

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN KİSMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN HAAR
DALGACIKLARI İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Ömer ORUÇ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

MALATYA

Mayıs 2016

Tezin Başlığı : Lineer Olmayan Kısmi Türevli Denklemlerin Haar Dalgacıkları
ile Nümerik Çözümleri

Tezi Hazırlayan : Ömer ORUÇ

Sınav Tarihi : 10.05.2016

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında
Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Alaattin ESEN
İnönü Üniversitesi

Eş Danışman : Yrd. Doç. Fatih BULUT
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Ömer AKIN
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM
Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi

Yrd. Doç. Abdullah Fatih ÖZCAN
İnönü Üniversitesi

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Alaattin ESEN

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Lineer Olmayan Kısmi Türevli Denklemlerin Haar Dalgacıkları Yardımıyla Nümerik Çözümleri" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ömer ORUÇ

ÖZET

Doktora Tezi

LİNEER OLMAYAN KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN HAAR
DALGACIKLARI YARDIMIYLA NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Ömer ORUÇ

İnönü Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

95+xii sayfa

2016

Danışman: Prof. Dr. Alaattin ESEN

İkinci Danışman: Yrd. Doç. Fatih BULUT

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde dalgacıklarla ilgili genel bilgiler verildikten sonra tezde kullanılan Haar dalgacıkları, Haar dalgacıklarıyla fonksiyonlara yaklaşım ve Haar dalgacıklarının integralleri ile ilgili bilgiler verilmiştir. İkinci bölümden altıncı bölüme kadar olan kısımlar tezin özgün kısımlarıdır. Bu bölümlerde ele alınan model problemler Haar dalgacık yöntemiyle çözülmüştür.

İkinci bölümde, düzenli uzun dalga (RLW) denklemi ele alınmıştır. Haar dalgacık yöntemi, tek soliter dalga, iki soliter dalganın etkileşimi ve dalga gelişimi olmak üzere üç model probleme uygulanmıştır. Elde edilen nümerik sonuçlar tam çözümler ve literatürdeki mevcut bazı sonuçlarla karşılaştırılmış hata normları ve korunum sabitleri tablolar halinde verilmiştir. Ayrıca nümerik sonuçların grafikleri çizilmiştir.

Üçüncü bölümde, Korteweg-de Vries (KdV) denklemi ele alınmıştır. Tek soliton dalga problemi ve iki soliton dalganın etkileşimi problemi Haar dalgacık yöntemiyle

nümerik olarak çözülmüştür. Elde edilen nümerik sonuçlar tablolar halinde verilip grafikleri çizilerek tam çözümler ve literatürdeki mevcut bazı sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Dördüncü bölümde, ikili (*coupled*) lineer olmayan Schrödinger-KdV (NLS-KdV) denklemi ele alınmıştır. Haar dalgacık yöntemi ile nümerik çözümler ve korunum sabitleri hesaplanmıştır. Elde edilen nümerik sonuçlar tablolar yardımıyla verilmiştir. Sonuçların grafikleri çizildikten sonra tam çözümler ve literatürdeki mevcut bazı sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Beşinci bölümde, dördüncü merteben parabolik kısmi türevli denklemler ele alınmıştır. Haar dalgacık yöntemiyle değişken ve sabit katsayılı, homogen ve homogen olmayan model problemler nümerik olarak çözülmüştür. Elde edilen nümerik sonuçlar tam çözümler ve literatürdeki mevcut bazı sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Ayrıca nümerik sonuçların grafikleri çizilmiştir.

Altıncı bölümde, kesirli mertebeden türevli Burgers denklemi ve kesirli mertebeden türevli ikili Burgers denklemi ele alınmıştır. Kesirli mertebeden türevler literatürde L1 formülü olarak bilinen bir formülle ayrıştırıldıktan sonra Haar dalgacık yöntemiyle göz önüne alınan model problemler nümerik olarak çözülmüştür. Elde edilen nümerik sonuçlar tablolaştırılıp grafikleri çizildikten sonra tam çözümler ve literatürdeki mevcut bazı sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Bu tezdeki nümerik hesaplamalar GNU Octave özgür yazılımı ve Python programlama dilinde yazılan kodlar yardımıyla yapılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Haar dalgacık yöntemi, Düzenli uzun dalga denklemi, Korteweg-de Vries denklemi, Dördüncü merteben parabolik kısmi türevli denklemler, Kesirli mertebeden türevli Burgers denklemi, Lineer olmayan kısmi türevli denklemler, GNU Octave, Python, Bilimsel hesaplama.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

NUMERICAL SOLUTIONS OF NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL
EQUATIONS WITH THE HELP OF HAAR WAVELETS

Ömer ORUÇ

İnönü University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

95+xii pages

2016

Supervisor: Prof. Dr. Alaattin ESEN

Co-Supervisor: Asst. Prof. Fatih BULUT

This thesis consists of six chapters. In the first chapter after giving some general knowledge about wavelets, Haar wavelets, function approximation by Haar wavelets and Haar integrals that used in the thesis are introduced. The parts in the second to sixth chapters are the original parts of the thesis where considered problems are solved by Haar wavelet method.

In the second chapter, regularized long wave (RLW) equation is considered. Haar wavelet method is applied to three model problems: single soliton wave, interaction of two solitary waves and wave undulation problems. The obtained numerical results are compared with exact solution and with existing results in the literature. The error norms and the invariants are given in tables. Also the numerical results are plotted.

In the third chapter, Korteweg-de Vries (KdV) equation is regarded. Single soliton wave problem and interaction of two soliton waves problem are solved by Haar wavelet

method. The obtained numerical results are given in tables and are plotted. Also they are compared with the analytical solution and with those already exist in the literature.

In the fourth chapter, coupled nonlinear Schrödinger-KdV (NLS-KdV) equation is taken into account. Numerical solutions and invariants are computed with Haar wavelet method. After tabulating and plotting the obtained numerical results they are compared with the exact solution and with available results in the literature.

In the fifth chapter, fourth order parabolic partial differential equations are considered. With the help of Haar wavelet method, variable and constant coefficient, homogeneous and non-homogeneous model problems are solved numerically. The obtained numerical results are compared with the analytical solution and with previous results that exist in the literature. Also numerical results are depicted graphically.

In the sixth chapter, Fractional Burgers' and Fractional Coupled Burgers' equations are taken into account. The fractional derivatives are discretized by a formula which is known as L1 formula in the literature and then the considered model problems are solved numerically by the aid of Haar wavelet method. The results are given in tables and are plotted. After that they are compared with the exact solution and with those already exist in the literature.

The numerical computations in this thesis are done with the codes written in free software GNU Octave and Python programming language.

KEYWORDS: Haar wavelet method, Regularized long wave equation, Korteweg-de Vries equation, Fourth order parabolic partial differential equations, Fractional Burgers' equation, Non-Linear partial differential equations, GNU Octave, Python, Scientific computing.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim süresince danıőmanlıđımı yürüten ve bu tezin hazırlanması sırasında her zaman yakın ilgi ve yardımlarını gördüğüm değerli hocalarım Prof. Dr. Alaattin ESEN ve Yrd. Doç. Dr. Fatih BULUT'a ayrıca doktora süresince bana sürekli yardımcı olan bölüm başkanımız, Prof. Dr. Sadık KELEŐ'e ve diğer bölüm hocalarıma, tez süresince desteğini esirgemeyen değerli arkadaşım Arş. Gör. Dr. Yılmaz ZENGİN'e, yüksek lisans eğitimim süresince yardım ve desteklerini esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Ömer AKIN'a ve her zaman sabır ve sevgi ile bana destek olan çok değerli aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vii
TABLolar DİZİNİ	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR	xii
GİRİŞ	1
1 TEMEL KAVRAMLAR	4
1.1 Dalgacıklar	4
1.2 Haar Dalgacıkları	12
1.3 Haar Dalgacıklarıyla Fonksiyonlara Yaklaşım	13
1.4 Haar Dalgacıklarının İntegralleri	14
1.5 Haar Dalgacıklarının Yakınsaklığı	19
2 RLW DENKLEMİNİN HAAR DALGACIK YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	21
2.1 Zamana Göre Ayrıklaştırma	22
2.2 Konuma Göre Haar Dalgacıklarıyla Ayrıklaştırma	23
2.3 Nümerik Sonuçlar	24
2.3.1 Tek soliter dalga hareketi	25
2.3.2 İki soliter dalganın etkileşimi	28
2.3.3 Dalga gelişimi (Wave undulation)	30
3 KdV DENKLEMİNİN HAAR DALGACIK YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	34
3.1 Zamana Göre Ayrıklaştırma	35

3.2	Konuma Göre Haar Dalgacıklarıyla Ayrıklaştırma	36
3.3	Nümerik Sonuçlar	39
3.3.1	Tek soliton dalga problemi	40
3.3.2	İki soliton dalgasının etkileşimi	42
4	NLS-KdV DENKLEMİNİN HAAR DALGACIK YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	44
4.1	Zamana Göre Ayrıklaştırma	44
4.2	Konuma Göre Haar Dalgacıklarıyla Ayrıklaştırma	46
4.3	Nümerik Sonuçlar	51
5	DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN DEĞİŞKEN KATSAYILI PARABOLİK KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN HAAR DALGACIK YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	58
5.1	Zamana Göre Ayrıklaştırma	59
5.2	Konuma Göre Haar Dalgacıklarıyla Ayrıklaştırma	60
5.3	Nümerik Sonuçlar	61
5.3.1	Problem 1	62
5.3.2	Problem 2	64
5.3.3	Problem 3	66
5.3.4	Problem 4	68
6	KESİRLİ MERTEBEDEN BURGERS VE İKİLİ BURGERS DENKLEMLERİNİN HAAR DALGACIK YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	70
6.1	Kesirli Mertebeden Türevli Burgers Denklemi	71
6.1.1	Zamana göre ayrıklaştırma	72
6.1.2	Konuma göre Haar dalgacıklarıyla ayrıklaştırma	73
6.2	Kesirli Mertebeden Türevli İkili Burgers Denklemi	74
6.2.1	Zamana göre ayrıklaştırma	74
6.2.2	Konuma göre Haar dalgacıklarıyla ayrıklaştırma	75
6.3	Nümerik Sonuçlar	77
	SONUÇ	81
	KAYNAKLAR	82
	ÖZGEÇMİŞ	94

TABLolar DİZİNİ

Tablo 2.1	$c = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ için farklı kollokasyon ve farklı zamanlarda tek soliter dalga probleminin hata normları.	26
Tablo 2.2	$-40 \leq x_* \leq 60$ ve $\Delta t = 0.1$, $c = 0.1$ için tek soliter dalga probleminin korunum sabitleri.	26
Tablo 2.3	Tek soliter dalganın $c = 0.1$, $c = 0.03$ ve $2M = 1024$ için farklı zamanlardaki konum ve genliği.	27
Tablo 2.4	$-40 \leq x \leq 60$, $t = 20$, $\Delta t = 0.1$, $\Delta x = 0.1$ ve $c = 0.1$ için tek soliter dalga probleminin hata normları ve korunum sabitleri.	28
Tablo 2.5	$-40 \leq x \leq 60$, $t = 20$, $\Delta t = 0.1$ ve $c = 0.03$ için tek soliter dalga probleminin hata normları ve korunum sabitleri.	28
Tablo 2.6	$2M = 1024$ için iki soliter dalganın etkileşimi probleminde elde edilen korunum sabitleri.	30
Tablo 2.7	$2M = 1024$ ve $\Delta t = 0.1$ için dalga gelişiminin korunum sabitleri.	32
Tablo 2.8	$2M = 1024$ ve $\Delta t = 0.1$ için öndeki dalganın konum ve büyüklüğü.	32
Tablo 3.1	$\epsilon = -6$, $\mu = 1$ ve $t = 5$ için KdV tek soliter dalga probleminin hata normları ve korunum sabitleri.	40
Tablo 3.2	$\epsilon = -6$, $\mu = 1$ ve $2M = 256$ için artan zamanlarda KdV tek soliter dalga probleminin hata normları ve korunum sabitleri.	41
Tablo 3.3	Tek soliter dalga probleminde $\epsilon = -6$, $c = 1$, $\mu = 1$ ve $t = 0.5$ için bir karşılaştırma.	42
Tablo 3.4	$\epsilon = 1$, $\mu = 4.84e-4$ ve $2M = 512$ için elde edilen korunum sabitleri ve geçen işlemci süreleri.	42
Tablo 4.1	$-50 \leq y \leq 50$, $2M = 1024$, $\Delta t = 0.1$, $\epsilon = 1$ ve $\alpha = 0.45$ parametreleri için farklı zamanlardaki hata normları ve korunum sabitleri.	53
Tablo 4.2	$-50 \leq y \leq 50$, $2M = 1024$, $\Delta t = 0.1$, $\epsilon = 1$ ve $\alpha = 0.45$ parametreleri için Haar dalgacıkları ile Petrov-Galerkin yöntemlerinin sonuçlarının karşılaştırılması.	53
Tablo 4.3	$-50 \leq y \leq 50$, $2M = 1024$, $\alpha = 0.45$, $\epsilon = 1$ ve $\Delta t = 0.0001$ parametreleri için farklı zamanlardaki hata normları ve korunum sabitleri.	56

Tablo 4.4	$-50 \leq y \leq 50$, $2M = 1024$, $\alpha = 0.45$, $\epsilon = 1$ ve $\Delta t = 0.0001$ parametreleri için farklı zamanlardaki hata normlarının Petrov-Galerkin yöntemiyle karşılaştırılması.	56
Tablo 4.5	$-30 \leq y \leq 30$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.1$ 'de hataların karşılaştırılması.	57
Tablo 4.6	$-30 \leq y \leq 30$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.001$ 'de hataların karşılaştırılması.	57
Tablo 5.1	Problem 1 için $t = 0.01$ 'de maksimum mutlak bağıl hatalar ve karşılaştırmaları.	63
Tablo 5.2	Problem 2'nin $0 \leq x \leq 1$ aralığında $k = 0.001$ ve farklı $2M$ değerleri için $t = 1$ 'deki L_∞ hata normları.	64
Tablo 5.3	Problem 1'in $0 \leq x \leq 1$ aralığında $2M = 8$ ve $k = 0.0025$ için $t = 1$ 'deki mutlak hataları.	64
Tablo 5.4	Problem 2 için mutlak hatalar.	65
Tablo 5.5	Problem 2'nin $0 \leq x \leq 1$ aralığında $k = 0.0025$ ve farklı $2M$ değerleri için $t = 1$ 'deki L_∞ hata normları.	66
Tablo 5.6	Problem 2'nin $0 \leq x \leq 1$ aralığında $2M = 8$ ve $k = 0.0025$ için $t = 1$ 'deki mutlak hataları.	66
Tablo 5.7	Farklı parametrelere göre Problem 3 için hatalar.	67
Tablo 5.8	Farklı parametrelere göre Problem 4 için hatalar.	69
Tablo 6.1	Problem 1 için α 'nın farklı değerleri, $\Delta t = 0.00025$ ve $t = 1$ için hataların karşılaştırmaları.	78
Tablo 6.2	Problem 1 için Δt 'nin farklı değerleri ve $\nu = 1$, $\alpha = 0.5$ için $t = 1$ zamanındaki hataların karşılaştırmaları.	78
Tablo 6.3	Problem 2'de farklı ν değerleri, $\Delta t = 0.0005$ ve $\alpha = 0.5$ için $t = 0.1$ zamanındaki hataların karşılaştırmaları.	79
Tablo 6.4	Problem 2'de farklı kollokasyon noktaları ve $\Delta t = 0.00025$, $\nu = 1$, $\alpha = 0.5$ için $t = 1$ zamanındaki hataların karşılaştırmaları. . .	79
Tablo 6.5	$\alpha = 1, \beta = 1$ için $t = 1$ 'deki L_∞ hata normu.	80

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1	Fourier dönüşümü.	4
Şekil 1.2	Farklı iki fonksiyon ve onlara karşılık gelen frekans değerleri. . .	5
Şekil 1.3	Düzgün (<i>smooth</i>) bir fonksiyonun Fourier dönüşümü.	6
Şekil 1.4	Düzgün olmayan (<i>non-smooth</i>) bir fonksiyonun Fourier dönüşümü. .	6
Şekil 1.5	Çeşitli dalgacık aileleri.	7
Şekil 1.6	Haar dalgacık ailesinin ölçek ve ana dalgacık fonksiyonları. . . .	8
Şekil 1.7	Kaydırılmış ve esnetilip-sıkıştırılmış dalgacıklar.	9
Şekil 1.8	Düzgün (<i>smooth</i>) bir fonksiyonun dalgacık dönüşümü.	11
Şekil 1.9	Düzgün olmayan (<i>non-smooth</i>) bir fonksiyonun dalgacık dönüşümü.	11
Şekil 1.10	İlk sekiz Haar dalgacığı.	13
Şekil 1.11	$u(x)$ fonksiyonuna farklı J değerleri için Haar dalgacık yaklaşımları. .	14
Şekil 1.12	Haar matrisi ve integrallerinin matrislerinin yapısı.	18
Şekil 2.1	$2M = 1024$ nokta için tek soliter dalganın hareketi.	27
Şekil 2.2	$2M = 1024$ için iki soliter dalganın etkileşimi.	29
Şekil 2.3	$t = 400$ deki yakınlaştırma.	30
Şekil 2.4	$2M = 1024$ nokta için dalga gelişimi.	33
Şekil 3.1	$\epsilon = -6, \mu = 1, 2M = 256$ için $t = 0$ 'dan $t = 5$ 'e tek soliter dalga hareketi.	41
Şekil 3.2	$\epsilon = 1, \mu = 4.84e - 4, 2M = 512$ için $t = 0, 0.75, 1.5, 3$ 'te iki soliter dalganın etkileşimi.	43
Şekil 4.1	$\epsilon = 8, 2M = 128$ ve $\Delta t = 0.1$ için E 'nin reel kısmı.	54
Şekil 4.2	$\epsilon = 8, 2M = 128$ ve $\Delta t = 0.1$ için E 'nin imajiner kısmı.	54
Şekil 4.3	$ E $ 'nin $\epsilon = 1, 2M = 128$ ve $\Delta t = 0.1$ için nümerik sonuçları. . . .	55
Şekil 4.4	N 'nin $\epsilon = 1, 2M = 128$ ve $\Delta t = 0.1$ için nümerik sonuçları. . . .	55
Şekil 5.1	Problem 1 için $t = 1$ 'de $2M = 8, k = 0.0025$ için tam çözüm ve nümerik çözüm.	63
Şekil 5.2	Problem 2 için $t = 0.08$ 'de $2M = 16, k = 0.005$ için tam çözüm ve nümerik çözüm.	65

Şekil 5.3	$2M = 64$ ve $k = 0.05$ için $t = 0$ ile $t = 4$ arasında problem 3'ün nümerik çözümü.	68
Şekil 5.4	Problem 4'ün $2M = 64$ ve $k = 0.01$ için $t = 0$ ile $t = 1$ arasında nümerik çözümün değişimi.	69
Şekil 6.1	$\alpha = \beta = 1$ ve $2M = 128$ için $t = 0.05$ zamanındaki tam çözümler.	80
Şekil 6.2	$\alpha = 1/2, \beta = 1/4$ ve $2M = 128$ için $t = 0.05$ zamanındaki nümerik çözümler.	80

SİMGELER VE KISALTMALAR

$h_i(x)$:	Haar dalgacıları matrisi
$p_{i,1}(x)$:	Haar dalgacılarının birinci integralinin matrisi
$p_{i,2}(x)$:	Haar dalgacılarının ikinci integralinin matrisi
$p_{i,3}(x)$:	Haar dalgacılarının üçüncü integralinin matrisi
$p_{i,4}(x)$:	Haar dalgacılarının dördüncü integralinin matrisi
RLW	:	Düzenli uzun dalga
KdV	:	Kortevog-de Vries
NLS-KdV	:	Lineer olmayan Schrödinger-KdV

GİRİŞ

Dalgacıkların kökeni yaklaşık bir asır önceye uzanır. İlk dalgacıklar 1910 yılında Macar asıllı matematikçi Alfred Haar [1] tarafından ortaya atılmıştır. Dalgacıkların detaylı matematiksel teorisi ise 1980-1990 yılları arasında Daubechies [2], Mallat [3] ve Meyer [4] gibi araştırmacılar tarafından oluşturulmuştur. Dalgacıklar; sinyal ve görüntü işleme, ses tanıma, veri sıkıştırma vb. alanlarda sıklıkla kullanılır [5, 6]. Literatürde Daubechies, Coiflet, Symlet, Morlet, Mexican Hat gibi farklı bir çok dalgacık aileleri bulunmaktadır. Bunlardan Daubechies dalgacık ailesi farklı problemlerin çözümünde sıklıkla kullanılmaktadır [7, 8, 9]. Ancak Daubechies dalgacık ailesini analitik olarak yazmak mümkün değildir. Dolayısıyla bu dalgacıkların türevlerini ve integrallerini de analitik olarak ifade etmek imkansızdır [10]. Bu dezavantajdan dolayı Daubechies ailesini diferensiyel denklemleri çözmek için kullanmak her zaman kolay bir iş olmayabilir. Özellikle lineer olmayan denklemleri çözmek daha da karmaşık bir hal alır. Aynı dezavantaj Symlet ve Coiflet dalgacık aileleri için de geçerlidir [10]. Daubechies dalgacık ailesinin özel bir hali olan Haar dalgacıklarında ise yukarıda bahsedilen dezavantajlar yoktur. Haar dalgacık ailesi parçalı sabit fonksiyonlardan oluşur. Bu aileyi analitik olarak ifade etmek mümkündür. Fakat Haar dalgacık ailesi süreksiz fonksiyonlardan oluşur. Dolayısıyla bu fonksiyonların süreksiz olduğu noktalarda türevleri mevcut değildir. Bu durum Haar dalgacıklarını diferensiyel denklemlerin çözümünde doğrudan kullanmaya imkan vermez [11]. Bu olumsuz durumu ortadan kaldırmak için diferensiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmede Haar dalgacıklarının türevlerini kullanmak yerine integrallerini kullanan bir yaklaşım ilk kez Chen ve Hsiao [11] tarafından ortaya atılmıştır. Chen ve Hsiao'nun yaklaşımındaki ana fikir, diferensiyel denklemde görülen en yüksek mertebeden türevli bilinmeyen fonksiyonu Haar dalgacıkları serisine açıp ardışık integral alma yöntemiyle bilinmeyen fonksiyonun kendisine ulaşmaktır. Bu yaklaşımla Haar dalgacıklarını kullanmanın diğer yöntemlerle kıyaslandığında daha kolay programlanabilir olması, hesaplamada düşük maliyetli olması ve yüksek doğrulukta sonuçlar vermesi daha fazla tercih edilmesine sebep olmuştur. Dolayısıyla son yıllarda Haar dalgacıklarına dayalı bir çok çalışma yapılmıştır. Bunların bazılarını aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.

