T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUSION FRAMELER (FÜZYON ÇATILAR); TEMELLERİ, UYGULAMALARI VE BAZI GENİŞLEMELERİ

Şahika AYTEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Aralık 2011

Tezin Başlığı: Fusion Frameler (Füzyon Çatılar);
Temelleri, Uygulamaları ve Bazı Genişlemeleri

Tezi Hazırlayan: Şahika AYTEKİN

Sınav Tarihi: 06.12.2011

Yukarıda adı geçen tez, Jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jürisi Üyeleri (ilk isim jüri başkanı, ikinci isim tez danışmanı)

Prof. Dr. Ömer Faruk TEMİZER (İnönü Üniv.) ____________

Doç. Dr. Yılmaz YILMAZ (İnönü Üniv.) ____________

Doç. Dr. Alaattin ESEN (İnönü Üniv.) ____________

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

____

Prof.Dr. Asım KÜNKÜL
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "*Fusion Frameler (Füzyon Çatılar); Temelleri, Uygulamaları ve Bazı Genişlemeleri*" başlıklı bu çalışmamın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Şahika AYTEKİN

Anneme, Babama ve Ablama ...

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FUSION FRAMELER (FÜZYON ÇATILAR);
TEMELLERİ, UYGULAMALARI VE BAZI GENİŞLEMELERİ

Şahika AYTEKİN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

71+vi sayfa

2011

Danışman: Doç. Dr. Yılmaz YILMAZ

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın giriş bölümünde; konuyla ilgili bazı genel değerlendirmeler yapıldı ve konunun literatür özeti verildi.

İkinci bölümünde; diğer bölümlerde geçen temel tanım, kavram ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde; baz, Bessel dizisi ve frame kavramları tanıtılıp, bunlarla ilgili temel teoremler verildi.

Dördüncü bölümde; fusion frame kavramı tanıtılıp, framelerle arasındaki ilişkiden bahsedildi. Ayrıca fusion framelerin temelini oluşturan teorem ve sonuçlar ifade edildi.

Beşinci ve son bölümde ise fusion framelerin güncel bir uygulamasından bahsedildi.

ANAHTAR KELİMELER: Bessel dizileri, frameler, altuzayların frameleri, fusion frameler.

ABSTRACT

MSc Thesis

FUSION FRAMES;
BASICS, APPLICATIONS AND ITS SOME EXTENSIONS

Şahika AYTEKİN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

71+vi pages

2011

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ

In the introduction chapter of this thesis consisting of five chapters some general evaluations have been done about the subject and then literature summary have been presented.

In the second chapter, the basics definitions, concepts, theorems and examples which will be useful in the next chapters have been given.

In the third chapter, some basics concepts and theorems about bases, Bessel sequences and frames have been given.

In the fourth chapter concept of fusion frame is introduced. Further some important relations between frames and fusion frames have been showed and foundations of fusion frames have been presented.

In the fifth and final chapter an actual application of fusion frames have been stated.

KEY WORDS: Bessel sequences, frames, frames of subspaces, fusion frames.

TEŞEKKÜR

Lisansüstü öğrenimim boyunca destek ve yardımlarını gördüğüm, gerek bilgi gerekse tecrübeleri ile bana çok büyük katkıları olan danışmanım, çok değerli hocam, Sayın. Doç. Dr. Yılmaz YILMAZ'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Kendileri, bu konuda beni çalışmaya teşvik ederek yönlendirmiş, öneri ve yardımlarını hiç bir zaman esirgememiş ve bu tezin olgunlaşmasında büyük katkılar sağlamıştır.

Ayrıca çalışmamın her aşamasında desteklerini gördüğüm değerli hocam, Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ'e;

Makale ve tez yazımında bana büyük kolaylık sağlayan Latex programını öğreten ve yardımlarını hiç eksik etmeyen değerli hocam, Sayın Yard. Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e;

İhtiyaç duyduğum zamanlarda değerli zamanını ve bilgilerini sunan sevgili arkadaşlarım Araş. Gör. Sümeyye TAY ve Araş. Gör. Fatih TEMİZSU'ya;

Çalışmalarım boyunca beni yalnız bırakmayan değerli arkadaşlarım Cansu ALİBEYOĞLU ve Hülya KELEŞ'e;

Hayatım boyunca olduğu gibi yüksek lisans süresince de maddi ve manevi desteklerini esirgemeyip, her zaman yanımda olan; canım Annem, Babam ve Ablama sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

SEMBOLLER

$\mathbb{R}$: Reel sayıların cümlesi

$\mathbb{N}$: Doğal sayıların cümlesi

$\mathbb{C}$: Kompleks sayıların cümlesi

$\mathbb{Z}$: Tam sayıların cümlesi

$\mathbb{Q}$: Rasyonel sayıların cümlesi

S : Sınırlı veya sınırsız kompleks terimli tüm dizilerin uzayı

ℓ_∞ : Kompleks terimli sınırlı dizilerin uzayı

ℓ_1 : Mutlak yakınsak seri oluşturan kompleks terimli dizilerin uzayı

$\ell_2(I)$: I üzerinde karesi toplanabilir dizilerin uzayı

ℓ_p : $\left\{ x = (x_n) \in S : \sum_n |x_n|^p < \infty,\ 1 \leq p < \infty \right\}$

$C\,[a,b]$: $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonların uzayı

$L_2\,[a,b]$: $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ karesi integrallenebilir fonksiyonların uzayı

$L_p(\mathbb{R})$: $\left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ : f \text{ ölçülebilir ve } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p < \infty \right\}$

$\overline{x}$: $x \in \mathbb{C}$'nin kompleks eşleniği

$\oplus$: Direkt toplam

$A^\perp$: Bir H Hilbert uzayında A kümesinin ortogonal komplementi

$\overline{A}$: A kümesinin kapanışı

I : Vektör uzayındaki birim dönüşüm

$R(T)$: T dönüşümünün görüntü cümlesi

$N(T)$: T dönüşümünün sıfır uzayı

İÇİNDEKİLER

	ÖZET	i
	ABSTRACT	ii
	TEŞEKKÜR	iii
	SEMBOLLER	iv
	İÇİNDEKİLER	vi
1	GİRİŞ	1
2	TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1	Temel Lineer Cebir Kavramları	4
2.2	Temel Fonksiyonel Analiz Kavramları	5
3	KLASİK FRAME TEORİNİN TEMELLERİ	15
3.1	Hilbert Uzaylarında Bessel Dizileri	15
3.2	Hilbert Uzaylarında Ortonormal Bazlar	20
3.3	Hilbert Uzaylarında Frameler	23
3.3.1	Sonlu Boyutlu Hilbert Uzaylarında Frameler	24
3.3.2	Sonsuz Boyutlu Hilbert Uzaylarında Frameler	36
4	FUSION FRAMELER	43
4.1	Fusion Framelere Giriş	43
4.2	Sonlu Boyutlu Altuzayların Fusion Frameleri	45
4.3	Genel Fusion Frameler	49
4.4	Parseval Fusion Frameler	58
5	FUSION FRAMELERİN GÜNCEL BİR UYGULAMASI	64
5.1	Kablosuz Sensör Ağları	64
5.2	Fusion Frameler ile Sensör Ağı Modellenmesi	65

6 KAYNAKLAR 69

ÖZGEÇMİŞ 71

1. GİRİŞ

Bazlar, hem sonlu hem de sonsuz boyutlu vektör uzaylarının analizinde önemli bir role sahiptir. Fikir her iki durumda da aynıdır: Uzaydaki tüm elemanlar, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ baz elemanlarının lineer kombinasyonu şeklinde tek türlü ifade edilebilir. Yani vektör uzayının her bir f elemanının

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \tag{1.0.1}$$

olacak şekilde bir tek $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ skaler dizisi vardır.

Fakat sonsuz boyutlu vektör uzaylarda durum biraz daha karmaşıktır. Zaman zaman sonsuz serilerle çalışmakta zorlanırız. Örneğin serileri, elemanların sabit noktaya göre mi (conditional convergent) yoksa elemanların nasıl sıralandığına bakılmaksızın (unconditional convergent) yakınsamasını mı isteriz? Hilbert uzaylarında şartsız yakınsaklık (unconditional convergent) Bessel dizileri düşünülerek elde edilmiştir. Bu yüzden Bölüm 3.2'de böyle dizilerin genel özellikleri detaylı bir şekilde anlatıldı. Bölüm 3.3'de Hilbert uzaylarında ortonormal bazların önemli özellikleri tartışıldı. Bölüm 3.4'de frame kavramından bahsedildi. Frameler, bazların bir genelleştirmesi olarak düşünülür. Biz bu çalışma boyunca ayrılabilir Hilbert uzaylarında çalıştık. Her ayrılabilir Hilbert uzayı bir baza sahiptir. O halde böyle bir genelleştirmeye neden ihtiyaç duyulmuştur sorusunu irdelemek oldukça doğaldır. Bu sorunun cevabını ise aslında bazların özellikleri bize verir. Çünkü baz olma şartları oldukça zordur: Mesela baz elemanlarının lineer bağımsız olması gerekir. Özel özelliklere sahip baz inşaa etmek gerekirse bu genelde imkansız olacaktır. Ayrıca bazdaki ufak bir değişiklik bile bazların özelliklerine zarar verebilir. Bazların bu kısıtlayıcı özelliklerinden dolayı daha esnek yapılara ihtiyaç duyulmuştur. İşte frameler bu esnekliği sağlayan araçlardır.

Şimdi H Hilbert uzayında bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin frame olma kavramından kısaca bahsedelim:

Bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi, H için bir framedir öyleki her bir $f \in H$'nın (1.0.1) şeklinde bir temsili vardır. Fakat bu temsilin tek türlü olması gerekmez. Yani $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ skaler dizisi tek türlü olmayabilir. Bu tanım gereğince her frame baz olmayabilir. Ancak her baz bir framedir. İşte bu yüzden frameler, bazların genelleştirmesi olarak düşünülür. Tanımdan da anlaşılacağı üzere frame elemanları arasında genelde lineer bağımsızlık şartı aranmaz. Daha açık olarak ifade etmek gerekirse bir frame, bazdan çok daha fazla sayıda eleman içerebilir.

Frameler, ilk olarak 1952 de, Duffin ve Schaeffer tarafından, [1] de tanımlanmıştır. Duffin ve Schaeffer, harmonik olmayan Fourier serilerinde, frameleri bir araç olarak kullanmışlardır. Daha sonra 1985'de, Daubechies, Grossmann ve Meyer, [2] numaralı çalışmalarında frameleri, $L_2(\mathbb{R})$ üzerindeki fonksiyonların seri açılımlarını bulmada kullanılabileceğini gözlemlediler. Çünkü bu açılımlar, ortonormal bazlar kullanılarak yapılan açılımlara çok benzemektedir. Pratikte kullanmak için en uygun bazlar, ortonormal bazlar olduğundan ve framelerin yapısı ortonormal bazlara benzer özellikler taşıdığından frame kavramının önemi artmıştır.

H Hilbert uzayında bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisine , her $f \in H$ için

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

şartını sağlayacak şekilde $0 < A \leq B < \infty$ katsayıları varsa, bir *frame* denir.

A ve B sayılarına *frame sınırları* adı verilir. A ya *alt*, B ye de *üst frame sınırı* denir. Frame sınırları tek değildir. Bütün alt frame sınırlarının supremumuna *optimal alt frame sınırı*, bütün üst frame sınırlarının infimumuna ise *optimal üst frame sınırı* adı verilir.

Frameler, sinyal işleme, görüntü işleme, filter bank teorisi, bilgi depolama ve kablosuz iletişim gibi bir çok alanda kullanılmaktadır. Sayısız alanda yaygın bir şekilde kullanılmasından dolayı, framelerle ilgili çalışmalar son yıllarda hızla artmıştır.

Ancak bazı uygulamalarda frameler de yeterli olmamaktadır. Bu eksikliğin giderilmesi için P. G. Casazza ve G. Kutyniok [3] bunun üzerine çalışmalar yapmış ve "altuzayların frameleri" kavramını tanıtmışlardır. Bu fikrin temelinde, yerel framelerden global bir frame elde etme gayesi yatar. Bu yüzden fusion frameler framelerin bir genelleştirmesi olarak düşünülür. Yani frame teorinin çok daha ötesinde bir teoridir. Bu çalışmanın asıl amacı da bu teoriyi incelemektir. Bu fikrin temeli aslında Duffin ve Schaeffer tarafından, [1] deki çalışmalarıyla atıldı. Daha sonra sırayla Gabor, Heil ve Walnut farklı konulardaki çalışmalarıyla bu fikri zenginleştirdiler. Bu fikir üzerine bir diğer yaklaşım da Fornasier'nin [4] ve [5] numaralı çalışmalarıdır. P. G. Casazza ve G. Kutyniok'un çalışmaları, Fornasier'in çalışmalarının bir genelleştirilmesidir.

I sayılabilir bir indeks kümesi olmak üzere, $\mathbb{W} = \{W_i\}_{i\in I}$, H'da kapalı altuzayların bir ailesi ve $\mathbf{v} = \{v_i\}_{i\in I}$ ağırlıkların bir ailesi yani tüm $i \in I$ için $v_i > 0$ olsun. $\mathbb{W}_{\mathbf{v}} = \{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$ aşağıdaki şartı sağlarsa bir *fusion frame* adını alır. Tüm $f \in H$ için

$$C\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} v_i^2 \|\pi_{W_i}(f)\|^2 \leq D\|f\|^2$$

şartını sağlayacak şekilde $0 < C \leq D < \infty$ skalerleri vardır. Burada π_{W_i}, H Hilbert uzayından W_i altuzayı üzerine olan ortogonal projeksiyondur. C ve D fusion frame sınırları olarak adlandırılır. C'ye *alt fusion frame sınırı*, D'ye de *üst fusion frame sınırı* adı verilir.

Fusion frameler, matematikte, fizikte, mühendislikte, zaman-sıklık analizinde, filter bank teorisinde, paket kodlamasında, sinyal ve görüntü işlemede, kablosuz sensör ağlarının modellemesinde ve bunun gibi bir çok alanda kullanılmaktadır. Fusion frameler, çoklu sinyal sistemlerinin yeniden inşaasını sağlar ve sistemlere sağlamlık katar.

Bölüm 4.1 de fusion frameler tanıtıldıktan sonra, Bölüm 4.2 de Hilbert uzaylarının sonlu boyutlu altuzaylarındaki fusion framelerinin bazı özellikleri verildi. Bölüm 4.3 de fusion framelerin genel özelliklerinden bahsedildi. Bölüm 4.4 de uygulamalarda kullanışlı olan Parseval fusion frameler karakterize edildi. Son bölümde ise günümüzde bir çok alanda kullanılan kablosuz sensör ağları tanıtılıp, fusion frameler ile nasıl modellendiği üzerinde duruldu.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Temel Lineer Cebir Kavramları

Bu bölümde, diğer bölümlerde geçen temel tanım, kavram ve teoremler ifade edilecektir. Tanım ve teoremlerde geçen K cisminden $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ anlaşılacaktır.

Tanım 2.1.1. *[6] X boştan farklı bir küme ve K bir cisim olsun. X üzerindeki* $(+)$ *toplama ve* $(.)$ *skalerle çarpma diye adlandırılan işlemleri,*

$$+ : X \times X \longrightarrow X$$
$$(x, y) \longrightarrow x + y$$

$$. : K \times X \to X$$
$$(\alpha, x) \longrightarrow \alpha.x$$

olarak tanımlayalım. Eğer her $x, y, z \in X$ ve $\alpha, \beta \in K$ için aşağıdakı şartlar sağlanırsa, $X'e$, K üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) *denir:*

$$(x + y) + z = x + (y + z) \tag{2.1.1}$$

$$x + y = y + x \tag{2.1.2}$$

$$x + \theta = x \text{ olacak şekilde } X\text{'in sıfır elemanı denen bir } \theta \in X \text{ vardır} \tag{2.1.3}$$

$$\text{Her } x \in X \text{ için } x + (-x) = \theta \text{ olacak şekilde } -x \in X \text{ vardır.} \tag{2.1.4}$$

$$\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y \tag{2.1.5}$$

$$(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.y \tag{2.1.6}$$

$$(\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x) \tag{2.1.7}$$

$$1.x = x \tag{2.1.8}$$

Tanım 2.1.2. *[6] X ve Y, bir K cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. $T : X \to Y$ bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in K$ için*

$$T(x+y) = T(x) + T(y)$$
$$T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa T'ye, X'den Y'ye bir lineer dönüşüm *denir.*

Tanım 2.1.3. *[6] X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.*

$$T : X \to K$$

dönüşümü lineer ise T'ye, bir lineer fonksiyonel *denir.*

Tanım 2.1.4. *[7] X, K cismi üzerinde bir lineer uzay ve $\langle , \rangle : X \times X \longrightarrow K$ bir fonksiyon olsun. $\langle . \rangle$ fonksiyonu, her $x, y, z \in X$ ve $\alpha \in K$ için*

(i) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

(ii) $\langle \alpha . x, y \rangle = \alpha . \langle x, y \rangle$

(iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

(iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

şartlarını sağlıyorsa X üzerinde bir iç çarpım adını alır.

Tanım 2.1.5. *[7] Üzerinde iç çarpım tanımlanmış bir X vektör uzayına* iç çarpım uzayı *denir.*

2.2 Temel Fonksiyonel Analiz Kavramları

Tanım 2.2.1. *[6]*

(i) (Hölder eşitsizliği) *$p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $k = 1, 2, ..., n$ olmak üzere $a_k, b_k \geq 0$ olsun. Bu taktirde*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \max_k b_k. \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)$$

olur.

(ii) (Minkowski eşitsizliği) *$p \geq 1$ ve $k = 1, 2, ..., n$ olmak üzere $a_k, b_k \geq 0$ olsun. Bu taktirde*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

dir.

Tanım 2.2.2. *[6] X, boş olmayan bir küme olmak üzere, $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. d fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için*

(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şartlarını sağlıyorsa d'ye, X üzerinde bir metrik *denir. (X, d) ikilisine de bir* metrik uzay *denir.*

Örnek 2.2.1. *$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, $d(x, y) = |x - y|$ fonksiyonu ile bir metrik uzaydır. Bu metriğe $\mathbb{R}$'nin alışılmış (mutlak değer) metriği denir.*

Örnek 2.2.2. *$x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere, $\mathbb{R}^2$ üzerinde*

$$d(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

fonksiyonu bir metrik tanımlar.

Örnek 2.2.3. *Tüm sınırlı kompleks terimli dizilerin kümesi olan*

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_k) \in S : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

üzerinde

$$d(x, y) = \sup_k \{|x_k - y_k|\}$$

fonksiyonu bir metriktir. Bu yüzden (ℓ_∞, d) bir metrik uzaydır.

Tanım 2.2.3. *[6] $X = (X, d)$ bir metrik uzay ve $M \subseteq X$ olsun. Eğer $\overline{M} = X$ ise M kümesine, X'de* yoğundur *denir.*

Tanım 2.2.4. *[6] Bir $X = (X, d)$ metrik uzayında bir (x_n) dizisini ele alalım. Eğer;*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ noktası varsa (x_n) dizisi yakınsaktır ya da x noktasına yakınsar denir. x noktasına, (x_n) dizisinin limiti adı verilir ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

ya da kısaca $x_n \to x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.5. *[6] $X = (X, d)$ bir metrik uzay ve (x_n), X 'de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n, m > N$ olduğunda, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı bulunabiliyorsa, (x_n) dizisine, X'te bir* Cauchy dizisi *denir. X'deki her cauchy dizisi, yakınsak ise (yani; X'de bulunan bir limit noktasına sahip ise) X uzayı* tam'dır *denir.*

Tanım 2.2.6. *[6] X, K cismi üzerinde bir lineer uzay ve $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\|.\|$ fonksiyonu, her $x, y \in X$ ve $\alpha \in K$ için*

(i) $\|x\| = 0 \iff x = \theta$

(ii) $\|\alpha.x\| = |\alpha| \,.\, \|x\|$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa, X üzerinde bir normdur *denir ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de bir* normlu uzay *denir.*

X üzerindeki bir norm, X üzerinde,

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde tanımlanan bir d metriği tanımlar ve bu metriğe norm metriği adı verilir.

