{x}_0 = 0$  ve  $t = 70$  değerlerinde soliter dalga hareketi

Nümerik simülasyon grafiklerinin  $t = 30$ ,  $50$  ve  $70$  zaman değerleri için soliter dalganın arkasında salınım yapan ikincil dalgaların daha iyi gözlenebilmesi amacıyla büyütüldü ve grafikler Şekil 4.11 de sunuldu. Şekil 4.11'den soliter dalganın arkasında bulunan ikincil dalgaların, başlangıç dalgasının kuyruk kısmına doğru genliklerinin salınımlarından daha hızlı azaldığı gözlenmektedir. Soliter dalganın hareketi için elde edilen sonuçlar referans [115] de elde edilen sonuçlarla uyumludur.

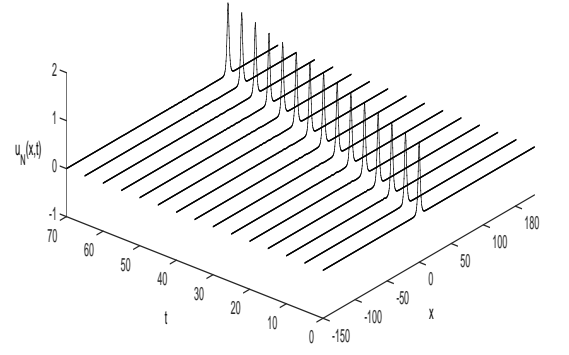


Şekil 4.11: MIBq: ikincil dalgalar

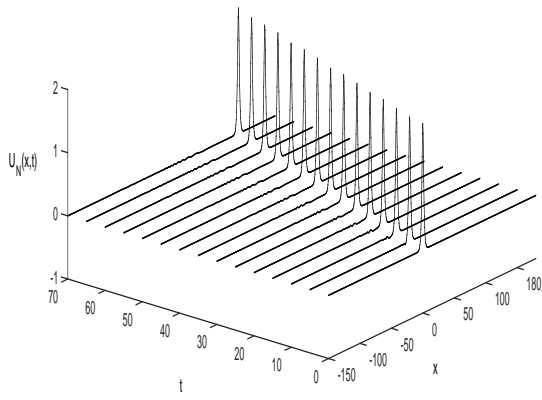
Daha sonra, soliter dalganın yapısındaki değişimi incelemek amacı ile  $t = 70$  için soliter dalganın genliği  $A = 1$ ,  $A = 1.5$ ,  $A = 2$  ve  $A = 2.5$  seçilerek nümerik simülasyonlar Şekil 4.12 de sunuldu. Şekil 4.12'den görüleceği üzere soliter dalganın kuyruk kısmında ikincil dalgalar meydana gelir ve soliter dalganın genliğinin büyümesi ile salınım yapan ikincil dalgalar artar. Nümerik deneyler yardımıyla soliter dalganın genliğinin artması ile ikincil dalgaların arttığı sonucuna varıldı.



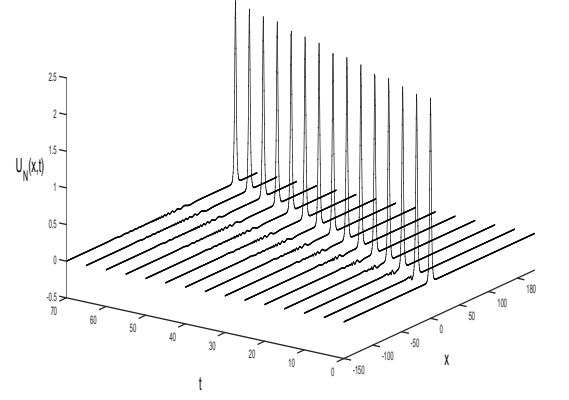
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 4.12: MIBq tipi için  $A = 1$ ,  $A = 1.5$ ,  $A = 2$  ve  $A = 2.5$  değerlerinde soliter dalga hareketi

## Dalga etkileşimi

MIBq denkleminin dalga etkileşimini tanımlayan çözüm [115]

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^2 A_i \operatorname{sech} \left( \left( A_i / c_i \sqrt{2} \right) (x - c_i t - \tilde{x}_i) \right) \quad (4.57)$$

olmak üzere bu kısımda soliter dalgaların etkileşimi üzerine nümerik çalışmalar yapıldı.  $(u^3)_{xx}$  nonlinear teriminin tek fonksiyon olmasından dolayı (4.40) ile verilen MIBq denkleminin soliter dalga üreten çözümlerinin yanı sıra antisoliter dalga üreten çözümleri de mevcuttur [99]. Böylece bu çalışmada ilk olarak eşit ve farklı genliklere sahip iki soliter dalganın etkileşimi, ikinci olarak eşit ve farklı genliklere sahip biri soliter ve diğeri antisoliter dalga olan iki dalganın etkileşimi ele alındı.