Chen ve Hsiao [11, 12] toplu ve dağınık parametre sistemlerini ve optimal kontrol problemini çözmeye Haar dalgacıklarını kullanmışlardır. Hsiao ve Wang [13, 14, 15],

singüler ve lineer olmayan sistemler ve lineer olmayan katı (*stiff*) sistemleri çözmek için Haar dalgacıklarını kullanmışlardır. Hsiao [16], Haar dalgacık yaklaşımının ayrıca varyasyonel problemleri çözmek için de etkili olduğunu göstermiştir. Lepik [17, 18, 19], Burgers, ısı ve Poisson gibi kısmi türevli denklemleri Haar dalgacıkları yardımıyla çözmüştür. Çelik [20, 21], Burgers-Huxley ve magnetohydrodynamic akış denklemlerinin Haar dalgacıklarıyla nümerik çözümlerini vermiştir. Jiwarı [22, 23], Burgers denkleminin çözümlerini bazı lineerleştirme teknikleri ve Haar dalgacıkları yardımıyla elde etmiştir. Oruç vd. [24] modified Burgers denklemini sonlu fark ve Haar dalgacıklarına dayalı bir yöntemle çözmüştür. Eliptik sınır değer problemleri ve parabolik kısmi türevli denklemler [25] ve [26]'da Haar dalgacıklarına dayalı yöntemlerle ele alınmıştır. Hariharan ve Kannan [27]'de parabolik denklemlerin nümerik sonuçlarını Haar dalgacıklarıyla bulmuştur. [28, 29] çalışmalarında ikili Burgers denklemleri Haar dalgacıklarıyla çözülmüştür. Kaur vd. [30], astrofizikte ortaya çıkan Lane-Emden denklemlerinin nümerik sonuçlarını Haar dalgacıklarıyla elde etmiştir. İkinci mertebeden hiperbolik telegraf tipindeki denklemler Pandit vd. [31] tarafından Haar dalgacıklarıyla çözülmüştür. İki ve üç boyutlu Poisson ve Biharmonik denklemlerinin nümerik çözümleri Zhi Shi vd. [32] tarafından Haar dalgacıkları yardımıyla bulunmuştur. Siraj-ul-Islam vd. [33] lokal olmayan sınır koşullu iki boyutlu eliptik kısmi türevli denklemlerin çözümlerini Haar dalgacıklarıyla elde etmiştir. Patra ve Ray [34] durağan nötron taşıma denklemini (*Stationary Neutron Transport Equation*) Haar dalgacıklarıyla çözmüştür.

Ayrıca Haar dalgacıkları integro diferensiyel ve integral denklemlerinin çözümlerinde de yaygın olarak kullanılmaktadır. Lepik [35, 36] lineer olmayan integro diferensiyel denklemleri ve integral denklemleri, Lepik ve Tamme [37] lineer olmayan Fredholm integral denklemlerini Haar dalgacıklarına dayalı yöntemlerle çözmüştür. Bir ve iki boyutlu integral ve integro-diferensiyel denklemler Aziz vd. [38, 39] tarafından ve Siraj-ul-Islam vd. [40, 41] tarafından Haar dalgacıklarıyla çalışılmıştır.

Kesirli mertebeden türevli denklemleri nümerik olarak çözmek için de Haar dalgacıklarını kullanan bir çok çalışma yapılmıştır. Lepik [42] kesirli mertebeden Volterra ve Fredholm integral denklemlerinin nümerik sonuçlarını Haar dalgacıklarıyla elde etmiştir. Wu [43], bazı kesirli mertebeden kısmi türevli denklemleri Haar dalgacıklarıyla çözmüştür. Li ve Zhao [44] Bagley - Torvik ve Riccati kesirli mertebeden türevli denklemlerinin çözümlerini Haar dalgacıklarına dayalı yöntemle bulmuştur. Kesirli mertebeden bazı sınır değer problemlerinin nümerik sonuçları Rehman ve Khan [45] tarafından Haar dalgacıklarıyla elde edilmiştir. Ray ve Patra [46] kesirli mertebeden salınımlı Van der Pol sistemini Haar dalgacıklarıyla çözmüştür. Saeed ve Rehman [47] bazı kesirli mertebeden adi türevli denklemlere Haar dalgacıklarını ve bir lineerleştirme tekniğini uygulamıştır. Wang vd. [48] bazı kesirli mertebeden kısmi türevli denklemlerinin çözümlerini Haar dalgacıkları yardımıyla bulmuştur. Nötron nokta kinetik denklemi

Patra ve Ray [49, 50] tarafından Haar dalgacıkları yardımıyla ele alınmıştır. Değişken katsayılı kesirli mertebeden türevli denklemler Yi ve Huang [51] tarafından Haar dalgacıkları yardımıyla çözülmüştür.

Bu tezde aşağıdaki denklemler Haar dalgacıkları ile nümerik olarak çözülmüştür. Düzenli uzun dalga (RLW) denklemi:

$$u_t + u_x + \epsilon uu_x - \mu u_{xxt} = 0$$

Korteweg-de Vries (KdV) denklemi:

$$u_t + \epsilon uu_y + \mu u_{yyy} = 0.$$

İkili (*coupled*) lineer olmayan schrödinger-KdV (NLS-KdV) denklemi:

$$\begin{aligned} i\epsilon E_t + \frac{3}{2}E_{yy} - \frac{1}{2}NE &= 0, \\ N_t + \frac{1}{2}N_{yyy} + \frac{1}{2}(N^2 + |E|^2)_y &= 0. \end{aligned}$$

Dördüncü merteben değişken katsayılı parabolik kısmi türevli denklemler:

$$\mu(x)u_{tt} + EI(x)u_{xxxx} = F(x, t).$$

Kesirli mertebeden türevli Burgers denklemi:

$$D_t^\alpha u + uu_x - \nu u_{xx} = F(x, t), \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Kesirli mertebeden türevli ikili (*coupled*) Burgers denklemi:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u - u_{xx} - 2uu_x + (uv)_x &= 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \\ D_t^\beta v - v_{xx} - 2vv_x + (uv)_x &= 0, \quad 0 < \beta \leq 1. \end{aligned}$$

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Dalgacıklar

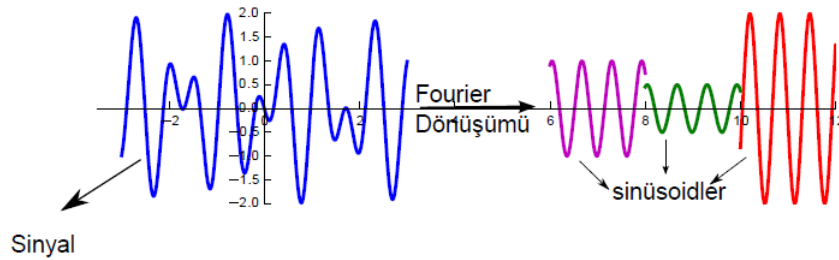
Dalgacıklara giriş için Fourier dönüşümü iyi bir başlangıç noktası olabilir. Fourier dönüşümü matematiksel olarak

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

şeklinde ifade edilir [6]. Burada t değişkeni zamanı, ω değişkeni ise frekansı ¹ ifade eder. Fourier dönüşümünde zamana bağlı bir $f(t)$ fonksiyonu frekansa bağlı bir $\hat{f}(\omega)$ fonksiyonuna dönüştürülür. Bu dönüşüm işlemi tersten de yapılabilir yani frekansa bağlı bir fonksiyon zamana bağlı bir fonksiyona dönüştürülebilir. Bu dönüşüme ise ters Fourier dönüşümü adı verilir. Ters Fourier dönüşümü

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

ile verilir [6]. Fourier dönüşümü grafiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir

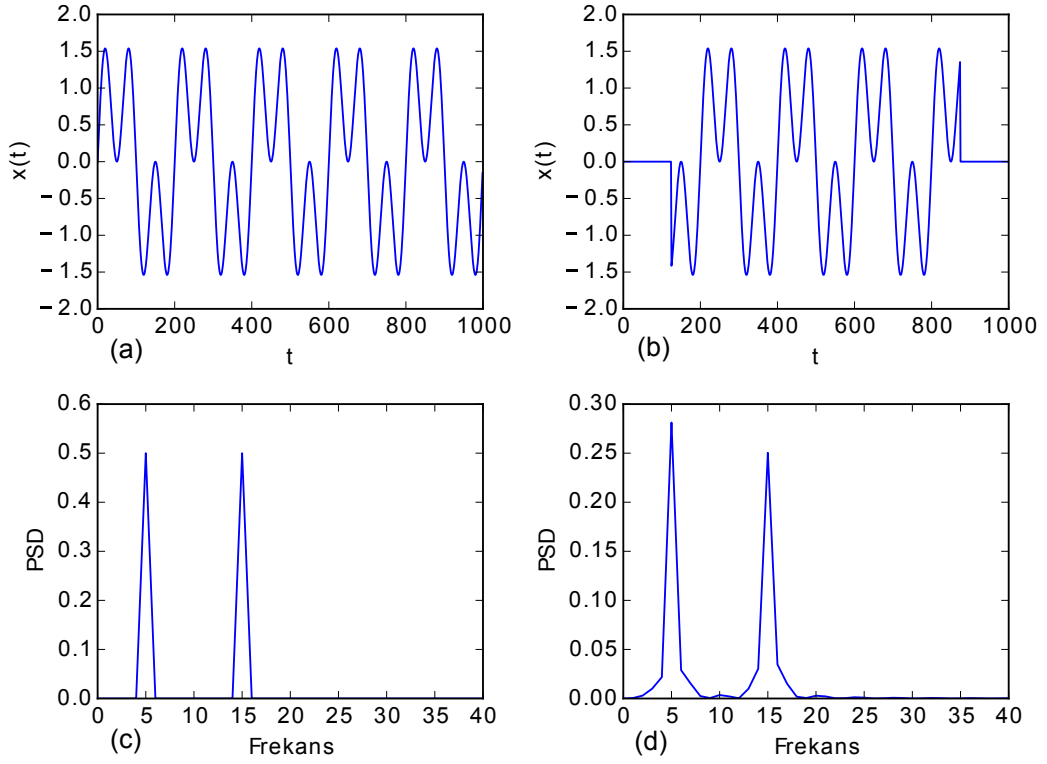


Şekil. 1.1: Fourier dönüşümü.

Şekil 1.1’de görüldüğü gibi Fourier dönüşümü verilen bir fonksiyonu (sinyali) sinüso-

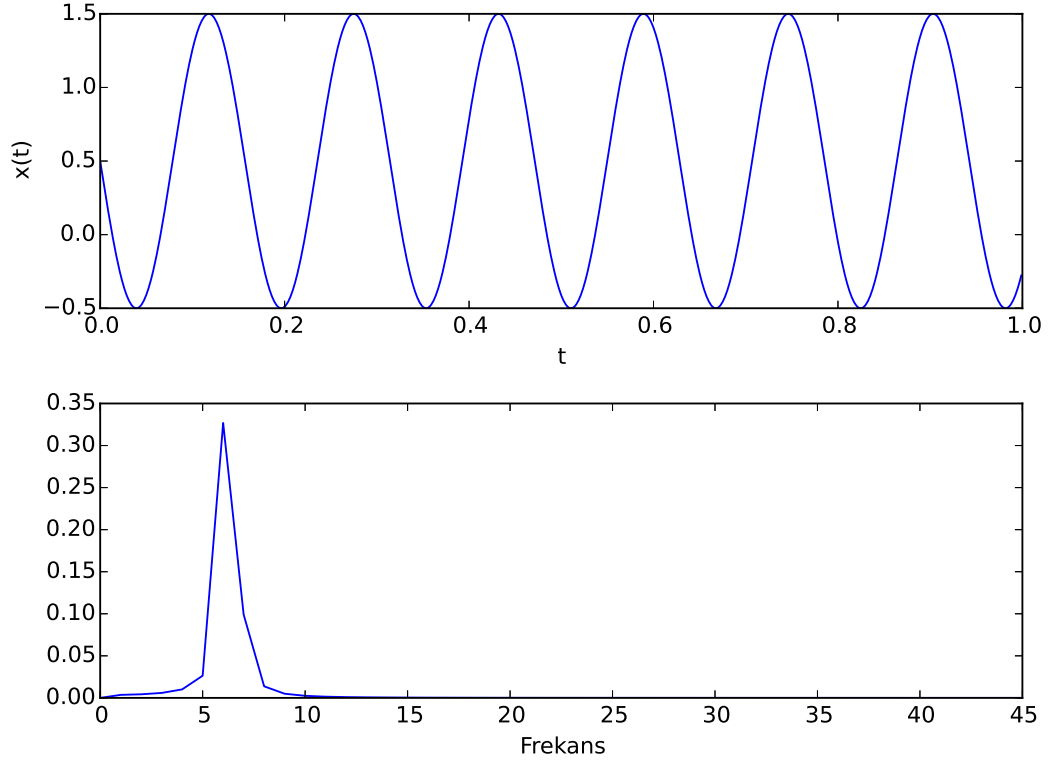
¹Bir olayın birim zamanda tekrarlanma sayısı

idlere çevirir yani zamana bağlı herhangi bir fonksiyonu frekansa bağlı bir fonksiyona dönüştürür. Bu işlem sonunda zamanla ilgili bilgi kaybolduğundan bu durum Fourier dönüşümünün bir eksikliği olarak nitelendirilir. Örneğin Şekil 1.2 (a)'da yaklaşık olarak 1000 milisaniye süren bir sinyal ve Şekil 1.2 (c)'de bu sinyale karşılık gelen 5 Hz ve 15 Hz civarında yoğunlaşmış frekansları verilmiştir. Yine Şekil 1.2 (b)'de yaklaşık olarak 100. milisaniyede başlayıp 900. milisaniyede sonlandığı görülen başka bir sinyal ve Şekil 1.2 (d)'de buna karşılık gelen yine 5 Hz ve 15 Hz civarında yoğunlaşmış frekansları verilmiştir. Farklı olan bu iki fonksiyona (sinyal) Fourier dönüşümü uygulandığında her ikisi için de aynı frekans değerleri elde edilmiştir. Ayrıca sağdaki sinyalin nerede başlayıp nerede bittiği ile ilgili bir bilgi elde yoktur. Yani zamanla ilgili bilgi kaybolmaktadır.

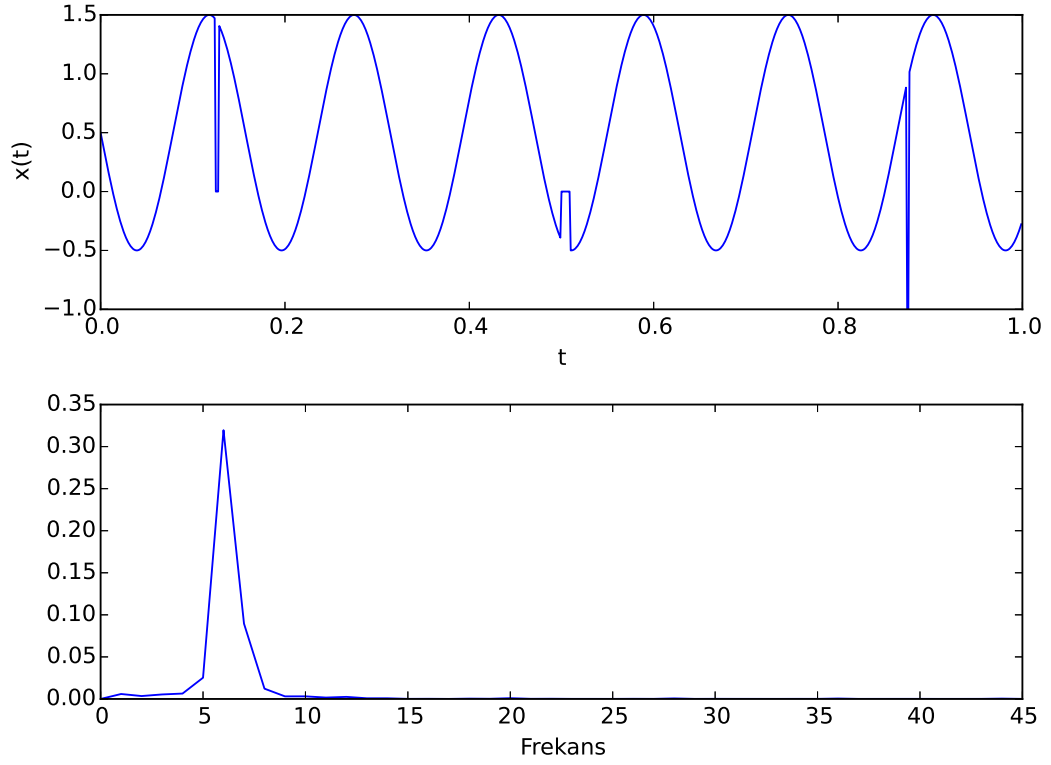


Şekil. 1.2: Farklı iki fonksiyon ve onlara karşılık gelen frekans değerleri.

Fourier dönüşümünün bir başka dezavantajı ise konum (*spatial*) değişkeni için lokal (*localized*) olamaması yani bir sinyalde küçük bir aralıkta meydana gelen ani değişiklikleri etkili bir şekilde analiz edememesidir [9]. Örneğin Şekil 1.3'te verilen zamana bağlı (burada zaman, konum değişkenidir) fonksiyonun frekansı $6-7\text{ Hz}$ civarında yoğunlaşmıştır. Şekil 1.4'te aynı fonksiyonda yapılan değişiklikler ve bunun sonucunda elde edilen frekans değeri verilmiştir. Şekil 1.4'ten farklı fonksiyon olmasına rağmen buna karşılık gelen frekans değerinin yine $6-7\text{ Hz}$ civarında olduğu görülmektedir.



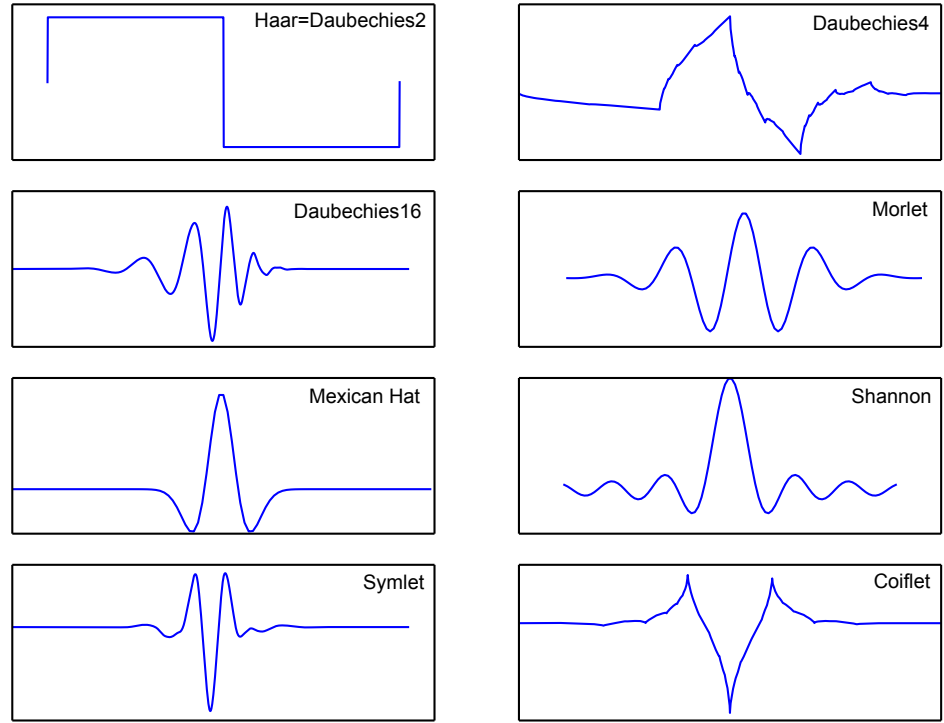
Şekil. 1.3: Düzgün (*smooth*) bir fonksiyonun Fourier dönüşümü.



Şekil. 1.4: Düzgün olmayan (*non-smooth*) bir fonksiyonun Fourier dönüşümü.

Bu dezavantajlar Fourier dönüşümünde kullanılan ($e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$) temel (basis) fonksiyonlarından kaynaklanmaktadır. Bu fonksiyonlar $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı oldukları için ya da başka bir deyişle kompakt desteğe sahip olmadıkları için incelenen fonksiyonlardaki ani değişiklikleri tespit etmekte pek uygun sayılmazlar. Dalgacıklar ise bahsedilen dezavantajları ortadan kaldırmak için uygun araçlardır [9].

Dalgacık kelimesi "Küçük Dalga" anlamına gelmektedir [6]. Dalgacıklar kısa süreliğine salınım gösterip sonra yok olan fonksiyonlardır. Literatürde farklı türde dalgacık aileleri mevcuttur. Bu ailelerden bazılarına ait dalgacıklar Şekil 1.5'te verilmiştir.