Örnek 2.2.4. $\mathbb{R}$ *ve* $\mathbb{C}$ *üzerinde* $|.|$ *fonksiyonu, bir norm tanımlar. Bu norma alışılmış norm denir.*

Örnek 2.2.5. $1 \leq p < \infty$ *olmak üzere* $\ell_p = \left\{ x = (x_n) \in S : \sum\limits_n |x_n|^p < \infty \right\}$ *kümesi*

$$\|x\| = \left(\sum_n |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuyla bir normlu uzaydır.

Tanım 2.2.7. *[7]* $(X, \|.\|)$ *bir normlu uzay olsun. Eğer* X*,* $d(x,y) = \|x - y\|$ *metriğine göre tam ise* $(X, \|.\|)$ *normlu uzayına bir* Banach uzayı *adı verilir.*

Örnek 2.2.6. $\mathbb{R}^n$ *ve* $\mathbb{C}^n$, $\|x\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$*, normuyla sırasıyla reel ve kompleks Banach uzaylarıdır.*

Örnek 2.2.7. $C[a,b] = \{f;\ f : [a,b] \to \mathbb{C},$ *sürekli*$\}$ *kümesi, foksiyonların toplaması ve bir kompleks skalerle çarpımı işlemleriyle bir lineer uzay yapısına sahiptir.* $f \in C[a,b]$ *olmak üzere*

$$\|f\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

şeklinde tanımlı $\|.\|$ *fonksiyonu,* $C[a,b]$ *üzerinde bir norm teşkil eder.* $C[a,b]$ *uzayı bu normla bir kompleks Banach uzayı yapısına sahiptir.*

Tanım 2.2.8. *[7]* X *ve* Y *birer normlu uzay olsunlar ve* $T : X \to Y$ *lineer operatörü verilsin. Eğer her* $x \in X$ *için*

$$\|T(x)\|_Y \leq c\,\|x\|_X$$

olacak şekilde bir $c > 0$ *sayısı varsa* T'ye sınırlıdır *denir.*

Tanım 2.2.9. *[7]* X *ve* Y *birer normlu uzay olsunlar ve* $T : X \to Y$ *lineer operatörü verilsin.*

$$\sup_{x \neq \theta} \left\{ \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \right\}$$

değerine, T *sınırlı lineer operatörünün normu denir ve* $\|T\|$ *ile gösterilir.*

Tanım 2.2.10. *[8] $(X, \langle , \rangle)$, bir iç çarpım uzayı olsun. X,*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

normuna göre tam ise $(X, \langle , \rangle)$ uzayına bir Hilbert uzayı *denir.*

Örnek 2.2.8. $\|x\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$*, öklid normuyla $\mathbb{R}^n$'yi düşünelim. Bu uzay, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ için*

$$\langle x, y\rangle = x_1.y_1 + x_2.y_2 + ... + x_n.y_n$$

iç çarpımı ile bir iç çarpım uzayıdır.

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1.x_1 + x_2.x_2 + ... + x_n.x_n} \\ &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \end{aligned}$$

olduğundan, $\mathbb{R}^n$'nin normu bu iç çarpımdan gelmektedir. $\mathbb{R}^n$'nin bu normla tam olduğunu biliyoruz. Böylece $\mathbb{R}^n$, bir Hilbert uzayıdır.

Örnek 2.2.9. $\ell_2 = \left\{x = (x_k) \in S : \sum\limits_k |x_k|^2 < \infty\right\}$ *dizi uzayı bir Hilbert uzayıdır: Her $x, y \in \ell_2$ için*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.\overline{y_k}$$

eşitliği, ℓ_2 üzerinde bir iç çarpımdır. Bu iç çarpımın tanımladğı norm

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_k x_k.\overline{x_k}} = \left(\sum_k |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

olup, bu ℓ_2 nin klasik normudur. Bu normla ℓ_2 uzayının tam olduğunu biliyoruz. O halde ℓ_2 uzayı bir Hilbert uzayıdır.

Örnek 2.2.10. *$p \neq 2$ olmak üzere, ℓp uzayı bir iç çarpım uzayı değildir. Dolayısıyla bir Hilbert uzayı değildir.*

Teorem 2.2.1. *[9] H bir Hilbert uzayı ve $x, y \in H$ olsun. Bu durumda*

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x, y\rangle|$$

dir.

Tanım 2.2.11. *[8] H bir Hilbert uzayı olmak üzere her $x, y \in H$ için*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

eşitsizliğine Cauchy-Schwarz *eşitsizliği denir.*

Tanım 2.2.12. *[10] H bir Hilbert uzayı olsun.*

(i) *$x, y \in H$ için eğer $\langle x, y\rangle = 0$ oluyorsa x elemanı, y elemanına diktir denir ve $x \perp y$ ile gösterilir.*

(ii) *H'daki $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ vektörlerinin bir kolleksiyonuna*

$$\langle x_k, x_l\rangle = 0, \ \text{tüm } k \neq l \text{ için}$$

şartını sağlaması durumunda ortogonal sistem *denir*

(iii) *$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortogonal sistemi, tüm $k \in \mathbb{N}$ için $\|x_k\| = 1$ ise* ortonormal sistem *olarak adlandırılır.*

Tanım 2.2.13. *[10] H bir Hilbert uzayı olsun.*

(i) *H'nın bir W altuzayının ortogonal tümleyeni, W'deki tüm elemanlara ortogonal olan H'daki vektörlerdir. $W^{\perp}$ ile gösterilir.*

$$W^{\perp} := \{x \in H \mid \langle x, y\rangle = 0, \ \forall y \in W\}$$

(ii) *H'nın U ve W iki altuzayı için, $U + W$ toplamı*

$$U + W := \{v \in H \mid v = u + w, \ u \in U, \ w \in W\}$$

şeklinde tanımlanır.

(iii) *Eğer her $x \in H$ elemanı, $u \in U$, $w \in W$ olmak üzere $x = u + w$ şeklinde tek bir gösterime sahipse H, U ve W altuzaylarının* direkt toplamıdır *denir ve $H = U \oplus W$ şeklinde gösterilir.*

Teorem 2.2.2. *[10] W, bir H Hilbert uzayının kapalı herhangi bir altuzayı olsun. Bu durumda;*

$$H = W \oplus W^{\perp}$$

dır.

Tanım 2.2.14. *[10] V, H Hilbert uzayının kapalı bir altuzayı olsun. $v \in H$ elemanını, $v_1 \in V$, $v_2 \in V^{\perp}$ olmak üzere*

$$v = v_1 + v_2$$

olarak yazalım. V üzerindeki P ortogonal projeksiyonu:

$$Pv := v_1$$

şeklinde tanımlıdır.

Lemma 2.2.1. *[10] H Hilbert uzayının $V \neq \{0\}$ kapalı bir altuzayını alalım. Bu durumda H'nın V üzerine P ortogonal projeksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:*

(i) *P, lineer, sınırlı ve $\|P\| = 1$ dir.*

(ii) *P, self-adjointtir.*

(iii) *$P^2 = P$ dir.*

Tanım 2.2.15. *[7] H ve K, Hilbert uzayları olmak üzere, $T : H \to K$ tanımlı sınırlı, lineer bir operatör olsun. Bu durumda, T'nin, T^* adjoint operatörü; her $x \in H$ ve $y \in K$ olmak üzere*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

olacak şekilde bir $T^* : K \to H$ lineer operatörüdür.

Lemma 2.2.2. *[10] H ve K, Hilbert uzayları olmak üzere, $T : H \to K$ sınırlı, lineer bir operatör olsun. Bu durumda*

(i) $(T^*)^* = T$

(ii) $\|T\| = \|T^*\|$

olur.

Tanım 2.2.16. *[7] Bir H Hilbert uzayı üzerinde, sınırlı, lineer bir $T : H \to H$ operatörü verilmiş olsun.*

(i) $T^* = T$ *ise, T'ye* self-adjoint*,*

(ii) $T^* = T^{-1}$ *ise T'ye* üniter,

(iii) $T^*T = TT^*$ *ise T'ye* normal

operatör adı verilir.

Teorem 2.2.3. *[7] H bir Hilbert uzayı olsun. H üzerindeki her sınırlı f fonksiyoneli iç çarpım cinsinden ifade edilebilir. Yani her $f \in H$ için bir tek $z \in H$ (f'ye bağlı) vardır. Öyleki*

$$f(x) = \langle x, z \rangle$$

gösterimine sahiptir.

Tanım 2.2.17. *[7] X ve Y metrik uzaylar olsun. $D(T) \subset X$ olmak üzere bir $T : D(T) \to Y$ dönüşümünü göz önüne alalım. Eğer, $D(T)$'deki her açık kümenin T altındaki görüntüsü de Y de açık bir küme ise T'ye bir* açık dönüşüm *adı verilir.*

Teorem 2.2.4. *[7] Bir X Banach uzayından bir Y Banach uzayı üzerine olan sınırlı lineer bir T operatörü açık dönüşümdür. Dolayısıyla T, bire-bir ve üzerine ise T^{-1} sürekli ve bu nedenle de sınırlıdır.*

Teorem 2.2.5. *[7] $(T_n)_{n=1}^{\infty}$, bir X Banach uzayından normlu bir Y uzayı içine olan sınırlı, lineer $T_n : X \to Y$ operatörlerinin bir dizisi olsun. Her $x \in X$ için, $(\|T_n x\|)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin sınırlı olduğunu varsayalım. Yani $n \in \mathbb{N}$ için*

$$\|T_n x\| \leq c_x$$

olacak şekilde bir c_x reel sayısı vardır. Bu durumda $(\|T_n\|)$ normlar dizisi sınırlıdır. Yani;

$$\|T_n\| \leq c$$

olacak şekilde bir c reel sayısı vardır.

Teorem 2.2.6. *[8] $(T_n)_{n=1}^{\infty}$, bir X Banach uzayından Y Banach uzayı üzerine olan sınırlı, lineer $T_n : X \to Y$ operatörlerinin bir dizisi olsun. Bu dizi $T : X \to Y$ dönüşümüne noktasal yakınsasın. Bu durumda T, sınırlı ve lineerdir. Ayrıca $(\|T_n\|)$ normlar dizisi sınırlıdır ve*

$$\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$$

dir.

Teorem 2.2.7. *[8] X bir Banach uzayı olmak üzere eğer $T : X \to X$ sınırlı ve $\|I - T\| < 1$ ise T'nin tersi vardır ve*

$$T^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - T)^k$$

dir. Ayrıca

$$\left\|T^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|I - T\|}$$

olur.

Şimdi bir X Banach uzayında bir serinin yakınsaklığı kavramından bahsedelim:

Tanım 2.2.18. *[9] (x_n) bir X Banach uzayında bir dizi olsun. Eğer $s_N = \sum\limits_{n=1}^{N} x_n$ kısmi toplamı X'in normunda x'e yakınsaksa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ serisi $x \in X$'e* yakınsaktır *denir.*

Tanım 2.2.19. *[9] (x_n) bir X Banach uzayında bir dizi olsun. Eğer $\sum\limits_{\sigma(k)} x_{\sigma(k)}$ serisi $\mathbb{N}$'nin bütün σ permütasyonları için yakınsaksa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ serisi* şartsız yakınsaktır (unconditionally convergent) *denir.*

Lemma 2.2.3. *[9] $\sum\limits_{\sigma(k)} x_{\sigma(k)}$ serisi şartsız yakınsaksa bu durumda $\mathbb{N}$'nin bütün σ permütasyonları için*

$$\sum_{\sigma(k)} x_{\sigma(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

olur.

İspat. İspatının detayları için [9] numaralı kaynağa bakınız. □

Tanım 2.2.20. *[9]* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$*bir normlu lineer* X *uzayında bir dizi olsun. Eğer*

$$\overline{span}\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = X$$

ise $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *dizisine,* complete veya total *dizi denir.*

Lemma 2.2.4. *[8] Bir* H *Hilbert uzayındaki* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *dizisi için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, *totaldir.*

(ii) *Eğer her* $k \in \mathbb{N}$ *için* $\langle x, x_k \rangle = 0$ *ise, bu durumda* $x = 0$ *dır.*

3. KLASİK FRAME TEORİNİN TEMELLERİ

Bazlar, hem sonlu boyutlu hem de sonsuz boyutlu vektör uzaylarının analizinde önemli bir rol oynar. Fikir her iki durumda da aynıdır: Uzaydaki her eleman, bu uzaydaki elemanlarının oluşturduğu bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ailesinin elemanlarının lineer kombinasyonu şeklinde tek türlü ifade edilebilir. Yani vektör uzayının her bir f elemanının

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

olacak şekilde bir tek $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ skaler dizisi vardır.

Fakat sonsuz boyutlu vektör uzaylarda durum biraz daha karmaşıktır. Bir serinin nasıl yakınsamasını istediğimize bağlı olarak, bazların farklı konseptleri ortaya çıkar ve sonsuz serilerle çalışmakta zorlanırız. Bu bölümün amacı sonsuz serilerin yakınsaklığını garanti eden ekstra bir şart sağlamaktır.

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere, H'da, sıralı bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi dendiğinde; $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{f_1, f_2, ...\}$ şeklinde sıralı bir kümeyi kastederiz. Genelde indeksleme yaparken de uygunluk açısından doğal sayıları seçeriz. Bu bölümde tüm sonuçların, keyfi sayılabilir indeks kümeleri ve keyfi bir yolla sıralanmış f_k elemanlarıyla sağlandığını göreceğiz.

3.1 Hilbert Uzaylarında Bessel Dizileri

Lemma 3.1.1. *[8] H Hilbert uzayında, bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisini alalım ve $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ serisinin tüm $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2(\mathbb{N})$ için yakınsak olduğunu farzedelim. Bu durumda*

$$T : \ell_2(\mathbb{N}) \to H \tag{3.1.1}$$

$$T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} := \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

sınırlı lineer bir operatör tanımlar. T'nin adjoint operatörü,

$$T^* : H \to \ell_2(\mathbb{N}) \tag{3.1.2}$$

$$T^* f = \{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}$$

ile verilir. Ayrıca her $f \in H$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq \|T\|^2 \|f\|^2 \tag{3.1.3}$$

dır.

İspat. Sınırlı lineer operatörlerin

$$T_n : \ell_2(\mathbb{N}) \to H$$
$$T_n\{c_k\}_{k=1}^{\infty} := \sum_{k=1}^{n} c_k f_k$$

şeklinde tanımlı (T_n) dizisini düşünelim. Açıkça, $n \to \infty$ iken (T_n) dizisi T ye noktasal yakınsaktır. Bu yüzden Teorem 2.2.6 gereğince T dönüşümü sınırlı lineer bir operatör tanımlar. T^* adjoint operatörünü bulmak için, $f \in H$ ve $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2(\mathbb{N})$ alalım. Bu durumda

$$\langle f, T\{c_k\}_{k=1}^{\infty}\rangle_H = \left\langle f, \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \right\rangle_H = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k\rangle \overline{c_k}. \tag{3.1.4}$$

Şimdi buradan T^*f yi elde edelim. Bunun için iki yol ifade edeceğiz. Bunlardan ilkini açıklayalım:

Tüm $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2(\mathbb{N})$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k\rangle \overline{c_k}$ serisinin yakınsaklığı, [21, sayfa 145] den $\{\langle f, f_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2(\mathbb{N})$ olduğunu söyler. Böylece

$$\langle f, T\{c_k\}_{k=1}^{\infty}\rangle_H = \langle \{\langle f, f_k\rangle\}, \{c_k\}\rangle_{\ell_2(\mathbb{N})}$$

yazabiliriz. Buradan

$$T^*f = \{\langle f, f_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$$

elde edilir. Şimdi ikinci bir yoldan T^*f yi elde edelim:

$T : \ell_2(\mathbb{N}) \to H$ sınırlı olduğundan $T^* : H \to \ell_2(\mathbb{N})$ sınırlı bir operatörüdür. Böylece $k-$ıncı koordinat fonksiyonu da $H \to \mathbb{C}$ sınırlıdır. Böylece Riesz Temsil teoremi gereğince H'daki bir $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ için

$$T^*f = \{\langle f, g_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$$

dır. T^*f nin tanımı ile beraber (3.1.4) eşitliği her $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2(\mathbb{N})$, $f \in H$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k\rangle \overline{c_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k\rangle \overline{c_k}$$

olduğunu gösterir. Buradan ise $g_k = f_k$ elde edilir.

Sınırlı bir T operatörünün adjointi de sınırlıdır ve $\|T\| = \|T^*\|$ dır. Bu bilgiyi kullanarak her $f \in H$ için

$$\|T^* f\|^2 \leq \|T\|^2 \|f\|^2$$

olup, (3.1.3) sağlanır. □

Tanım 3.1.1. *[8] H bir Hilbert uzayı olmak üzere her $f \in H$ için*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \tag{3.1.5}$$

şartını sağlayacak bir $B > 0$ sayısı varsa $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisine bir Bessel dizisi *denir.*

(3.1.5) şartını sağlayan B sayısına, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin *Bessel sınırı* adı verilir. Verilen bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ Bessel dizisi için (3.1.5) i sağlayan en küçük $B > 0$ sayısına *optimal Bessel sınırı* adı verilir.

Teorem 3.1.1. *[8] H'da bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi alalım ve $B > 0$ verilsin. Bu durumda, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ nın B Bessel sınırı ile Bessel dizisi olması için gerek ve yeter şart*

$$T : \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \to \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

nın $\ell_2(\mathbb{N})$'den H'ya sınırlı bir operatör tanımlaması ve $\|T\| \leq \sqrt{B}$ olmasıdır.

İspat. İlk olarak $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin, B Bessel sınırı ile bir Bessel dizisi olduğunu kabul edelim. $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2(\mathbb{N})$ alalım. Öncelikle, $T\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$'nın iyi tanımlı, yani $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ serisinin yakınsak olduğunu gösterelim. $m, n \in \mathbb{N}$ alalım ve $n > m$ olsun. Bu durumda

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k f_k - \sum_{k=1}^{m} c_k f_k\right\| = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} c_k f_k\right\|$$

dır. [8, Lemma 2.3.4] ü ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak;

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k f_k - \sum_{k=1}^{m} c_k f_k\right\| &= \left\|\sum_{k=m+1}^{n} c_k f_k\right\| \\ &= \sup_{\|g\|=1}\left|\left\langle \sum_{k=m+1}^{n} c_k f_k, g\right\rangle\right| \\ &\leq \sup_{\|g\|=1}\sum_{k=m+1}^{n} |c_k \langle f_k, g\rangle| \\ &\leq \left(\sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \sup_{\|g\|=1}\left(\sum_{k=m+1}^{n} |\langle f_k, g\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{B}\left(\sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

buluruz. $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2(\mathbb{N})$ olduğundan, $\left\{\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2\right\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin, $\mathbb{C}$'de Cauchy dizisi olduğunu biliyoruz. Yukarıdaki hesaplamalar $\left\{\sum_{k=1}^{n} c_k f_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ nın H'da bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Bu yüzden yakınsaktır. Böylece $T\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ iyi tanımlıdır. T'nin lineer olduğu açıktır. Şimdi T'nin sınırlılığını gösterelim:

$$\begin{aligned}\|T\{c_k\}_{k=1}^{\infty}\| &= \sup_{\|g\|=1} |\langle T\{c_k\}_{k=1}^{\infty}, g\rangle| \\ &= \sup_{\|g\|=1}\left|\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k, g\right\rangle\right| \\ &\leq \sup_{\|g\|=1}\sum_{k=1}^{\infty} |c_k \langle f_k, g\rangle| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \sup_{\|g\|=1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f_k, g\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{B}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

olup, T'nin sınırlı ve $\|T\| \leq \sqrt{B}$ olduğu görülür.