## Soliter-soliter dalga etkileşimi

Bu problemde  $A_1$  ve  $A_2$  genliklerine sahip,  $\tilde{x}_1$  ve  $\tilde{x}_2$  noktalarında konumlandırılmış,  $c_1$  ve  $c_2$  hızları ile birbirlerine doğru hareket eden iki soliter dalganın etkileşimi ele alındı. Problemin başlangıç koşulları (4.40) denkleminin dalga etkileşimini tanımlayan (4.57) çözüm fonksiyonunda  $t = 0$  alınarak

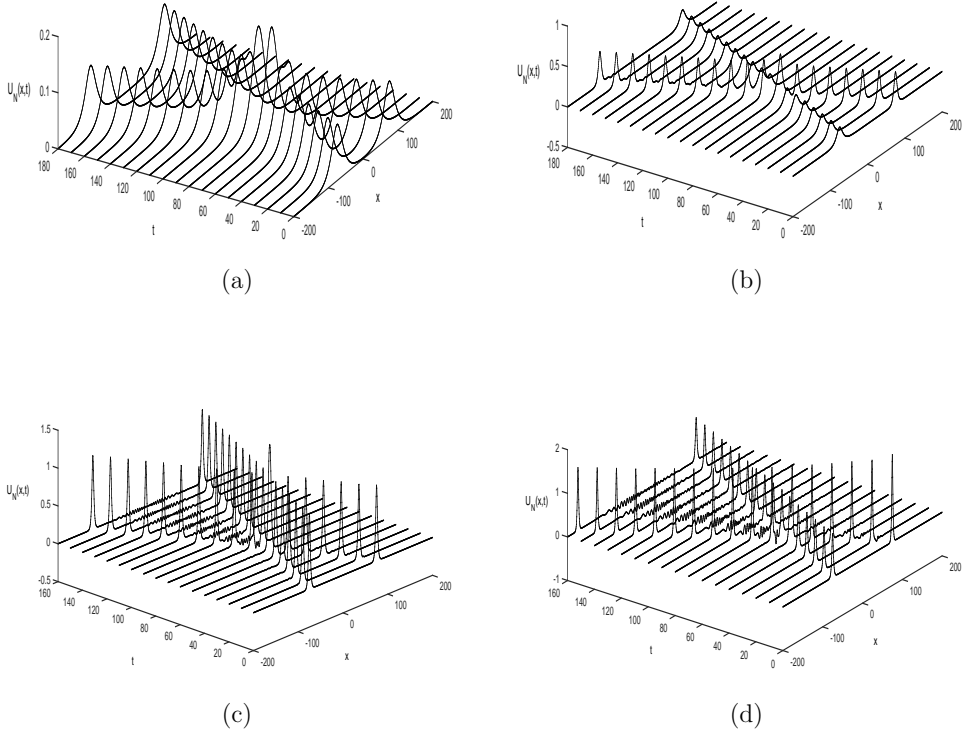
$$f(x) = A_1 \operatorname{sech} \left( (A_1 / c_1 \sqrt{2}) (x - \tilde{x}_1) \right) + A_2 \operatorname{sech} \left( (A_2 / c_2 \sqrt{2}) (x - \tilde{x}_2) \right)$$

$$g(x) = (A_1^2 / \sqrt{2}) \operatorname{sech} \left( (A_1 / c_1 \sqrt{2}) (x - \tilde{x}_1) \right) \times \tanh \left( (A_1 / c_1 \sqrt{2}) (x - \tilde{x}_1) \right) \\ + (A_2^2 / \sqrt{2}) \operatorname{sech} \left( (A_2 / c_2 \sqrt{2}) (x - \tilde{x}_2) \right) \times \tanh \left( (A_2 / c_2 \sqrt{2}) (x - \tilde{x}_2) \right)$$

elde edildi. Dalgaların ilk konum noktaları  $\tilde{x}_1 = -75$  ve  $\tilde{x}_2 = 75$  olmak üzere problem  $[-200, 200]$  bölgesi üzerinde dalgaların etkileşimini tamamlaması ve daha iyi gözlenmesi açısından seçildi. Etkileşim problemi zaman adımı  $\Delta t = 0.5$ , konum adımı  $h = 0.5$  ve  $t = 180$  değerleri için genlik değerlerinin  $A \ll 1$  ve  $A \geq 1$  olmak