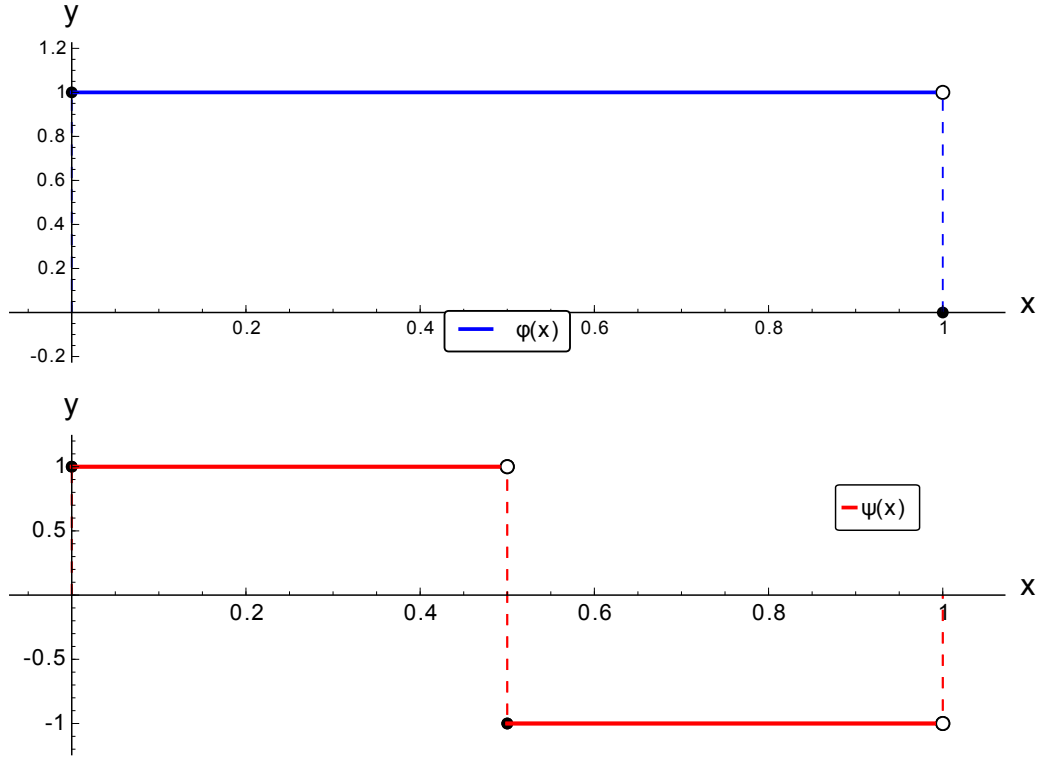
Şekil. 1.5: Çeşitli dalgacık aileleri.

Dalgacık aileleri baba dalgacık (*Father wavelet*) ve ana dalgacık (*Mother Wavelet*) olarak adlandırılan dalgacıklardan oluşmaktadır [52]. Genelde baba dalgacık ve ana dalgacık sırasıyla ϕ ve ψ sembolleriyle gösterilmektedirler. Literatürde baba dalgacık için ölçek fonksiyonu (*Scaling function*) ifadesi de kullanılmaktadır. Dalgacık ailesindeki diğer dalgacıklar,

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (1.1)$$

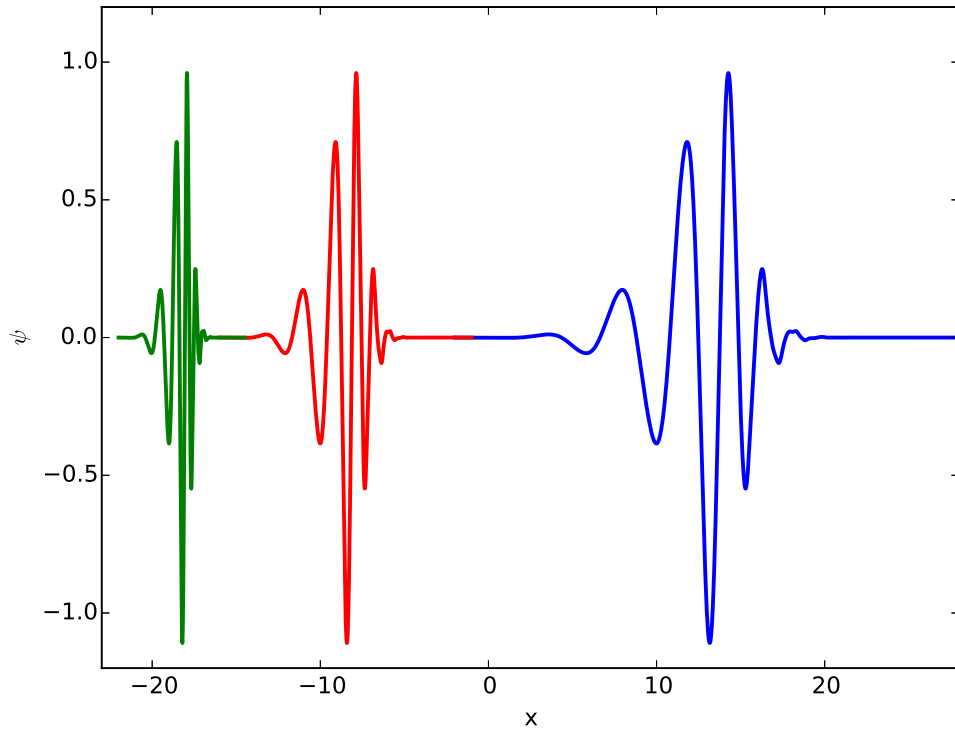
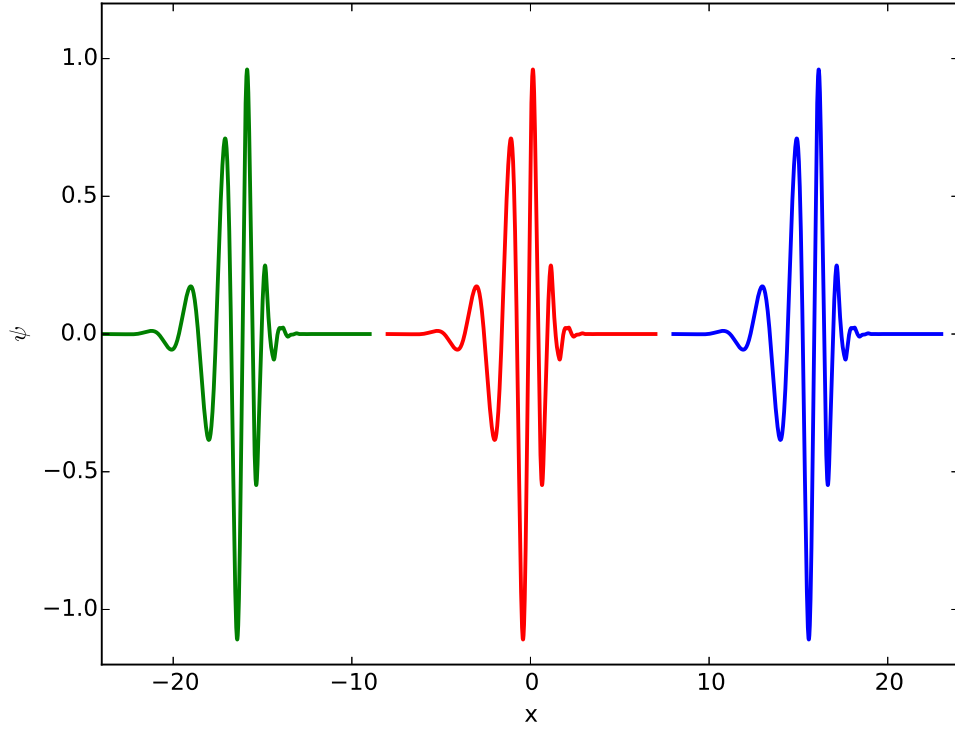
biçiminde verilen, konumsal olarak iyi lokalize olmuş ana dalgacığın ölçeklenip (sıkıştırılıp-

gevşetilmesi) yer değiştirmesiyle elde edilebilirler [6]. şekil 1.6'da Haar dalgacık ailesinin ana dalgacığı ve ona karşılık gelen baba dalgacığı verilmiştir.



şekil. 1.6: Haar dalgacık ailesinin ölçek ve ana dalgacık fonksiyonları.

(1.1) denklemindeki $b \in \mathbb{R}$ kaydırma parametresi ve $a \in \mathbb{R}^+$ da ölçek parametresidir. b değiştikçe dalgacık yatay ekseninde yer değiştirir buna karşılık a değiştikçe dalgacık esner veya sıkışır. şekil 1.7'de Daubechies dalgacık ailesinden bir dalgacığın kaydırılmış halleri (üstte) ve esnetilip-sıkıştırılmış halleri (altta) gösterilmiştir. Grafikten dalgacıkların kısa süreli salınımı görülebilir.



Şekil. 1.7: Kaydırılmış ve esnetilip-sıkıştırılmış dalgacıklar.

(1.1) denkleminde eğer a ve b parametreleri $a = 2^{-j}$ ve $b = k2^{-j}$ ($k, j \in \mathbb{N}^+$) biçim-

minde ayrık noktalar olarak alınırsa

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$$

ayrık ana dalgacığı elde edilir. Buna karşılık gelen ölçek fonksiyonu (baba dalgacığı) da

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k)$$

şeklindedir [6]. Bu iki dalgacık arasındaki ilişkiyi veren ve genişleme veya iyileştirme denklemi (Dilation equation- Refinement equation) olarak adlandırılan denklem

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \phi_{j+1,2k}(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} \phi_{j+1,2k+1}(t) \quad (1.2)$$

şeklinde verilmektedir [5].

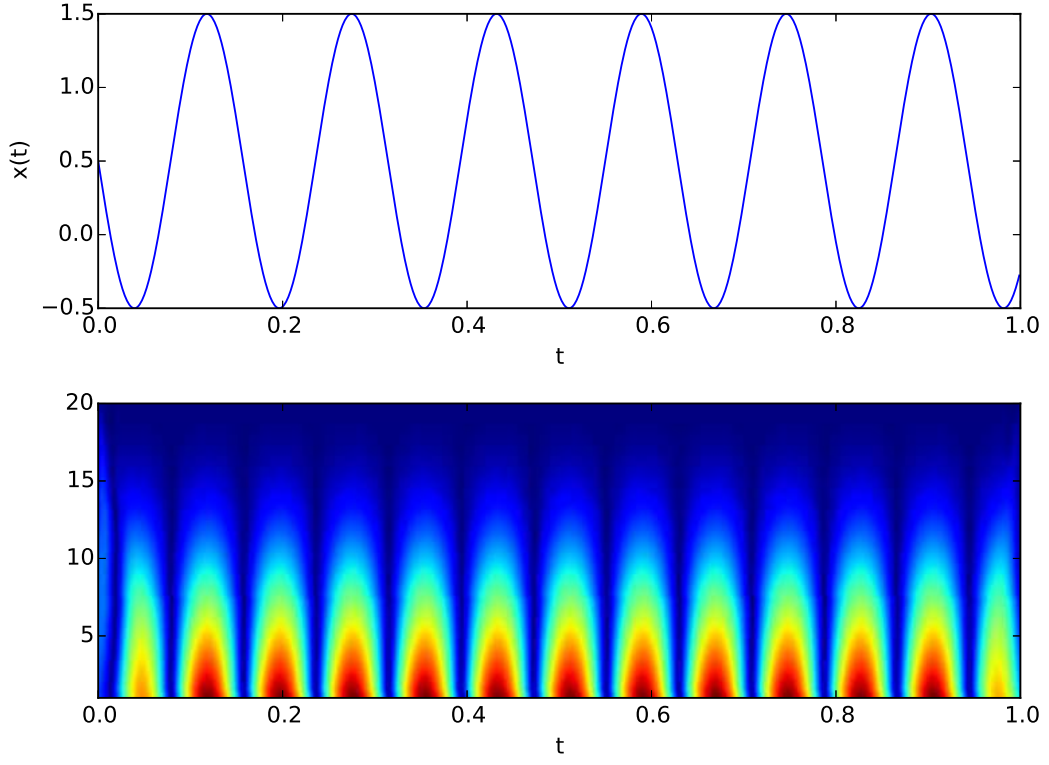
V , ölçek fonksiyonlarının ve W , dalgacık fonksiyonlarının kümesi olsun.

1. $\{\phi_{j,k}(x)\}_{j \geq 0, k \in \mathbb{Z}}$ ölçek fonksiyonları $L^2(\mathbb{R})$ için birim dik (*orthonormal*) temel fonksiyonlardır.
2. $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$
3. $\overline{\cup V_j} = L^2(\mathbb{R})$
4. $V_j \subset V_{j+1}$
5. $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}t) \in V_0$

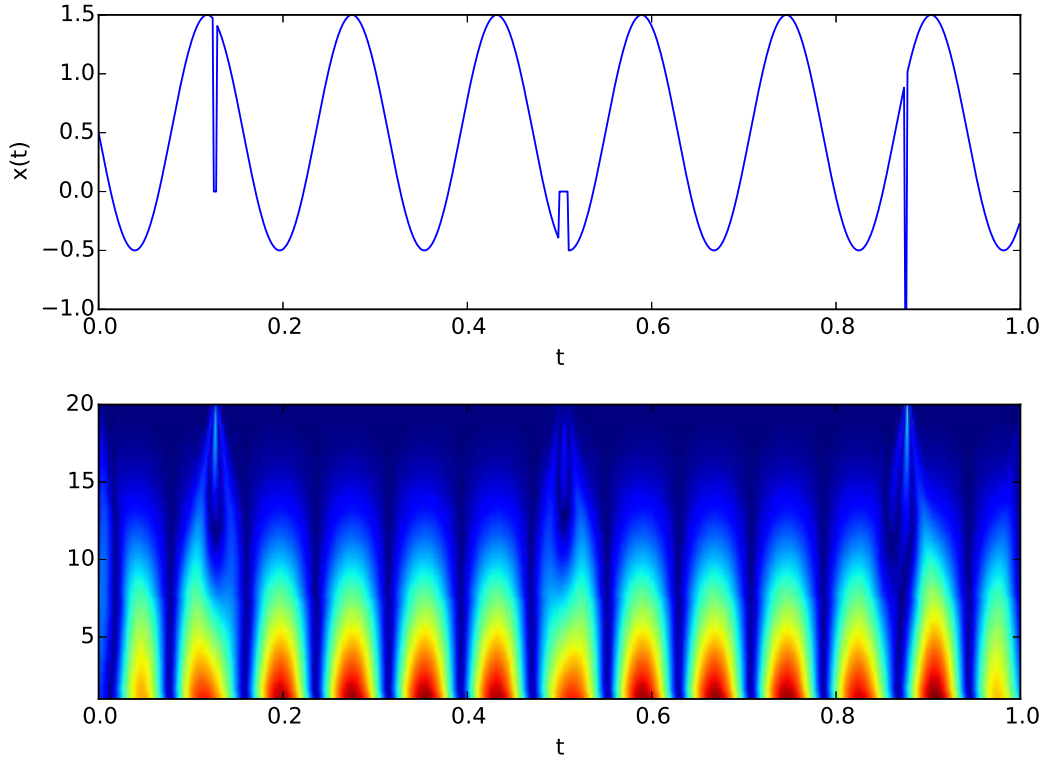
$j = \dots, -1, 0, 1, \dots$ olmak üzere; eğer $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ uzaylar koleksiyonunun ölçek fonksiyonu yukarıdaki şartları sağlarsa *çoklu çözünürlük* adını alır [5].

$\psi_{j,k}(t)$ ve $\phi_{j,k}(t)$ dalgacıklarında bulunan $2^{j/2}$ katsayısı normalizasyon katsayısıdır. Yani bu katsayı sayesinde bu dalgacıklardan birim dik temel fonksiyonlar elde edilir. Eğer, $2^{j/2}$ katsayısı alınmazsa bu dalgacıklardan dik (*orthogonal*) temel fonksiyonlar elde edilir. Buradaki j ölçek, k kaydırma parametresidir. j ölçek parametresi arttıkça dalgacıklar yatay ekseninde sıkışır yani gittikçe lokalize olur. Bundan dolayı dalgacıklar lokal temel fonksiyon oluşturmaya oldukça elverişlidir.

Dalgacıklar konum değişkenine göre iyi lokalize olduklarından yapısında ani değişimler barındıran fonksiyonları (sinyalleri) daha iyi analiz edebilirler [9]. Örneğin daha önce Fourier dönüşümünün uygulandığı Şekil 1.3-1.4'teki fonksiyonlara dalgacık dönüşümü uygulandığında ani değişimlerin konumu bariz bir şekilde görülebilir. Bu durum Şekil 1.8-1.9'da gösterilmektedir.



Şekil. 1.8: Düzgün (*smooth*) bir fonksiyonun dalgacık dönüşümü.



Şekil. 1.9: Düzgün olmayan (*non-smooth*) bir fonksiyonun dalgacık dönüşümü.

1.2 Haar Dalgacıkları

Haar dalgacık ailesi ilk olarak 1910 yılında Macar matematikçi Alfred Haar tarafından ortaya atılmıştır. Parçalı sabit fonksiyon biçiminde olan Haar dalgacıkları $[0, 1]$ aralığında karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayında dik bir sistem oluştururlar.

Haar ölçek fonksiyonu [5, 18]

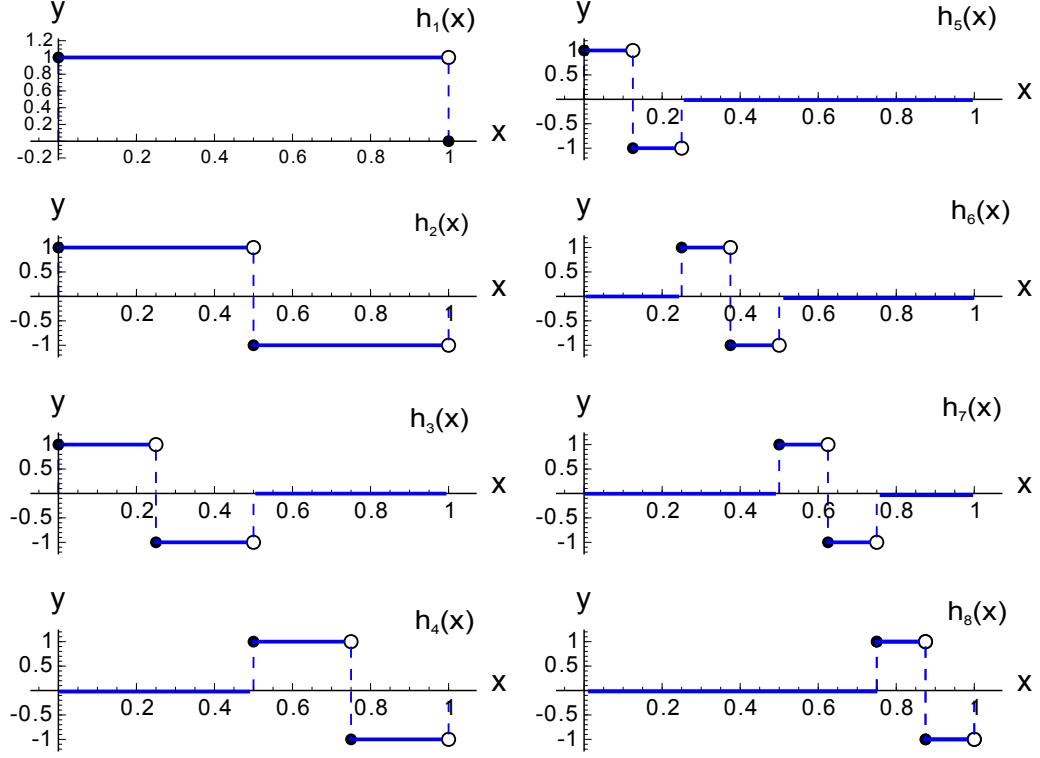
$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.3)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Haar dalgacıkları ise genellikle $h_i(x)$ ile gösterilmekte olup $x \in [0, 1]$ aralığında

$$\psi_i(x) = h_i(x) = h_i(2^j x - k) = \begin{cases} 1, & \frac{k}{m} \leq x < \frac{k+0.5}{m} \\ -1, & \frac{k+0.5}{m} \leq x < \frac{k+1}{m} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.4)$$

şeklinde tanımlanmaktadır [18]. $j = 0, 1, \dots, J$ olmak üzere $m = 2^j$ tamsayısı dalgacığın çözünürlüğünü (ölçeği) ve $k = 0, 1, \dots, m-1$ kaydırma parametresini göstermektedir. (1.4) denkleminde h_i 'nin indisi $i = m + k + 1$ formülü ile hesaplanır. $m = 1, k = 0$ için i 'nin minimum değeri $i = 2$ olur, i 'nin maksimum değeri $i = 2M = 2^{J+1}$ 'dir. Burada J dalgacığın maksimum çözünürlüğünü verir. $i = 1$ durumu ise Haar dalgacık ailesinin ölçek fonksiyonuna karşılık gelir. Şekil 1.10'da ilk sekiz Haar dalgacığının grafiği verilmiştir.



Şekil. 1.10: İlk sekiz Haar dalgacığı.

1.3 Haar Dalgacıklarıyla Fonksiyonlara Yaklaşım

Haar dalgacıkları dik olduklarından dolayı [18]

$$\int h_i(x)h_l(x)dx = \begin{cases} 2^{-j}, & i = l \text{ ise} \\ 0, & i \neq l \text{ ise} \end{cases}$$

yazılabilir. $[0, 1]$ aralığında karesi integrallenebilir herhangi bir $u(x)$ fonksiyonu

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i h_i(x), \quad i = 2^j + k, \quad j \geq 0, \quad 0 \leq k < 2^j$$

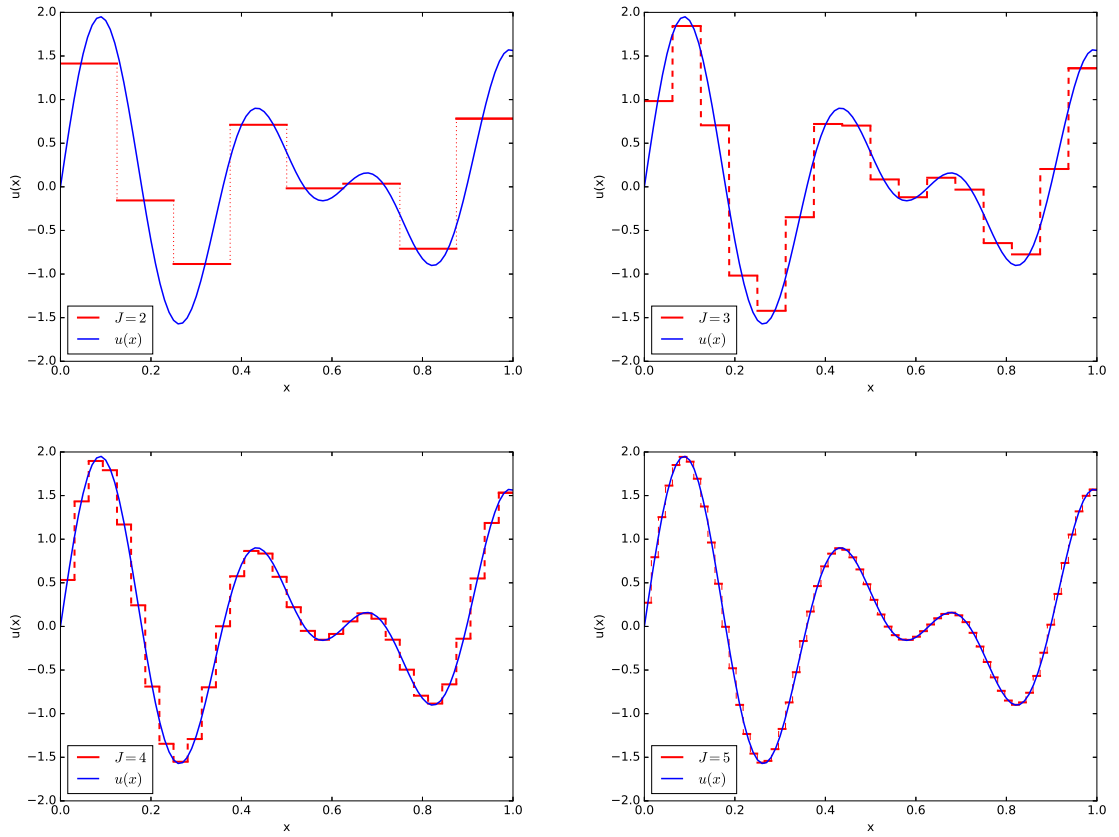
biçiminde gösterilebilir. Buradaki c_i katsayıları

$$c_i = \langle u(x), h_i(x) \rangle = 2^j \int_0^1 u(x)h_i(x)dx$$

olarak hesaplanır. $u(x)$ sonsuz seri açılımı sonlu sayıda terim için hesaplanabilir. Yani $M = 2^J$ olmak üzere

$$u(x) = \sum_{i=1}^{2M} c_i h_i(x)$$

yazılabilir. Örnek olarak Şekil 1.11’de $u(x) = \sin(20x) + \sin(15x)$ fonksiyonuna $J = 2, 3, 4, 5$ için Haar dalgacık yaklaşımları gösterilmiştir. Şekilden J arttıkça daha iyi yaklaşım elde edilebileceği görülebilir.