Tersi için kabul edelim ki T, sınırlı bir operatör ve $\|T\| \leq \sqrt{B}$ olsun. Bu durumda, Lemma 3.1.1, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin B Bessel sınırı ile bir Bessel dizisi olduğunu söyler. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin, Bessel sınırını önemsemeden, Bessel dizisi olduğunu kontrol etmek için, T operatörünün iyi tanımlı olup olmadığını kontrol etmek yeterlidir:

Sonuç 3.1.1. *[8] $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, H'da bir dizi ve $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k f_k$, tüm $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2(\mathbb{N})$ için yakınsak ise, bu durumda $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, bir Bessel dizisidir.*

(3.1.5) ile verilen Bessel şartı, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ elemanlarının sıralamasına bakılmaksızın aynı kalır. Bu ise Teorem 3.1.1'ün önemli bir sonucunu ortaya koyar:

Sonuç 3.1.2. *[8] $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, H'da bir Bessel dizisi ise, bu durumda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ serisi, tüm $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2(\mathbb{N})$ için şartsız (unconditionally) yakınsaktır.*

Böylece $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi, aynı şekilde tekrar sıralandığında, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisindeki elemanların yeniden sıralanması, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ serisini etkilemeyecektir. Seri yine önceden yakınsadığı elemana yakınsayacaktır. Bu yüzden Bessel dizisinde elemanların keyfi bir indekslemesini seçebiliriz. Genelde indeks kümesi olarak doğal sayıları seçmek gibi bir kısıtlama yoktur.

Bessel dizilerini daha iyi anlamak için bir örnek verelim:

Örnek 3.1.1. *$e_1 = \{1, 0, 0, ...\}$,$e_2 = \{0, 1, 0, ...\}$, $e_3 = \{0, 0, 1, ...\}$,... şeklinde tanımlanan $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ ortonormal bazını düşünelim. $\{f_k\} = \{e_1, e_2, e_3, ...\}$ dizisi $B = 1$, Bessel sınırı ile bir Bessel dizisidir. Gerçektende;*

Her $f \in \ell_2$ için

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 &= |\langle f, f_1\rangle|^2 + |\langle f, f_2\rangle|^2 + |\langle f, f_3\rangle|^2 + ... \\ &= |\langle f, e_1\rangle|^2 + |\langle f, e_2\rangle|^2 + |\langle f, e_3\rangle|^2 + ... \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 \\ &= \|f\|^2\end{aligned}$$

olup, $B = 1$ Bessel sınırı ile bir Bessel dizisi olduğu görülür.

İlerideki konularda tüm ortonormal bazların ve framelerin Bessel dizileri olduğunu göreceğiz.

3.2 Hilbert Uzaylarında Ortonormal Bazlar

Tanım 3.2.1. *[8] H'da vektörlerin bir $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisini düşünelim.*

(i) *Her bir $f \in H$ elemanının*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) e_k \tag{3.2.1}$$

olacak şekilde bir tek $\{c_k(f)\}_{k=1}^{\infty}$ skaler katsayıları varsa $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisine, H için bir Schauder bazı *denir.*

(ii) *Eğer (3.2.1) serisi, her bir $f \in H$ için şartsız yakınsak ise $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ bazına,* unconditional baz *denir.*

(iii) *$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ bazı, bir ortonormal sistem ise, yani*

$$\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{k,j} = \begin{cases} 1 & , \quad k = j \\ 0 & , \quad k \neq j \end{cases}$$

ise ortonormal baz *adını alır.*

Şimdiki teorem, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormal sisteminin, ortonormal baza denk olduğu durumları verecektir.

Teorem 3.2.1. *[8] $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormal sistemi için, aşağıdakiler denktir.*

(i) *$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ bir ortonormal bazdır,*

(ii) *Her $f \in H$ için $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$*

(iii) *Her $f, g \in H$ için $\langle f, g \rangle = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle \langle e_k, g \rangle$*

(iv) *Her $f \in H$ için $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \|f\|^2$*

(v) *$\overline{span}\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = H$*

(vi) *Her $k \in \mathbb{N}$ için $\langle f, e_k \rangle = 0$ ise $f = 0$ dır.*

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: $f \in H$ alalım. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ bir ortonormal baz olduğundan, $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ skaler katsayıları vardır öyleki

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$$

dir. Verilen $j \in \mathbb{N}$ için

$$\langle f, e_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \delta_{k,j} = c_j$$

olur ve böylece (ii) sağlanır.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Her $f \in H$ için $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$ olsun. Her $g \in H$ için

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k, g \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle \langle e_k, g \rangle \end{aligned}$$

olur.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Her $f, g \in H$ için $\langle f, g \rangle = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle \langle e_k, g \rangle$ şartı sağlansın. Bu şartta $g = f$ alınırsa

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \langle f, f \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle \langle e_k, f \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle \overline{\langle f, e_k \rangle} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

$(iv) \Rightarrow (v)$: Eğer $f \in H$, her $k \in \mathbb{N}$ için, tüm e_k'lara dik ise bu durumda $\langle f, e_k \rangle = 0$ olacağından ve (iv) şartı sağlandığından $f = 0$ olduğu görülür. [8, Lemma 2.3.1] den ise (v) eşitliğinin sağlandığı görülür.

$(v) \Rightarrow (vi)$: [8, Lemma 2.3.1] den ispatı açıktır.

$(vi) \Rightarrow (i)$: $f \in H$ alalım. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ Bessel dizisi olduğu için,

$$g := \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$$

eşitliği iyi tanımlıdır. Ayrıca tüm $j \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\langle f-g, e_j\rangle &= \left\langle f - \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k\rangle e_k, e_j \right\rangle \\
&= \langle f, e_j\rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k\rangle e_k, e_j \right\rangle \\
&= \langle f, e_j\rangle - \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k\rangle \langle e_k, e_j\rangle \\
&= \langle f, e_j\rangle - \langle f, e_j\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır. Bu yüzden (vi) den

$$f = g = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k\rangle e_k$$

temsili elde edilir. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ nın baz olduğunu göstermek için, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ nın diğer kombinasyonlarının, f'ye eşit olmadığını göstermemiz gereklidir. Bu ise (i) den (ii) şartını ispat etmek için kullandığımız yolla sağlanır. Böylece $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ nın ortonormal baz olduğu görülür. □

Sonuç 3.1.2 yi kullanarak, önemli başka bir sonuç elde ederiz:

Sonuç 3.2.1. *[8] Eğer $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ bir ortonormal baz ise bu durumda her bir $f \in H$ elemanı*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k\rangle e_k \tag{3.2.2}$$

şeklinde şartsız (unconditionally) yakınsak bir açılıma sahiptir.

Ortonormal bazların temelde tercih edilmesinin nedeni; (3.2.2) daki gibi bir açılıma sahip ve bu açılımın da şartsız yakınsak olmasıdır. Ayrıca ortonormal bazlar, pratikte kullanmak için en uygun bazlardır. Fakat bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ bazının, ortonormal olması zordur. Genellikle bazı ekstra şartları talep eden bir bazdan ortonormal baz inşaa etmek imkansızdır. Verilen bir bazdan, ortonormal baz inşaa etmek için, sonlu boyutlu vektör uzaylarında Gram-Schmidt ortonormalleştirmesini kullanmak ise her zaman iyi bir fikir değildir. Çünkü bu yöntemi kullanmak, bazı bazların özelliklerinde çeşitli hasarlara yol açıp, yapısını bozabilir. Hilbert uzaylarına frame adı verilen bazı dizi çeşitleri bu tip ihtiyaçlar için daha uygun bir yapı arzetmektedir.

3.3 Hilbert Uzaylarında Frameler

Frameler, ilk olarak 1952 de, Duffin ve Schaeffer tarafından, [1] de tanımlanmıştır. Duffin ve Schaeffer, harmonik olmayan Fourier serilerinde, frameleri bir araç olarak kullanmışlardır. Daha sonra 1985'de, Daubechies, Grossmann ve Meyer, $L_2(\mathbb{R})$ üzerindeki fonksiyonların seri açılımlarını bulmada, framelerin kullanılacabileceğini gözlemlediler. Çünkü bu açılımlar, ortonormal bazlar kullanılarak yapılan açılımlara çok benzemektedir. Pratikte kullanmak için en uygun bazlar, ortonormal bazlar olduğundan ve framelerin yapısı ortonormal bazlara benzer özellikler taşıdığından frame kavramının önemi artmıştır. Hatta frameler, ortonormal bazların bir genelleştirilmesi olarak düşünülür.

Frameler, sinyal işleme, görüntü işleme, filter bank teorisi, bilgi depolama ve kablosuz iletişim gibi bir çok alanda kullanılmaktadır. Sayısız alanda yaygın bir şekilde kullanılmasından dolayı, framelerle ilgili çalışmalar son yıllarda hızla artmıştır. Şimdi frame kavramından kabaca bahsedelim:

H Hilbert uzayında bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ bazının temel özelliğinin, uzayın her bir f elemanının, bazdaki elemanların sonsuz bir lineer kombinasyonu olarak tek türlü bir temsil verdiğini görmüştük. Yani her bir $f \in H$

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) e_k$$

olacak şekilde bir tek temsile sahiptir. Burada tek türlülüğü sağlayan ise $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ katsayılarının tek olmasıydı.

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, H için bir frame ise her $f \in H$'nın yukarıdaki gibi bir temsili vardır. Ancak buradaki $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ frame katsayıların tek türlü olması gerekmez. Yani uzayın her bir f elemanının birden çok temsili vardır. O halde bu açıklamalara dayanarak şu sonucu çıkarabiliriz: Her baz bir framedir ancak her frame bir baz olmayabilir.

Aslında ilk başta verimsiz olarak görünen bu çok çeşitlilik, uygulamalarda kişiye oldukça esneklik kazandırmış ve bir çok sorunun çözülmesinde yardımcı olmuştur. Fakat buradan bir $f \in H$ 'nın en iyi temsilinin ne olacağı sorusu ortaya çıkar. Frame teori, mümkün olan en küçük ℓ_2 norma sahip katsayılarla bir temsil elde etme konusuna yoğunlaşır ki bu f için iyi bir yeniden inşaa (reconstruction) stratejisi imkanı sağlar. Temsil uzayı ise $\ell_2(\mathbb{N})$ Hilbert uzayıdır.

Bu bölümde sonlu boyutlu ve sonsuz boyutlu Hilbert uzaylarındaki frameler ayrı ayrı incelenecektir. İlk olarak sonlu boyutlu bir H Hilbert uzayında frameleri karakterize edelim:

3.3.1 Sonlu Boyutlu Hilbert Uzaylarında Frameler

Bu bölümde H Hilbert uzayını, aşikar olmayan, sonlu boyutlu ayrılabilir bir Hilbert uzayı olarak alacağız.

Tanım 3.3.1. *[8] H Hilbert uzayında bir $\{f_k\}_{k=1}^m$ dizisine her $f \in H$ için*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \tag{3.3.1}$$

şartını sağlayacak şekilde $0 < A \leq B < \infty$ katsayıları olması durumunda bir frame *adı verilir.*

A ve B sayılarına *frame sınırları* adı verilir. A ya *alt*, B ye de *üst frame sınırı* denir. Frame sınırları tek değildir. Bütün alt frame sınırlarının supremumuna *optimal alt frame sınırı*, bütün üst frame sınırlarının infimumuna ise *optimal üst frame sınırı* adı verilir.

(3.3.1) eşitsizliğinde

- $A = B$ ise $\{f_k\}_{k=1}^m$ ya $A-$*tight frame*,
- Eğer $A = B = 1$ ise $\{f_k\}_{k=1}^m$ ya *Parseval frame*,
- Her $i, j \in 1, 2, ..., m$ için $\|f_i\| = \|f_j\|$ ise $\{f_k\}_{k=1}^m$ ya *uniform frame*,
- Framedeki elemanlardan herhangi biri kaldırıldığında, frame olma durumu bozuluyorsa, $\{f_k\}_{k=1}^m$ ya *exact frame* denir.

Sonlu boyutlu bir H Hilbert uzayında üst frame sınırı, Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden otomatik olarak sağlanır. Gerçektende her $f \in H$ için

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|^2 \|f\|^2$$

olup, üst frame sınırını $\sum\limits_{k=1}^{m} \|f_k\|^2$ alabiliriz.

(3.3.1) eşitsizliğindeki alt frame sınırını bulmak için $span\{f_k\}_{k=1}^{m} = H$ şartının olması yeterlidir. Yani her sonlu dizi gereni için bir framedir. Şimdi bunu ifade eden bir önermeyi verelim:

Önerme 3.3.1. *[8] H'da bir $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ dizisi alalım. Bu durumda $\{f_k\}_{k=1}^{m}$,*

$$V := span\{f_k\}_{k=1}^{m}$$

uzayı için bir framedir.

İspat. f_k-ların hepsinin 0 olmadığını kabul edelim. Yukarıda da gördüğümüz gibi üst frame sınırı $B = \sum\limits_{k=1}^{m} \|f_k\|^2$ alınarak sağlanır. Şimdi

$$\phi : V \to \mathbb{R}$$
$$\phi(f) := \sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k\rangle|^2$$

sürekli dönüşümünü düşünelim. ϕ dönüşümünün sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için ϕ dönüşümünün dizisel sürekli olduğunu göstermek yeterlidir: $f_n \to f$ olsun.

$$\begin{aligned}
|\phi(f_n) - \phi(f)| &= \left|\sum_{k=1}^{m} |\langle f_n, f_k\rangle|^2 - \sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k\rangle|^2\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{m}(|\langle f_n, f_k\rangle|^2 - |\langle f, f_k\rangle|^2)\right| \\
&\to \left|\sum_{k=1}^{m}(|\langle f, f_k\rangle|^2 - |\langle f, f_k\rangle|^2)\right| \\
&= 0
\end{aligned}$$

olup buradan $\phi(f_n) \to \phi(f)$ elde edilir. Yani, ϕ dizisel sürekli, dolayısı ile süreklidir.

V sonlu boyutlu olduğundan, birim yuvarı kompakttır. Bu yüzden $\|g\| = 1$ olan $g \in V$ bulabiliriz öyle ki

$$A := \sum_{k=1}^{m} |\langle g, f_k\rangle|^2 = \inf\left\{\sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k\rangle|^2 : f \in V, \|f\| = 1\right\}$$

dir. $A > 0$ olduğu açıktır. Şimdi verilen $f \neq 0$, $f \in V$ için

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{m} \left|\left\langle \frac{f}{\|f\|}, f_k\right\rangle\right|^2 \|f\|^2 \geq A\|f\|^2$$

olup, böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.3.1. *[8] H'daki* $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ *ailesinin* H *için bir frame olması için gerek ve yeter şart*

$$span\{f_k\}_{k=1}^{m} = H$$

olmasıdır.

Bu sonuç, bir framenin bazdan daha fazla sayıda eleman içerebildiğini gösterir. Bu yüzden baz olmayan frameler bu sonuçtan da görüldüğü gibi mevcuttur. Bu framelere *overcomplete* veya *redundant* frameler diyoruz.

Şimdi $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ H Hilbert uzayı için bir frame olsun ve

$$T : \mathbb{C}^m \longrightarrow H,\ T\{c_k\}_{k=1}^{m} = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k$$

operatörünü tanımlayalım. Bu operatöre *sentez operatörü* veya *pre-frame operatörü* adı verilir. Sentez operatörünün adjointi olan

$$T^* : H \longrightarrow \mathbb{C}^m,\ \ Tf : \{\langle f, f_k\rangle\}_{k=1}^{m}$$

operatörüne ise *analiz operatörü* adı verilir. Analiz ve sentez operatörleninin bileşkesi alınarak

$$S : H \longrightarrow H,\ \ Sf = TT^*f = \sum_{k=1}^{m} \langle f, f_k\rangle\, f_k$$

şeklinde tanımlı *frame operatörü* elde edilir. Ayrıca

$$\langle Sf, f\rangle = \sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k\rangle|^2 \tag{3.3.2}$$

dir.

Şimdi frameleri daha iyi anlamak için birkaç örnek verelim:

Örnek 3.3.1. $\{f_k\}_{k=1}^{5} = \{(0, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}), (0, -\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}), (0, 1, 0), (\sqrt{\frac{5}{6}}, 0, \sqrt{\frac{1}{6}}),$ $(-\sqrt{\frac{5}{6}}, 0, \sqrt{\frac{1}{6}})\}$ *ailesi,* $\mathbb{C}^3$ *için* $A = \frac{5}{3}$ *frame sınırı ile tight framedir:*

Her $f=(g_1,g_2,g_3)\in\mathbb{C}^3$ *için*

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{5}|\langle f,f_k\rangle|^2 &= |\langle f,f_1\rangle|^2+|\langle f,f_2\rangle|^2+|\langle f,f_3\rangle|^2+|\langle f,f_4\rangle|^2+|\langle f,f_5\rangle|^2\\
&= \left|\left\langle (g_1,g_2,g_3),(0,\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}})\right\rangle\right|^2+\left|\left\langle (g_1,g_2,g_3),(0,-\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}})\right\rangle\right|^2\\
&+|\langle (g_1,g_2,g_3),(0,1,0)\rangle|^2+\left|\left\langle (g_1,g_2,g_3),(\sqrt{\frac{5}{6}},0,\sqrt{\frac{1}{6}})\right\rangle\right|^2\\
&+\left|\left\langle (g_1,g_2,g_3),(-\sqrt{\frac{5}{6}},0,\sqrt{\frac{1}{6}})\right\rangle\right|^2\\
&= \left|\sqrt{\frac{1}{3}}g_2+\sqrt{\frac{2}{3}}g_3\right|^2+\left|-\sqrt{\frac{1}{3}}g_2+\sqrt{\frac{2}{3}}g_3\right|^2+|g_2|^2\\
&+\left|\sqrt{\frac{5}{6}}g_1+\sqrt{\frac{1}{6}}g_3\right|^2+\left|-\sqrt{\frac{5}{6}}g_1+\sqrt{\frac{1}{6}}g_3\right|^2\\
&= \left(\sqrt{\frac{1}{3}}g_2+\sqrt{\frac{2}{3}}g_3\right)\overline{\left(\sqrt{\frac{1}{3}}g_2+\sqrt{\frac{2}{3}}g_3\right)}\\
&+\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}g_2+\sqrt{\frac{2}{3}}g_3\right)\overline{\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}g_2+\sqrt{\frac{2}{3}}g_3\right)}+g_2\overline{g_2}\\
&+\left(\sqrt{\frac{5}{6}}g_1+\sqrt{\frac{1}{6}}g_3\right)\overline{\left(\sqrt{\frac{5}{6}}g_1+\sqrt{\frac{1}{6}}g_3\right)}\\
&+\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}g_1+\sqrt{\frac{1}{6}}g_3\right)\overline{\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}g_1+\sqrt{\frac{1}{6}}g_3\right)}\\
&= \frac{5}{3}|g_1|^2+\frac{5}{3}|g_2|^2+\frac{5}{3}|g_3|^2\\
&= \frac{5}{3}\|f\|^2.
\end{aligned}
$$

Örnek 3.3.2. $\{f_k\}_{k=1}^4=\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{i}{2}),(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},-\frac{i}{2})\}$ *vektörlerinin ailesi,* $\mathbb{C}^2$ *için bir Parseval frame oluşturur:*

Her $f = (g_1, g_2) \in \mathbb{C}^2$ *için*

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{4} |\langle f, f_k\rangle|^2 &= |\langle f, f_1\rangle|^2 + |\langle f, f_2\rangle|^2 + |\langle f, f_3\rangle|^2 + |\langle f, f_4\rangle|^2 \\
&= \left|\left\langle (g_1, g_2), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle (g_1, g_2), (\frac{1}{2}, \frac{i}{2})\right\rangle\right|^2 \\
&+ \left|\left\langle (g_1, g_2), (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2})\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle (g_1, g_2), (\frac{1}{2}, \frac{-i}{2})\right\rangle\right|^2 \\
&= \left|\frac{g_1 + g_2}{2}\right|^2 + \left|\frac{g_1 - ig_2}{2}\right|^2 + \left|\frac{g_1 - g_2}{2}\right|^2 + \left|\frac{g_1 + ig_2}{2}\right|^2 \\
&= \left(\frac{g_1 + g_2}{2}\right)\overline{\left(\frac{g_1 + g_2}{2}\right)} + \left(\frac{g_1 - ig_2}{2}\right)\overline{\left(\frac{g_1 - ig_2}{2}\right)} \\
&+ \left(\frac{g_1 - g_2}{2}\right)\overline{\left(\frac{g_1 - g_2}{2}\right)} + \left(\frac{g_1 + ig_2}{2}\right)\overline{\left(\frac{g_1 + ig_2}{2}\right)} \\
&= |g_1|^2 + |g_2|^2 \\
&= \|f\|^2 .
\end{aligned}
$$

Frame operatörünü tanıtıp, birkaç frame örneği verdikten sonra bu operatörü karekterize eden bir teorem ile devam edelim:

Teorem 3.3.1. *[8]* $\{f_k\}_{k=1}^m$, *S frame operatörü A, B frame sınırları ile H için bir frame ise aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(i) *S, sınırlı, pozitif, self-adjoint ve tersinirdir.*

(ii) $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^m$, *S^{-1} frame operatörü ve A^{-1}, B^{-1} frame sınırları ile bir framedir.*

(iii) *Her $f \in H$'nın*

$$f = S^{-1}Sf = \sum_{k=1}^{m} \langle f, f_k\rangle S^{-1}f_k = \sum_{k=1}^{m} \left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle f_k \qquad (3.3.3)$$

olacak şekilde temsili vardır (yeniden inşaa formülü). Buradaki $\langle f, S^{-1}f_k\rangle$ sayılarına frame katsayıları *denir.*

(iv) *Eğer bir f elemanının bazı $\{c_k\}_{k=1}^m$ skaler katsayıları için $f = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k$ şeklinde bir temsili varsa bu durumda*

$$\sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{m} \left|\left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle\right|^2 + \sum_{k=1}^{m} \left|c_k - \left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle\right|^2$$

olur.