üzere iki durumu göz önüne alınarak çalışıldı. Birinci durumun incelenmesi için, ilk olarak dalgaların genlikleri  $A_1 = A_2 = 0.1$  ve ikinci olarak  $A_1 = 0.2$ ,  $A_2 = 0.4$  seçilerek Şekil 4.13 (a)-(b) de sunuldu. Şekilden, etkileşimin başladığında, dalgaların yavaşça örtüşerek tek bir dalga formunu oluşturduğu etkileşimden sonra ise tekrar iki dalga formu gözlemlendiği ve dalgaların orjinal şekillerini kazanarak ilerlemeye devam ettikleri gözlemlendi. Ayrıca etkileşim sonrasında dalgaların arkalarında ihmal edilebilir ikincil kuyruk dalgaları bıraktıkları görüldü. Daha sonra ikinci durumu incelemek amacıyla, dalgaların genlikleri  $A_1 = A_2 = 1$  ve  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 2$  seçildi ve nümerik simülasyonu Şekil 4.13 (c)-(d) da sunuldu. Şekillerden görüldüğü üzere  $A \ll 1$  durumuna benzer etkileşim olayı gerçekleşmekte ve etkileşime giren dalgaların arasında kalan bölgede daha fazla görülebilir ikincil dalga ortaya çıkmaktadır.

Sonuç olarak; etkileşim anındaki dalganın genliği her iki dalganın genliğinin toplamının iki katından fazladır ve etkileşimin inelastikliği, dalgaların herhangi birinin genliğinin artması ile artmaktadır. Yapılan nümerik deneyimler sonucunda, etkileşime giren soliter dalgaların genlikleri için  $A \ll 1$  için etkileşim elastik ve  $A \geq 1$  için etkileşim inelastiktir. Elde edilen sonuçlar referans [115] de sunulan sonuçlar ile uyumludur.