Şekil. 1.11: $u(x)$ fonksiyonuna farklı J değerleri için Haar dalgacık yaklaşımları.

1.4 Haar Dalgacıklarının İntegralleri

Haar dalgacıkları süreksiz fonksiyonlar oldukları için türevleri mevcut değildir. Dolayısıyla diferensiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde doğrudan kullanılamazlar. Bunun yerine diferensiyel denklemlerin nümerik çözümleri için Haar dalgacıklarının integralleri kullanılır [11]. Haar dalgacıklarının integralleri

$$\begin{aligned}
p_{i,1}(x) &= \int_0^x h_i(x') dx' \\
p_{i,n+1}(x) &= \int_0^x p_{i,n}(x') dx', \quad n = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{1.5}$$

şeklinde tanımlanır [18]. Birinci ve ikinci integrallerin

$$\zeta_1 = \frac{k}{m}, \quad \zeta_2 = \frac{k+0.5}{m}, \quad \zeta_3 = \frac{k+1}{m}$$

olmak üzere, analitik olarak (1.10) denklemi yardımıyla nasıl hesaplanacağı aşağıda gösterilmiştir.

1-) Birinci integral

a-) $x \in [\zeta_1, \zeta_2)$ için

$$p_{i,1}(x) = \int_0^x h_i(x') dx' = \int_0^{\zeta_1} h_i(x') dx' + \int_{\zeta_1}^x h_i(x') dx = x - \zeta_1$$

b-) $x \in [\zeta_2, \zeta_3)$ için

$$\begin{aligned}
p_{i,1}(x) &= \int_0^x h_i(x') dx' = \int_0^{\zeta_1} h_i(x') dx' + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} h_i(x') dx' + \int_{\zeta_2}^x h_i(x') dx' \\
&= 0 + \zeta_2 - \zeta_1 - (x - \zeta_2) = \frac{k+0.5}{m} - \frac{k}{m} + \frac{k+0.5}{m} - x \\
&= \frac{k+1}{m} - x = \zeta_3 - x
\end{aligned}$$

sonuç olarak birinci integral

$$p_{i,1}(x) = \begin{cases} x - \zeta_1, & x \in [\zeta_1, \zeta_2) \text{ ise} \\ \zeta_3 - x, & x \in [\zeta_2, \zeta_3) \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{1.6}$$

olarak bulunur [18].

2-) İkinci integral

a-) $x \in [\zeta_1, \zeta_2)$ için

$$\begin{aligned}
p_{i,2}(x) &= \int_0^x p_{i,1}(x')dx' = \int_0^{\zeta_1} p_{i,1}(x')dx' + \int_{\zeta_1}^x p_{i,1}(x')dx' \\
&= 0 + \int_{\zeta_1}^x (x' - \zeta_1)dx' = \frac{(x - \zeta_1)^2}{2}
\end{aligned}$$

b-) $x \in [\zeta_2, \zeta_3)$ için

$$\begin{aligned}
p_{i,2}(x) &= \int_0^x p_{i,1}(x')dx' = \int_0^{\zeta_1} p_{i,1}(x')dx' + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} p_{i,1}(x')dx' \\
&\quad + \int_{\zeta_2}^x p_{i,1}(x')dx' \\
&= 0 + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} (x' - \zeta_1)dx' + \int_{\zeta_2}^x (\zeta_3 - x')dx' \\
&= \frac{(x' - \zeta_1)^2}{2} \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} - \frac{(\zeta_3 - x')^2}{2} \Big|_{\zeta_2}^x \\
&= \frac{(\zeta_2 - \zeta_1)^2}{2} - 0 - \left[\frac{(\zeta_3 - x)^2}{2} - \frac{(\zeta_3 - \zeta_2)^2}{2} \right] \\
&= \frac{(\frac{k+0.5}{m} - \frac{k}{m})^2}{2} + \frac{(\frac{k+1}{m} - \frac{k+0.5}{m})^2}{2} - \frac{(\zeta_3 - x)^2}{2} \\
&= \frac{1}{8m^2} + \frac{1}{8m^2} - \frac{(\zeta_3 - x)^2}{2} = \frac{1}{4m^2} - \frac{(\zeta_3 - x)^2}{2}
\end{aligned}$$

c-) $x \in [\zeta_3, 1]$ için

$$\begin{aligned}
p_{i,2}(x) &= \int_0^x p_{i,1}(x')dx' = \int_0^{\zeta_1} p_{i,1}(x')dx' + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} p_{i,1}(x')dx' + \int_{\zeta_2}^{\zeta_3} p_{i,1}(x')dx' \\
&\quad + \int_{\zeta_3}^x p_{i,1}(x')dx' \\
&= 0 + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} (x' - \zeta_1)dx' + \int_{\zeta_2}^x (\zeta_3 - x')dx' + 0 \\
&= \frac{(x' - \zeta_1)^2}{2} \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} - \frac{(\zeta_3 - x')^2}{2} \Big|_{\zeta_2}^{\zeta_3} \\
&= \frac{(\zeta_2 - \zeta_1)^2}{2} - 0 - \left[0 - \frac{(\zeta_3 - \zeta_2)^2}{2} \right] \\
&= \frac{(\frac{k+0.5}{m} - \frac{k}{m})^2}{2} + \frac{(\frac{k+1}{m} - \frac{k+0.5}{m})^2}{2} = \frac{1}{4m^2}
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak ikinci integral

$$p_{i,2}(x) = \begin{cases} \frac{(x-\zeta_1)^2}{2}, & x \in [\zeta_1, \zeta_2] \text{ ise} \\ \frac{1}{4m^2} - \frac{(\zeta_3-x)^2}{2}, & x \in [\zeta_2, \zeta_3] \text{ ise} \\ \frac{1}{4m^2}, & x \in [\zeta_3, 1] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.7)$$

şeklinde bulunur [18]. Üçüncü ve dördüncü integraller ise

$$p_{i,3}(x) = \begin{cases} \frac{(x-\zeta_1)^3}{6}, & x \in [\zeta_1, \zeta_2] \text{ ise} \\ \frac{x-\zeta_2}{4m^2} - \frac{(\zeta_3-x)^3}{6}, & x \in [\zeta_2, \zeta_3] \text{ ise} \\ \frac{x-\zeta_2}{4m^2}, & x \in [\zeta_3, 1] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.8)$$

$$p_{i,4}(x) = \begin{cases} \frac{(x-\zeta_1)^4}{24}, & x \in [\zeta_1, \zeta_2] \text{ ise} \\ \frac{(x-\zeta_2)^2}{8m^2} - \frac{(\zeta_3-x)^4}{24} + \frac{1}{192m^4}, & x \in [\zeta_2, \zeta_3] \text{ ise} \\ \frac{(x-\zeta_2)^2}{8m^2} + \frac{1}{192m^4}, & x \in [\zeta_3, 1] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.9)$$

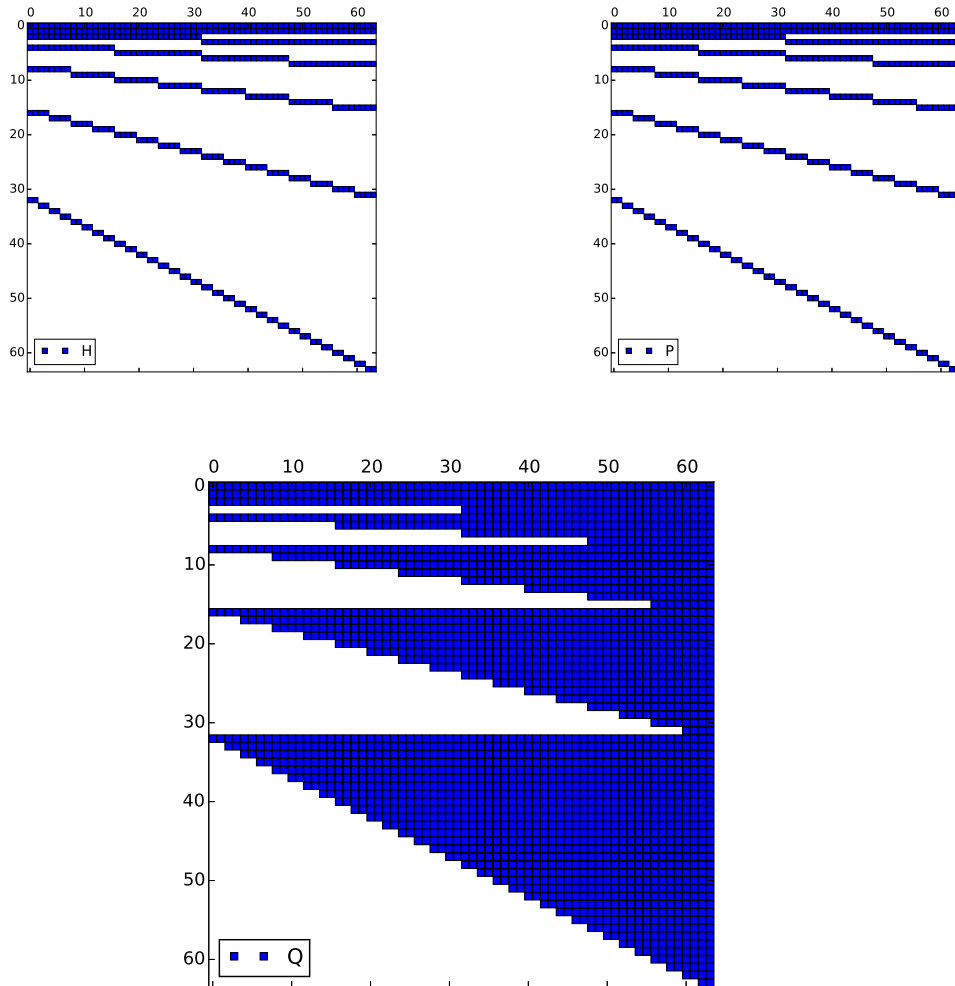
olarak verilmektedir [18]. Gerekli olduğunda diğer integraller de benzer adımlar izlenerek bulunabilir.

Haar dalgacıklarını ve integrallerini matris formunda kullanmak diferensiyel denklemlerin nümerik çözümünde kolaylık sağlar. Örneğin x değişkeni $M = 2^J$ olmak üzere $x_l = \frac{l-0.5}{2M}$, $l = 1, 2, \dots, 2M$ noktalarında ayrıklaştırılırsa $2M \times 2M$ boyutlarındaki $H(i, l) = h_i(x_l)$, $P(i, l) = p_{i,1}(x_l)$ ve $Q(i, l) = p_{i,2}(x_l)$ matrislerinin $M = 4$ için elemanları

$$H(i, l) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, P(i, l) = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q(i,l) = \frac{1}{512} \begin{bmatrix} 1 & 9 & 25 & 49 & 81 & 121 & 169 & 225 \\ 1 & 9 & 25 & 49 & 79 & 103 & 119 & 127 \\ 1 & 9 & 23 & 31 & 32 & 32 & 32 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 23 & 31 \\ 1 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Daha büyük M değerleri için matrislerin yapıları Şekil 1.12’de verilmiştir. Şekilde beyaz yerler sıfırları, renkli yerler sıfırdan farklı sayıları göstermektedir. Dikkat edilirse Haar matrisi ve integrallerinin matrisleri çok sayıda sıfır içermektedir. Bu da bilgisayar programlarında hız açısından bir avantaj sağlar.



Şekil. 1.12: Haar matrisi ve integrallerinin matrislerinin yapısı.

1.5 Haar Dalgacıklarının Yakınsaklığı

Bu bölümde Haar dalgacıklarının yakınsaklığı verilmiştir. Yakınsaklık analizi Ray ve Patra tarafından yapılan çalışmadan [46] alınmıştır.

Lemma [46]: $u(x) \in L^2(R)$, $(0, 1]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. O halde J . çözünürlükteki hata normu

$$\|E_J\| \leq \frac{\eta^2}{12} 2^{-2J}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada, $\forall x \in (0, 1]$ için $|u(x)| \leq \eta$ ve $\eta > 0$, $M = 2^J$ 'dir.

İspat [46]: $u_J(x) = \sum_{i=0}^{2M-1} a_i h_i(x)$ olmak üzere J . çözünürlükteki hata normu

$$|E_J| = |u(x) - u_J(x)| = \left| \sum_{i=2M}^{\infty} a_i h_i(x) \right|$$

şeklinde tanımlanır. $M = 2^j$ için

$$\|E_J\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \sum_{i=2M}^{\infty} a_i h_i(x), \sum_{r=2M}^{\infty} a_r h_r(x) \right\rangle dx = \sum_{i=2M}^{\infty} \sum_{r=2M}^{\infty} a_i a_r \int_{-\infty}^{\infty} h_i(x) h_r(x) dx \leq \sum_{i=2M}^{\infty} |a_i|^2$$

dir. $h_i(x) = 2^{j/2} h(2^j x - k)$ $k = 0, 1, 2, \dots, 2^j - 1$, $j = 0, 1, \dots, J$ ve

$$\phi(2^j x - k) = \begin{cases} 1, & k2^{-j} \leq x < \left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}, \\ -1, & \left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j} \leq x < (k+1)2^{-j}, \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

olmak üzere $a_i = \int_0^1 2^{j/2} u(x) \phi(2^j x - k) dx$ 'tir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} a_i &= 2^{j/2} \left[\int_{k2^{-j}}^{\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}} u(x) dx - \int_{\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}}^{(k+1)2^{-j}} u(x) dx \right] \\ &= 2^{j/2} \left[\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j} - k2^{-j} \right) u(\psi_1) - \left((k+1)2^{-j} - \left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j} \right) u(\psi_2) \right]. \end{aligned}$$

olur. $\psi_1 \in \left(k2^{-j}, \left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right)$ ve $\psi_2 \in \left(\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}, (k+1)2^{-j}\right)$ olmak üzere, ortalama değer teoremi gereğince $a_i = 2^{-j/2-1} (\psi_2 - \psi_1) u'(\psi)$ olur. $\psi \in (\psi_1, \psi_2)$ için yine ortalama değer teoremi gereğince

$$\begin{aligned} a_i^2 &= 2^{-j-2} (\psi_2 - \psi_1)^2 u'(\psi)^2 \\ &\leq 2^{-j-2} 2^{-2j} \psi^2, \end{aligned}$$

olur. $|u'(x)| \leq \eta = 2^{-3j-2} \eta^2$ olduğundan

$$\begin{aligned} \|E_J\|^2 &= \sum_{i=2M}^{\infty} a_i^2 \leq \sum_{i=2M}^{\infty} 2^{-3j-2} \eta^2 \leq \eta^2 \sum_{j=J+1}^{\infty} \sum_{i=2}^{2^{j+1}-1} 2^{-3j-2} \\ &= \eta^2 \sum_{j=J+1}^{\infty} 2^{-3j-2} (2^{j+1} - 1 - 2^j + 1) \\ &= \frac{\eta^2}{4} \sum_{j=J+1}^{\infty} 2^{-2j} \\ &= \frac{\eta^2 2^{-2(J+1)}}{4 \left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \frac{\eta^2}{12} 2^{-2J} \quad \square \end{aligned} \tag{1.10}$$

bulunur. (1.10) denkleminde hatanın J ile ters orantılı olduğu görülür. Yani dalgacık çözünürlüğü J arttıkça daha yüksek doğrulukta sonuçlar elde edilebilir.

BÖLÜM 2

RLW DENKLEMİNİN HAAR DALGACIK YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, ϵ ve μ pozitif parametreler olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_*} + \epsilon u \frac{\partial u}{\partial x_*} - \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x_*^2} \right) = 0 \quad (2.1)$$

denklemini, $x_* \rightarrow \pm\infty$ iken $u \rightarrow 0$ sınır koşulları ile göz önüne alınmıştır. Bu denklem ilk olarak 1966'da Peregrine [53] tarafından dalga bozunumunun (*undular bore*) gelişimini modellemek için ortaya atılmıştır. RLW denkleminin analitik çözümleri sınırlı sayıda başlangıç ve sınır koşulları için bilinmektedir. Dolayısıyla nümerik çözümler bu denklem için büyük bir öneme sahiptir. Bu denklem üzerine literatürde yapılan bazı çalışmalar şunlardır: [54, 55, 56] çalışmalarında RLW denkleminin nümerik çözümü için sonlu fark yöntemleri kullanılmıştır. Gardner vd. [57] RLW denklemini lineer sonlu elemanlar kullanarak en küçük kareler yöntemi ile çözmüştür. Zaki [58] ayırma (*splitting*) tekniği ve kübik splinelara dayalı bir sonlu eleman yöntemi ile RLW denkleminin nümerik çözümlerini bulmuştur. [59, 60] çalışmalarında RLW denklemini sonlu eleman yöntemleriyle çözülmüştür. Doğan [61] lineer sonlu elemanlar kullanarak Galerkin yöntemiyle denklemin nümerik çözümlerini elde etmiştir. Esen ve Kutluay [62] kuadratik B-spline temel fonksiyonları kullanarak lumped Galerkin yöntemiyle denklemin nümerik çözümlerini bulmuştur. Jain vd. [63] ayırma tekniği ve kübik splinelara dayalı bir sonlu eleman yöntemi ile RLW denklemini çözmüştür. Raslan [64] RLW denklemini çözmek için kübik B-spline kollokasyon yöntemini kullanmıştır. Dağ vd. [65] diferensiyel kuadratur yöntemi ile RLW denkleminin çözümlerini elde etmiştir. Saka vd. [66, 67, 68, 69, 70] RLW denklemini kollokasyon algoritmaları ve Galerkin yöntemleriyle çözmüşlerdir.

2.1 Zamana Göre Ayrıklaştırma

(2.1) ile verilen RLW denklemi

$$u(a, t) = f_1(t), \quad u(b, t) = f_2(t), \quad a \leq x_* \leq b$$

sınır koşulları ve

$$u(x_*, 0) = g(x_*), t \geq 0$$

başlangıç koşulu ile göz önüne alınsın. Haar dalagacıkları $x \in [0, 1]$ için tanımlandığından dolayı (2.1) denklemi $[0, 1]$ aralığına dönüştürülmelidir. Bunun için $x = \frac{x_* - a}{L}$, $L = b - a$ dönüşümü kullanılırsa

$$u_t + \frac{1}{L}u_x + \frac{\epsilon}{L}uu_x - \frac{\mu}{L^2}u_{xxt} = 0 \quad (2.2)$$

denklemi bulunur. (2.2) denkleminde u_x , uu_x terimlerinin zaman adımına göre ortalamaları ve u_t ve u_{xxt} için ileri fark yaklaşımı alınırsa

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta t} + \frac{(u_x)_{j+1} + (u_x)_j}{2L} + \epsilon \frac{(uu_x)_{j+1} + (uu_x)_j}{2L} - \frac{\mu}{L^2} \frac{(u_{xx})_{j+1} - (u_{xx})_j}{\Delta t} = 0$$

eşitliği elde edilir. $(uu_x)_{j+1}$ terimi için $u_{j+1}(u_x)_j + u_j(u_x)_{j+1} - u_j(u_x)_j$ Rubin Graves [71] lineerleştirme tekniği ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$2u_{j+1} + \frac{\Delta t}{L}(u_x)_{j+1} + \epsilon \frac{\Delta t}{L} [u_{j+1}(u_x)_j + u_j(u_x)_{j+1}] - 2\frac{\mu}{L^2}(u_{xx})_{j+1} = 2u_j - \frac{\Delta t}{L}(u_x)_j - 2\frac{\mu}{L^2}(u_{xx})_j \quad (2.3)$$

denklemi

$$u_0 = g(Lx + a) \quad (2.4)$$

başlangıç koşulu ve ayrıklaştırılmış

$$u_{j+1}(0) = f_1(t_{j+1}), \quad u_{j+1}(1) = f_2(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.5)$$

sınır koşullarına bağlı olarak elde edilir. $j = 0, 1, \dots, N - 1$ olmak üzere $t_{j+1} = \Delta t(j + 1)$, $\Delta t N = T$ ve u_{j+1} (2.3)-(2.5) probleminin $(n + 1)$. adımındaki çözümüdür.