İspat. Bu lemmanın (i), (ii) ve (iii) şartlarının ispatı, sonsuz boyutlu Hilbert uzaylarındaki frameler kısmında detaylı bir şekilde verilecektir. Şimdi (iv) şartının ispatına bakalım:

$f \in H$'nın $f = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k$ şeklinde bir temsili olsun. $\{c_k\}_{k=1}^{m}$, skaler dizisini

$$\{c_k\}_{k=1}^{m} = \{c_k\}_{k=1}^{m} - \{\langle f, S^{-1}f_k\rangle\}_{k=1}^{m} + \{\langle f, S^{-1}f_k\rangle\}_{k=1}^{m}$$

şeklinde yazabiliriz. $\{c_k\}_{k=1}^{m}$ dizisinin seçimi ile

$$\sum_{k=1}^{m} \left(c_k - \langle f, S^{-1}f_k\rangle\right) f_k = 0$$

olur. Yani, $\{c_k\}_{k=1}^{m} - \{\langle f, S^{-1}f_k\rangle\}_{k=1}^{m} \in N_T = R_{T^*}^{\perp}$ dir. Ayrıca

$$\{\langle f, S^{-1}f_k\rangle\}_{k=1}^{m} = \{\langle S^{-1}f, f_k\rangle\}_{k=1}^{m} \in R_{T^*}$$

olduğuna da dikkat etmeliyiz. Tüm bu bilgileri yerine koyarak;

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 &= \left\|\{c_k\}_{k=1}^{m} - \{\langle f, S^{-1}f_k\rangle\}_{k=1}^{m} + \{\langle f, S^{-1}f_k\rangle\}_{k=1}^{m}\right\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left|c_k - \langle f, S^{-1}f_k\rangle\right|^2 + \sum_{k=1}^{m} \left|\langle f, S^{-1}f_k\rangle\right|^2\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır. □

$\{f_k\}_{k=1}^{m}$, S frame operatörüne sahip bir frame ise $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{m}$ nin S^{-1} frame operatörü ile bir frame olduğunu lemmada belirttik. $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{m}$ dizisine $\{f_k\}_{k=1}^{m}$'nın *kanonik dual framesi* adı verilir.

Şimdi bir $f \in H$'nın, kanonik dual framesi yardımıyla nasıl yeniden inşaa edilebileceğine ilişkin bir örnek verelim:

Örnek 3.3.3. *$\{e_k\}_{k=1}^{2}$, iki boyutlu bir H Hilbert uzayı için ortonormal baz olsun.*

$f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = e_1 + e_2$ olsun. $\{f_k\}_{k=1}^{3}$, H için bir framedir.

$$Sf = \sum_{k=1}^{3} \langle f, f_k\rangle f_k$$

frame operatörü tanımını kullanarak,

$$
\begin{aligned}
Se_1 &= \sum_{k=1}^{3} \langle e_1, f_k \rangle f_k \\
&= \langle e_1, f_1 \rangle f_1 + \langle e_1, f_2 \rangle f_2 + \langle e_1, f_3 \rangle f_3 \\
&= \langle e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle e_1, e_1 - e_2 \rangle (e_1 - e_2) + \langle e_1, e_1 + e_2 \rangle (e_1 + e_2) \\
&= \langle e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle e_1, e_1 \rangle (e_1 - e_2) - \langle e_1, e_2 \rangle (e_1 - e_2) \\
&+ \langle e_1, e_1 \rangle (e_1 + e_2) + \langle e_1, e_2 \rangle (e_1 + e_2) \\
&= e_1 + e_1 - e_2 + e_1 + e_2 \\
&= 3e_1
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
Se_2 &= \sum_{k=1}^{3} \langle e_2, f_k \rangle f_k \\
&= \langle e_2, f_1 \rangle f_1 + \langle e_2, f_2 \rangle f_2 + \langle e_2, f_3 \rangle f_3 \\
&= \langle e_2, e_1 \rangle e_1 + \langle e_2, e_1 - e_2 \rangle (e_1 - e_2) + \langle e_2, e_1 + e_2 \rangle (e_1 + e_2) \\
&= \langle e_2, e_1 \rangle e_1 + \langle e_2, e_1 \rangle (e_1 - e_2) - \langle e_2, e_2 \rangle (e_1 - e_2) \\
&+ \langle e_2, e_1 \rangle (e_1 + e_2) + \langle e_2, e_2 \rangle (e_1 + e_2) \\
&= -(e_1 - e_2) + e_1 + e_2 \\
&= -e_1 + e_2 + e_1 + e_2 \\
&= 2e_2
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece

$$S^{-1}e_1 = \frac{1}{3}e_1, \ \ S^{-1}e_2 = \frac{1}{2}e_2$$

olur. Kanonik dual frame ise

$$
\begin{aligned}
\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{3} &= \left\{S^{-1}f_1, S^{-1}f_2, S^{-1}f_3\right\} \\
&= \left\{S^{-1}e_1, S^{-1}e_1 - S^{-1}e_2, S^{-1}e_1 + S^{-1}e_2\right\} \\
&= \left\{\frac{1}{3}e_1, \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{2}e_2\right\}
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Her $f \in H$'nın frame tarafından temsili ise

$$
\begin{aligned}
f &= \sum_{k=1}^{3} \left\langle f, S^{-1} f_k \right\rangle f_k \\
&= \frac{1}{3} \langle f, e_1 \rangle e_1 + \left\langle f, \frac{1}{3} e_1 - \frac{1}{2} e_2 \right\rangle (e_1 - e_2) + \left\langle f, \frac{1}{3} e_1 + \frac{1}{2} e_2 \right\rangle (e_1 + e_2)
\end{aligned}
$$

olur.

Örnekten de anlaşılacağı gibi frame elemanları sonsuz olduğunda, S^{-1} operatörünü bulmak ve kanonik dual frame yardımıyla (3.3.3) eşitliğindeki gibi uzayın her bir elemanın temsilini hesaplamak çok kolay olmayacaktır. İşte bu yüzden tight framelerle çalışmak her zaman daha avantajlıdır.

Sonuç 3.3.2. *[8] $\{f_k\}_{k=1}^m$, A frame sınırı ile bir tight frame ise bu durumda $\{A^{-1} f_k\}_{k=1}^m$ kanonikal dual framedir ve her $f \in H$ için*

$$
f = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{m} \langle f, f_k \rangle f_k. \tag{3.3.4}
$$

temsili mevcuttur.

$\{f_k\}_{k=1}^m$, H için ortonormal baz ise her $f \in H$'nın

$$
f = \sum_{k=1}^{m} \langle f, f_k \rangle f_k
$$

şeklinde bir temsilinin olduğunu söylemiştik. Dikkat edecek olursak (3.3.4) eşitliğindeki bu temsil, ortonormal bazlarla verilen temsile çok benzemektedir. (3.3.4) eşitliğindeki açılımında sadece $\frac{1}{A}$ çarpanı gelmekte ancak frame Parseval frame olduğu zaman bu çarpan da kalkmaktadır. Böylece uzayın her bir elemanının temsili, tight framelerle çok daha kolay bir hale gelmektedir. İşte bu yüzden tight framelerle çalışmak her zaman daha avantajlıdır.

Bu avantajlarından dolayı bir frameye bazı vektörler ekleyerek tight frame elde edilebileceği gözlenmiştir. Bunun ispatı için spektral teoremin sonlu boyutlu uzaylardaki versiyonu kullanılacaktır. Spektral teoremin ispatı da herhangi bir lineer cebir kitabından kolaylıkla bulunabilir.

Teorem 3.3.2. *[8] H bir Hilbert uzayı olmak üzere $U : H \to H$ lineer dönüşümü, self adjoint ise bu durumda tüm eigen değerleri reeldir ve H, U'nun eigen vektörlerinden oluşan bir ortonormal baza sahiptir.*

Önerme 3.3.2. *[8] $\{f_k\}_{k=1}^m$, n- boyutlu bir H Hilbert uzayı için frame olsun. Bu durumda $n-1$ tane $h_2,...,h_n$ vektörleri vardır öyle ki*

$$\{f_k\}_{k=1}^m \cup \{h_k\}_{k=2}^n$$

birleşimi, H için bir tight frame oluşturur.

İspat. $S : H \to H$, $\{f_k\}_{k=1}^m$ framesi için frame operatörünü göstersin. Bir önceki teorem, H'nın, S'nin $\{e_k\}_{k=1}^n$ eigen vektörlerinden oluşan bir ortonormal baza sahip olduğunu söyler. Bu eigen vektörlere karşılık gelen eigen değerleri, $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ ile gösterelim. Kabul edelim ki eigen değerler

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$$

olacak şekilde sıralansın. Şimdi $k = 2,...,n$ için

$$h_k := \sqrt{\lambda_{1-}\lambda_k} e_k$$

şeklinde tanımlansın. $\{f_k\}_{k=1}^m \cup \{h_k\}_{k=2}^n$ ailesi için frame operatörü

$$\widetilde{S} : H \to H,\ \widetilde{S}f = Sf + \sum_{k=2}^n \langle f, h_k \rangle h_k \tag{3.3.5}$$

ile verilsin. Şimdi keyfi bir $f \in H$ alalım.

$$f = \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k$$

eşitliğini kullanarak, f üzerinde S frame operatörünün uygulanmasıyla

$$Sf = \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle Se_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle f, e_k \rangle e_k$$

elde ederiz. Bu ifadenin ve h_k nın tanımının (3.3.5) de yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}f &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle f, e_k \rangle e_k + \sum_{k=2}^n (\lambda_1 - \lambda_k) \langle f, e_k \rangle e_k \\
&= \lambda_1 \langle f, e_1 \rangle e_1 + \sum_{k=2}^n \lambda_k \langle f, e_k \rangle e_k + \lambda_1 \sum_{k=2}^n \langle f, e_k \rangle e_k - \sum_{k=2}^n \lambda_k \langle f, e_k \rangle e_k \\
&= \lambda_1 \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k \\
&= \lambda_1 f
\end{aligned}$$

olur ki bu ise tüm $f \in H$ için

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle f, f_k \rangle|^2 + \sum_{k=2}^{n} |\langle f, h_k \rangle|^2 = \left\langle \widetilde{S} f, f \right\rangle = \lambda_1 \|f\|^2$$

yani, $\{f_k\}_{k=1}^m \cup \{h_k\}_{k=2}^n$ ailesinin λ_1 frame sınırı ile bir tight frame olduğunu gösterir.

□

Frameler yardımıyla uzayın her bir f elemanı mümkün olan en küçük ℓ_2 norma sahip katsayılarla bir temsil (yeniden inşaa) verir. Bunu bölümün başında ifade etmiştik. Ancak bu katsayılar, ℓ_2 dışındaki başka uzayların normuna göre de alınabilir. Şimdi vereceğimiz teorem, uzayın her bir elemanının en küçük ℓ_1 norma sahip katsayılarla verilebilen bir temsile sahip olduğunu gösterir.

Teorem 3.3.3. *[8] $\{f_k\}_{k=1}^m$, H Hilbert uzayında bir frame olsun. Verilen $f \in H$ için $\{d_k\}_{k=1}^m \in \mathbb{C}^m$ katsayıları vardır öyle ki*

$$f = \sum_{k=1}^{m} d_k f_k$$

ve

$$\sum_{k=1}^{m} |d_k| = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{m} |c_k| : f = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k \right\}$$

dir.

İspat. Sabit bir $f \in H$ alalım ve $\{c_k\}_{k=1}^m$ katsayılarının bir kümesini seçelim öyle ki

$$f = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k$$

olsun. $r := \sum_{k=1}^{m} |c_k|$ şeklinde tanımlayalım. Katsayıları en küçük ℓ_1 normunda istediğimiz için, Bu araştırmamızı

$$M := \{\{d_k\}_{k=1}^m \in \mathbb{C}^m : |d_k| \leq r,\ k = 1, ..., m\}$$

kompakt kümesine ait olan $\{d_k\}_{k=1}^m$ dizilerine kısıtlayabiliriz. Şimdi

$$A = \left\{ \{d_k\}_{k=1}^m \in M : f = \sum_{k=1}^{m} d_k f_k \right\}$$

kümesini tanımlayalım. A kümesi kompakt ve

$$\phi : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R},\ \phi\{d_k\}_{k=1}^m := \sum_{k=1}^{m} |d_k|$$

şeklinde tanımlı ϕ fonksiyonu sürekli olduğundan söz konusu infimum mevcuttur ve böylece sonuç elde edilir. □

Teorem 3.3.4. *[8] $\{f_k\}_{k=1}^m$, H Hilbert uzayının bir W altuzayı için frame olsun. Bu durumda H'nın W üzerine ortogonal projeksiyonu*

$$Pf = \sum_{k=1}^{m} \left\langle f, S^{-1} f_k \right\rangle f_k$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat. İspatı için [8] numaralı kaynağa bakınız. □

Teorem 3.3.5. *[8] $\{f_k\}_{k=1}^m$, H için bir frame olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(i) Optimal alt frame sınırı, S nin en küçük eigen değeri, optimal üst frame sınırı, S nin en büyük eigen değeridir.

(ii) Kabul edelim ki H, $n-$boyutlu olsun. $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$, S nin eigen değerlerini göstersin. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|^2$$

dir.

(iii) Kabul edelim ki H, $n-$boyutlu olsun. Eğer $\{f_k\}_{k=1}^m$ tight ve tüm $k-$lar için $\|f_k\| = 1$ ise, frame sınırı

$$A = \frac{m}{n}$$

dir.

İspat. (i) : $\{f_k\}_{k=1}^m$, H için bir frame olsun. $S : H \to H$ frame operatörü, self-adjoint olduğundan, Teorem 3.3.2, H'nın, S nin $\{e_k\}_{k=1}^n$, eigen vektörlerinden oluşan bir ortonormal baza sahip olduğunu gösterir. Bu eigen değerlerleri, $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ ile gösterelim. Verilen $f \in H$'nın

$$f = \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k$$

şeklinde bir temsili vardır. Bu durumda

$$Sf = \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle Se_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle f, e_k \rangle e_k$$

ve

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= \langle Sf, f \rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle f, e_k \rangle e_k, f \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle f, e_k \rangle \overline{\langle f, e_k \rangle} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\langle f, e_k \rangle|^2
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\lambda_{\min} \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq \lambda_{\max} \|f\|^2$$

elde edilir. Son eşitlikten, optimal alt frame sınırının $\lambda_{\min}$, optimal üst frame sınırının $\lambda_{\max}$ olduğu görülür ve (i) ispatlanır.

(ii)'nin ispatı için,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \lambda_k &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \|e_k\|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_k, e_k \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle \lambda_k e_k, e_k \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle Se_k, e_k \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} |\langle e_k, f_l \rangle|^2
\end{aligned}$$

yazarız. Toplamların sırası yer değiştirilerek ve son olarak $\{e_k\}_{k=1}^n$ dizisinin, H için bir ortonormal baz olduğu kullanılarak (ii) ispatlanır.

(iii) : [11, Bölüm 2.3] $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ eigen değerlerinin toplamının, A frame sınırının $n-$kere tekrar edilmesiyle oluştuğunu ifade eder. Yani

$$n.A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{i=1}^{m} \|f_i\|^2$$

eşitliğinin olduğunu söyler. Buradan tüm $1 \leq i \leq m$ için $\|f_i\| = 1$ olduğundan

$$n.A = m$$

olup

$$A = \frac{m}{n}$$

elde edilir. □

3.3.2 Sonsuz Boyutlu Hilbert Uzaylarında Frameler

Sonlu boyutlu Hilbert uzayılarında frameleri tanıttıktan sonra bu bölümde, framelerin genel tanımını ve özelliklerini vereceğiz. H'yı, aşikar olmayan ayrılabilir bir Hilbert uzayı olarak alacağız.

Tanım 3.3.2. *[8] H Hilbert uzayında bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisine, her $f \in H$ için*

$$A\,\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\,\|f\|^2 \tag{3.3.6}$$

şartını sağlayacak şekilde $0 < A \leq B < \infty$ katsayılarının olması durumunda bir frame *denir.*

A ve B sayılarına *frame sınırları* adı verilir. A ya *alt*, B ye de *üst frame sınırı* denir. Frame sınırları tek değildir. Bütün alt frame sınırlarının supremumuna *optimal alt frame sınırı*, bütün üst frame sınırlarının infimumuna ise *optimal üst frame sınırı* adı verilir.

(3.3.6) eşitsizliğinde

- $A = B$ ise $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ya $A-$*tight frame*,

- Eğer $A = B = 1$ ise $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ya *Parseval frame,*

- Her $i, j \in I$ için $\|f_i\| = \|f_j\|$ ise $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ya *uniform frame,*

- Frame'deki elemanlardan herhangi biri kaldırıldığında, frame olma durumu bozuluyorsa, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ya *exact frame* denir.

Şimdi vereceğimiz lemma, bir dizinin frame olma şartını, sadece H'daki yoğun bir küme üzerinde sağlandığını kontrol etmenin yeterli olduğunu gösterir:

Lemma 3.3.1. *[8] Kabul edelim ki $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, H'daki elemanların bir dizisi ve H'nın yoğun bir V alt kümesindeki tüm f-ler için, $A, B > 0$ sabitleri var öyleki*

$$A\,\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\,\langle f, f_k\rangle\,|^2 \leq B\,\|f\|^2$$

şartı sağlansın. Bu durumda, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, A, B sınırları ile H için bir framedir.