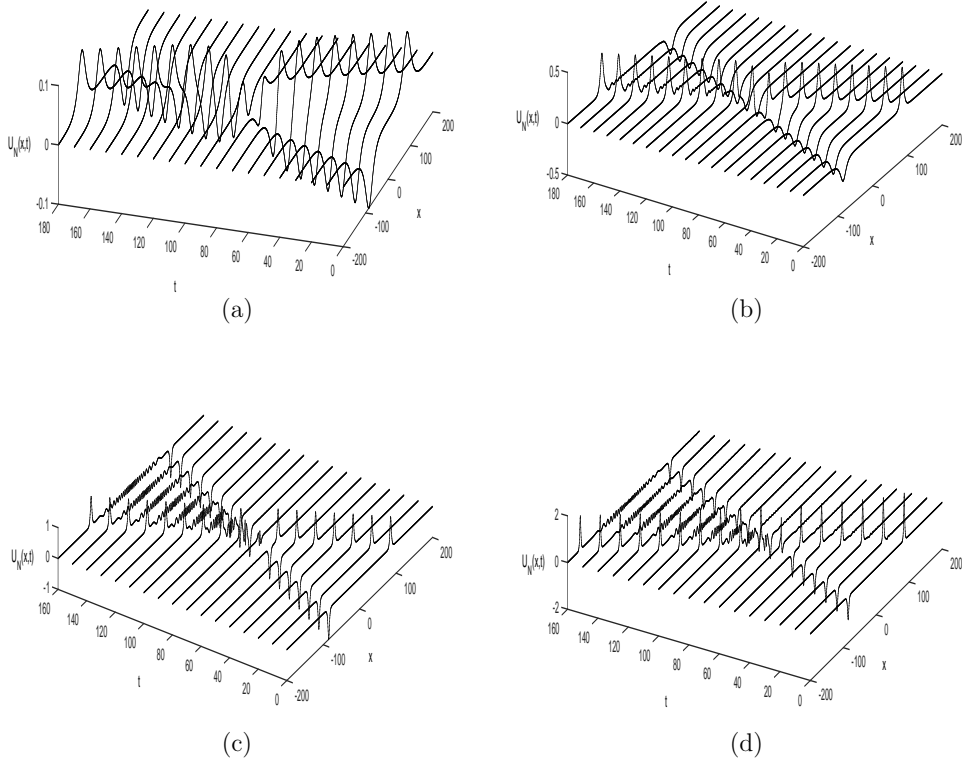


Şekil 4.13: MIBq: soliter-soliter dalga etkileşimi

### Soliter-antisoliter dalga etkileşimi

Soliter-antisoliter dalga etkileşiminin incelenmesi amacı ile (4.40) ile verilen problemin çalışıldığı aralık yine  $[-200, 200]$ ,  $\Delta t = 0.5$ ,  $h = 0.5$ ,  $t = 180$  ve dalgaların başlangıçta konumlandığı noktalar  $\tilde{x}_1 = -85$  ve  $\tilde{x}_2 = 85$  seçildi. Mutlak değerce küçük genliğe sahip olan dalgaların etkileşimini araştırmak amacı ile ilk olarak  $A_1 = -0.1$ ,  $A_2 = 0.1$  ve sonra  $A_1 = -0.2$ ,  $A_2 = 0.4$  seçildi. Daha sonra genlik değerleri  $A_1 = -1$ ,  $A_2 = 1$  ve  $A_1 = -1$ ,  $A_2 = 2$  değerlerine kadar artırıldı. Etkileşimlerin nümerik simülasyonu Şekil 4.14 de sırasıyla sunuldu. Etkileşim süresince birbirlerine doğru hareket eden dalgaların ön kısımlarının dikleşerek genliklerinin sürekli azaldığı ve etkileşim anında

iki dalganın hemen hemen kaybolduğu, bir müddet sonra soliter ve antisoliter dalganın tekrar görünerek orjinal şekil ve büyük bir oranda genliklerini tekrar kazandıkları gözlemlendi.



Şekil 4.14: MIBq: soliter-antisoliter dalga etkileşimi

Etkileşimden sonra dalgaların genliklerinin artması ile etkileşen dalgaların arkasında ortaya çıkan görülebilir ikincil dalgaların arttığı ve soliter-antisoliter dalga etkileşiminde, soliter-soliter etkileşimine göre salınım yapan ikincil dalgaların daha fazla olduğu gözlemlendi. Elde edilen sonuçlar [99] de sunulan sonuçlar ile uyumludur.

## KAYNAKLAR

- [1] C. Truesdell, *Essays in the History of Mechanics*, Springer, New York et al., 1968.
- [2] S. Zheng, *Nonlinear Evolution Equations*, Chapman and Hall /CRC, 2004.
- [3] E. Tadmor, *A review of numerical methods for nonlinear partial differential equations*, Bulletin of the American Mathematical Society, 49:4 (2012), 507-554
- [4] A. Wazwaz, *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*, Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag, New York, 2009.
- [5] J. Scott Russell, *Report of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, London, September 1845 (PDF). London: John Murray. 311-390, Plates XLVII–XLVII.
- [6] P. G. Drazin, R. S Johnson, *Solitons: An Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge,1989.
- [7] J. S. Russell, *The Modern System of Naval Architecture*, Day and Son, London, 1865.
- [8] A. T. Filippov, *The Versatile Soliton*, Birkhauser, New York, 2000.
- [9] A. Wazwaz, *Partial Differential Equations Methods and Applications*, Balkema Publishers, The Netherlands, (2002)
- [10] D. J Korteweg, G.de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and a new type of long stationary wave*, Philosophical Magazine 39:240(1895), 422-443.
- [11] J. E. Allen, *The early history of solitons (solitary waves)*, Physica Scripta, 57:3(1998), 436-441.
- [12] E. Fermi, J. Pasta , S. Ulam, *Studies of nonlinear problems I*, LA-1940 (1955)
- [13] Anonymous.<http://news.rpi.edu/content/2015/03/23/solution-1953-fermi-pasta-ulam-problem>