2.2 Konuma Göre Haar Dalgacıklarıyla Ayrıklaştırma

Haar dalgacıklarıyla bu denklemi çözmek için denklemde görülen en yüksek mer-
tebeden türev terimi

$$(u_{xx})_{j+1}(x) = \sum_{i=1}^{2M} c_i h_i(x) \quad (2.6)$$

biçiminde Haar dalgacık serisine açılır. (2.6) denkleminin x 'e göre 0'dan x 'e integrali alınır

$$(u_x)_{j+1}(x) = (u_x)_{j+1}(0) + \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,1}(x) \quad (2.7)$$

elde edilir. (2.7) denklemindeki $(u_x)_{j+1}(0)$ terimi bilinmiyor. Bu terim, (2.7) denkleminin 0'dan 1'e integrali alınıp (2.5) sınır koşulları kullanılarak

$$(u_x)_{j+1}(0) = f_2(t_{j+1}) - f_1(t_{j+1}) - \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1) \quad (2.8)$$

şeklinde bulunabilir. Bu son eşitlik (2.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$(u_x)_{j+1}(x) = \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,1}(x) + f_2(t_{j+1}) - f_1(t_{j+1}) - \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1) \quad (2.9)$$

elde edilir. (2.9) denkleminin de 0'dan x 'e integrali alınarak

$$u_{j+1}(x) = f_1(t_{j+1}) + x(f_2(t_{j+1}) - f_1(t_{j+1})) + \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(x) - x \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1) \quad (2.10)$$

bulunur.

(2.10)-(2.6) denklemleri (2.3) denkleminde yerine yazılıp sonuçlar $x_l = \frac{l-0.5}{2M}$, $l = 1, 2, \dots, 2M$ noktalarında ayrıklaştırılırsa

$$\mathbf{A}_{l,i} \mathbf{c}_i = 2u_j - \frac{\Delta t}{L} (u_x)_j - 2 \frac{\mu}{L^2} (u_{xx})_j \quad (2.11)$$

biçimindeki sistem elde edilir. Burada \mathbf{c}_i Haar dalgacık seri açılımındaki katsayılarından oluşan kolon vektörü, eşitliğin sağ tarafı, u ile çeşitli türevlerinin x_l kollokasyon noktalarında ardışık j zaman adımlarında hesaplanmış kolon vektörüdür. $\mathbf{A}_{l,i}$ matrisi ise $l, i = 1, 2, \dots, 2M$ olmak üzere aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{l,i} = & \left(2 [p_{i,2}(x_l) - x_l p_{i,2}(1)] + \frac{\Delta t}{L} [p_{i,1}(x_l) - p_{i,2}(1)] + \right. \\ & \left. \epsilon \frac{\Delta t}{L} [(p_{i,2}(x_l) - x_l p_{i,2}(1)) (u_x)_j + (p_{i,1}(x_l) - p_{i,2}(1)) u_j] - 2 \frac{\mu}{L^2} h_i(x_l) \right) + \\ & 2 [f_1(t_{j+1}) + x_l (f_2(t_{j+1}) - f_1(t_{j+1}))] + \frac{\Delta t}{L} [f_2(t_{j+1}) - f_1(t_{j+1})] + \\ & \left. \epsilon \frac{\Delta t}{L} \left([f_1(t_{j+1}) + x_l (f_2(t_{j+1}) - f_1(t_{j+1}))] (u_x)_j + u_j [f_2(t_{j+1}) - f_1(t_{j+1})] \right) \right) \end{aligned}$$

Bu sistemin çözülmesiyle ile bulunan \mathbf{c}_i katsayıları (2.6)-(2.10) denklemlerinde yerlerine yazılarak çözümler ardışık olarak bulunabilir. Hesaplamaya başlamak için

$$\begin{aligned} u_0(x_l) &= g(x_l), \\ (u_x)_0(x_l) &= g'(x_l), \\ (u_{xx})_0(x_l) &= g''(x_l). \end{aligned}$$

başlangıç koşullarından faydalanılır.

2.3 Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde Haar dalgacık yöntemiyle elde edilen sonuçlar, tam çözüm ve literatürde mevcut olan başka yöntemler ile bulunan sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Nümerik çözümün tam çözüme ne kadar iyi yaklaştığını görmek için

$$\begin{aligned} L_2 &= \left(\Delta x_* \sum_{i=1}^{2M} |u_i^{\text{tam}} - u_i^{\text{num}}|^2 \right)^{1/2}, \\ L_\infty &= \max_i |u_i^{\text{tam}} - u_i^{\text{num}}| \end{aligned}$$

hata normları kullanılmıştır. Ayrıca RLW denkleminin sahip olduğu, sırasıyla kütle, momentum ve enerjiye karşılık gelen

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_a^b u dx_* \cong \Delta x_* \sum_{i=1}^{2M} u_i, \\
I_2 &= \int_a^b (u^2 + \mu u_{x_*}^2) dx_* \cong \Delta x_* \sum_{i=1}^{2M} [(u_i)^2 + \mu ((u_{x_*})_i)^2], \\
I_3 &= \int_a^b (u^3 + 3u^2) dx_* \cong \Delta x_* \sum_{i=1}^{2M} (u_i^3 + 3(u_i)^2).
\end{aligned}$$

korunum sabitleri [72] hesaplanıp bunlardaki değişimler incelenmiştir. Korunum sabitlerinin değişmemesi beklendiğinden, etkili bir nümerik algoritmanın korunum sabitlerini iyi muhafaza etmesi beklenir [69]. Burada u_i^{tam} tam çözümü ve u_i^{num} nümerik çözümü göstermektedir. Δx_* ise konum değişkeninin adım uzunluğudur.

2.3.1 Tek soliter dalga hareketi

(2.1) ile verilen RLW denklemini ilk olarak

$$u(x_*, 0) = 3c \operatorname{sech}^2(k(x_* - x_0)), \quad k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon c}{\mu v}}, \quad v = 1 + \epsilon c \quad (2.12)$$

başlangıç koşulu ve $x_* \rightarrow \pm\infty$ iken $u \rightarrow 0$ sınır koşulları ile alınmıştır. Nümerik hesaplamalar için $-40 \leq x_* \leq 60$ sonlu aralığı seçilip problem $\epsilon = 1$, $\mu = 1$, $x_0 = 0$ ve $\Delta t = 0.1$ parametrelerine göre çözülmüştür. Problemin tam çözümü [53]

$$u(x_*, t) = 3c \operatorname{sech}^2(k(x_* - vt - x_0))$$

şeklinindedir. Bu tam çözüm başlangıçta x_0 noktasında bulunan $3c$ genlikli, k genişlikli ve v sabit hızıyla sağa doğru ilerleyen soliter dalga hareketini ifade etmektedir. Problemin korunum sabitlerinin analitik değerleri aşağıda verilmiştir [58]:

$$I_1 = \frac{6c}{k}, \quad I_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5}, \quad I_3 = \frac{36c^2}{k} + \frac{144c^3}{5k}.$$

Ele alınan RLW denkleminin (2.11) ile verilen ayrık formunda $\Delta t = 0.1$ ve (2.12) başlangıç koşulunda bulunan c parametresi $c = 0.1$ alınarak farklı kollokasyon noktaları için hata normlarının karşılaştırılması Tablo 2.1'de verilmiştir. Tablodan kollokasyon noktalarının artmasıyla hata normlarının düştüğü görülmektedir. Tablo 2.2, $2M = 512$ ve $2M = 1024$ kollokasyon noktaları için korunum sabitlerinin hesaplama süresince neredeyse sabit kaldıklarını göstermektedir.

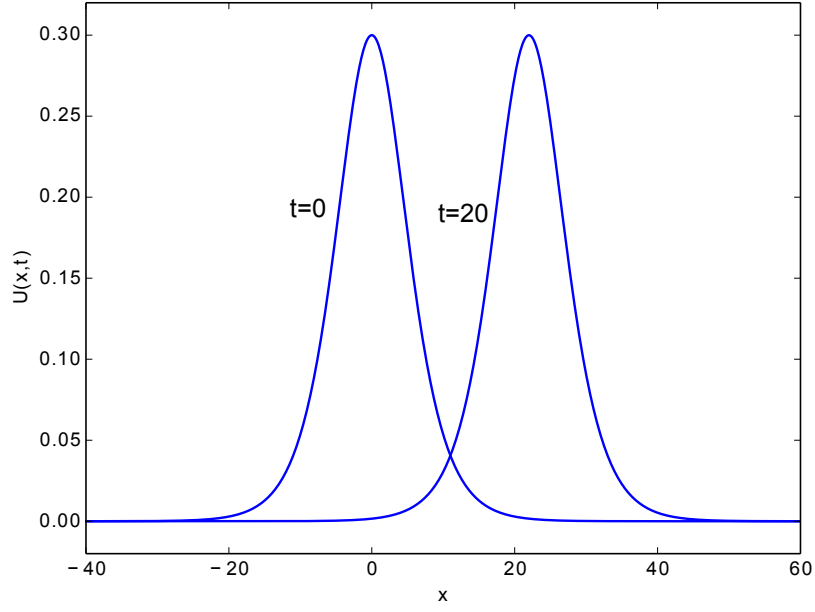
Tablo 2.1: $c = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ için farklı kollokasyon ve farklı zamanlarda tek soliter dalga probleminin hata normları.

t	$2M = 256$		$2M = 512$		$2M = 1024$	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
4	0.37262	0.14931	0.12505	0.04946	0.06366	0.02456
8	0.73957	0.30224	0.24831	0.10003	0.12626	0.04968
12	1.09250	0.44199	0.36747	0.14723	0.18716	0.07351
16	1.42882	0.56900	0.48169	0.19023	0.24594	0.09556
20	1.74833	0.68428	0.59079	0.22942	0.30249	0.11589

Tablo 2.2: $-40 \leq x_* \leq 60$ ve $\Delta t = 0.1$, $c = 0.1$ için tek soliter dalga probleminin korunum sabitleri.

t	$2M = 512$			$2M = 1024$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	3.979927	0.810462	2.579007	3.979927	0.810462	2.579007
4	3.979930	0.810457	2.578998	3.979930	0.810461	2.579005
8	3.979928	0.810457	2.578998	3.979928	0.810461	2.579005
12	3.979926	0.810457	2.578998	3.979926	0.810461	2.579005
16	3.979917	0.810457	2.578997	3.979917	0.810461	2.579005
20	3.979883	0.810456	2.578997	3.979883	0.810461	2.579005

Soliter dalganın $t = 0$ 'dan $t = 20$ 'ye kadar $2M = 1024$ kollokasyon noktası için hareketi Şekil 2.1'de verilmiştir. Tablo 2.3'te dalganın farklı zamanlardaki konum ve genliği verilmiştir. Buradan da görüleceği üzere dalganın genliğinde çok az bir değişiklik olmuştur. Örneğin $c = 0.1$ için $t = 0$ da genlik 0.3 iken $t = 20$ 'de dalganın hesaplanan genliği 0.299961 dir. Yani $t = 0$ ve $t = 20$ arasında bağıl hata yaklaşık olarak %0.013'tür. Ayrıca soliter dalganın $v = 1 + \epsilon c$ yardımıyla hızı teorik olarak 1.1 bulunmuşken bu değer nümerik hesaplamalarda yaklaşık 1.098 bulunmuştur.



Şekil. 2.1: $2M = 1024$ nokta için tek soliter dalganın hareketi.

Tablo 2.3: Tek soliter dalganın $c = 0.1$, $c = 0.03$ ve $2M = 1024$ için farklı zamanlardaki konum ve genliği.

Zaman	$c = 0.1$		$c = 0.03$	
	Konum	Genlik	Konum	Genlik
$t = 0$	0.000000	0.300000	0.000000	0.090000
$t = 4$	4.384766	0.299995	4.091797	0.089999
$t = 8$	8.779297	0.299988	8.193359	0.089998
$t = 12$	13.173828	0.299980	12.392578	0.089999
$t = 16$	17.568359	0.299971	16.494141	0.089999
$t = 20$	21.962891	0.299961	20.595703	0.089999

Tablo 2.4'te 1024 kollokasyon noktası için Haar dalgacıkları ile elde edilen sonuçların literatürdeki başka sonuçlarla karşılaştırılması verilmiştir. Tablodan, uygulanan yöntemle elde edilen sonuçların sonlu farklar [56], kübik B-spline sonlu eleman [58], en küçük kare kübik B-spline sonlu eleman [60] ve B-Spline kollokasyon [66] yöntemlerinden elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu görülmektedir. Genliği 0.3 olan soliter dalganın $t = 0$ ve $t = 20$ arasında I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin bağıl değişimleri $\frac{|\text{Tam Değer} - \text{Nümerik Değer}|}{\text{Tam Değer}} \times 100$ formülü ile sırasıyla $\%1.67 \times 10^{-3}$, $\%1.85 \times 10^{-4}$ ve $\%9.74 \times 10^{-5}$ olarak hesaplandı. Elde edilen bu sonuçlar korunum sabitlerinde ihmal edilecek kadar küçük değişim olduğunu göstermektedir. Tablo 2.5'te 512 kollokasyon noktası için Haar dalgacıklarının sonuçları ile literatürdeki başka sonuçların bir başka karşılaştırılması verilmiştir. Tablodan, bölüntü sayısı literatürde verilen çalışmalarda kullanılanlardan daha küçük seçilmesine rağmen L_2 ve L_∞ hata normlarının

[57, 63, 64]'teki çalışmalardan daha küçük olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 2.4: $-40 \leq x \leq 60$, $t = 20$, $\Delta t = 0.1$, $\Delta x = 0.1$ ve $c = 0.1$ için tek soliter dalga probleminin hata normları ve korunum sabitleri.

	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	I_3
Analitik			3.97992	0.81046	2.57900
Haar	0.302	0.115	3.97988	0.81046	2.57900
Kutluay [56]	0.550	0.210	3.97997	0.81045	2.57901
Gardner [57]	0.220	0.086	3.97989	0.81046	2.57902
Zaki [58]	0.514	0.181	3.97781	0.80963	2.57620
Dağ [60]	0.014	1.500	3.96466	0.80461	2.56971
Jain [63]	196.1	67.35	4.41219	0.89734	2.85361
Raslan [64]	0.532	0.227	3.97803	0.80972	2.57657
Saka QBCM2 [66]	0.357	0.129	3.97995	0.81046	2.57901
Saka QBCM1 [66]	0.215	0.083	3.97995	0.81046	2.57901

Tablo 2.5: $-40 \leq x \leq 60$, $t = 20$, $\Delta t = 0.1$ ve $c = 0.03$ için tek soliter dalga probleminin hata normları ve korunum sabitleri.

	Bölüntü S.	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	I_3
Haar	512	0.550	0.234	2.10461	0.12730	0.38880
Kutluay [56]	1000	0.638	0.233	2.10900	0.12730	0.38880
Gardner [57]	1000	0.563	0.432	2.1050	0.12730	0.38880
Zaki [58]	1000	0.416	0.231	2.10760	0.12730	0.38879
Dağ [60]	1000	0.032	1.598	2.13070	0.12720	0.38846
Jain [63]	1000	14.45	3.996	2.33300	0.14081	0.43005
Raslan [64]	1000	0.572	0.364	2.10362	0.12718	0.38843
Saka QBCM2 [66]	800	0.359	0.302	2.10832	0.12909	0.38881
Saka QBCM1 [66]	800	0.356	0.295	2.10831	0.12913	0.38881

2.3.2 İki soliter dalganın etkileşimi

RLW denklemini ikinci olarak, genliği $3c_1$ olup başlangıçta konumu x_1 noktasında bulunan bir soliter dalga ile genliği $3c_2$ olup başlangıçta konumu x_2 noktasında bulunan başka bir soliter dalganın hareketini ifade eden

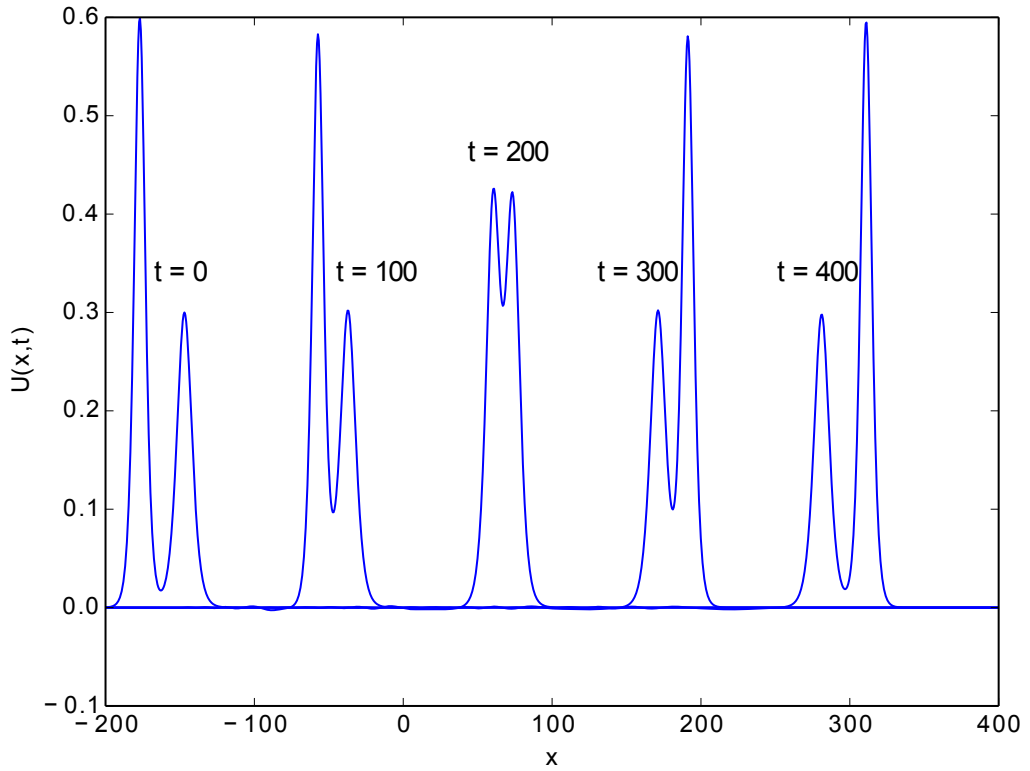
$$u(x_*, 0) = 3c_1 \operatorname{sech}^2 [k_1(x_* - x_1)] + 3c_2 \operatorname{sech}^2 [k_2(x_* - x_2)], \quad k_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon c_i}{\mu(1 + \epsilon c_i)}}, \quad (i = 1, 2)$$

başlangıç koşulu ile göz önüne alınmıştır. Nümerik sonuçlar $-200 \leq x_* \leq 400$ aralığında $c_1 = 0.2$, $c_2 = 0.1$, $x_1 = -177$, $x_2 = -147$, $\Delta t = 0.1$, $2M = 1024$, $\epsilon = 1$ ve $\mu = 1$ değerleri için elde edilmiştir.

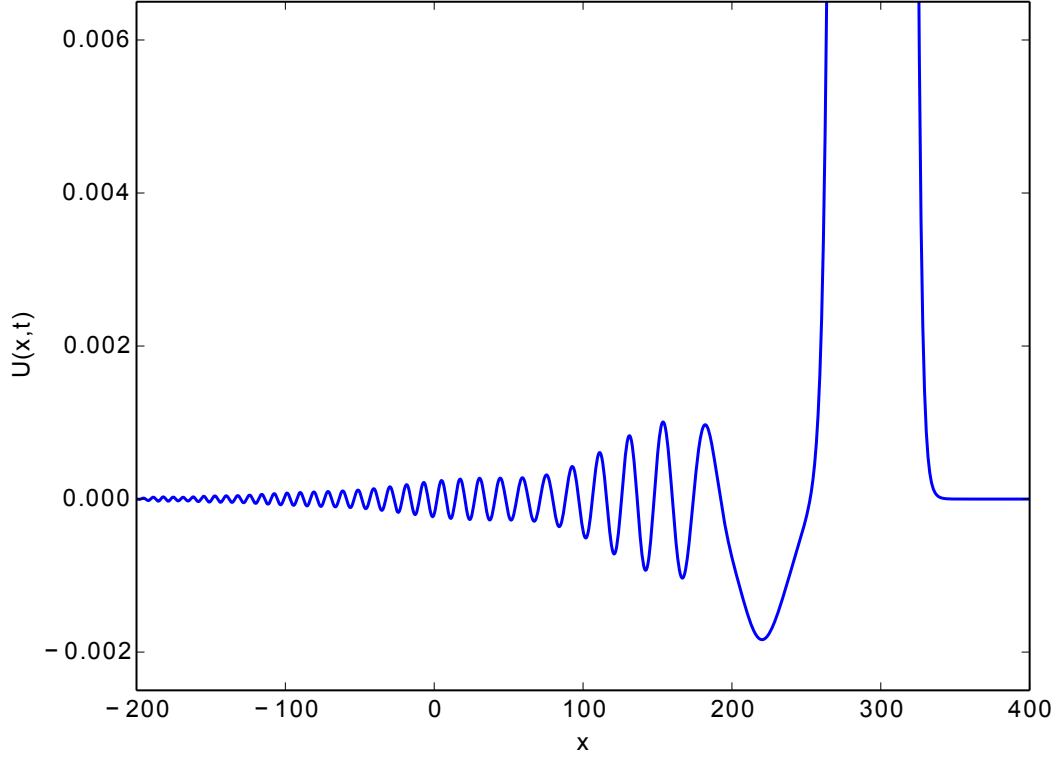
İki dalganın hareketi ve etkileşimini gözlemlemek için $t = 400$ 'e kadar farklı zamanlarda elde edilen nümerik çözümlerin grafikleri Şekil 2.2'de verilmiştir. Şekilden $t = 0$ 'da yüksek hıza sahip büyük genlikli dalga düşük hıza sahip küçük genlikli dalganın solunda iken zaman ilerledikçe büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalgayı

yakaladığı ve $t = 200$ civarında dalgaların etkileşime girdiği görülmektedir. $t = 400$ 'de iki dalganın birbirinden ayrılmaya başladığı açıktır. Ayrıca iki dalganın etkileşimi tamamlandıktan sonra geride kuyruk dalgalarını bıraktığını göstermek için $t = 400$ zamanındaki büyütülmüş grafik Şekil 2.3'te gösterilmiştir.

Tablo 2.6'da bu problem için elde edilen korunum sabitlerinin [61] ile karşılaştırılması verilmiştir. Simülasyon boyunca korunum sabitlerinde neredeyse hiç değişim olmadığı tablodan açıkça görülmektedir. $t = 0$ ile $t = 400$ zamanlarında hesaplanan korunum sabitlerindeki mutlak fark $\Delta I_1 = 9.6484 \times 10^{-5}$, $\Delta I_2 = 6.5029 \times 10^{-4}$, $\Delta I_3 = 0.0014783$ olarak hesaplanmıştır. Buradan elde edilen mutlak farkların [61]'de $\Delta I_1 = 0.0344$, $\Delta I_2 = 0.0136$, $\Delta I_3 = 0.0463$ olarak verilenlerden daha küçük olduğu görülmektedir.