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, H için bir frame ise bu durumda frame tanımından

$$\overline{span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = H$$

dır. Eğer $k \in \mathbb{N}$ için $f \in H$, tüm f_k-lara dik ise bu durumda (3.3.6) şartından $f = 0$ olduğu görülür. Biz genelde H'da tam olmayan dizileri de düşünürüz. Bu diziler H'da frame oluşturmazlar. Ancak kendi elemanlarının kapalı lineer gerenleri için iyi bir frame oluştururlar. Böyle dizileri düşünürsek aşağıdaki tanıma ihtiyacımız vardır.

Tanım 3.3.3. *[8] $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, H'da bir dizi olsun. Eğer $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\overline{span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ için bir frame ise, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ya bir* frame dizisi *denir.*

Şimdi sonsuz boyutlu Hilbert uzaylarındaki framelere bir kaç örnek verelim:

Örnek 3.3.4. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, *H için bir ortonormal baz olsun*

(i) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_2, e_3, ...\}$ *dizisi $A = 1$ frame sınırı ile bir parseval framedir:*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 &= |\langle f, f_1\rangle|^2 + |\langle f, f_2\rangle|^2 + |\langle f, f_3\rangle|^2 + ...\\ &= |\langle f, e_1\rangle|^2 + |\langle f, e_2\rangle|^2 + |\langle f, e_3\rangle|^2 + ...\\ &= \|f\|^2\end{aligned}$$

(ii) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_2, ...\}$ *dizisi* $A = 2$ *frame sınırı ile bir tight framedir:*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 &= |\langle f, f_1\rangle|^2 + |\langle f, f_2\rangle|^2 + |\langle f, f_3\rangle|^2 + |\langle f, f_4\rangle|^2 + ...\\ &= |\langle f, e_1\rangle|^2 + |\langle f, e_1\rangle|^2 + |\langle f, e_2\rangle|^2 + |\langle f, e_2\rangle|^2 + ...\\ &= 2\,|\langle f, e_1\rangle|^2 + 2\,|\langle f, e_2\rangle|^2 + ...\\ &= 2\,\|f\|^2\end{aligned}$$

olup $A = 2$ *frame sınırı ile bir tight frame olduğu görülür.*

(iii) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, ...\}$ *dizisi,* $A = 1$ *frame sınırı ile bir parseval framedir:*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 &= |\langle f, f_1\rangle|^2 + |\langle f, f_2\rangle|^2 + |\langle f, f_3\rangle|^2 + ...\\ &= |\langle f, e_1\rangle|^2 + \frac{1}{2}\,|\langle f, e_2\rangle|^2 + \frac{1}{2}\,|\langle f, e_2\rangle|^2 + ...\\ &= |\langle f, e_1\rangle|^2 + |\langle f, e_2\rangle|^2 + |\langle f, e_3\rangle|^2 + ...\\ &= \|f\|^2\end{aligned}$$

H için frame olan bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi, Bessel dizisi olduğu için,

$$T : \ell_2(\mathbb{N}) \longrightarrow H,\ T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

şeklinde tanımlı operatör sınırlı lineer bir operatördür. Bu operatöre *sentez operatörü* veya *pre-frame operatörü* adı verilir.

Bir $f \in H$ elemanını, analiz etmek için ise sentez operatörünün adjointi olan

$$T^* : H \longrightarrow \ell_2(\mathbb{N}),\ Tf : \{\langle f, f_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$$

şeklinde tanımlı *analiz operatörü* uygulanır. Analiz ve sentez operatörleninin bileşkesi alınarak

$$S : H \longrightarrow H,\ Sf = TT^*f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k\rangle\, f_k$$

frame operatörü elde edilir.

Lemma 3.3.2. *[8]* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, S *frame operatörü ve* A, B *frame sınırları ile bir frame ise aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(i) *S, sınırlı, pozitif, self-adjonit ve tersinirdir.*

(ii) $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$, *$S^{-1}$ frame operatörü ve A^{-1}, B^{-1} frame sınırları ile bir framedir.*

İspat. (i) : S'nin sınırlı olduğunu gösterelim. S frame operatörü, analiz ve sentez operatörlerinin bileşkesi olduğundan [8, Teorem 3.1.3] yi kullanarak

$$\|S\| = \|TT^*\| = \|T\|\,\|T^*\| \leq B$$

elde edilir ve böylece S sınırlıdır. Ayrıca $S^* = (TT^*)^* = TT^* = S$ olup, S, self-adjointtir. (3.3.6) eşitsizliğinden her $f \in H$ için

$$A\,\|f\|^2 \leq \langle Sf, f\rangle \leq B\,\|f\|^2$$

veya [8, Bölüm 2.2] den

$$AI \leq S \leq BI$$

olup, S pozitiftir. Bu eşitsizliği kullanarak

$$\begin{aligned} -AI \leq -S &\leq -BI \\ 0 \leq BI - S &\leq BI - AI \\ 0 \leq I - B^{-1}S &\leq \frac{B-A}{B} I \end{aligned}$$

buluruz. Bunu kullanarak

$$\begin{aligned} \left\| I - B^{-1}S \right\| &= \sup_{\|f\|=1} \left| \left\langle (I - B^{-1}S)f, f \right\rangle \right| \\ &\leq \sup_{\|f\|=1} \left| \left\langle (\frac{B-A}{B} If, f \right\rangle \right| \\ &= \frac{B-A}{B} \sup_{\|f\|=1} |\langle f, f\rangle| \\ &= \frac{B-A}{B} < 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikle beraber, 2. Bölümdeki Teorem 2.2.7 den ise S frame opertörünün tersinir olduğu görülür.

(ii) : S, self-adoint olduğundan, S^{-1} de self-adjointtir. Her $f \in H$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left\langle f, S^{-1}f_k \right\rangle \right|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left\langle S^{-1}f, f_k \right\rangle \right|^2 \\ &\leq B \left\| S^{-1}f \right\|^2 \\ &\leq B \left\| S^{-1} \right\|^2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

olup bu ise $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ nın bir Bessel dizisi olduğunu gösterir. Yani $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi için frame operatörü iyi tanımlıdır.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle S^{-1}f_k &= S^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle f_k \\ &= S^{-1}SS^{-1}f \\ &= S^{-1}f\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

olur. Bu ise, $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi için, frame operatörünün S^{-1}'e eşit olduğunu gösterir. $AI \leq S \leq BI$ eşitsizliğini S^{-1} operatörü ile göz önüne alırsak, [8, Teorem 2.4.2] yi de kullarak, her $f \in H$ için

$$B^{-1}I \leq S^{-1} \leq A^{-1}I$$

yani;

$$B^{-1}\left\|f\right\|^2 \leq \left\langle S^{-1}f, f\right\rangle \leq A^{-1}\left\|f\right\|^2$$

elde ederiz. (3.3.7) eşitliğini de göz önünde bulundurusak

$$B^{-1}\left\|f\right\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left|\left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle\right|^2 \leq A^{-1}\left\|f\right\|^2$$

bulunur. Bu ise $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ nın B^{-1}, A^{-1} frame sınırları ile bir frame olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

$\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisine $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ nın *kanonik dual framesi* adı verilir. Böylece her $f \in H$ nın

$$f = S^{-1}Sf = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f, f_k\rangle S^{-1}f_k = \sum_{k=1}^{\infty}\left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle f_k \tag{3.3.8}$$

olacak şekilde temsili vardır (yeniden inşaa formülü). Buradaki $\langle f, S^{-1}f_k\rangle$ sayılarına *frame katsayıları* denir.

Kanonik dual frame yardımıyla uzayın bir elemanının, nasıl temsil edildiğine ilişkin bir örneği sonlu boyutlu Hilbert uzaylarında vermiştik. Uzay, sonsuz boyutlu olduğunda bu temsili kanonik dual frame yardımıyla vermenin çok zor olacağını da söylemiştik. Bu yüzden tight framelerin önemi burda daha çok ortaya çıkmaktadır:

Sonuç 3.3.3. *[8] $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, A frame sınırı ile bir tight frame ise bu durumda $\{A^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ kanonik dual framedir ve her $f \in H$ için*

$$f = \frac{1}{A}\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k\rangle f_k \tag{3.3.9}$$

dır.

İspat. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, A frame sınırı ve S frame operatörü ile bir tight frame ise, her $f \in H$ için

$$\langle Sf, f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 = A\,\|f\|^2 = \langle Af, f\rangle$$

dir. [8, Lemma 2.4.3], $S = A.I$ olacağını söyler. Böylece $S^{-1} = \frac{1}{A}.I$ dir. Bu sonucu (3.3.8) eşitliğinde kullanırsak ispat tamamlanmış olur. □

Ortogonal projeksiyonlar, bir çok yerde önemli roller oynarlar. Şimdi framelerle ortogonal projeksiyonlar arasındaki ilişkiyi gösteren bir önerme ifade edilecektir:

Önerme 3.3.3. *[8] $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, H Hilbert uzayında bir dizi olsun ve P, H'nın kapalı bir V alt uzayı üzerine ortogonal projeksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(i) *$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, A, B frame sınırları ile H için bir frame ise $\{Pf_k\}_{k=1}^{\infty}$, da A, B frame sınırları ile V için bir framedir.*

(ii) *$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, S frame operatörü ile V için bir frame ise, bu durumda H'nın V üzerine ortogonal projeksiyonu her $f \in H$ için*

$$Pf = \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle f_k$$

ile verilir.

Eğer $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ frame ise her bir $f \in H$ elemanının, $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ şeklinde birden fazla $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2(\mathbb{N})$ ye karşılık gelen temsilleri olduğunu görmüştük. Eğer böyle bir temsil varsa, $\{\langle f, S^{-1}f_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ frame katsayıları, tüm diziler arasında mümkün olan en küçük ℓ_2 normuna sahiptir. Yani başka bir deyişle f'nin en iyi temsilini verir. Şimdi bunu ifade eden bir lemma verelim:

Lemma 3.3.3. *[8] $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, H için bir frame olsun. Eğer $f \in H$'nın bazı $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ skaler katsayıları için $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ şeklinde bir temsil varsa, bu durumda*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\left\langle f, S^{-1} f_k \right\rangle\right|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left|c_k - \left\langle f, S^{-1} f_k \right\rangle\right|^2$$

dır.

İspat. Bu lemmanın ispatı Teorem 3.3.1 dekine benzer şekilde yapılabilir. □

Şimdi frameleri karakterize eden önemli bir teoremi ifade edelim:

Teorem 3.3.6. *[8] H'daki bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin frame olması için gerek ve yeter şart*

$$T : \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \to \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

şeklinde tanımlanan dönüşümün $\ell_2(\mathbb{N})$ den H'ya iyi tanımlı olmasıdır.

4. FUSION FRAMELER

4.1 Fusion Framelere Giriş

Frame teori, 3. Bölümde de anlatıldığı gibi vektörlerin genellikle birden fazla temsillerini veren ve bir çok alanda (filter bank teori, sinyal işleme, görüntü işleme, kablosuz sensör ağı modellenmesi vb..) kullanılan, 30 yıldır gelişmekte olan çok yeni bir alandır. Fakat yapılan çalışmalarda bir çok uygulamanın modellenmesinde tek bir frame sisteminin yeterli olmadığı görülmüştür. Bu eksikliğin giderilmesi için P. G. Casazza ve G. Kutyniok bunun üzerine çalışmalar yapmış ve [3] numaralı kaynakta anlatılan "altuzayların frameleri" fikrini ortaya atmışlardır. Bizim bu çalışmadaki temel amacımız da bu yeni fikri incelemektir.

Fusion frameler çoklu sinyal sistemlerinin yeniden inşaasını sağlar ve bu sistemlere sağlamlık katar. Fusion frameler, framelerin bir genelleştirilmesi olarak düşünülür. Bu yüzden frame teorinin çok daha ötesinde bir teoridir.

İlk olarak bir H Hilbert uzayında fusion frameleri genel tanımını verip, daha sonra sonlu boyutlu altuzayların fusion framelerini ve genel fusion frameleri ayrı ayrı karakterize edeceğiz.

Tanım 4.1.1. *[12] I sayılabilir bir indeks kümesi olmak üzere, $\mathbb{W} = \{W_i\}_{i\in I}$, H'da kapalı altuzayların bir ailesi ve $\mathbf{v} = \{v_i\}_{i\in I}$ ağırlıkların bir ailesi, yani tüm $i \in I$ için $v_i > 0$ olsun. $\mathbb{W}_{\mathbf{v}} = \{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$ ailesi aşağıdaki şartı sağlarsa bir* fusion frame *adını alır. Tüm $f \in H$ için*

$$C\,\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} v_i^2\,\|\pi_{W_i}(f)\|^2 \leq D\,\|f\|^2 \tag{4.1.1}$$

şartını sağlayacak şekilde $0 < C \leq D < \infty$ sayıları vardır. Burada π_{W_i}, W_i altuzayı üzerine ortogonal projeksiyondur. C ve D fusion frame sınırları olarak adlandırılır. C'ye alt fusion frame sınırı*, D'ye de* üst fusion frame sınırı *adı verilir. Eğer (4.1.1) eşitsizliğinde*

- *$C = D$ ise $\{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$ ailesine $C-$*tight fusion frame*,*

- $C = D = 1$ *ise* Parseval fusion frame,

- *Tüm* $i, j \in I$ *için* $v = v_i = v_j$ *ise* v-uniform fusion frame,

- *Eğer* $\{(W_i, v_i)\}_{i \in I}$ *ailesi sadece* D *Bessel fusion frame sınırına sahipse bir* Bessel fusion dizisi,

- *Eğer* $\{(W_i, v_i)\}_{i \in I}$ *fusion framesi için* $H = \oplus_{i \in I} W_i$ *oluyor ise* $\{(W_i, v_i)\}_{i \in I}$ *ailesine* ortonormal fusion bazı

  denir.

Tanım 4.1.2. *[13]* $\mathbb{W}_{\mathbf{v}} = \{(W_i, v_i)\}_{i \in I}$ *ailesi,* $H_{\mathbb{W}} = \overline{span}\{W_i\}_{i \in I}$ *için bir fusion frame oluyorsa fusion frame dizisi olarak adlandırılır.*

Uyarı 4.1.1. *[13] H'nın* $\{W_i\}_{i \in I}$ *altuzaylarının her bir ailesi için* $\left(\sum_{i \in I} \oplus W_i\right)_{\ell_2}$ *uzayı*

$$\left(\sum_{i \in I} \oplus W_i\right)_{\ell_2} = \{\{f_i\}_{i \in I} : f_i \in W_i \text{ ve } \{\|f_i\|\}_{i \in I} \in \ell_2(I)\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzay üzerinde

$$\langle \{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I} \rangle = \sum_{i \in I} \langle f_i, g_i \rangle$$

eşitliği bir iç çarpım tanımlar.

Tanım 4.1.3. *[3]* $\mathbb{W}_{\mathbf{v}} = \{(W_i, v_i)\}_{i \in I}$*, H için bir fusion frame olsun. Bu durumda analiz operatörü:*

$$T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}} : H \longrightarrow \left(\sum_{i \in I} \oplus W_i\right)_{\ell_2}$$

$$T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}(f) = \{v_i \pi_{W_i}(f)\}_{i \in I}$$

şeklinde tanımlanır.

Sentez operatörü ise analiz operatörünün adjointidir ve

$$T^*_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}} : \left(\sum_{i \in I} \oplus W_i\right)_{\ell_2} \longrightarrow H$$

$$T^*_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}(f) = \sum_{i \in I} v_i f_i, \ f = \{f_i\}_{i \in I} \in \left(\sum_{i \in I} \oplus W_i\right)_{\ell_2}$$

şeklindedir.

Diğer taraftan [13] numaralı kaynakta sentez operatörü

$$T^{*}_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}} : \left(\sum_{i\in I} \oplus W_i\right)_{\ell_2} \longrightarrow H$$

$$T^{*}_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}(f) = \sum_{i\in I} v_i \pi_{W_i}(f_i),\ f = \{f_i\}_{i\in I} \in \left(\sum_{i\in I} \oplus W_i\right)_{\ell_2}$$

olarak tanımlanmıştır. Ancak ortogonal projeksiyonların özellikleri göz önüne alınırsa bu iki tanımın aynı olduğu görülür.

$\mathbb{W}$ için $S_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}$ *fusion frame operatörü* ise framelerde olduğu gibi analiz ve sentez operatörlerinin bileşkesidir ve

$$S_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}(f) = T^{*}_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}} T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}(f) = \sum_{i\in I} v_i^2 \pi_{W_i}(f)$$

şeklindedir.

Frameler, fusion framelerin özel bir durumudur. $\{f_i\}_{i\in I}$ ailesi , A, B frame sınırları ve S frame operatörü ile bir frame ise , $\{(span\{f_i\}, \|f_i\|)\}_{i\in I}$, A, B fusion frame sınırları ve S fusion frame operatörü ile bir fusion framedir. Bu sonuç ise her $f \in H$ için

$$\sum_{i\in I} \|f_i\|^2 \pi_{span\{f_i\}}(f) = \sum_{i\in I} \|f_i\|^2 \left\langle f, \frac{f_i}{\|f_i\|} \right\rangle \frac{f_i}{\|f_i\|} = \sum_{i\in I} \langle f, f_i\rangle f_i = Sf$$

eşitliğinden elde edilir.

Fusion frameleri kısaca tanıttıktan sonra şimdi sonlu boyutlu altuzayların fusion framelerini inceleyelim

4.2 Sonlu Boyutlu Altuzayların Fusion Frameleri

Bu bölümde bir H Hilbert uzayının sonlu boyutlu altuzayları için fusion framelerin genel özelliklerini vereceğiz.

Önerme 4.2.1. *[13] $\mathbb{W} = \{W_i\}_{i=1}^m$, H'da sonlu boyutlu altuzayların bir dizisi ve $\mathbf{v} = \{v_i\}_{i=1}^m$, ağırlıkların bir ailesi, yani $1 \leq i \leq m$ için $v_i > 0$ olsun. Bu durumda $\mathbb{W}_{\mathbf{v}} = \{(W_i, v_i)\}_{i=1}^m$, H'da bir fusion frame dizisidir.*

İspat. $H_{\mathbb{W}} = span\{W_i\}_{i=1}^m$ alalım . Yani; her $f \in H_{\mathbb{W}}$ için $g_1 \in W_1, g_2 \in W_2, ..., g_m \in W_m$ ve $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ skalerleri mevcuttur öyleki

$$f = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k$$

olur. Şimdi

$$\phi : H_{\mathbb{W}} \to \mathbb{R}$$
$$\phi(f) = \sum_{i=1}^{m} v_i^2 \left\| \pi_{W_i}(f) \right\|^2$$

sürekli dönüşümünü düşünelim. $H_{\mathbb{W}}$ sonlu boyutlu olacağından $H_{\mathbb{W}}$'nın birim yuvarı, H Hilbert uzayında kompakttır. Bu yüzden $\|g\| = 1$ olan $g \in H_{\mathbb{W}}$ bulabiliriz öyle ki

$$C = \sum_{i=1}^{m} v_i^2 \left\| \pi_{W_i}(g) \right\|^2 = \inf_{\|f\|=1} \sum_{i=1}^{m} v_i^2 \left\| \pi_{W_i}(f) \right\|^2$$

dır. Şimdi verilen $f \neq 0$, $f \in H_{\mathbb{W}}$ için

$$\sum_{i=1}^{m} v_i^2 \left\| \pi_{W_i}(f) \right\|^2 = \sum_{i=1}^{m} v_i^2 \left\| \pi_{W_i}(\frac{f}{\|f\|}) \right\|^2 \|f\|^2 \geq C \|f\|^2$$

olup alt fusion frame sınırı şartı sağlanır. Üst fusion frame şartı ise

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} v_i^2 \left\| \pi_{W_i}(f) \right\|^2 &\leq \sum_{i=1}^{m} v_i^2 \left\| \pi_{W_i} \right\|^2 \|f\|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} v_i^2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

eşitsizliğinden $D = \sum_{i=1}^{m} v_i^2$ olduğu görülür. □

Sonuç 4.2.1. *[13] $\mathbb{W}_{\mathbf{v}} = \{(W_i, v_i)\}_{i=1}^m$ dizisinin sonlu boyutlu H Hilbert uzayı için fusion frame olması için gerek ve yeter şart $H = span\{W_i\}_{i=1}^m$ dir.*

İspat. Fusion frame tanımından ve bir önceki önermeden elde edilir. □

Teorem 4.2.1. *[13] $\mathbb{W}_{\mathbf{v}} = \{(W_i, v_i)\}_{i=1}^m$, sonlu boyutlu bir H Hilbert uzayı için fusion frame olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(i) *Optimal alt fusion frame sınırı, $S_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}$ nin en küçük eigen değeri, optimal üst frame sınırı, en büyük eigen değeridir.*

(ii) $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$, $S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}$ *nin eigen değerlerini göstersin. Bu durumda*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{m} v_i^2 \dim W_i$$

dır.