- [14] N. J. Zabusky, M. D. Kruskal, *Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*, Phys. Rev. Lett. 15:6(1965), 240-243.
- [15] Y. Yousefi, K. Kh. Muminov, *A simple classification of solitons*, Mathematical Physics (2012), 1-18.
- [16] C. S. Gardner, J. M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura, *Method for solving Korteweg de Vries equation*, Phys. Rev. Lett., 19:19 (1967),1095-1097.
- [17] P. D. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 21:5, (1968):467–490.
- [18] V. E. Zakharov, A. B. Shabat, *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*, Soviet Physics JETP, 34:1 (1972),62-69.
- [19] R. Hirota, *Exact solution of the Korteweg de Vries equation for multiple collisions of solitons*, Physical Review Letters, 27:18(1971), 1192-1194.
- [20] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *The inverse scattering transform-fourier analysis for nonlinear problems*, Studies in Applied Mathematics, 53:4 (1974), 249-315.
- [21] Anonymous.<http://kasmana.people.cofc.edu/SOLITONPICS/>
- [22] J. Perio, S. Sherwin, *Finite difference, Finite Element and Finite Volume Methods for Partial Differential Equations*, Handbook of Materials Modelling. volume 1:Methods and Models, Springer,London, 2005.
- [23] S. B. Rao, H. R. Anuradha, *Differential Equations with Applications and Programs*, Universities Press, India, 1996.
- [24] H. Erlichson, *Johann Bernoulli’s brachistochrone solution using Fermat’s principle of least time*, Eur. J. Phys., 20(1999), 299-3045.
- [25] B. Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Grösse. Inauguraldissertation*, Göttingen, Werke, (1851),3-48.
- [26] D. Hilbert, *Über das Dirichletsche Prinzip in Festschrift der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zur Göttingen*, Mathematische Physik Klasse, Berlin, 1901.

- [27] W. Ritz , *Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik*, J. Reine Angew. Math., Vol. 135, P. 1-61, 1909.
- [28] R. Courant, *Variational methods for the solutions of equilibrium and vibrations*, Bull. Amer. Math. Soc. Volume, 49:1 (1943), 1-23.
- [29] C. S. Desai, T. Kundu, *Elementary Finite Element Method*, CRC Press, New York, 2001.
- [30] J. H. Argyris, *Energy theorems and structural analysis: a generalized discourse with applications on energy principles of structural analysis including the effects of temperature and nonlinear stress-strain relations*, Aircraft Engineering and Aerospace Technology, 26:10(1954), 347-356.
- [31] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, L. J. Topp, *Stiffness and deflection analysis of complex structures*, Journal of Aeronautical Science, 23:9 (1956), 805-823.
- [32] R. W. Clough, *The Finite Element Method in Plane Stress Analysis*, Proc. 2nd ASCE Conf. Electronic Comp., Pittsburg, 1960.
- [33] H. C. Martin, *Plane elasticity problems and the direct stiffness method*, The Trend in Engineering, 13 (1961), 5-19.
- [34] R. H. Gallagher, J. Padlog and P. P. Bijlaard, *Stress analysis of heated complex shapes*, Journal of the American Rocket Society, 32:5 (1962),700-707.
- [35] R. J. Melosh, *Structural analysis of solids*, journal of the structural Division, Proceedings Of the American society of civil engineers, 4 (1963), 205-223.
- [36] M. J. Turner, E. H. Dill, H. C. Martin and R. J. Melosh, *Large deflections of structures subjected to heating and external loads*, Journal of Aeronautical Sciences, 27:2 (1960), 97-107.
- [37] R. H. Gallagher, J. Padlog, *Discrete element approach to structural stability analysis*, Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1:6 (1963), 1437-1439.
- [38] D. L. Logan, *A first course in the Finite Element Method*, 4th ed., Thomson, Toronto, 2007
- [39] G. Strang, G. J. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*, Wellesley-Cambridge Press, NJ, 2008.