Şekil. 2.2: $2M = 1024$ için iki soliter dalganın etkileşimi.



(a)

Şekil. 2.3: $t = 400$ deki yakınlaştırma.

Tablo 2.6: $2M = 1024$ için iki soliter dalganın etkileşimi probleminde elde edilen korunum sabitleri.

t	Haar			Doğan [61]		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	9.85823	3.24479	10.77832	9.8586	3.2449	10.7788
80	9.85833	3.24397	10.77591	9.8683	3.2475	10.7872
160	9.85833	3.24290	10.76928	9.8751	3.2506	10.7979
240	9.85833	3.24287	10.76907	9.8825	3.2544	10.8109
320	9.85833	3.24393	10.77563	9.8883	3.2569	10.8197
400	9.85833	3.24414	10.77685	9.8930	3.2585	10.8251

2.3.3 Dalga gelişimi (Wave undulation)

Son olarak 2.1 denklemini

$$u(x_*, 0) = \frac{U_0}{2} \left[1 - \tanh\left(\frac{x_* - x_0}{d}\right) \right]$$

başlangıç koşulu ve

$$u(a,t) = U_0, \quad u(b,t) = 0$$

sınır koşullarıyla göz önüne alınmıştır. Burada; $u(x_*,0)$, $t = 0$ anında denge seviyesi üzerindeki su yüzeyi yüksekliğini; U_0 , su seviyesindeki $x = x_0$ merkezli büyüklük değişimini ve d değişimin dikliğini (*steepness*) göstermektedir. Bu problem için verilen sınır şartları altında korunum sabitleri artık sabit kalmaz, simülasyon boyunca lineer olarak aşağıdaki oranlarda artar [58].

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{d}{dt} I_1 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u dx_* = U_0 + \frac{1}{2} U_0^2, \\ M_2 &= \frac{d}{dt} I_2 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + \mu u_{x_*}^2) dx_* = U_0^2 + \frac{2}{3} U_0^3, \\ M_3 &= \frac{d}{dt} I_3 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (u^3 + 3u^2) dx_* = 3U_0^2 + 3U_0^3 + \frac{3}{4} U_0^4. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Bigisayar simülasyonu $-36 \leq x_* \leq 300$ aralığında $\mu = 1/6$, $U_0 = 0.1$, $x_0 = 0$, $\Delta t = 0.1$, $\epsilon = 1.5$, $2M = 1024$ ve $d = 2, 5$ için $t = 250$ zamanına kadar yapılmıştır. Tablo 2.7'de korunum sabitlerinin lumped Galerkin yöntemiyle [62] bir karşılaştırılması verilmiştir. Sonuçların Galerkin yöntemiyle uyum içinde olduğu görülmektedir. Tablo 2.8'de öncü dalğanın konum ve genliği gösterilip yine Galerkin yöntemiyle [62] karşılaştırılması verilmiştir.

Korunum sabitlerindeki değişimlerin nümerik değerleri $d = 2$ için $M_1 = 0.10750$, $M_2 = 0.011001$ ve $M_3 = 0.034099$ olarak ve $d = 5$ için $M_1 = 0.10750$, $M_2 = 0.011001$ ve $M_3 = 0.034099$ olarak elde edilmiştir. Bu değerlerin, (2.13) ile hesaplanan $M_1 = 0.1050$, $M_2 = 0.01067$ ve $M_3 = 0.033075$ analitik değerleriyle de uyumlu olduğu görülmektedir.

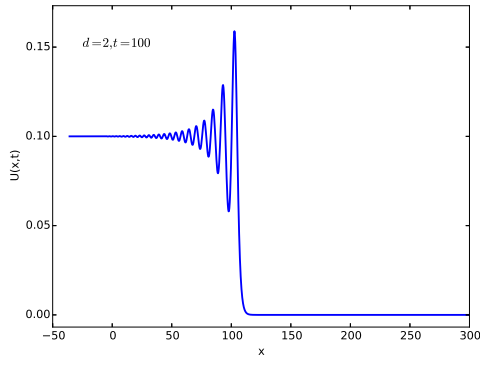
Tablo 2.7: $2M = 1024$ ve $\Delta t = 0.1$ için dalga gelişiminin korunum sabitleri.

d	t	I_1	I_2	I_3	I_1 [62]	I_2 [62]	I_3 [62]
2	0	3.600000	0.350278	1.084500	3.6120001	0.35148	1.08822
	50	8.975000	0.900318	2.789723	8.9869997	0.90144	2.79314
	100	14.350000	1.450376	4.494792	14.3619987	1.45140	4.49778
	150	19.725000	2.000442	6.199787	19.7369989	2.00134	6.20229
	200	25.100002	2.550511	7.904754	25.1119971	2.55128	7.90675
	250	30.475001	3.100580	9.609708	30.4869971	3.10123	9.61118
5	0	3.600000	0.335111	1.037250	3.6120002	0.33631	1.04097
	50	8.975000	0.885121	2.742780	8.9870004	0.88630	2.74643
	100	14.350000	1.435150	4.448122	14.3619996	1.43628	4.45156
	150	19.725000	1.985202	6.153253	19.7369994	1.98624	6.15631
	200	25.100000	2.535265	7.858269	25.1119996	2.53618	7.86086
	250	30.475000	3.085333	9.563244	30.4869998	3.08613	9.56533

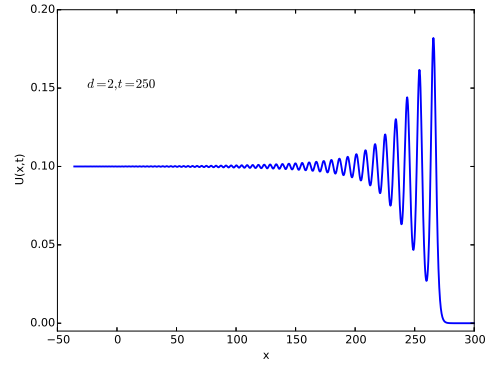
Tablo 2.8: $2M = 1024$ ve $\Delta t = 0.1$ için öndeki dalğanın konum ve büyüklüğü.

d	t	Konum	Genlik	Konum[62]	Genlik[62]
2	50	48.8203125	0.139492	48.96000	0.13960
	100	102.632812	0.158899	102.72000	0.15900
	150	156.773438	0.170523	156.96000	0.17065
	200	211.242188	0.177615	211.20000	0.17735
	250	265.710938	0.181981	265.92000	0.18177
5	50	48.492188	0.110496	48.48000	0.11028
	100	102.304688	0.136963	102.24000	0.13686
	150	156.117188	0.157203	156.24000	0.15741
	200	210.585938	0.170250	210.72000	0.17012
	250	265.054688	0.177411	264.96000	0.17767

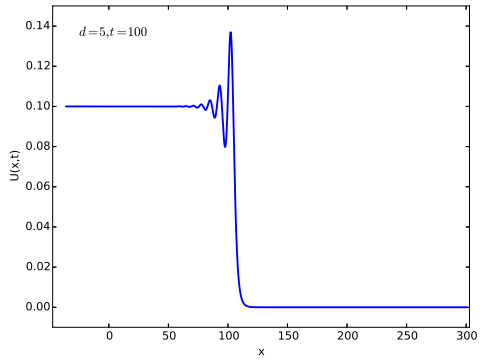
Şekil 2.4'te dalğanın gelişimi sırasıyla $t = 100$ ve $t = 250$ zamanlarında $d = 2$ ve $d = 5$ için verilmiştir. Şekil 2.4'ten d değerinin azalması ya da zamanın artmasıyla dalga sayısının arttığı görülmektedir.



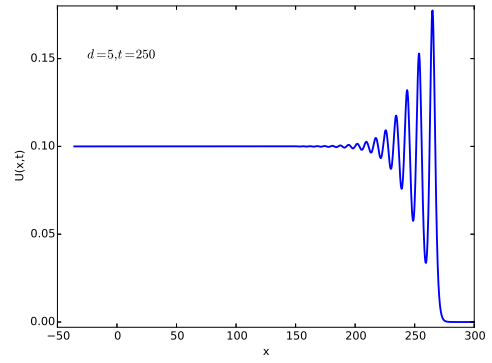
(a) $d = 2, t = 100$.



(b) $d = 2, t = 250$.



(c) $d = 5, t = 100$.



(d) $d = 5, t = 250$.

Şekil. 2.4: $2M = 1024$ nokta için dalga gelişimi.

BÖLÜM 3

KDV DENKLEMİNİN HAAR DALGACIK YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

ϵ ve μ reel parametreler olmak üzere

$$u_t + \epsilon uu_y + \mu u_{yyy} = 0 \quad (3.1)$$

olarak verilen Korteweg-de Vries (KdV) denklemi [73], uu_y lineer olmayan terimi ve u_{yyy} lineer terimi arasındaki dengelenme sonucunda soliton dalgalar üreten, mühendislik ve fizikte bir çok uygulaması bulunan önemli lineer olmayan evölüsyon denklemlerinden biridir. Denkleminde bulunan uu_y terimi dalga biçiminin dikleşmesine neden olan konveksiyon (ısı yayılması) etkisini ve u_{yyy} terimi dalganın yayılmasını sağlayan dağılım etkisini temsil etmektedir. İşte bu konveksiyon etkisi ve dağılım etkisi rekabeti nedeniyle bir soliter dalga ortaya çıkmaktadır. Soliter dalgalarında, solitonlar şekil ve hızında değişim meydana gelmeden yayılan lokalize dalgalar olarak tanımlanırlar [74]. KdV tipindeki denklemler, plazma fiziğinde iyon akustik solitonlar [75], jeofiziksel akışkanlar dinamiklerinde, sığ denizlerde ve derin okyanuslarda uzun bir dalga [76, 77] gibi fizik ve mühendisliğin önemli problemlerinin modellenmesinde kullanılır [78, 79, 80, 81].

(3.1) denkleminin varlık ve tekliği uygun başlangıç koşulları altında Gardner vd. [73] tarafından çalışılmıştır. Bu denklemin tam çözümü genelde bilinmemektedir. Dolayısıyla (3.1) denkleminin nümerik çözümlerini bulmak bir çok araştırmacının ilgi odağı olmuştur. Örneğin sonlu fark, sonlu eleman ve spektral metodlar [82, 83, 84, 85], ağsız metodlar [86, 87, 88, 89] ve yarı analitik metodlar [90], (3.1) denkleminin nümerik çözümlerini bulmak için kullanılan metodlardan bazılarıdır. Bu bölümde (3.1) denklemini

$$u(y, 0) = f(y), \quad y_1 \leq y \leq y_2$$

başlangıç koşulu ve

$$\begin{aligned} u(y_1, t) = u(y_2, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u_y(y_2, t) = 0, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

sınır koşulları ile göz önüne alınmıştır.

Haar dalgacıkları $x \in [0, 1]$ 'de tanımlandığı için (3.1) denkleminde $x = \frac{y-y_1}{L}$, $L = y_2 - y_1$ değişken değişimi uygulanarak problem

$$u_t + \frac{\epsilon}{L}uu_x + \frac{\mu}{L^3}u_{xxx} = 0 \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u_x(1, t) = 0, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

biçimine dönüştürülür.

3.1 Zamana Göre Ayrıklaştırma

Zaman değişkeninin ayrıklaştırılması için genelleştirilmiş Taylor-Euler ayrıklaştırılması kullanılmıştır. Bu yaklaşım ilk olarak [91, 92, 93] çalışmalarında kullanılmıştır. Kumar ve Mehra [8] bu yaklaşımı Burgers denklemi için Daubechies dalgacıklarıyla kullanmıştır. Canıvar vd. [94] çalışmasında bu yaklaşımı KdV denklemi için Galerkin yöntemiyle birlikte kullanmıştır. Bunun için t zaman değişkeni Taylor serisine açılırsa

$$(u_t)^n = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2}u_{tt}^n - O(\Delta t^2), \quad (3.4)$$

elde edilir. (3.2) denkleminin t ye göre türevi alınırsa

$$u_{tt} = \left(-\frac{\epsilon}{L}uu_x - \frac{\mu}{L^3}u_{xxx} \right)_t = -\frac{\epsilon}{L}u^n (u_t)_x - \frac{\epsilon}{L}u_x^n u_t^n - \frac{\mu}{L^3} (u_t^n)_{xxx}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikte u_t^n terimi yerine $\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}$ yaklaşımı yazılırsa

$$u_{tt} = -\frac{\epsilon}{L}u^n \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_x - \frac{\epsilon}{L}u_x^n \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right) - \frac{\mu}{L^3} \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_{xxx} \quad (3.5)$$

elde edilir. Daha sonra (3.2) ve (3.5) denklemleri (3.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$-\frac{\epsilon}{L}u^n u_x^n - \frac{\mu}{L^3}u_{xxx}^n = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \left[-\frac{\epsilon}{L}u^n \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_x - \frac{\epsilon}{L}u_x^n \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right) - \frac{\mu}{L^3} \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_{xxx} \right]$$

ifadesi bulunur. Bu ifade de denklemin yan koşulları eklenerek aşağıdaki gibi sade bir halde yazılabilir.

$$\left(1 + \frac{\epsilon}{L} \frac{\Delta t}{2} u^n \partial_x + \frac{\epsilon}{L} \frac{\Delta t}{2} u_x^n + \frac{\mu}{L^3} \frac{\Delta t}{2} \partial_x^3 \right) u^{n+1} = \left(1 - \frac{\mu}{L^3} \frac{\Delta t}{2} \partial_x^3 \right) u^n. \quad (3.6)$$

$$u^0 = f(x), \quad x \in [0, 1]$$

$$u^{n+1}(0) = f_1(t^{n+1}), \quad u^{n+1}(1) = f_2(t^{n+1}), \quad \left(u^{n+1} \right)_x(1) = f_3(t^{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.7)$$

Burada $n = 0, 1, \dots, N-1$ olmak üzere $t_{n+1} = \Delta t(n+1)$, $\Delta t N = T$ ve u^{n+1} (3.6)-(3.7) probleminin $(n+1)$. adımındaki çözümüdür.

3.2 Konuma Göre Haar Dalgacıklarıyla Ayrıklaştırma

(3.2) KdV denkleminde görülen en yüksek türev Haar dalgacıkları yardımıyla

$$u_{xxx}^{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{2M} c_i h_i(x) \quad (3.8)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu denklemin x 'e göre 0'dan x 'e integrali alınır

$$u_{xx}^{n+1}(x) = u_{xx}^{n+1}(0) + \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,1}(x) \quad (3.9)$$

bulunur. (3.9) denklemindeki $u_{xx}^{n+1}(0)$ terimi bilinmediğinden (3.9) denkleminin 0'dan 1'e integrali alınıp (3.7) sınır koşulları kullanılırsa

$$u_x^{n+1}(1) - u_x^{n+1}(0) = u_{xx}^{n+1}(0) + \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1),$$

$$u_{xx}^{n+1}(0) = f_3(t^{n+1}) - u_x^{n+1}(0) - \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1) \quad (3.10)$$

elde edilir. (3.10) denklemi (3.9) denkleminde yerine yazılarak ikinci türev için

$$u_{xx}^{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,1}(x) + f_3(t^{n+1}) - u_x^{n+1}(0) - \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1). \quad (3.11)$$

eşitliği bulunmuş olur. (3.11) denkleminin 0'dan x 'e tekrar integralinin alınmasıyla

$$u_x^{n+1}(x) = u_x^{n+1}(0) + \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(x) + x \left(f_3(t^{n+1}) - u_x^{n+1}(0) \right) - x \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1) \quad (3.12)$$

elde edilir. (3.10), (3.11) ve (3.12) denklemlerinde, $u_x^{n+1}(0)$ terimi bilinmediğinden (3.12) denkleminin 0'dan 1'e integrali alınıp (3.7) sınır koşulları uygulanırsa $u_x^{n+1}(0)$ terimi

$$u_x^{n+1}(0) = 2 \left[f_2(t^{n+1}) - f_1(t^{n+1}) - \frac{1}{2} f_3(t^{n+1}) - \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,3}(1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1) \right]$$

olarak bulunur. Bulunan bu değer (3.12) denkleminde yerine yazılırsa birinci türev

$$u_x^{n+1}(x) = 2 \left[f_2(t^{n+1}) - f_1(t^{n+1}) - \frac{1}{2} f_3(t^{n+1}) - \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,3}(1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1) \right] (1-x) + x \left(f_3(t^{n+1}) \right) + \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(x) - x \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1) \quad (3.13)$$

olarak elde edilir. Son olarak (3.13) denkleminin 0'dan x 'e integrali alınır

$$\begin{aligned}
u^{n+1}(x) &= 2 \left[f_2(t^{n+1}) - f_1(t^{n+1}) - \frac{1}{2} f_3(t^{n+1}) - \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,3}(1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1) \right] \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \\
&+ \frac{x^2}{2} (f_3(t^{n+1})) + \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,3}(x) - \frac{x^2}{2} \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1) + f_1(t_{n+1}) \quad (3.14)
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuçta, $u_{xxx}^{n+1}(x)$, $u_{xx}^{n+1}(x)$, $u_x^{n+1}(x)$ ve $u^{n+1}(x)$ terimleri haar dalgacıkları cinsinden sırasıyla

$$\begin{aligned}
u_{xxx}^{n+1}(x) &= \sum_{i=1}^{2M} c_i h_i(x), \\
u_{xx}^{n+1}(x) &= \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,1}(x) + f_3(t^{n+1}) - \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1) \\
&- 2 \left[f_2(t^{n+1}) - f_1(t^{n+1}) - \frac{1}{2} f_3(t^{n+1}) - \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,3}(1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1) \right], \\
u_x^{n+1}(x) &= 2 \left[f_2(t^{n+1}) - f_1(t^{n+1}) - \frac{1}{2} f_3(t^{n+1}) - \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,3}(1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1) \right] (1-x) \\
&+ x (f_3(t^{n+1})) + \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(x) - x \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1), \quad (3.15) \\
u^{n+1}(x) &= 2 \left[f_2(t^{n+1}) - f_1(t^{n+1}) - \frac{1}{2} f_3(t^{n+1}) - \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,3}(1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1) \right] \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \\
&+ \frac{x^2}{2} (f_3(t^{n+1})) + \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,3}(x) - \frac{x^2}{2} \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1) + f_1(t^{n+1})
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (3.15) denklemleri (3.6) denkleminde yerine yazılıp sonuçları $x_l = \frac{l-0.5}{2M}$, $l = 1, 2, \dots, 2M$ noktalarında ayrıklaştırılırsa KdV denklemi için

$$\mathbf{A}_{l,i} \mathbf{c}_i = u^n - \frac{\mu}{L^3} \frac{\Delta t}{2} u_{xxx}^n \quad (3.16)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Burada $\mathbf{A}_{l,i}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{l,i} = & 2 \left[-p_{i,3}(1) + \frac{1}{2} p_{i,2}(1) \right] \left(x_l - \frac{x_l^2}{2} \right) + p_{i,3}(x_l) - \frac{x_l^2}{2} p_{i,2}(1) + \\
& \epsilon \frac{\Delta t}{2L} \cdot \left[u^n \left(2 \left[-p_{i,3}(1) + \frac{1}{2} p_{i,2}(1) \right] (1 - x_l) + p_{i,2}(x_l) - x_l p_{i,2}(1) \right) \right. \\
& \left. + u_x^n \left(2 \left[-p_{i,3}(1) + \frac{1}{2} p_{i,2}(1) \right] \left(x_l - \frac{x_l^2}{2} \right) + p_{i,3}(x_l) - \frac{x_l^2}{2} p_{i,2}(1) \right) \right] \\
& + \mu \frac{\Delta t}{2L^3} h_i(x_l), \quad i = 1, 2, \dots, 2M.
\end{aligned}$$

şeklindedir. (3.16) sistemi çözülerek \mathbf{c}_i katsayıları bulunduktan sonra bu katsayılar (3.14) denkleminde yerine yazılarak nümerik çözüm ardışık olarak bulunabilir.

3.3 Nümerik Sonuçlar

Nümerik çözümlerin tam çözümlere ne kadar iyi yaklaştığını ölçmek için

$$\begin{aligned}
L_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{2M} |u_i^{\text{tam}} - u_i^{\text{num}}|^2} \\
L_\infty &= \max_i |u_i^{\text{tam}} - u_i^{\text{num}}|
\end{aligned}$$

hata normları ve nümerik yöntemin korunum sabitlerini ne kadar iyi muhafaza ettiğini görmek için

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u dy$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(u^3 - \frac{3}{\epsilon} \mu u_y^2 \right) dy.$$

korunum sabitleri [95] hesaplanmıştır. Burada u_i^{tam} tam çözümü ve u_i^{num} nümerik çözümü göstermektedir.

3.3.1 Tek soliton dalga problemi

(3.1) ile verilen KdV denklemi

$$u(y, 0) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} y - y_0 \right)$$

başlangıç şartı ve $u(-30, t) = u(30, t) = 0$ sınır koşulları ile göz önüne alınmıştır. Problemin tam çözümü

$$u(y, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} (y - ct) - y_0 \right).$$

olarak verilmektedir [96]. Bu problem $-30 \leq y \leq 30$ aralığında, (3.16) ayrıklaştırılmış denklemde $\epsilon = -6$, $\mu = 1$, $\Delta t = 0.025$ ve $u(y, 0)$ başlangıç şartındaki parametreler $y_0 = 0$, $c = -1$ değerleri alınarak çözülmüştür. Tablo 3.1'de, Haar dalgacık yöntemi ile elde edilen hata normları, korunum sabitleri ve ölçülen işlemci zamanları verilmiştir. Tablodan kollokasyon noktaları artarken hataların düştüğü görülmektedir.

Tablo 3.1: $\epsilon = -6$, $\mu = 1$ ve $t = 5$ için KdV tek soliter dalga probleminin hata normları ve korunum sabitleri.