(iii) $\mathbb{W}_\mathbf{v} = \{(W_i, v_i)\}_{i=1}^m$, H *için* C*- tight fusion frame olsun. Bu durumda*

$$C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} v_i^2 \dim W_i}{\dim H}$$

dır.

İspat. (i) : $S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}$, fusion frame operatörü self-adjointtir. Bu yüzden H, $S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}$ nin $\{e_k\}_{k=1}^n$ eigen vektörlerinden oluşan bir ortonormal baza sahiptir. Bu eigen değerleri $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ ile gösterelim. Bu durumda her $f \in H$'nın

$$f = \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k$$

şeklinde bir temsili vardır. Buna göre

$$S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}(f) = \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}} e_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle f, e_k \rangle e_k$$

olur. Bu eşitliği kullanarak

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} v_i^2 \left\| \pi_{W_i}(f) \right\|^2 &= \langle S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}(f), f \rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle f, e_k \rangle e_k, f \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle f, e_k \rangle \langle e_k, f \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left| \langle f, e_k \rangle \right|^2 \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\lambda_{\min} \|f\|^2 \leq \sum_{i=1}^{m} v_i^2 \left\| \pi_{W_i}(f) \right\|^2 \leq \lambda_{\max} \|f\|^2$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise optimal alt fusion frame sınırının $\lambda_{\min}$, optimal üst fusion frame sınırının $\lambda_{\max}$ olduğunu gösterir.

(ii) : Bu ispata başlamadan önce [11, Bölüm 2.3] de ifade edilen şu bağıntıları hatırlayalım: H, n boyutlu bir Hilbert uzayı olmak üzere eğer $\{f_k\}_{k=1}^m$, H için bir Parseval frame ise

$$n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{i=1}^{m} \|f_i\|^2 \tag{4.2.1}$$

eşitliği vardır. Şimdi $1 \leq i \leq m$ alalım. $\{\pi_{W_i}(e_k)\}_{k=1}^n$, W_i için Parseval frame olduğundan, (4.2.1) eşitliğinden

$$\dim W_i = \sum_{k=1}^{n} \|\pi_{W_i}(e_k)\|^2$$

olur. Bu yüzden

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \lambda_k &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \|e_k\|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_k, e_k \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle \lambda_k e_k, e_k \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle S_{\mathbb{W}_\mathrm{v}} e_k, e_k \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} v_i^2 \|\pi_{W_i}(e_k)\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m} v_i^2 \dim W_i
\end{aligned}$$

olur ve (ii) ispatlanır.

(iii) : H, $n-$boyutlu bir Hilbert uzayı ve $\{f_k\}_{k=1}^m$, H için bir $C-$tight frame ise

$$n.C = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{i=1}^{m} \|f_i\|^2$$

eşitliğini [11, Bölüm 2.3] den yazabiliriz. Bu eşitlikle beraber (ii) de kullanılarak

$$\dim H.C = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{m} v_i^2 \dim W_i$$

eşitliği yazılabilir ve buradan

$$C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} v_i^2 \dim W_i}{\dim H}$$

elde edilir. □

4.3 Genel Fusion Frameler

İlk olarak fusion framelerle, frameler arasında temel bir ilişki veren bir teoremle başlayalım.

Teorem 4.3.1. *[3] Her bir $i \in I$ için $v_i > 0$ ve $\{f_{ij}\}_{j \in J_i}$, A_i, B_i frame sınırları ile H'da bir frame dizisi olsun. Tüm $i \in I$ için $W_i = \overline{span}_{j \in J_i} \{f_{ij}\}$ olarak tanımlayalım ve her W_i altuzayı için $\{e_{ij}\}_{j \in J_i}$ ortonormal bazını seçelim. Farzedelim ki*

$$0 < A = \inf_{i \in I} A_i \leq \sup_{i \in I} B_i = B < \infty$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) *$\{v_i f_{ij}\}_{j \in J_i, i \in I}$, H için bir framedir.*

(ii) *$\{v_i e_{ij}\}_{j \in J_i, i \in I}$, H için bir framedir.*

(iii) *$\{(W_i, v_i)\}_{i \in I}$, H için bir fusion framedir.*

İspat. Herbir $i \in I$ için $\{f_{ij}\}_{j \in J_i}$, A_i, B_i frame sınırları ile W_i için frame olduğundan

$$\begin{aligned} A \sum_{i \in I} v_i^2 \left\| \pi_{W_i}(f) \right\|^2 &\leq \sum_{i \in I} A_i v_i^2 \left\| \pi_{W_i}(f) \right\|^2 \\ &\leq \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} \left| \langle \pi_{W_i}(f), v_i f_{ij} \rangle \right|^2 \\ &\leq \sum_{i \in I} B_i v_i^2 \left\| \pi_{W_i}(f) \right\|^2 \\ &\leq B \sum_{i \in I} v_i^2 \left\| \pi_{W_i}(f) \right\|^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} \left| \langle \pi_{W_i}(f), v_i f_{ij} \rangle \right|^2 = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} \left| \langle f, v_i f_{ij} \rangle \right|^2$$

olduğunu gözlemleriz. Bu ise $\{v_i f_{ij}\}_{j\in J_i, i\in I}$, C, D frame sınırları ile H için bir frame olduğunda, $\{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$'nin $\frac{C}{B}, \frac{D}{A}$ fusion frame sınırları ile H için bir fusion frame olduğunu gösterir. Ayrıca $\{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$, H için $\frac{C}{B}, \frac{D}{A}$ fusion frame sınırları ile bir fusion frame ise yukarıdaki hesaplamalar $\{v_i f_{ij}\}_{j\in J_i, i\in I}$ ailesinin AC,BD frame sınırları ile H için bir frame olduğunu söyler. Böylece $(i) \iff (iii)$ ispatlanmış olur.

$(ii) \iff (iii)$ denkliğini ise

$$v_i^2 \left\| \pi_{W_i}(f) \right\|^2 = v_i^2 \left\| \sum_{j\in J_i} \langle f, e_{ij} \rangle e_{ij} \right\|^2 = \sum_{j\in J_i} |\langle f, v_i e_{ij} \rangle|^2$$

eşitliğinden elde edebiliriz. Bu ise ispatı tamamlar. □

Şimdi ise altuzayların bir dizisi için tamlık tanımını verelim:

Tanım 4.3.1. *[3] H'nın $\{W_i\}_{i\in I}$ altuzaylarının bir ailesine*

$$\overline{span}_{i\in I}\{W_i\} = H$$

şartını sağlaması durumunda tamdır denir.

Lemma 4.3.1. *[3] $\{W_i\}_{i\in I}$, H'da altuzayların bir ailesi ve $\{v_i\}_{i\in I}$ ağırlıkların bir ailesi olsun. Eğer $\{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$ ailesi H için bir fusion frame ise tamdır.*

İspat. Kabul edelim ki $\{W_i\}_{i\in I}$ tam olmasın. Bu durumda $f \neq 0$, $f \perp \overline{span}_{i\in I}\{W_i\}$ olacak şekilde $f \in H$ vardır. Buradan ise $\sum_{i\in I} v_i^2 \left\| \pi_{W_i}(f) \right\|^2 = 0$ olur. Bu yüzden $\{W_i\}_{i\in I}$ ailesi altuzayların bir framesi değildir. Yani $\{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$ fusion frame değildir. Bu ise bir çelişkidir. □

Şimdi fusion framelerin tamlığını kontrol etmek için kullanışlı olan bir lemma ifade edelim. Lemmanın ispatı tanımdan kolayca görülebilir.

Lemma 4.3.2. *[3] $\{W_i\}_{i\in I}$, H'da altuzayların bir ailesi ve her bir $i \in I$ için $\{e_{ij}\}_{j\in J_i}$, W_i için ortonormal baz olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) $\{W_i\}_{i\in I}$ *tamdır.*

(ii) $\{e_{ij}\}_{j\in J_i, i\in I}$ *tamdır.*

Lemma 4.3.3. *[3] V, H'nın bir altuzayı ve $\{(W_i, v_i)\}_{i \in I}$ ailesi C ve D fusion frame sınırları ile H için bir fusion frame olsun. Bu durumda $\{(W_i \cap V, v_i)\}_{i \in I}$ ailesi C ve D fusion frame sınırları ile V için bir fusion framedir.*

İspat. Tüm $f \in V$ için

$$\sum_{i \in I} v_i^2 \left\| \pi_{W_i}(f) \right\|^2 = \sum_{i \in I} v_i^2 \left\| \pi_{W_i \cap V}(f) \right\|^2$$

yazarız. Buradan ise istenilen sonuç elde edilir. □

Şimdi bu bölümün başında tanımlanan fusion analiz, sentez ve frame operatörlerini karakterize eden bazı sonuçlar vereceğiz. İlk olarak fusion sentez operatörünü karekterize eden bir lemma ile başlayacağız. Ancak bu lemmaya başlamadan önce ilk olarak lemmanın ispatında gerekli olan bazı bilgileri verelim:

Tanım 4.3.2. *[14] X bir Banach uzayı olsun. Eğer doğal sayıların herhangi bir σ permütasyonu için*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)}\right)$$

dizisi zayıf Cauchy dizisi ise $\sum_n x_n$ serisine zayıf şartsız Cauchy denir

Buna denk olarak $\sum_n x_n$ serisinin zayıf şartsız Cauchy olması için gerek ve yeter şart her bir $x^* \in X^*$ için

$$\sum_n |x^*(x_n)| < \infty$$

olmasıdır.

Teorem 4.3.2. *[14] X bir Banach uzayı olsun. $\sum_n x_n$ zayıf şartsız Cauchy serisinin şartsız yakınsak (unconditionally convergent) olması için gerek ve yeter şart X'in c_0 uzayının bir kopyasını içermemesidir.*

Uyarı 4.3.1. *Bir X normlu uzayı içerisinde bir Y normlu uzayının kopyası demek; X'in Y'ye izometrik izomorfik olan bir Z altuzayı demektir.*

Teorem 4.3.3. *[15] X bir Banach uzayı ve K, X Banach uzayının cismi olsun. Bu uzayda $\sum_n x_n$ serisini düşünelim. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) *$\sum_n x_n$ serisi zayıf şartsız Cauchy'dir.*

(ii) *Her* $(a_n) \in c_0$ *için* $\sum_n a_n x_n$ *serisi yakınsaktır.*

(iii) *Pozitif bir* M *sayısı var öyle ki tüm* $m \in \mathbb{N}$ *ve* $a_1, a_2, ..., a_m \in K$ *için*

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} a_n x_n \right\| \leq M \max \{|a_n| : n = 1, 2, ..., m\}$$

dır.

Lemma 4.3.4. *[3]* $\{(W_i, v_i)\}_{i \in I}$, H *için bir Bessel fusion dizisi olsun. Bu durumda her bir* $i \in I$ *için* $f_i \in W_i$ *ile her bir* $\{f_i\}_{i \in I}$ *dizisi için*

$$\sum_{i \in I} v_i f_i$$

serisi şartsız yakınsaktır.

İspat. $f = \{f_i\}_{i \in I} \in \left(\sum_{i \in I} \oplus W_i \right)_{\ell_2}$ alalım. $|J| < \infty$ olan sabit bir $J \subset I$ seçelim ve $g = \sum_{i \in J} v_i f_i$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i \in J} v_i f_i \right\|^4 &= \left(\left\langle g, \sum_{i \in J} v_i f_i \right\rangle \right)^2 \\
&= \left(\sum_{i \in J} v_i \langle \pi_{W_i}(g), f_i \rangle \right)^2 \\
&\leq \left(\sum_{i \in J} v_i \|\pi_{W_i}(g)\| \|f_i\| \right)^2 \\
&\leq \left(\left(\sum_{i \in J} v_i^2 \|\pi_{W_i}(g)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i \in J} \|f_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
&\leq \sum_{i \in J} v_i^2 \|\pi_{W_i}(g)\|^2 \sum_{i \in J} \|f_i\|^2 \\
&\leq D \|g\|^2 \sum_{i \in J} \|f_i\|^2 \\
&\leq D \left\| \sum_{i \in J} v_i f_i \right\|^2 \|f\|^2
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden

$$\left\| \sum_{i \in J} v_i f_i \right\|^2 \leq D \|f\|^2$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan Teorem 4.3.3 ün $(iii) \Rightarrow (i)$ şartını kullanarak $\sum\limits_{i\in I} v_i f_i$ serisinin zayıf şartsız Cauchy olduğunu söyleriz. Yine aynı teoremin $(i) \Rightarrow (ii)$ şartını kullanarak H Hilbert uzayının c_0 uzayının bir kopyasını içeremeyeceğini sonucuna varırız. Bu sonuçla beraber Teorem 4.3.2 yi de göz önüne alırsak $\sum\limits_{i\in I} v_i f_i$ serisinin şartsız yakınsak olduğunu elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır. □

Şimdi fusion sentez operatörüne göre Bessel fusion dizilerini karakterize edeceğiz:

Teorem 4.3.4. *[13] $\mathbb{W}_v = \{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$ ailesinin H için D Bessel fusion sınırı ile bir Bessel fusion dizisi olması için gerek ve yeter şart sentez operatörünün*

$$T^*_{\mathbb{W}_\mathbf{v}} : \left(\sum_{i\in I} \oplus W_i\right)_{\ell_2} \longrightarrow H$$

$$T^*_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}(f) = \sum_{i\in I} v_i \pi_{W_i}(f_i), \ \ f = \{f_i\} \in \left(\sum_{i\in I} \oplus W_i\right)_{\ell_2}$$

iyi tanımlı sınırlı lineer bir operatör ve $\left\|T^*_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}\right\| \leq \sqrt{D}$ olmasıdır.

İspat. İlk olarak $\mathbb{W}_\mathbf{v} = \{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$, H için D Bessel fusion sınırı ile bir Bessel fusion dizisi olsun. Teoremin gerek yönünü ispatlamak için $|J| < \infty$ olacak şekildeki her bir $J \subseteq I$ ve $\{f_i\}_{i\in I} \in \left(\sum\limits_{i\in I} \oplus W_i\right)_{\ell_2}$ alalım.

$$\begin{aligned}
\left\|T^*_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}(f)\right\|^2 &= \left\|\sum_{i\in J} v_i \pi_{W_i}(f_i)\right\|^2 \\
&= \sup_{\|g\|=1} \left|\left\langle g, \sum_{i\in J} v_i \pi_{W_i}(f_i)\right\rangle\right|^2 \\
&= \sup_{\|g\|=1} \left|\sum_{i\in J} v_i \left\langle \pi_{W_i}(g), f_i\right\rangle\right|^2 \\
&\leq \sup_{\|g\|=1} \left(\sum_{i\in J} v_i \left\|\pi_{W_i}(g)\right\| \left\|f_i\right\|\right)^2 \\
&\leq \sup_{\|g\|=1} \left(\left(\sum_{i\in J} v_i^2 \left\|\pi_{W_i}(g)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i\in J} \left\|f_i\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\
&\leq \sup_{\|g\|=1} \sum_{i\in J} v_i^2 \left\|\pi_{W_i}(g)\right\|^2 \sum_{i\in J} \left\|f_i\right\|^2 \\
&\leq D \sum_{i\in J} \left\|f_i\right\|^2
\end{aligned}$$

olur. Buradan, bir önceki lemmadaki gibi, $\sum_{i\in I} v_i \pi_{W_i}(f_i)$ toplamı şartsız yakınsak olup, bu ise $T^*_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}$ sentez operatörünün iyi tanımlı olmasını gerektirir. Ayrıca son eşitsizlikten

$$\left\| T^*_{\mathbb{W}_\mathbf{v}} \{f_i\}_{i\in J} \right\|^2 \leq D \left\| \{f_i\}_{i\in J} \right\|^2$$

olduğu görülür ki bu da $T^*_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}$'ın sınırlı bir operatör olduğunu gösterir. Böylece gerek yön ispatlanır.

Tersi için farzedelim ki $T^*_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}$ iyi tanımlı ve $\left\| T^*_{\mathbb{W}_\mathbf{v}} \right\| \leq \sqrt{D}$ olsun. Bu durumda $T_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}$ adjoint operatörü sınırlı bir operatördür ve $\| T_{\mathbb{W}_\mathbf{v}} \| = \left\| T^*_{\mathbb{W}_\mathbf{v}} \right\|$ dir. Bu bilgileri kullanarak her $f \in H$ için

$$\begin{aligned} \sum_{i\in I} v_i^2 \left\| \pi_{W_i}(f) \right\|^2 &= \left\| T_{\mathbb{W}_v}(f) \right\|^2 \\ &\leq \left\| T_{\mathbb{W}_v} \right\|^2 \|f\|^2 \\ &\leq D \|f\|^2 \end{aligned}$$

olur ve buradan $\mathbb{W}_\mathbf{v} = \{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$, ailesinin, H için D Bessel fusion sınırı ile bir Besel fusion dizisi olduğu ispatlanmış olur. □

Şimdi fusion analiz ve sentez operatörlerini karekterize eden genel bir teoremle devam edelim:

Teorem 4.3.5. *[3] $\{W_i\}_{i\in I}$, H'da alt uzayların bir ailesi ve $\{v_i\}_{i\in I}$ ağırlıkların bir ailesi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir*

(i) *$\{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$, H için bir fusion framedir.*

(ii) *$T^*_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}$ sentez operatörü, sınırlı, lineer ve örten bir operatördür.*

(iii) *$T_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}$ analiz operatörü, (muhtemelen içine) bir izomorfizimdir.*

İspat. İlk olarak $(i) \iff (iii)$ denkliğini ispatlayalım. Öncelikle $T_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}$ analiz operatörü lineerdir. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}(f)=0 \iff \|T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}(f)\|^2 &= \sum_{i\in I} v_i^2 \|\pi_{W_i}(f)\|^2 = 0 \\
&\iff \text{her } i\in I \text{ için } \|\pi_{W_i}(f)\|^2 = 0 \\
&\iff \text{her } i\in I \text{ için } \pi_{W_i}(f) = 0 \\
&\iff f = 0
\end{aligned}
$$

olup, $T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}$ bire birdir.

$(ii) \iff (iii)$ denkliği ise Hilbert uzayı üzerindeki her bir operatör için genelde sağlanır. □

Yukarıda tanıttığımız fusion frame operatörünün özelliklerini veren bir önermeyle devam edeceğiz. Dikkat edecek olursak, fusion frame operatörü, frame operatörü ile benzer özellikler gösterecektir.