- [40] O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung, *The Finite element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill publisher, 1967.
- [41] B. A. Finlayson, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, New York, 1972.
- [42] E. G. Becker, G. F. Carey, J. T. Oden, *Finite Elements: An Introduction*, Vol. I. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1981.
- [43] C. A. J. Fletcher, *Computational Galerkin Methods*, Springer-Verlag, New York, 1984
- [44] J. N. Reddy, *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, New York, 1984.
- [45] J. N. Reddy, *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics*, Oxford University Press, Oxford, 2004.
- [46] L. J. Segerlind, *Applied Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [47] W. B. Bickford, *A First Course in the Finite Element Method*, William B. Bickford, Irwin, McGraw-Hill, 1994.
- [48] D. W. Pepper, J. C. Heinrich, *The Finite Element Method: Basic Concepts and application*, Taylor and Francis Group, New York, 2006.
- [49] G. P. Nikishkov, *Introduction to the Finite Element Method*, Lecture notes, Japan, 2004.
- [50] G. R. Liu, S.S. Quek, *The Finite Element Method. A Practical Course*, Butterworth-Heinemann, USA, 2013.
- [51] O. C. Zienkiewicz , R. L. Taylor , J. Z. Zhu, *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, Oxford: Butterworth Heinemann, New York, 2005.
- [52] C. S. Desai, T. Kundu, *Introductory Finite Element Method (Mechanical and Aerospace Engineering Series)*, CRC press, London, 2001.
- [53] G. R. Liu, N. T. Trung, *Smoothed Finite element Methods*, CRC press, USA, 2010.
- [54] C. A. Felippa, *Introduction to Finite Element Methods*, Lecture notes, 2004.

- [55] A. H. A. Ali, *Finite Element Studies of The Korteweg-de-Vries Equation*, Ph.D. Thesis, University of Wales, UK, 1989.
- [56] J. Noye, *Computational Techniques for Differential Equations*, Elsevier Science Publishers B. V., New York, 1991.
- [57] K. W. Cassel, *Variational Methods with Application in Science and Engineering*, Cambridge University Press, New York, USA, 2013.
- [58] L. L. Schumaker, *Spline functions: Basic theory*, Cambridge university press, United Kingdom, 2007.
- [59] I. J. Schoenberg, *Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions*, Parts A and B, Quart. Appl. Math. 4 (1946), 45-99, 112-141.
- [60] I. Barrodale, A. Young, *A Note on Numerical Procedures for Approximation by Spline Functions*, Comput. J., 9:3 (1966), 318-320.
- [61] S. Wold, *Spline Functions in Data Analysis*, technometrics, 16:1 (1974), 1-11.
- [62] Y. Uçar, *B- spline sonlu eleman yöntemleri ile Coupled diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri*, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora tezi, Malatya, 2011.
- [63] J. Rashidinia, Sh. Sharifi, *Survey of B-spline functions to approximate the solution of mathematical problems*, Rashidinia and Sharifi Mathematical Science, 6:48, 1-8, 2012.
- [64] C. Boor, *On Calculating with B-splines*, Journal of Approximation Theory, 6 (1972), 50-62.
- [65] P. M. Prenter, *Splines and variational methods*, Wiles, New York, 1975.
- [66] C. Runge, *Weber De Numerische Lösung von Differentialgleichungen*, Math. Ann. 46 (1895), 167-178.
- [67] W. Kutta, *Beitrag zur näherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen*, Z. Math. Phys. 46 (1901), 435-453.
- [68] S. Francis, *Schaum's Outlines of Theory and Problems of Numerical Analysis*, NY: Mcgraw-Hill, New York, 1989.

- [69] M. K. Jain, *Numerical Solution of Differential Equations*, John Wiley and Sons Ltd, New Delhi, 1984.
- [70] D. Eberly, *Stability Analysis for Systems of Differential Equations*, Geometric Tools LLC, 1-13, 2003.
- [71] C. Brown, *Differential Equations a Modelling Approach*, Sage Pub., London, 2007.
- [72] M. J. Boussinesq, *Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans un canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond*, J. Math. Pures Appl., 17 (1872) 55–108.
- [73] A. Mohebbi, Z. Asgari, *Efficient numerical algorithms for the solution of “good” Boussinesq equation in water wave propagation*, Comp. Phy. Commun., 182:12 (2011), 2464-2470.
- [74] A. G. Bratsos, *The solution of the Boussinesq equation using the method of lines*, Computer methods in Applied Mechanics and Engineering, 157:1-2(1998), 33-34.
- [75] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, *Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*, Phys. Rev. Lett. 15(1965), 240-243.
- [76] R. Hirota, *Exact N-soliton solutions of the wave equation of long waves in shallow-water and in nonlinear lattices*, J. Math. Phys., 14:7 (1973), 810-814.
- [77] V. E. Zakharov, *On stochastization of one-dimensional chains of nonlinear oscillators*, Zh. Eksp. Teor. Fiz., 65 (1973), 219-225.
- [78] V. G. Makhankov, *Dynamics of classical solitons (in non-integrable systems)*, Physics Reports (Section C of Physics Letters), 35:1 (1978), 1-128.
- [79] I. L. Bogolubsky, Preprint JINR P9-8698 Dubna (1975); JETP Lett. 24 (1976) 160.
- [80] V. S. Manoranjan, A. R. Mitchell, J. LI. Morris, *Numerical solutions of the good Boussinesq equation*, Siam J. Sci. Stat. Comput., 5:4 (1984), 946-957.
- [81] V. S. Manoranjan, T. Ortega, J. M. Sanz Sema, *Soliton and antisoliton interactions in the “good” Boussinesq equation*, Journal of Mathematical Physics, 29:9(1988), 1964-1968.