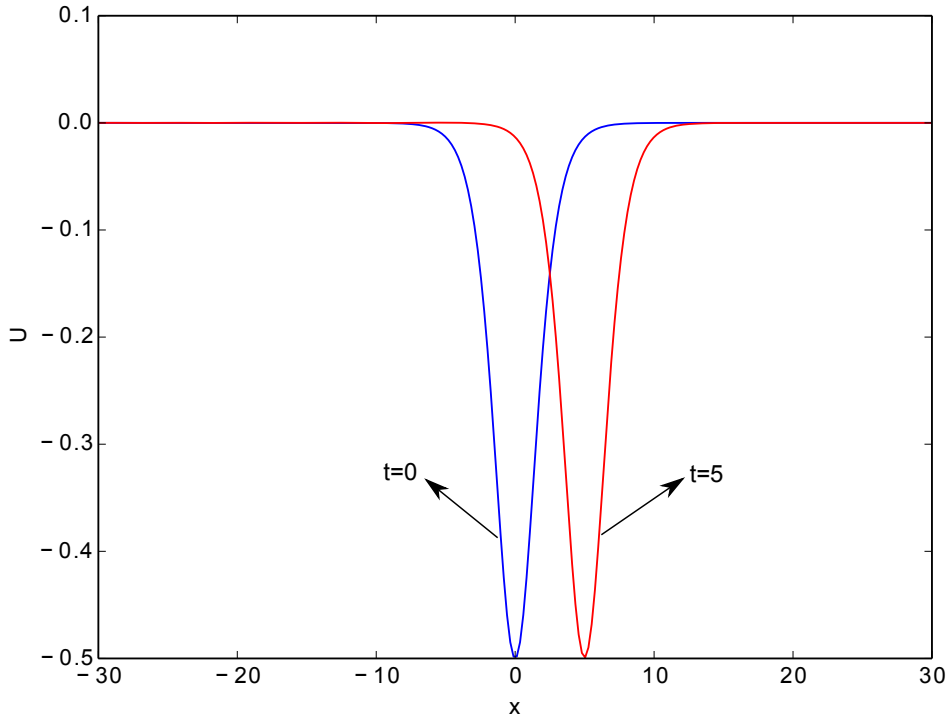
$2M$	L_∞	L_2	I_1	I_2	I_3	İşlemci zamanı
128	5.125535e-3	1.246500e-2	-2.000131	0.666668	-0.199955	0.8
256	1.450248e-3	4.887941e-3	-2.000014	0.666667	-0.199997	1.93
512	4.035078e-4	1.938313e-3	-2.000002	0.666667	-0.200000	15.63
1024	1.364662e-4	9.698138e-4	-2.000000	0.666667	-0.200000	61.03

Tablo 3.2'de, farklı zamanlar için hata normları, korunum sabitleri ve hesaplama için gereken işlemci zamanları verilmiştir. Bu tablodan korunum sabitlerinin hemen hemen sabit kaldığı görülmektedir. $t = 0$ ve $t = 5$ zamanları arasında I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki bağıl değişim $\frac{|I_n^{t=0} - I_n^{t=5}|}{I_n^{t=0}} \times 100$, ($n = 1, 2, 3$) formülü ile sırasıyla yaklaşık %0.00068, 7.7418×10^{-6} ve %0.00145 olarak hesaplanmıştır.

Tablo 3.2: $\epsilon = -6$, $\mu = 1$ ve $2M = 256$ için artan zamanlarda KdV tek soliter dalga probleminin hata normları ve korunum sabitleri.

t	L_∞	L_2	I_1	I_2	I_3	İşlemci zamanı
0	0	0	-2.000000	0.666667	-0.200000	0
1	7.323935e-4	2.289311e-3	-2.000001	0.666667	-0.199997	0.46
2	9.678022e-4	3.159668e-3	-2.000004	0.666667	-0.199997	0.85
3	1.140417e-3	3.790376e-3	-1.999954	0.666667	-0.199997	1.22
4	1.290261e-3	4.349251e-3	-1.999996	0.666667	-0.199997	1.5
5	1.450248e-3	4.887941e-3	-2.000014	0.666667	-0.199997	1.93

Tablo 3.3'te, Haar dalgacık yöntemi ile $x = 10, 15, 20, 25, 30$ noktalarında ve $t = 0.5$ zamanında elde edilen mutlak hataların Adomian ayrışım yöntemi (ADM)[90], homotopi analiz yöntemi (HAM) [90], varyasyonel iterasyon yöntemi (VIM) [90], homotopi pertürbasyon yöntemi (HPM) [90] ve açık sonlu fark yaklaşımı (EFDM) [90] ile karşılaştırılması verilmiştir. Elde edilen hataların diğer yöntemlerdeki hatalardan daha küçük olduğu açıkça görülmektedir. Şekil 3.1'de $\epsilon = -6$, $\mu = 1$, $2M = 256$ için $t = 0$ 'dan $t = 5$ 'e kadar tek dalganın hareketi verilmiştir.



Şekil. 3.1: $\epsilon = -6$, $\mu = 1$, $2M = 256$ için $t = 0$ 'dan $t = 5$ 'e tek soliter dalga hareketi.

Tablo 3.3: Tek soliter dalga probleminde $\epsilon = -6$, $c = 1$, $\mu = 1$ ve $t = 0.5$ için bir karşılaştırma.

Yöntemler	$x = 10$	$x = 15$	$x = 20$	$x = 25$	$x = 30$
ADM	2.99336e-4	2.01722e-6	1.35919e-8	9.15815e-11	6.17071e-13
HAM	2.56683e-4	1.72975e-6	1.16549e-8	7.85304e-11	5.29134e-13
(5. der. yaklşm.)					
VIM	6.09593e-4	4.10597e-6	2.76657e-8	1.86417e-10	1.25602e-12
(5 terim)					
HPM	2.99337e-4	2.01722e-6	1.35919e-8	9.15815e-11	6.17071e-13
(5 iterasyon)					
EFDM	1.35102e-5	8.94343e-8	6.03380e-10	4.06554e-12	2.73934e-14
($h = 0.05$)					
Haar	6.48807e-7	4.53146e-9	2.95359e-11	3.45719e-13	5.94063e-13
($2M = 128$)					
Haar	1.59215e-7	1.10328e-9	7.27026e-12	1.51781e-13	8.85066e-13
($2M = 256$)					
Haar	3.70319e-8	2.55480e-10	1.58948e-12	6.20498e-14	4.38945e-14
($2M = 512$)					

3.3.2 İki soliton dalgasının etkileşimi

Bu problemde (3.1) denklemi

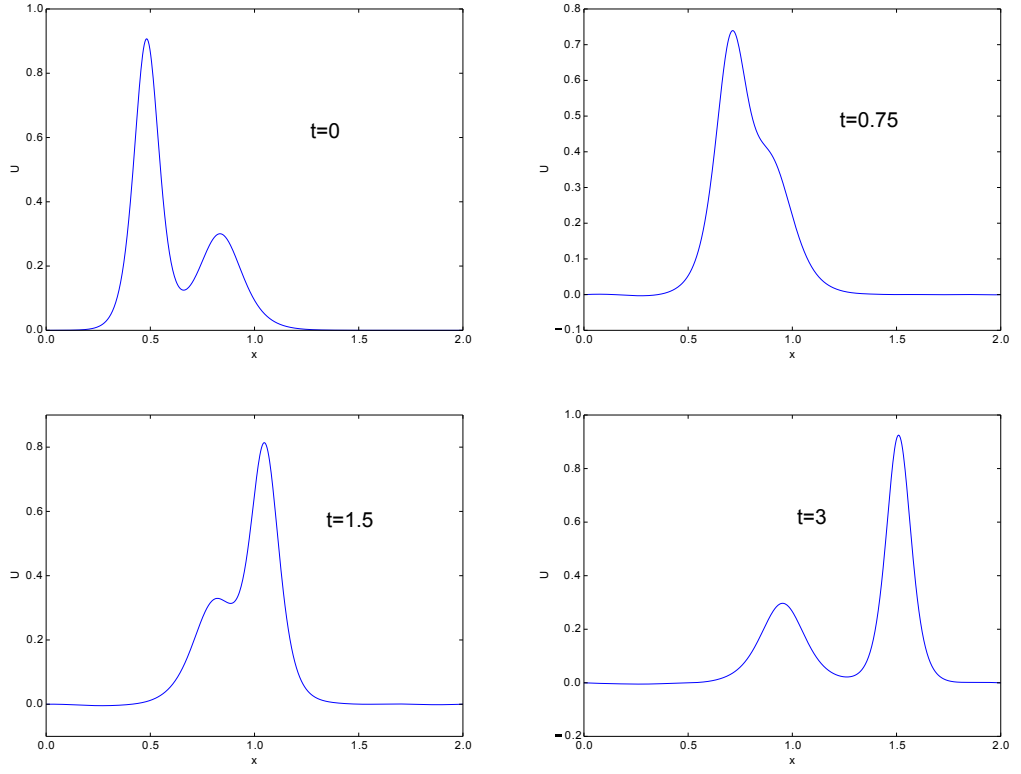
$$u(y, 0) = 3c_1 \operatorname{sech}^2(A_1 y + D_1) + 3c_2 \operatorname{sech}^2(A_2 y + D_2),$$

$$A_i = \frac{1}{2} \left(\epsilon \frac{c_i}{\mu_i} \right)^{1/2}, i = 1, 2.$$

başlangıç şartı ve $u(0, t) = u(2, t) = 0$ sınır koşulları ile göz önüne alınmıştır. Problem $c_1 = 0.3$, $c_2 = 0.1$, $D_1 = D_2 = -6$, $\Delta t = 0.005$ ve $2M = 512$ değerleri için çözülmüştür. Tablo 3.4'te, artan zamanlara göre hesaplanan korunum sabitleri verilmiştir. $t = 0$ ve $t = 3$ zamanları arasında $\frac{|I_n^{t=0} - I_n^{t=3}|}{I_n^{t=0}} \times 100$, ($n = 1, 2, 3$) formülü ile hesaplanan I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki bağıl değişim sırasıyla %0.1420, % 3.7626×10^{-5} ve %0.0027'dir. $\epsilon = 1$, $\mu = 4.84e - 4$, $2M = 512$ için $t = 0, 0.75, 1.5, 3$ zamanlarında dalgaların etkileşimi Şekil 3.2'de verilmiştir. Şekilden etkileşim sonlandığında soliton dalgaların yine eski hallerine dönüp hareketlerine devam ettikleri görülmektedir.

Tablo 3.4: $\epsilon = 1$, $\mu = 4.84e - 4$ ve $2M = 512$ için elde edilen korunum sabitleri ve geçen işlemci süreleri.

t	I_1	I_2	I_3	İşemci Zamanı
0	0.228081	0.107062	0.053316	0
0.75	0.228111	0.107059	0.053309	11.8
1.5	0.227893	0.107059	0.053312	23.5
3	0.227758	0.107062	0.053318	43.5



Şekil. 3.2: $\epsilon = 1$, $\mu = 4.84e - 4$, $2M = 512$ için $t = 0, 0.75, 1.5, 3$ 'te iki soliter dalganın etkileşimi.

BÖLÜM 4

NLS-KDV DENKLEMİNİN HAAR DALGACIK YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

İyon akustik (*ion-acoustic*) hızında hareket eden bir koordinat sistemindeki tek boyutlu Langmuir ve iyon akustik (*ion-acoustic*) dalgaların lineer olmayan dinamiklerini tanımlayan ikili lineer olmayan Schrödinger-KdV denklemi (NLS-KdV) [97, 98],

$$i\epsilon E_t + \frac{3}{2}E_{yy} - \frac{1}{2}NE = 0, \quad (4.1)$$

$$N_t + \frac{1}{2}N_{yyy} + \frac{1}{2}(N^2 + |E|^2)_y = 0 \quad (4.2)$$

olarak verilmektedir. Burada, E Langmuir salınımlarını ifade eden kompleks bir fonksiyon, N düşük frekanslı yoğunluk pertürbasyonunu ifade eden reel bir fonksiyon ve ϵ pozitif bir sabittir. NLS-KdV denklemi bir çok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Kaya ve El-Sayed [99] Adomian ayrışım yöntemiyle, Abdou ve Soliman [100] varyasyonel iterasyon yöntemiyle, Küçükarslan [101] homotopi pertürbasyon yöntemiyle, Labidi vd. [102] soliter dalga ansatz ve G'/G yöntemleriyle, Abardeh vd. [103] Fourier dönüşümü ve varyasyonel iterasyon yöntemi ile NLS-KdV denkleminin analitik çözümünü bulmuşlardır. Nümerik olarak; Appert ve Vaclavik [104] Crank-Nicolson (CN) sonlu farklar yöntemiyle, Bai ve Zhang [97, 98] B-spline sonlu elemanlar yöntemi (SSQBS FEM) ile, Golbabai ve Safdari-Vaighani [105] radyal temel fonksiyon ağırsız yöntemiyle, Ismail vd. [106] Petrov-Galerkin (PG) sonlu elemanlar yöntemi ile NLS-KdV denklemini çözmüşlerdir.

4.1 Zamana Göre Ayrıklaştırma

(4.1) ve (4.2) denklemleriyle verilen NLS-KdV denklemi, $u(y,t)$, $v(y,t)$ ve $w(y,t)$ reel fonksiyonlar olmak üzere:

$$E(y,t) = u(y,t) + iv(y,t), \quad i^2 = -1$$

$$N(y,t) = w(y,t)$$

alınarak

$$\begin{aligned} \epsilon u_t + \frac{3}{2} v_{yy} - \frac{1}{2} vw &= 0, \\ \epsilon v_t - \frac{3}{2} u_{yy} + \frac{1}{2} uw &= 0, \\ w_t + \frac{1}{2} w_{yyy} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2)_y &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

kısmi türevli denklem sistemi biçiminde yazılabilir. Burada $a \leq y \leq b$ ve $t \geq 0$ 'dır. Haar dalgacıkları $x \in [0, 1]$ için tanımlandığından dolayı (4.3) sistemi $[0, 1]$ aralığına dönüştürülmelidir. Bunun için $x = \frac{y-a}{L}$, $L = b - a$ dönüşümü kullanılırsa

$$\begin{aligned} \epsilon u_t + \frac{3}{2L^2} v_{xx} - \frac{1}{2} vw &= 0, \\ \epsilon v_t - \frac{3}{2L^2} u_{xx} + \frac{1}{2} uw &= 0, \\ w_t + \frac{1}{2L^3} w_{xxx} + \frac{1}{2L} (u^2 + v^2 + w^2)_x &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

sistemi elde edilir. Burada $0 \leq x \leq 1$ ve $t \geq 0$ 'dır. Şimdi (4.4) sisteminde zamana göre türevli terimlerin ileri sonlu fark yaklaşımı ve diğer terimlerin zaman adımına göre ortalamaları alınır

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{3}{2L^2} \frac{[v_{xx}^{n+1} + v_{xx}^n]}{2} - \frac{1}{2} \frac{[(vw)^{n+1} + (vw)^n]}{2} &= 0, \\ \epsilon \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} - \frac{3}{2L^2} \frac{[u_{xx}^{n+1} + u_{xx}^n]}{2} + \frac{1}{2} \frac{[(uw)^{n+1} + (uw)^n]}{2} &= 0, \\ \frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} + \frac{1}{2L^3} \frac{[w_{xxx}^{n+1} + w_{xxx}^n]}{2} + \frac{1}{L} \left(\frac{(uu_x)^{n+1} + (uu_x)^n}{2} \right) \\ + \frac{1}{L} \left[\left(\frac{(vv_x)^{n+1} + (vv_x)^n}{2} \right) + \left(\frac{(ww_x)^{n+1} + (ww_x)^n}{2} \right) \right] &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada bulunan $(uu_x)^{n+1}$ lineer olmayan terimi için $u^{n+1}u_x^n + u^n u_x^{n+1} - u^n u_x^n$ lineerleştirme yöntemi [71] kullanılıp daha sonra aynı yöntemle $(vv_x)^{n+1}$, $(ww_x)^{n+1}$, $(vw)^{n+1}$ ve $(uw)^{n+1}$ terimleri de lineerleştirip gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\epsilon u^{n+1} + \frac{3\Delta t}{4L^2} v_x^{n+1} - \frac{\Delta t}{4} (v^{n+1} w^n + v^n w^{n+1}) &= \epsilon u^n - \frac{3\Delta t}{4L^2} v_{xx}^n, \\
\epsilon v^{n+1} - \frac{3\Delta t}{4L^2} u_{xx}^{n+1} + \frac{\Delta t}{4} (u^{n+1} w^n + u^n w^{n+1}) &= \epsilon v^n + \frac{3\Delta t}{4L^2} u_{xx}^n, \\
w^{n+1} + \frac{\Delta t}{4L^3} w_{xxx}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2L} (u^{n+1} u_x^n + u^n u_x^{n+1}) + \\
\frac{\Delta t}{2L} [(v^{n+1} v_x^n + v^n v_x^{n+1}) + (w^{n+1} w_x^n + w^n w_x^{n+1})] &= w^n - \frac{\Delta t}{4L^3} w_{xxx}^n
\end{aligned} \tag{4.5}$$

bulunur. (4.5) sisteminin başlangıç koşulları

$$u^0 = \phi(x), \quad v^0 = \varphi(x), \quad w^0 = \psi(x), \quad x \in [0, 1] \tag{4.6}$$

ve sınır koşulları

$$\begin{aligned}
u^{n+1}(0) &= \phi_1(t^{n+1}), & u^{n+1}(1) &= \phi_2(t^{n+1}), \\
v^{n+1}(0) &= \varphi_1(t^{n+1}), & v^{n+1}(1) &= \varphi_2(t^{n+1}), \\
w^{n+1}(0) &= \psi_1(t^{n+1}), & w^{n+1}(1) &= \psi_2(t^{n+1}), \\
&& w_x^{n+1}(1) &= \psi_3(t^{n+1})
\end{aligned} \tag{4.7}$$

biçimindedir. Burada $n = 0, 1, \dots, N-1$ olmak üzere $t^{n+1} = \Delta t(n+1)$, $\Delta t N = T$ ve u^{n+1} , v^{n+1} ve w^{n+1} (4.5) sisteminin $(n+1)$. adımındaki çözümleridir.

4.2 Konuma Göre Haar Dalgacıklarıyla Ayrıklaştırma

Haar dalgacıklarıyla konum değişkeni ayrıklaştırılırken (4.5) sisteminde görülen en yüksek mertebeden türevlerin Haar serisine açılabilirdiği varsayılır. $u(x)$ ve $v(x)$ 'in (4.5) sisteminde görülen en yüksek türevleri ikinci mertebeden ve $w(x)$ 'in görülen en yüksek türevi üçüncü mertebededir. Dolayısıyla $u(x)$ ve $v(x)$ 'in ikinci türevleri ve $w(x)$ 'in üçüncü türevi Haar serilerine açılır. Önce $u(x)$ 'e göre ayrıklaştırma yapılırsa

$$u_{xx}^{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{2M} c_i h_i(x)$$

yazılabilir. $u_{xx}^{n+1}(x)$ 'in x 'e göre 0'dan x 'e integrali alınarak

$$u_x^{n+1}(x) = u_x^{n+1}(0) + \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,1}(x) \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.8) denkleminde $u_x^{n+1}(0)$ terimi bilinmediğinden (4.8) denkleminin 0'dan 1'e integrali alınıp $u(x)$ 'in (4.7) denklemindeki sınır koşulları kullanılırsa $u_x^{n+1}(0) = \phi_2(t^{n+1}) - \phi_1(t^{n+1}) - \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1)$ olarak bulunur. Bulunan $u_x^{n+1}(0)$ değeri (4.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_x^{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,1}(x) + \phi_2(t^{n+1}) - \phi_1(t^{n+1}) - \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1) \quad (4.9)$$

elde edilir. Şimdi, (4.9) denkleminin 0'dan x 'e integrali alınır

$$u^{n+1}(x) = \phi_1(t^{n+1}) + x(\phi_2(t^{n+1}) - \phi_1(t^{n+1})) + \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(x) - x \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1)$$

bulunur. Yukarıda $u(x)$ için yapılan işlemlerin aynısı $v(x)$ için de geçerlidir. Sonuç olarak, $u(x)$ için

$$\begin{aligned} u_{xx}^{n+1}(x) &= \sum_{i=1}^{2M} c_i h_i(x), \\ u_x^{n+1}(x) &= \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,1}(x) + \phi_2(t^{n+1}) - \phi_1(t^{n+1}) - \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1), \\ u^{n+1}(x) &= \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(x) + \phi_1(t^{n+1}) + x(\phi_2(t^{n+1}) - \phi_1(t^{n+1})) - x \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1) \end{aligned} \quad (4.10)$$

eşitlikleri ve $v(x)$ için de

$$\begin{aligned} v_{xx}^{n+1}(x) &= \sum_{i=1}^{2M} d_i h_i(x), \\ v_x^{n+1}(x) &= \sum_{i=1}^{2M} d_i p_{i,1}(x) + \varphi_2(t^{n+1}) - \varphi_1(t^{n+1}) - \sum_{i=1}^{2M} d_i p_{i,2}(1), \\ v^{n+1}(x) &= \sum_{i=1}^{2M} d_i p_{i,2}(x) + \varphi_1(t^{n+1}) + x(\varphi_2(t^{n+1}) - \varphi_1(t^{n+1})) - x \sum_{i=1}^{2M} d_i p_{i,2}(1) \end{aligned} \quad (4.11)$$

eşitlikleri elde edilir.