Önerme 4.3.1. *[3] $\mathbb{W}_{\mathbf{v}} = \{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$ ailesi C ve D fusion frame sınırları ile H için bir fusion frame olsun. Bu durumda , $S_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}$ fusion frame operatörü, pozitif, self adjoint olup, H üzerinde tersinir ve $CI \leq S_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}} \leq DI$ dır. Ayrıca tüm $f\in H$ için*

$$
f = \sum_{i\in I} v_i^2 S_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}^{-1} \pi_{W_i}(f)
$$

yeniden inşaa formülünü yazarız.

İspat. Herhangi bir $f\in H$ için

$$
\begin{aligned}
\langle S_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}(f), f\rangle &= \left\langle \sum_{i\in I} v_i^2 \pi_{W_i}(f), f \right\rangle \\
&= \sum_{i\in I} v_i^2 \langle \pi_{W_i}(f), f\rangle \\
&= \sum_{i\in I} v_i^2 \|\pi_{W_i}(f)\|^2
\end{aligned}
$$

olup, bu ise $S_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}$ fusion frame operatörünün pozitif olduğunu gösterir. Ayrıca

$$
\langle Cf, f\rangle = C\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} v_i^2 \|\pi_{W_i}(f)\|^2 = \langle S_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}(f), f\rangle \leq \langle Df, f\rangle
$$

olup buradan $CI \leq S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}} \leq DI$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliği kullanarak

$$\begin{aligned} -DI \leq -S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}} &\leq -CI \\ 0 \leq DI - S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}} &\leq DI - CI \\ 0 \leq I - D^{-1}S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}} &\leq \frac{D-C}{D} I \end{aligned}$$

elde edilir. Bunu kullanarak

$$\begin{aligned} \left\| I - D^{-1}S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}} \right\| &= \sup_{\|f\|=1} \left| \left\langle (I - D^{-1}S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}})f, f \right\rangle \right| \\ &\leq \sup_{\|f\|=1} \left| \left\langle (\frac{D-C}{D} I f, f \right\rangle \right| \\ &= \frac{D-C}{D} \sup_{\|f\|=1} |\langle f, f \rangle| \\ &= \frac{D-C}{D} < 1 \end{aligned}$$

buluruz. Bu son eşitsizliği kullanarak, 2. Bölümdeki Teorem 2.2.7 dan $S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}$ fusion frame operatörünün, H üzerinde tersinin olduğu görülür.

Şimdi ise $S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}$ nin self-adjoint olduğunu gösterelim: Her $f, g \in H$ için

$$\langle S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}(f), g \rangle = \sum_{i \in I} v_i^2 \langle \pi_{W_i}(f), g \rangle = \sum_{i \in I} v_i^2 \langle f, \pi_{W_i}(g) \rangle$$

olup, böylece $S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}$, self-adjointtir. Yeniden inşaa formülü ise

$$f = S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}^{-1} S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}(f) = \sum_{i \in I} v_i^2 S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}^{-1} \pi_{W_i}(f)$$

eşitliğinden elde edilir.

Şimdi vereceğimiz önerme ise bir H Hilbert uzayındaki fusion frame operatörü ile o uzayın altuzaylarındaki frameler için frame operatörü arasındaki ilişkiyi ifade eder: □

Önerme 4.3.2. *[3] $\mathbb{W}_\mathbf{v} = \{(W_i, v_i)\}_{i \in I}$, H için bir fusion frame ve her bir $i \in I$ için $\{f_{ij}\}_{j \in J_i}$, W_i için Parseval frame olsun. Bu durumda $S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}$, fusion frame operatörü $S_{\mathbf{vf}}$ frame operatörüne eşittir ve tüm $g \in H$ için*

$$\sum_{i \in I} v_i^2 S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}^{-1} \pi_{W_i}(g) = \sum_{i \in I, j \in J_i} \langle g, v_i f_{ij} \rangle S_{\mathbf{vf}}^{-1} v_i f_{ij}$$

eşitliği vardır.

Burada $S_{\mathbf{vf}}$, her bir $i \in I$ için $\{v_i f_{ij}\}_{j \in J_i, i \in I}$, framesinin frame operatörüdür.

İspat. Her bir $i \in I$ için $\{f_{ij}\}_{j \in J_i}$, W_i için Parseval frame olduğundan eğer $g \in H$ ise bu durumda

$$\pi_{W_i}(g) = \sum_{j \in J_i} \langle \pi_{W_i}(g), f_{ij} \rangle f_{ij} = \sum_{j \in J_i} \langle g, f_{ij} \rangle f_{ij}$$

olur. π_{W_i}'ler ortogonal projeksiyonlar ve her bir $i \in I$ için $\{f_{ij}\}_{j \in J_i}$ elemanları W_i altuzayının elemanları olduğundan her bir $j \in J_i$ için

$$\langle g, f_{ij} \rangle = \langle \pi_{W_i}(g), f_{ij} \rangle$$

olur. Çünkü $k \neq j$ için

$$\langle \pi_{W_k}(g), f_{ij} \rangle = 0$$

olacaktır. Yani g nin W_i altuzayı dışında kalan altuzaylara düşen projeksiyonlarına $\{f_{ij}\}_{j \in J_i}$ ailesindeki her bir vektör diktir.

Böylece

$$S_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}(g) = \sum_{i \in I} v_i^2 \pi_{W_i}(g) = \sum_{i \in I, j \in J_i} \langle g, v_i f_{ij} \rangle v_i f_{ij} = S_{\mathbf{vf}}(g)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\sum_{i \in I} v_i^2 S_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}^{-1} \pi_{W_i}(g) = \sum_{i \in I} S_{\mathbf{vf}}^{-1} \sum_{j \in J_i} \langle g, v_i f_{ij} \rangle v_i f_{ij} = \sum_{i \in I, j \in J_i} \langle g, v_i f_{ij} \rangle S_{\mathbf{vf}}^{-1} v_i f_{ij}$$

olup, ispat tamamlanır. $\square$

Özel bir altuzay üzerindeki fusion frame operatörü, bu altuzay üzerindeki ortogonal projeksiyonu kolay bir şekilde hesaplamayı sağlar. Şimdi bunu ifade eden bir önermeyle devam edelim:

Önerme 4.3.3. *[3] $\mathbb{W}_{\mathbf{v}} = \{(W_i, v_i)\}_{i \in I}$, H'nın bir V altuzayı için fusion frame olsun. Bu durumda V üzerindeki π_V, ortogonal projeksiyonu, tüm $f \in H$ için*

$$\pi_V(f) = \sum_{i \in I} v_i^2 S_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}^{-1} \pi_{W_i}(f)$$

ile verilir.

İspat. $S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}} : V \to V$ operatörü tüm $f \in V^\perp$ için $\pi_V(f) = 0$ olduğunu söyler. Ayrıca yeniden inşaa formülünü kullanarak tüm $f \in V$ için

$$f = \sum_{i \in I} v_i^2 S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}^{-1} \pi_{W_i}(f)$$

yazarız. Böylece $\pi_V^2 = \pi_V$ dir ki bu da ispatı tamamlar. □

Tanım 4.3.3. *[3] $\{(W_i, v_i)\}_{i \in I}$ ailesi $S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}$ fusion frame operatörü ile fusion frame olsun. Bu durumda $\{(S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}^{-1} W_i, v_i)\}_{i \in I}$ ailesi dual fusion frame olarak adlandırılır.*

4.4 Parseval Fusion Frameler

Parseval frameler, uygulamalar için oldukça kullanışlı olduklarından frame teoride önemli bir rol oynamaktadır. Benzer şekilde Parseval fusion frameler de fusion framelerde önemli bir yere sahiptir. Bu yüzden bu bölümde Parseval fusion frameleri karekterize edeceğiz. İlk olarak tanımı hatırlamakla başlayalım: (4.1.1) eşitsizliğindeki $C = D = 1$ ise yani

$$\|f\|^2 = \sum_{i \in I} v_i^2 \|\pi_{W_i}(f)\|^2$$

ise $\{(W_i, v_i)\}_{i \in I}$ ailesine, H için Parseval fusion frame demiştik. Şimdi ise Teorem 4.3.1 da verilen framenin, Parseval frame olduğu durum için Parseval fusion framelerin karekterizasyonunu veren bir teorem ifade edelim:

Teorem 4.4.1. *[3] Her bir $i \in I$ için $v_i > 0$ ve $\{f_{ij}\}_{j \in J_i}$, H'da bir Parseval frame dizisi olsun. Tüm $i \in I$ için $W_i = \overline{span}_{j \in J_i} \{f_{ij}\}$ olarak tanımlansın ve her W_i altuzayı için $\{e_{ij}\}_{j \in J_i}$ ortonormal bazını seçelim. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) $\{v_i f_{ij}\}_{j \in J_i, i \in I}$*, H için bir Parseval framedir.*

(ii) $\{v_i e_{ij}\}_{j \in J_i, i \in I}$*, H için bir Parseval framedir.*

(iii) $\{(W_i, v_i)\}_{i \in I}$*, H için bir Parseval fusion framedir.*

İspat. Bu sonuç Teorem 4.3.1 den elde edilir. □

Önerme 4.4.1. *[3] $\{W_i\}_{i\in I}$, H'da altuzayların bir ailesi ve $\{v_i\}_{i\in I}$ ağırlıkların bir ailesi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) *$\{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$, H için bir Parseval fusion framedir.*

(ii) *$S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}} = I$ dır.*

İspat. Her bir $i \in I$ için W_i altuzayında $\{e_{ij}\}_{j\in J_i}$ ortonormal bazını alalım. Önerme 4.3.1 den $(i) \Rightarrow (ii)$ sağlanır. Tersini ispatlamak için $S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}} = I$ kabul edelim. Bu durumda tüm $f \in H$ için

$$f = S_{\mathbb{W}_\mathbf{v}}(f) = \sum_{i\in I} v_i^2 \pi_{W_i}(f) = \sum_{i\in I} v_i^2 \sum_{j\in J_i} \langle f, e_{ij}\rangle e_{ij}$$

olur. Buradan ise

$$\|f\|^2 = \left\langle \sum_{i\in I} v_i^2 \sum_{j\in J_i} \langle f, e_{ij}\rangle e_{ij}, f \right\rangle = \sum_{i\in I} v_i^2 \|\pi_{W_i}(f)\|^2$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Şimdi bu eşitliğin gerçekten de doğru olduğunu I sayılabilir indeks kümesinin doğal sayılar olması durumunda nasıl sağlanacağını açarak görelim. Burada bir genellik kaybı olmayacaktır.

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} v_i^2 \sum_{j\in J_i} \langle f, e_{ij}\rangle e_{ij}, f \right\rangle \\
&= \left\langle v_1^2 \sum_{j\in J_1} \langle f, e_{1j}\rangle e_{1j} + v_2^2 \sum_{j\in J_2} \langle f, e_{2j}\rangle e_{2j} + ..., f \right\rangle \\
&= v_1^2 \left\langle \sum_{j\in J_1} \langle f, e_{1j}\rangle e_{1j}, f \right\rangle + v_2^2 \left\langle \sum_{j\in J_2} \langle f, e_{2j}\rangle e_{2j}, f \right\rangle + ... \\
&= v_1^2 \sum_{j\in J_1} \langle f, e_{1j}\rangle \overline{\langle f, e_{1j}\rangle} + v_2^2 \sum_{j\in J_2} \langle f, e_{2j}\rangle \overline{\langle f, e_{2j}\rangle} + ... \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} v_i^2 \sum_{j\in J_i} |\langle f, e_{ij}\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} v_i^2 \|\pi_{W_i}(f)\|^2
\end{aligned}$$

□

Ortonormal fusion bazları ile parseval fusion frameler arasındaki bağıntıyı veren bir önermeyle devam edelim.

Önerme 4.4.2. *[3] $\{W_i\}_{i\in I}$, H'da altuzayların bir ailesi ve $\{v_i\}_{i\in I}$ ağırlıkların bir ailesi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) *$\{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$, H için ortonormal fusion bazıdır.*

(ii) *$\{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$, H için $1-$uniform Parseval fusion framedir.*

İspat. Her bir $i \in I$ için W_i altuzayının $\{e_{ij}\}_{j\in J_i}$ ortonormal bazını alalım. Eğer (i) sağlanırsa, bu durumda $\{e_{ij}\}_{j\in J_i, i\in I}$, H için bir ortonormal bazdır. Buradan tüm $f \in H$ için,

$$\|f\|^2 = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i} |\langle e_{ij}, f\rangle|^2 = \sum_{i\in I} \|\pi_{W_i}(f)\|^2$$

olur ve (ii) sağlanır.

Diğer yandan (ii) nin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda tüm $f \in H$ için

$$\|f\|^2 = \sum_{i\in I} \|\pi_{W_i}(f)\|^2 = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i} |\langle e_{ij}, f\rangle|^2$$

yazarız. Böylece ve tüm $i \in I$, $j \in J_i$ için $\|e_{ij}\| = 1$ olduğu görülür ki bu da $\{e_{ij}\}_{j\in J_i, i\in I}$ nin H için bir ortonormal baz olduğunu gösterir. Bu ise $H = \oplus_{i\in I} W_i$ olduğunu söyler. Dolayısı ile (i) gösterilmiş olur. □

Şimdi ise daha geniş uzaylardan projeksiyonlar yardımıyla bir Parseval fusion framenin nasıl inşaa edebileceğimizi veren bir teorem ifade edelim. Fakat bunun öncesinde bu teoremde geçecek olan v_i-izometrinin tanımını yapalım:

Tanım 4.4.1. *X, Y normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ sınırlı lineer bir operatör ve tüm $i \in I$ için $v_i > 0$ olsun. Eğer her $x \in X$ için*

$$\|Tx\| = v_i \|x\|$$

oluyorsa T ye bir v_i-izometridir denir.

Teorem 4.4.2. *[16] Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) *$\{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$, H için bir Parseval fusion framedir.*

(ii) *H nın bir $\{\tilde{W}_i\}_{i\in I}$ kapalı altuzayları ailesi için $K = \left(\sum_{i\in I} \oplus \tilde{W}_i\right)$ şeklinde inşaa edilen daha geniş bir K Hilbert uzayı ve $P : K \longrightarrow H$ projeksiyonu mevcuttur öyleki her bir $i \in I$ için $P|_{\tilde{W}_i}$, $\tilde{W}_i$ dan W_i üzerine bir v_i-izometridir.*

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: $T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}$, $\{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$ nın analiz operatörünü göstersin. $\{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$ bir Parseval fusion frame olduğundan her $f, g \in H$ için

$$\langle T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}(f), T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}(g)\rangle = \left\langle T^*_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}} T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}(f), g\right\rangle = \langle f, g\rangle$$

olur. Bu yüzden H Hilbert uzayını, $T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}(H)$ uzayı ile özdeşleştirebiliriz. Tüm $i \in I$ için $\tilde{W}_i = W_i$ olsun. $P = T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}} T^*_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}$ alalım. Öncelikle P-nin projeksiyon olduğunu gösterelim:

$\{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$ bir Parseval fusion frame olduğundan,

$$P^2 = T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}} T^*_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}} T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}} T^*_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}} = T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}} T^*_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}} = P$$

olup, P bir projeksiyondur. Ayrıca herbir $f \in T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}(H)$ olduğundan, P, $T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}(H)$ üzerinedir. Bu yüzden bazı $g \in H$ için $f = T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}(g)$ olduğundan

$$Pf = T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}} T^*_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}} f = T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}} T^*_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}} T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}(g) = T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}(g) = f$$

olur. Şimdi bir $j \in I$ seçelim ve $f \in W_j$ alalım. Bu durumda $T^*_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}} f = v_j f$ dir ve bu yüzden

$$Pf = T_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}} T^*_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}} f = \{v_i \pi_{W_i}(v_j f)\}_{i\in I} = \{v_i v_j \pi_{W_i}(f)\}_{i\in I}$$

dir. $\{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$ nin bir Parseval fusion frame olduğunu tekrar kullanarak

$$\begin{aligned}
\|Pf\|^2 &= \langle Pf, Pf\rangle \\
&= \left\langle \{v_i v_j \pi_{W_i}(f)\}_{i\in I}, \{v_i v_j \pi_{W_i}(f)\}_{i\in I} \right\rangle \\
&= \sum_{i\in I} \|v_i v_j \pi_{W_i}(f)\|^2 \\
&= v_j^2 \sum_{i\in I} v_i^2 \|\pi_{W_i}(f)\|^2 \\
&= v_j^2 \|f\|^2
\end{aligned}$$

elde ederiz.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $\{e_{ij}\}_{j\in J_i}$, herbir $i \in I$ için $\tilde{W}_i$ altuzayının bir ortonormal baz olsun. $P|_{\tilde{W}_i}$ bir v_i-izometri olduğundan, $\{v_i^{-1} P e_{ij}\}_{j\in J_i}$ dizisi,

$$W_i = P(\tilde{W}_i) = span_{j\in J_i}\{Pe_{ij}\}$$

altuzayı için bir ortonormal baz olup, bir Parseval framedir. Gerçekten de bu ailenin Parseval frame olduğunu gösterelim: $\{e_{ij}\}_{j\in J_i}$, herbir $i \in I$ için $\tilde{W}_i$ altuzayının bir ortonormal bazı olduğundan tüm $f \in \tilde{W}_i$

$$f = \sum_{j\in J_i} \langle f, e_{ij}\rangle \, e_{ij}$$

şeklinde bir temsili vardır. Buradan

$$Pf = \sum_{j\in J_i} \langle f, e_{ij}\rangle \, Pe_{ij}$$

elde edilir. Ayrıca $P|_{\tilde{W}_i}$, bir v_i-izometri olduğundan

$$\langle f, e_{ij}\rangle = \left\langle \frac{1}{v_i}Pf, \frac{1}{v_i}Pe_{ij} \right\rangle$$

eşitliği vardır. Bu eşitlikler birlikte göz önünde bulundurulursa

$$Pf = \sum_{j\in J_i} \left\langle Pf, \frac{1}{v_i}Pe_{ij} \right\rangle \frac{1}{v_i}Pe_{ij}$$

olur ki bu ise $\{v_i^{-1}Pe_{ij}\}_{j\in J_i}$ ailesinin, W_i için bir ortonormal baz olduğunu ispatlar. Ortonormal bazlar, Parseval frameler olduklarından $\{v_i^{-1}Pe_{ij}\}_{j\in J_i}$ dizisi, W_i için bir Parseval framedir.