- [82] T. Ortega, J. M. Sanz-Sema, *Nonlinear stability and convergence of finite difference methods for the “good” boussinesq equation*, Numer. Math., 58 (1990), 215-229.
- [83] A. K. Pani, H. Saranga, *Finite element Galerkin method for the “good” Boussinesq equation*, Nonlinear Analysis, 29:8(1997), 937-956.
- [84] P. Daripa, W. Hua, *A Numerical study of an ill-posed Boussinesq equation arising in water waves and nonlinear lattices: filtering and regularization techniques*, Appl. Math. Comput., 101:2-3 (1999), 159-207.
- [85] H. El-Zoheiry, *Numerical investigation for the solitary waves interaction of the “good” Boussinesq equation*, Applied Numerical Mathematics, 45:2-3 (2003), 161-173.
- [86] A. Wazwaz, *Construction of soliton solutions and periodic solutions of the Boussinesq equation by the modified decomposition method*, Chaos, Solitons and Fractals 12(2001), 1549-1556.
- [87] M. S. Ismail, A. G. Bratsos, *A Predictor- Corrector scheme for the Numerical solutions of the Boussinesq equation*, J. App. Math and Computing, 13:1-2(2003), 11-27.
- [88] A. G. Bratsos, Ch. Tsitouras, D. G. Natsis, *Linearized numerical Schemes for the Boussinesq equation*, Appl. Num. Anal. Comp. Math. 2:1 (2005), 34-53.
- [89] A. G. Bratsos, *A second order numerical scheme for the solution of the one-dimensional Boussinesq equation*, Numer. Algor., 46 (2007), 45-58.
- [90] A. G. Bratsos, *Solitary-wave propagation and interactions for the “good” Boussinesq equation*, International Journal of Computer Mathematics, 85:9 (2008), 1431-1440.
- [91] K. Al-Khaled, A. S. Nusier, *Numerical investigation for solitary solutions of the Boussinesq equation*, Appl. Math. E-notes 8 (2008), 159-170.
- [92] H. Bulut, *Comparing Numerical Methods for Boussinesq Equation Model Problem*, Numer. Methods Partial Differ. Equ., 25 (4) (2009), 783–796.
- [93] M. Dehghan, R. Salehi, *A meshless based numerical technique for traveling solitary wave solution of Boussinesq equation*, Applied Mathematical Modelling, 36:5 (2012), 1939-1956.