Ayrıca

$$\{v_i^{-1}(v_i Pe_{ij})\}_{j\in J_i} = \{Pe_{ij}\}_{j\in J_i}$$

ailesinin bir Parseval frame olduğunu biliyoruz. Çünkü bir ortonormal bazın bir projeksiyonudur. Bunlarla birlikte Teorem 4.4.1 de beraber düşünürsek $\{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$ ailesinin H için bir Parseval fusion frame olduğu görülür. □

Bu sonuç çok genel olduğundan, H'nın sadece kapalı iki altuzayı üzerinde Parseval fusion frameleri karakterize eden şu lemmayı verelim:

Lemma 4.4.1. *[16] W_1, W_2, H nın boştan farklı kapalı iki alt uzayı ve $v_1, v_2 > 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) $\{(W_1, v_1), (W_2, v_2)\}$ *H için bir Parseval fusion framedir.*

(ii) *Ya $W_1 \perp W_2$ ve $v_1 = v_2 = 1$ ya da $W_1 = W_2 = H$ ve $v_1^2 + v_2^2 = 1$ dir.*

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: İlk olarak $W_2 \neq H$ kabul edelim. $g \perp W_2$ seçelim. Bu durumda (i) den

$$\begin{aligned} \|g\|^2 &= v_1^2 \|\pi_{W_1}(g)\|^2 + v_2^2 \|\pi_{W_2}(g)\|^2 \\ &= v_1^2 \|\pi_{W_1}(g)\|^2 \leq v_1^2 \|g\|^2, \end{aligned}$$

olup, bu yüzden $v_1^2 \geq 1$ dir. Fakat tüm $f \in W_1$

$$\|f\|^2 = v_1^2 \|f\|^2 + v_2^2 \|\pi_{W_2}(f)\|^2 \geq v_1^2 \|f\|^2$$

yazabiliriz. Bu ise $v_1^2 \leq 1$ olduğunu söyler ve böylece $v_1 = 1$ elde edilir. Tüm $f \in W_1$ için

$$\|f\|^2 = \|f\|^2 + v_2^2 \|\pi_{W_2}(f)\|^2$$

olduğundan $W_2 \perp W_1$ olduğunu görülür. Benzer şekilde $v_2 = 1$ elde edilir. $W_2 = H$ ve $W_1 \neq H$ olduğunu kabul edelim. $g \perp W_1$ seçelim. Bu durumda

$$\|g\|^2 = v_1^2 \|\pi_{W_1}(g)\|^2 + v_2^2 \|\pi_{W_2}(g)\|^2 = v_2^2 \|g\|^2$$

olup, bu yüzden $v_2^2 = 1$ dir. Şimdi $g \in W_1$ için,

$$\|g\|^2 = v_1^2 \|\pi_{W_1}(g)\|^2 + v_2^2 \|\pi_{W_2}(g)\|^2 = (v_1^2 + 1) \|g\|^2$$

elde ederiz. Buradan $v_1 = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $W_1 = H$ dır. Şimdi $v_1^2 + v_2^2 = 1$ olduğunu göstereceğiz. Tüm $f \in H$ için

$$\|f\|^2 = v_1^2 \|f\|^2 + v_2^2 \|\pi_{W_2}(f)\|^2 = \left(v_1^2 + v_2^2\right) \|f\|^2$$

olup, buradan ise $v_1^2 + v_2^2 = 1$ olduğu görülür.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Aşikardır. □

Önerme 4.4.3. *[16] W_1, W_2, H nın boştan farklı iki alt uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) $\{(W_1, v_1), (W_2, v_2)\}$, *$H$ için bir Parseval fusion framedir.*

(ii) *$\tilde{W}_1, \tilde{W}_2$ kapalı altuzaylar olmak üzere, $v_1, v_2 > 0$ sayıları ve $P : \tilde{W}_1 \oplus \tilde{W}_2 \longrightarrow H$ projeksiyonu var öyleki $i = 1, 2$ için $P|_{\tilde{W}_i}$, W_i üzerine bir v_i-izometridir.*

(iii) *Ya $W_1 \perp W_2$ ve $v_1 = v_2 = 1$ ya da $W_1 = W_2 = H$ ve $v_1^2 + v_2^2 = 1$ dir.*

İspat. İspat son teorem ve son lemmadan açıktır. □

5. FUSION FRAMELERİN GÜNCEL BİR UYGULAMASI

Fusion framelerin bir çok modellemede yaygın bir biçimde kullanıldığını söylemiştik. Kablosuz sensör ağı modellemesi buna bir örnektir. Fusion frameleri genel hatlarıyla tanıttıktan sonra, şimdi bir kablosuz ağının fusion framelerle nasıl modellendiğini açıklayalım. Bu açıklamalara başlamadan önce kablosuz sensör ağlarının ne demek olduğu ve kullanım alanları hakkında kısa bir bilgi verelim:

5.1 Kablosuz Sensör Ağları

Kablosuz sensör ağları, son zamanlarda oldukça gündemde olan ve birçok alanda uygulanabilen yeni bir teknolojidir. Kablosuz sensör ağları kullanılarak, ortamla etkileşimli olarak bilgi toplanabilir. Toplanan bu bilgi kollektif bir şekilde değerlendirilebilir ve gerektiğinde bilgiye dayalı olarak ortam üzerinde değişiklikler yapılabilir. Farklı mekanlardaki sıcaklık, nem, ışık, ses, basınç, kirlilik, toprak bileşimi, gürültü seviyesi, titreşim, nesne hareketleri ve bunun gibi fiziksel ya da çevresel koşulları ortak bir şekilde izlemek için sensör kullanan ve birbirinden bağımsız çalışan araçlar içeren kablosuz ağlara "Kablosuz Sensör Ağı" denir. Tipik bir Kablosuz Sensör Ağı, kablosuz bir ortam aracılığı ile birbirine bağlanmış ve birbirleriyle bilgi alışverişi yapan yüzlerce hatta binlerce sensör düğümünden oluşur.

Kablosuz sensör ağlarının günümüzde çok çeşitli uygulaması vardır. Örneğin; düşman hareketlerini belirlemek, bulmak ve izlemek için, bitki, hayvan izleme ve çevresel gözlem için, hava durumu tahmin etme sistemlerinde, uzak yerlerin konumlarının çözümlenmesinde, geniş bir metropol alanındaki taksilere sensörler yerleştirilerek trafiğin gözlenmesi ve bu gözlemlere dayanarak rotaların planlanmasında ve bunun gibi birçok alanda kablosuz sensör ağları yaygın bir biçimde kullanılmaktadır.

Kablosuz sensör ağları, insan bakımına gereksinim duymayan sensör düğümleri içerir. Bu her sensör düğümü, kablosuz iletişim yeteneğine ve sinyal işleme ile veri yaymaya yetecek zekaya sahiptir. Düğüm bazında bakıldığında, tek bir düğümün kapsamı küçük olsa da, ortama yoğun olarak dağıtılmış düğümler, eş zamanlı ve iş birliği prensibiyle çalışabilir ve böylece tüm ağın kapsamı genişletilebilir. Ayrıca sensör ağları, kurulumlarının kolay olması, maliyetletlerinin düşük olması, alınan bilgiyi doğru ve güvenilir bir biçimde işlemesi sebebiyle tercih edilen sistemlerdir.

Bu kadar avantajını saydığımız sensörlerin elbetteki kullanımlarında zaman zaman bazı kısıtlamalar vardır. Sensörler, kablosuz olduklarından kendilerine verilen görevleri yerine getirmek için gerekli olan enerjiyi üzerlerine entegre olan bataryalarından sağlarlar. Sensör uzak bir yerdeki bilgiyi almaya çalışırken iletişim mesafesinin uzak olmasından dolayı çok enerji harcayacak ve bataryanın ömrü çok uzun süreli olmayacaktır. Sensörlerin bilgileri saklayacağı bir veri depolama kapasitesi vardır. Sensörler, istenilen bilgi dışındaki ortamda var olan farklı bilgileri de alabilir. Bu nedenle veri deposu dolup, sensör işe yaramaz hale gelebilir. Ayrıca sensörlerin bozulmaya yatkın olmaları, çok fazla sayıda kullanılmaları sonucu oluşabilecek tıkanma ve çarpışmalar veya bir ağ içindeki çok sayıda sensörden her an gelen sinyallerin yorumlanmasıyla ilgili zorluklar da kablosuz sensör ağlarının benimsenmesinin önündeki engeller olarak algılanmaktadır. Bunlar gibi iletişim kısıtlamaları her bir sensörün algıladığı ham bilgiyi işlemek için merkeze iletmesini engeller. Bu engelleri ortadan kaldırmak için çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Sensörler, salkımlar şeklinde altgruplara ayrılır, her bir grup içerisinde bilgi yeniden işlenir. Altgruplar içinde bilgilerin işlenmesi frameler yardımıyla olacaktır. Her bir altgrup içinde işlenen bilgi, daha sonra toplu işlem için daha merkezi bir yere iletilir. Ancak frameler, toplu işlem için yeterli gelmemektedir. Bunun için yerel sensör sistemleri yerine bunlardan daha güvenilir olan "ağırlıklı (weighted)" yapıya sahip mekanizmalar kullanılır. İşte bu noktada devreye fusion frameler girer. Fusion frameler bu yapılarından dolayı kablosuz sensör ağı modellemesinde yaygın bir şekilde kullanılır.

5.2 Fusion Frameler ile Sensör Ağı Modellenmesi

Bu modelleme boyunca sinyal kavramından bahsedilecektir. Sinyal, bilgi içeren fiziksel niceliklerdir. Şimdi ise matematiksel olarak sinyalin neye karşılık geldiğini ifade edelim. Bu kısımda [18] numaralı kaynaktan yararlanılmıştır.

X bir Banach uzayı veya Hilbert uzayı ve $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi olmak üzere, f sinyali, $f : X \to \mathbb{C}$ şeklinde kompleks değerli bir fonksiyoneldir. Burada, X uzayının farklı seçimleriyle sinyaller özel isimlerle adlandırılır. Örneğin;

- $X = \mathbb{R}$ ise, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu sürekli-zaman sinyali,
- $X = \mathbb{Z}$ veya $X = \mathbb{N}$ ise f, ayrık zamanlı sinyal,
- $X = [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$ f ye sınırlı zaman sinyali,
- $f(t) = f(t + kt)$, $T \in \mathbb{R}^+$ ve $k \in \mathbb{Z}$ ise f ye T-periyodik sinyaller,
- $f \in L_2(\mathbb{R})$ veya $f \in l_2(\mathbb{Z})$ ise, sonlu enerjili sinyaller,
- $f \in L_\infty(\mathbb{R})$ veya $f \in l_\infty(\mathbb{Z})$ ise sınırlı sinyal,
- $f \in L_1(\mathbb{R})$ ise integrallenebilir sinyal,
- $f \in l_1(\mathbb{Z})$ ise toplanabilir sinyal

  denir.

Bir sensör ağını modellemek için, ağdaki her bir sensöre $\mathbb{R}^M$'de f_{ij} ($j \in J_i$, $i \in I$) vektörü karşılık getiririz ki bu vektöre karşılık gelen sensör, çevreyi ne derece algıladığının miktarını belirler. Bir f sinyalinin algılama ölçüsü $\langle f, f_{ij} \rangle$ iç çarpımı ile verilir. Eğer bu ölçülerin tümü tek bir merkezde mevcutsa, f çevresel sinyalinin yeniden inşaası (reconstruction), klasik frame teorisinin doğrudan bir uygulaması olacaktır. Bunu daha iyi anlamak için bir f sinyalinin, klasik frame teorisine göre, sonlu boyutlu bir uzayda nasıl yeniden inşaa edildiğini açıklayalım. Bu kısımda [8] numaralı kaynaktan yararlanılmıştır.

Bir $\mathcal{A}$ yayıcısından, bir $\mathcal{R}$ alıcısına, bir H uzayına ait f sinyalini taşımak istediğimizi kabul edelim. Eğer hem $\mathcal{A}$ hem de $\mathcal{R}$, H için bir $\{f_k\}_{k=1}^m$ ailesinin, frame olduğu bilgisine sahipse bu işlem yapılabilir. Şöyleki $\mathcal{A}$ yayıcısı $\{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^m$ kompleks sayılarını tanır ve $\mathcal{R}$ alıcısına gönderir. $\mathcal{R}$ alıcısı da $\{f_k\}_{k=1}^m$ frame elemanları yardımıyla

$$f = \sum_{k=1}^{m} \langle f, f_k \rangle S^{-1} f_k$$

frame temsilini kullanarak f sinyalini yeniden inşaa eder. Fakat bu gönderme işlemi sırasında ortamdan başka sinyaller (parazit) de f ye eklenebilir. Şimdi $\mathcal{R}$ alıcısının, parazitli bir sinyal, yani $\{\langle f, f_k\rangle + c_k\}_{k=1}^m$ şeklinde $\{c_k\}_{k=1}^m$ paraziti katılmış bir sinyal aldığını kabul edelim. Alınan katsayılara dayanarak, $\mathcal{R}$ alıcısı, taşınan sinyalin,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}(\langle f, f_k\rangle + c_k)S^{-1}f_k &= \sum_{k=1}^{m}\langle f, f_k\rangle S^{-1}f_k + S^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m}c_kf_k\right)\\ &= f + S^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m}c_kf_k\right)\end{aligned}$$

olduğunu söyleyecektir. Bu ise yukarıdaki toplamda, $S^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m}c_kf_k\right)$ ifadesinin varlığı sebebiyle, doğru f olan sinyalinden tabiki farklıdır. Şimdi amaç ise bu parazitli sinyali ortadan yok edip, istenilen doğru sinyali elde etmektir.

Eğer $\{f_k\}_{k=1}^m$ overcomplete yani baz olmayan bir frame ise;

$$T\{c_k\}_{k=1}^m = \sum_{k=1}^{m}c_kf_k$$

pre-frame operatörü aşikar olmayan bir çekirdeğe sahiptir. Bu ise şu demektir; parazitli sinyal katkılarının parçaları sıfıra toplanır ve iptal edilir. Ancak bu durum $\{f_k\}_{k=1}^m$, H için bir ortonormal baz ise asla sağlanmaz. Çünkü bazların lineer bağımsız olmasından ötürü T operatörü sadece $\{0, 0, 0..., 0\}$ $m-$lisini sıfıra götürecektir. Ancak overcomplete framelerin lineer bağımsızlık özelliğinin olmayışından dolayı, tüm $\{c_k\}_{k=1}^m$ ların hepsi sıfır olmasa bile, $T\{c_k\}_{k=1}^m = 0$ olabilir ve böylece parazitli sinyal sıfıra toplanıp, iptal edilebilir. Böylece sinyal bu şekilde frameler yardımıyla yeniden inşaa edilmiş olur.

Kablosuz sensör ağları hakkında bilgi verirken, sensör düğümlerinin bazı iletişim kısıtlamaları olduğundan bahsetmiştik. Bu kısıtlamalar yüzünden, sensörleri, salkım şeklinde altgruplara ayırdığımızı söylemiştik. Şimdi bu söylediklerimizi matematiksel olarak neye karşılık geldiğini ifade edelim:

Tüm sensörler, her bir J_i, $i \in I$ indis grubu için $\{f_{ij}\}_{j\in J_i}$ sensörlerinin oluşturduğu salkımlar halinde gruplandırılır. Yani aslında her bir salkım, $i \in I$ için $\{f_{ij}\}_{j\in J_i}$ vektörlerinin gerdiği, H'nın kapalı W_i altuzaylarıdır. Her bir $i \in I$ indis grubu için $\{f_{ij}\}_{j\in J_i}$ vektörleri, kendi kapalı lineer gereni (yani W_i) için bir frame teşkil ettiğinden, her bir $i \in I$ indis grubu için W_i içerisindeki sinyalin kısmi yeniden inşaası, yukarıda anlatılan şekliyle yapılır. Bu kısmi yeniden inşaalar yapılırken sinyal, her bir $i \in I$ indis grubu için W_i altuzayları üzerine ortogonal projeksiyonlar yardımıyla iletilir. Yani daha net olarak, altuzaylar üzerine sinyalin projeksiyonlarının (izdüşüm) kısmi yeniden inşaa formülü;

$$\sum_{j \in J_i} \langle f, f_{ij} \rangle S_i^{-1} f_{ij} = \pi_{W_i}(f) \tag{5.2.1}$$

şeklindedir. Buradaki S_i operatörü $\{f_{ij}\}_{j \in J_i}$, $i \in I$, olmak üzere W_i altuzayı için frame operatörüdür. Her bir salkımda yani $i \in I$ olmak üzere W_i kapalı altuzaylarında elde edilen kısmi yeniden inşaalar, W_i içerisindeki bir toplama noktasına (collection point) iletilir. Buradaki toplama noktası, W_i içindeki sabit bir sensör düğümü olarak ya da W_i içindeki sensörlere sırayla gelecek şekilde tayin edilen herhangi bir nokta olabilir. Her bir altuzay üzerindeki toplama noktalarında bulunan sinyallerin (5.2.1) formülüne göre yapılan kısmi yeniden inşaası, tüm sensör ağı için merkezi istasyon (central location) denilen ana toplama noktasına gönderir. Bu merkezi istasyon, her bir altuzay üzerindeki toplama noktasından aldığı işlenmiş bilgilerden, f sinyalini yeniden inşaa etmekle görevlidir. İşte bu noktada fusion frameler devreye girer ve fusion framelerde anlatılan

$$f = \sum_{i \in I} v_i^2 S_{\mathbb{W}_{\mathbf{v}}}^{-1} \pi_{W_i}(f)$$

yeniden inşaa formülü ile merkezi istasyonda sinyalin son yeniden inşaası yapılmış olur. Böylece $\{(W_i, v_i)\}_{i \in I}$ fusion framelerin görevi son bulmuş olur.

6. KAYNAKLAR

[1] R. Duffin, A. Schaeffer, *A class of nonharmonic Fourier series.* Trans. Amer. Math. Soc. 72, 341–366 (1952).

[2] I. Daubechies, A. Grossmann, Y. Meyer, *Painless nonorthogonal expansions.* J. Math. Phys. 27 (1986), 1271-1283.

[3] P.G. Casazza, G. Kutyniok, *Frames of subspaces*, in: Wavelets, Frames and Operator Theory (CollegePark, MD, 2003), Contemp. Math. 345, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, 87-113.

[4] M. Fornasier, *Decompositions of Hilbert spaces: local construction of global frames*, Proc. Int. Conf. on Constructive function theory, Varna (2002) B. Bojanov Ed., DARBA, Sofia (2003), 275–281.

[5] M. Fornasier, *Quasi-orthogonal decompositions of structured frames*, preprint, 2003.

[6] I.J. Maddox, *Elements of Functional Analysis,* Cambridge Univercity Press, Cambridge, 1978.

[7] E. Kreyszing, *Introductory Functional Analysis with Applications,* John Wiley-Sons, New York, (1978)

[8] O. Christensen, *Frames and Bases An Introductory Course* Birkhäuser, Boston, (2008).

[9] C. Heil, *A basis theory primer*, School of Mathematics Georgia Enstitute of Technology, Atlanta, Georgia, 1997.

[10] O. Christensen, *Functions, Spaces, and Expansions*, Mathematical Tools in Physics and Engineering.

[11] P.G. Casazza, J. Kovacevic, *Equal-norm tight frames with erasures*, Adv. Comput. Math. 18 (2003), 387-430.

[12] P.G. Casazza, G. Kutyniok, S. Li, *Fusion Frames and Distributed Processing*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 25 (2008), no., 114-132.

[13] M.S. Asgari, *On The Stability of Fusion Frames (Frames of Subspaces),* Acta Mathematica Scientia 2011, 31B(4):1633-1642.

[14] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[15] UW. Madison, *An introduction to Banach space theory,* Springer-Verlag, New York, 2003.

[16] P.G. Casazza, G. Kutyniok, S. Li, C.J. Rozell, *Modeling Sensor Networks with Fusion Frames,* Wavelets XII. Edited by Van De Ville, Dimitri; Goyal, Vivek K.; Papadakis, Manos. Proceedings of the SPIE, Volume 6701, pp. 67011M (2007).

[17] P.G. Casazza, *The art of frame theory*, Taiwanese Journal of Math.,vol 4 (2) (2000) 129-202.

[18] O. Christensen, K. Gröchenig, D. Labate, P. Vandergheynst, G. Weiss, Y. Wiaux, *Four Short Courses on Harmonic Analysis (Wavelets, Frames, Time-Frequency Methods, and Applications to Signal and Image Analysis)*, Birkhäuser, Basel, Berlin, Boston, (2009).

[19] M.S. Asgari, A. Khosravi, *Frames and bases of subspaces in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl., 308 (2005), 541-553.

[20] R. Calderbank, P.G. Casazza, A. Heinecke, G. Kutyniok, A. Pezeshki, *Fusion Frames: Existence and Construction,* arXiv:0906.5606v1 [math.FA], (2009).

[21] H. Heuser, *Functional Analysis.* John Wiley, New york, 1982.

[22] F.L. Lewis, *Wireless Sensor Networks*, Technologies, Protocols, and Applications ed. D.J. Cook and S.K. Das, John Wiley, New York, 2004.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Malatya'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Malatya'da tamamladı. 2005 yılında İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı ve 2009 yılında mezun oldu. Aynı yıl İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisans öğrenimine başladı.