- [94] S. S. Siddiqi, S. Arshed, *Quintic B-spline for the numerical solution of the good Boussinesq equation*, Journal of Egyptian Mathematical Society, 22:2 (2014), 209-213.
- [95] M. S. Ismail, F. Mosally, *A fourth order finite difference method for the Good Boussinesq equation*, Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis, 2014 (2014), 1-10.
- [96] A. C. Scott, F. Y. F. Chu, D. W. Mclaughlin, *The soliton: A new concept in applied science*, Proc. IEEE, 61:10 (1973), 1443-1483.
- [97] C. Tomei, *The Boussinesq equation*, Ph.D. thesis, New York Univ., New York, 1982.
- [98] I. L. Bogolubsky, *Some examples of inelastic soliton interaction*, Computer Physics Communications, 13(1977), 149-155.
- [99] M. P. Soerensen, P. L. Christiansen, P. S. Lomdahl, *Solitary waves on non-linear elastic rods. I*, Journal of the Acoustical Society of America 76:3 (1984), 871-879.
- [100] Z. Zhang, F. Lu, *Quadratic finite volume element method for the Improved Boussinesq equation*, J. Math. Phys., 53:013505 (2012).
- [101] L. Iskandar, P. C. Jain, *Numerical solutions of the Improved Boussinesq equation*, Ind. Acad.Sci.(Math. Sci.), 89:3 (1980), 171-181.
- [102] H. El-Zoheiry, *Numerical study of the Improved Boussinesq equation*, Chaos, Solitons Fractals, 14:3, 377-384 (2002).
- [103] Z. Yang, X. Wang, *Blow-up of solutions for Improved Boussinesq type equations*, J. Math. Anal. Appl., 278:2 (2003), 335-353.
- [104] M. Inc, D. J. Evans, *A different approach for soliton solution of the Improved Boussinesq Equation*, Int. J. Comput. Math. Appl., 81:3(2004), 313-323.
- [105] A. M. Wazwaz, *Nonlinear variants of the Improved Boussinesq Equation with compact and noncompact structures*, Comput. Appl. Math., 49:4 (2005), 565-574.
- [106] A. G. Bratsos, *A second order numerical scheme for the Improved Boussinesq equation*, Phys. Lett. A., 370:2 (2007), 145-147.

- [107] A. G. Bratsos, *A Predictor-Corrector scheme for the Improved Boussinesq equation*, Chaos, Solitons Fractals, 40:5 (2009) , 2083-2094.
- [108] Q. Lin, Y. H. Wu, R. Loxton, S. Lai, *Linear B-spline element method for the Improved Boussinesq equation*, Comput. Appl. Math., 224:2 (2009), 658-667.
- [109] D. Irk, I. Dag, *Numerical simulation of the Improved Boussinesq equation*, Numer. Methods. Partial Differ. Equ., 26 :6 (2010), 1316-1327.
- [110] A. Shokri, M. Dehghan, *A not-a-knot meshless method using radial basis functions and Predictor- Corrector scheme to the numerical solution of Improved Boussinesq Equation*, Comput. Phys. Commun., 181:12 (2010), 1990-2000.
- [111] M. A. Abdou, A. A. Soliman, S.T. El-Basyony, *New Application of Exp-function method for improved boussinesq equation*, Physics Letters A, 369:5-6 (2007), 469-475.
- [112] Y. Zhijian, *Existence and non-existence of global solutions to a generalized modification of the Improved Boussinesq equation*, Math. Methods. Appl. Sci., 21:16 (1998), 1467-1477.
- [113] H. Bulut, M. Tuz, T. Akturk, *New Multiple Solution to the Boussinesq Equation and the Burgers-Like Equation*, Hindawi Publ. Corp. Jour. of Appl. Math., 2013(2013), 1-6.
- [114] Q. Wang, Z. Zhang, X. Zhang, Q. Zhu, *Energy-preserving finite volume element method for the Improved Boussinesq equation*, Journal of Computational Physics, 270(2014), 58-69.
- [115] L. Iskandar, P.C. Jain, *Numerical solution of equations having inelastic solitary wave interaction*, Comput. Math. Appl., 6:4 (1980), 373-383.
- [116] G. Chen, S. Wang, *Cauchy problem for generalized IMBq equation*, in Proceedings of the Conference on Nonlinear Partial Differential Equations and Applications World Scientific, Singapore, 1998.
- [117] C. Guowang, W. Shubin, *Existence and nonexistence of global solutions for generalized IMBq equation*, Nonlinear Anal., 36:8 (1999),961-980.
- [118] S. Wang, G. Chen , *The Cauchy problem for the generalized IMBq equation in  $W^{s,p}(R^n)$* , J. Math. Anal. Appl., 266:1 (2002), 38-54.

- [119] G. Chen, J. Xing, Z. Yang, *Cauchy problem for generalized IMBq equation with several variables*, *Nonlinear Anal.*, 26:7 (1996) ,1255-1270.

## ÖZGEÇMİŞ

14.11.1983 yılında Malatya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Malatya'da tamamladı. 2006 yılında İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde lisans öğrenimini birincilikle tamamladı. 2007 yılında Adıyaman Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladıktan sonra aynı yıl içerisinde Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde yüksek lisans öğrenimine başladı. 2010 yılında yüksek lisans öğrenimini tamamlayarak İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde doktora öğrenimine başladı.