$w(x)$ 'in üçüncü mertebeden türevi için

$$w_{xxx}^{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{2M} e_i h_i(x) \quad (4.12)$$

dir. Bu denklemin x 'e göre 0'dan x 'e integre edilmesiyle

$$w_{xx}^{n+1}(x) = w_{xx}^{n+1}(0) + \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,1}(x) \quad (4.13)$$

elde edilir. (4.13) denkleminde $w_{xx}^{n+1}(0)$ terimi bilinmediğinden (4.13) denklemi 0'dan 1'e integre edilip (4.7) sınır koşulları uygulanırsa

$$w_x^{n+1}(1) - w_x^{n+1}(0) = w_{xx}^{n+1}(0) + \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,2}(1),$$

$$w_{xx}^{n+1}(0) = \psi_3(t^{n+1}) - w_x^{n+1}(0) - \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,2}(1) \quad (4.14)$$

bulunur. Daha sonra (4.14) denklemi, (4.13) denkleminde yerine yazılarak ikinci türev

$$w_{xx}^{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,1}(x) + \psi_3(t^{n+1}) - w_x^{n+1}(0) - \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,2}(1) \quad (4.15)$$

şeklinde bulunur. Şimdi (4.15) denkleminin 0'dan x 'e integrali alınırsa

$$w_x^{n+1}(x) = w_x^{n+1}(0) + \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,2}(x) + x \left(\psi_3(t^{n+1}) - w_x^{n+1}(0) \right) - x \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,2}(1) \quad (4.16)$$

elde edilir. (4.14), (4.15) ve (4.16) denklemlerinde bulunan $w_x^{n+1}(0)$ terimi bilinmediğinden (4.16) denkleminin 0'dan 1'e integrali alınıp (4.7) sınır koşulları kullanılırsa $w_x^{n+1}(0)$ terimi

$$w_x^{n+1}(0) = 2 \left[\psi_2(t^{n+1}) - \psi_1(t^{n+1}) - \frac{1}{2} \psi_3(t^{n+1}) - \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,3}(1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,2}(1) \right]$$

olarak bulunur. Daha sonra $w_x^{n+1}(0)$, (4.16) denkleminde yerine yazılarak

$$w_x^{n+1}(x) = 2 \left[\psi_2(t^{n+1}) - \psi_1(t^{n+1}) - \frac{1}{2} \psi_3(t^{n+1}) - \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,3}(1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,2}(1) \right] (1-x) \\ + x \left(\psi_3(t^{n+1}) \right) + \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,2}(x) - x \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,2}(1) \quad (4.17)$$

elde edilir. Son olarak (4.17) denkleminin 0'dan x 'e tekrar integrali alınırsa

$$w^{n+1}(x) = 2 \left[\psi_2(t^{n+1}) - \psi_1(t^{n+1}) - \frac{1}{2} \psi_3(t^{n+1}) - \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,3}(1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,2}(1) \right] \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \\ + \frac{x^2}{2} \left(\psi_3(t^{n+1}) \right) + \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,3}(x) - \frac{x^2}{2} \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,2}(1) + \psi_1(t_{n+1}) \quad (4.18)$$

bulunur. Sonuç olarak $w(x)$ için aşağıdaki eşitlikler bulunmuş olur:

$$w_{xxx}^{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{2M} e_i h_i(x), \\ w_{xx}^{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,1}(x) - 2 \left[\psi_2(t^{n+1}) - \psi_1(t^{n+1}) - \frac{1}{2} \psi_3(t^{n+1}) - \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,3}(1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,2}(1) \right] \\ + \psi_3(t^{n+1}) - \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,2}(1), \\ w_x^{n+1}(x) = 2 \left[\psi_2(t^{n+1}) - \psi_1(t^{n+1}) - \frac{1}{2} \psi_3(t^{n+1}) - \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,3}(1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,2}(1) \right] (1-x) \\ + x \left(\psi_3(t^{n+1}) \right) + \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,2}(x) - x \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,2}(1), \quad (4.19) \\ w^{n+1}(x) = 2 \left[\psi_2(t^{n+1}) - \psi_1(t^{n+1}) - \frac{1}{2} \psi_3(t^{n+1}) - \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,3}(1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,2}(1) \right] \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \\ + \frac{x^2}{2} \left(\psi_3(t^{n+1}) \right) + \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,3}(x) - \frac{x^2}{2} \sum_{i=1}^{2M} e_i p_{i,2}(1) + \psi_1(t_{n+1})$$

Elde edilen (4.10), (4.11) ve (4.19) eşitlikleri (4.5) denkleminde yerine yazılarak x değişkeni için $x_l = \frac{l-0.5}{2M}$, $l = 1, 2, \dots, 2M$ kollokasyon noktaları alınırsa NLS-KdV denkleminin için

$$\begin{aligned}
\epsilon \mathbf{A}_{l,i} \mathbf{c}_i + \mathbf{B}_{l,i} \mathbf{d}_i + \mathbf{C}_{l,i} \mathbf{e}_i &= \epsilon u^n - \frac{3\Delta t}{4L^2} v_{xx}^n - \epsilon S_1 \\
&\quad + \frac{\Delta t}{4} (S_2 w^n + v^n S_3) \\
-\mathbf{B}_{l,i} \mathbf{c}_i + \epsilon \mathbf{A}_{l,i} \mathbf{d}_i + \mathbf{D}_{l,i} \mathbf{e}_i &= \epsilon v^n + \frac{3\Delta t}{4L^2} u_{xx}^n - \epsilon S_2 \\
&\quad - \frac{\Delta t}{4} (S_1 w^n + u^n S_3) \\
\mathbf{E}_{l,i} \mathbf{c}_i + \mathbf{F}_{l,i} \mathbf{d}_i + \mathbf{G}_{l,i} \mathbf{e}_i &= w_n - \frac{\Delta t}{4L^3} w_{xxx}^n - S_3 \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2L} (S_1 u_x^n + u^n P_1) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2L} (S_2 v_x^n + v^n P_2 + S_3 w_x^n + w^n P_3) \tag{4.20}
\end{aligned}$$

tam ayrıklaştırılmış lineer denklem sistemi elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{l,i} &= p_{i,2}(x_l) - x_l p_{i,2}(1), \mathbf{D}_{l,i} = \left[\frac{\Delta t}{4} \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{l,i} u^n \right], \\
\mathbf{B}_{l,i} &= \left[\frac{3\Delta t}{4L^2} h_i(x_l) - \frac{\Delta t}{4} (p_{i,2}(x_l) - x_l p_{i,2}(1)) w^n \right], \\
\mathbf{C}_{l,i} &= \left[-\frac{\Delta t}{4} \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{l,i} v^n \right], \mathbf{E}_{l,i} = \frac{\Delta t}{2L} [(p_{i,2}(x_l) - x_l p_{i,2}(1)) u_x^n + (p_{i,1}(x_l) + p_{i,2}(1)) u^n], \\
\mathbf{F}_{l,i} &= \frac{\Delta t}{2L} [(p_{i,2}(x_l) - x_l p_{i,2}(1)) v_x^n + (p_{i,1}(x_l) + p_{i,2}(1)) v^n], \\
\mathbf{G}_{l,i} &= \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{l,i} + \frac{\Delta t}{4L^3} h_i(x_l) + \frac{\Delta t}{2L} (\mathbf{Q} \mathbf{Q}_{l,i} w_x^n + \mathbf{Q}_{l,i} w^n), \\
S_1 &= \phi_1(t^{n+1}) + x_l (\phi_2(t^{n+1}) - \phi_1(t^{n+1})), \\
S_2 &= \varphi_1(t^{n+1}) + x (\varphi_2(t^{n+1}) - \varphi_1(t^{n+1})), \\
S_3 &= 2 \left[\psi_2(t^{n+1}) - \psi_1(t^{n+1}) - \frac{1}{2} \psi_3(t^{n+1}) \right] \left(x_l - \frac{x_l^2}{2} \right) \\
&\quad + \frac{x_l^2}{2} (\psi_3(t^{n+1})) + \psi_1(t_{n+1}), \\
P_1 &= \phi_2(t^{n+1}) - \phi_1(t^{n+1}), \\
P_2 &= \varphi_2(t^{n+1}) - \varphi_1(t^{n+1}), \\
P_3 &= 2 \left[\psi_2(t^{n+1}) - \psi_1(t^{n+1}) - \frac{1}{2} \psi_3(t^{n+1}) \right] (1 - x_l) \\
&\quad + x_l (\psi_3(t^{n+1})),
\end{aligned}$$

olarak tanımlanan L_2 ve L_∞ hata normları kullanılmıştır. Burada u_i^{tam} tam çözümü ve u_i^{num} nümerik çözümü göstermektedir. Δy ise konum değişkeninin adım uzunluğudur. Ayrıca NLS-KdV denkleminin; plazmon sayısını veren

$$I_1 = \int |E|^2 dy,$$

partikül sayısını veren

$$I_2 = \int N dy,$$

ve enerji salınımını veren

$$I_3 = \int \left[3|E_y|^2 + N|E|^2 + \frac{1}{3}N^3 - \frac{1}{2}(N_y)^2 \right] dy$$

korunum sabitleri hesaplanmıştır [97].

(4.1) ve (4.2) denklemlerinin tam çözümü

$$E(y, t) = -\frac{6}{5} \sqrt{3} \alpha \frac{\tanh \xi}{\cosh \xi} \times \exp \left\{ i \alpha \left[\left(\frac{3}{20\epsilon} - \frac{\epsilon \alpha}{6} \right) t - \frac{\epsilon y}{3} \right] \right\},$$

$$N(y, t) = -\frac{9}{5} \alpha \frac{1}{\cosh^2 \xi}$$

şeklinde [104]. Burada α pozitif bir parametre olmak üzere $\xi = (\alpha/10)^{1/2}(y + \alpha t)$ dir. Nümerik çözümü hesaplamak için gerekli olan başlangıç ve sınır koşullar tam çözümden alınmıştır. Bilgisayar simülasyonları NLS-KdV denkleminin ayrıklaştırılmış formu olan (4.20) denkleminin Δt ve ϵ parametrelerinin farklı değerleri için çözümlenmesiyle yapılmıştır. Birinci simülasyon $-50 \leq y \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.1$, $\alpha = 0.45$, $\epsilon = 1$ parametreleri ve $2M = 1024$ kollokasyon noktası için yapılmıştır. Tablo 4.1'de artan zamanlar için hesaplanmış L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte korunum sabitleri verilmiştir. Tablodan korunum sabitlerinin hemen hemen sabit kaldığı görülmektedir. $t = 0$ ve $t = 10$ arasında I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki bağıl değişim miktarı $\frac{|I_i^{t=0} - I_i^{t=10}|}{I_i^{t=0}} \times 100$, ($i = 1, 2, 3$) formülü ile sırasıyla yaklaşık $\%3.32754 \times 10^{-6}$, $\% - 2.27103 \times 10^{-6}$ ve $\% - 0.01024$ olarak hesaplanmıştır.

Tablo 4.1: $-50 \leq y \leq 50$, $2M = 1024$, $\Delta t = 0.1$, $\epsilon = 1$ ve $\alpha = 0.45$ parametreleri için farklı zamanlardaki hata normları ve korunum sabitleri.

t	L_2^E	L_∞^E	L_2^N	L_∞^N
1	3.724543e-6	1.381246e-5	1.746928e-6	8.445736e-6
2	7.578010e-6	2.984995e-5	3.735585e-6	2.038150e-5
5	1.875066e-5	7.670633e-5	1.182382e-5	6.682404e-5
8	3.054598e-5	1.213177e-4	2.155259e-5	1.145447e-4
10	3.898884e-5	1.498269e-4	2.818029e-5	1.432171e-4

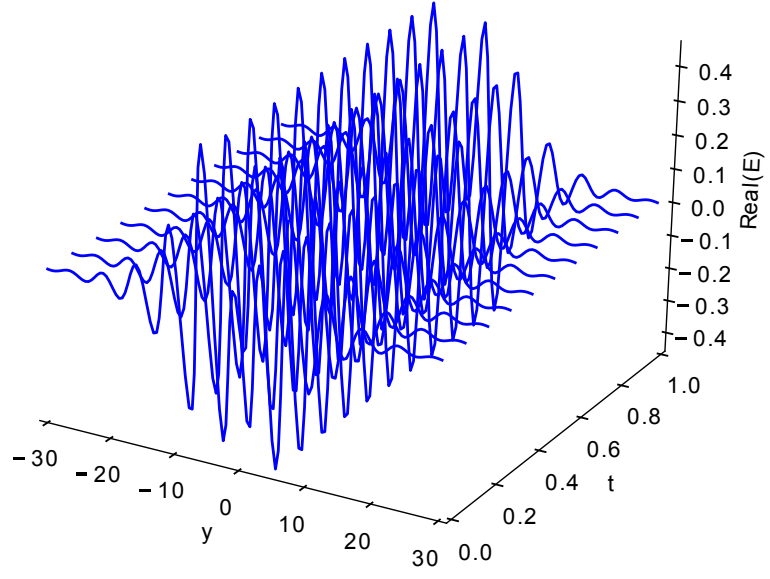
t	I_1	I_2	I_3
1	2.749231	-7.636753	-1.150671
2	2.749231	-7.636753	-1.150671
5	2.749231	-7.636753	-1.150671
8	2.749231	-7.636753	-1.150671
10	2.749231	-7.636753	-1.150671

Tablo 4.2’de Haar dalgacık yöntemiyle $2M = 1024$ kollokasyon noktası için elde edilen sonuçlar Petrov-Galerkin [106] yöntemiyle $N = 1000$ eleman için elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Tablo 4.2’den görüldüğü üzere Haar dalgacık yöntemiyle elde edilen sonuçlar Petrov-Galerkin yöntemiyle elde edilen sonuçlarla uyum içindedir.

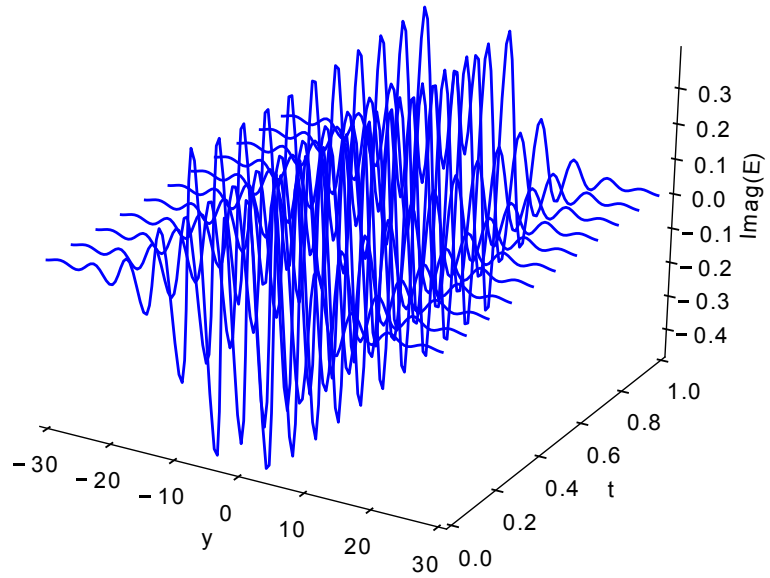
Tablo 4.2: $-50 \leq y \leq 50$, $2M = 1024$, $\Delta t = 0.1$, $\epsilon = 1$ ve $\alpha = 0.45$ parametreleri için Haar dalgacıkları ile Petrov-Galerkin yöntemlerinin sonuçlarının karşılaştırılması.

t	Haar	[106]	Haar	[106]
	L_∞^E	L_∞^E	L_∞^N	L_∞^N
1	1.381246e-5	5.316514e-5	8.445736e-6	4.771576e-6
2	2.984995e-5	5.560756e-5	2.038150e-5	9.503973e-6
5	7.670633e-5	7.150639e-5	6.682404e-5	2.110167e-5
8	1.213177e-4	9.411501e-5	1.145447e-4	2.920509e-5

Şekil 4.1-4.2’de $\epsilon = 8$, $2M = 128$ ve $\Delta t = 0.1$ için E ’nin reel ve imajiner kısımlarının zaman içindeki hareketleri verilmiştir. Şekilden E ’nin reel ve imajiner kısımlarının ani salınımlar gösterdiği gözlenmiştir.

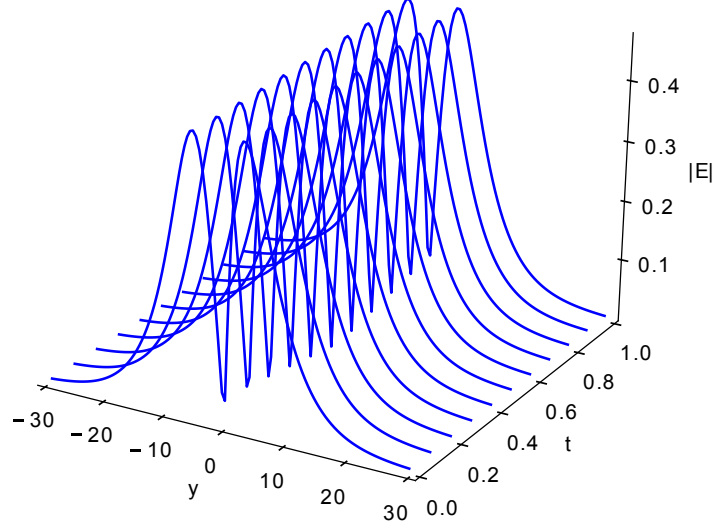


Şekil. 4.1: $\epsilon = 8$, $2M = 128$ ve $\Delta t = 0.1$ için E 'nin reel kısmı.

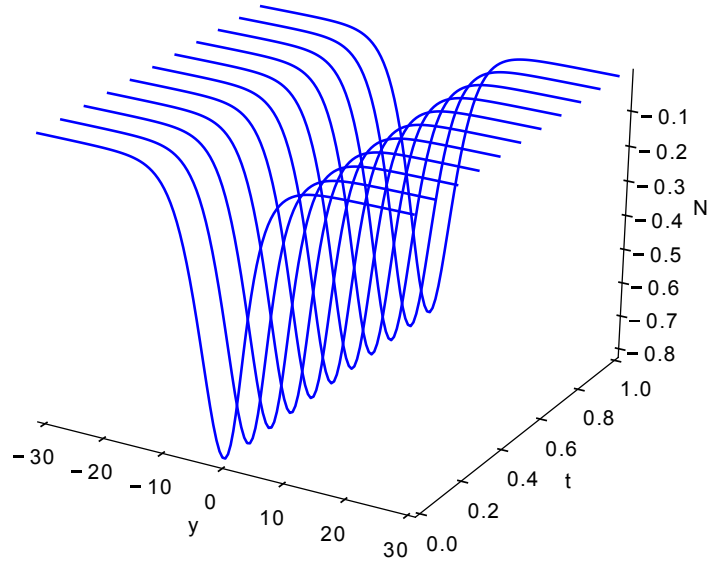


Şekil. 4.2: $\epsilon = 8$, $2M = 128$ ve $\Delta t = 0.1$ için E 'nin imajiner kısmı.

Şekil 4.3-4.4'te $|E|$ ve N 'nin $\epsilon = 1$, $2M = 128$ ve $\Delta t = 0.1$ için grafikleri verilmiştir.



Şekil. 4.3: $|E|$ 'nin $\epsilon = 1$, $2M = 128$ ve $\Delta t = 0.1$ için nümerik sonuçları.



Şekil. 4.4: N 'nin $\epsilon = 1$, $2M = 128$ ve $\Delta t = 0.1$ için nümerik sonuçları.

İkinci simülasyon $-50 \leq y \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.0001$, $\alpha = 0.45$, $\epsilon = 1$ ve $2M =$

1024 kollokasyon noktası için yapılmıştır. Hata normları ve korunum sabitleri Tablo 4.3'te verilmiştir. Tablodan Haar dalgacık yöntemiyle elde edilen korunum sabitlerinin hemen hemen hiç değişmediği gözlemlenmektedir. Tablo 4.4'te L_∞ hata normları Petrov-Galerkin yöntemiyle [106] elde edilen L_∞ hata normlarıyla karşılaştırılmıştır. Tablo 4.4'te, E 'nin nümerik sonuçları için Haar dalgacıkları daha küçük hatalar verirken N 'nin nümerik sonuçları için Petrov-Galerkin yönteminin daha küçük hatalar verdiği görülmektedir.

Tablo 4.3: $-50 \leq y \leq 50$, $2M = 1024$, $\alpha = 0.45$, $\epsilon = 1$ ve $\Delta t = 0.0001$ parametreleri için farklı zamanlardaki hata normları ve korunum sabitleri.

t	L_2^E	L_∞^E	L_2^N	L_∞^N
0.2	1.034988e-006	4.369033e-006	3.176431e-007	1.466889e-006
0.4	2.066225e-006	8.854762e-006	6.336870e-007	2.953561e-006
0.6	3.089703e-006	1.333198e-005	9.470001e-007	4.422317e-006
0.8	4.102149e-006	1.771350e-005	1.257603e-006	5.840487e-006
1	5.100902e-006	2.192107e-005	1.566727e-006	7.193195e-006

t	I_1	I_2	I_3
0.2	2.749231	-7.636753	-1.150671
0.4	2.749231	-7.636753	-1.150671
0.6	2.749231	-7.636753	-1.150671
0.8	2.749231	-7.636753	-1.150671
1	2.749231	-7.636753	-1.150671

Tablo 4.4: $-50 \leq y \leq 50$, $2M = 1024$, $\alpha = 0.45$, $\epsilon = 1$ ve $\Delta t = 0.0001$ parametreleri için farklı zamanlardaki hata normlarının Petrov-Galerkin yöntemiyle karşılaştırılması.

t	Haar	[106]	Haar	[106]
	L_∞^E	L_∞^E	L_∞^N	L_∞^N
0.2	4.369033e-6	4.1779e-5	1.466889e-6	6.5270e-8
0.6	1.333198e-5	4.5066e-5	4.422317e-6	5.1653e-8
0.8	1.771350e-5	4.6236e-5	5.840487e-6	4.9147e-8
1	2.192107e-5	4.7321e-5	7.193195e-6	5.6538e-8

Üçüncü simülasyon $-30 \leq y \leq 30$ aralığında $\Delta t = 0.0001$, $\alpha = 0.45$, $\epsilon = 1$ ve $2M = 64$ kollokasyon noktası için $t = 0.1$ zamanına kadar yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 4.5'te sonlu eleman yöntemi (FEM) ve Crank-Nicolson (CN) yöntemleriyle karşılaştırılmıştır. Bu yöntemlerde kullanılan bölüntü sayısı $N = 60$ 'tır. Tablodan Haar dalgacık yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçların [104, 97, 98]'de verilen sonuçlardan daha iyi olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 4.5: $-30 \leq y \leq 30$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.1$ 'de hataların karşılaştırılması.

Yöntemler	L_{∞}^E	L_{∞}^N
Haar	1.891247e-04	7.749427e-05
SSQBS FEM [98]	8.831056e-04	3.213056e-04
SSCBS FEM [98]	8.093879e-04	2.723093e-04
Semi-discrete FEM[97]	8.881089e-04	3.221997e-04
CN [104]	8.928318e-04	5.431211e-04

Son simülasyon $-30 \leq y \leq 30$ aralığında $\Delta t = 0.00001$, $\alpha = 0.45$, $\epsilon = 1$ ve $2M = 256$ kollokasyon noktası için $t = 0.001$ zamanına kadar yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar [105] çalışmasındaki Crank-Nicolson (CN), sonlu eleman (FEM) ve radyal temel fonksiyon ağırsız (RBF) yöntemleriyle karşılaştırılmıştır. Bu yöntemlerde alınan bölüntü sayısı $N = 240$ 'tır. Karşılaştırma Tablo 4.6'da verilmiştir. Tablodan Haar dalgacık yöntemiyle elde edilen sonuçların diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 4.6: $-30 \leq y \leq 30$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.001$ 'de hataların karşılaştırılması.

	L_2 Haar	L_{∞} Haar	L_2 RBF [105]	L_{∞} RBF [105]	L_2 FEM [105]	L_2 CN [105]
Real(E)	1.7193e-7	9.9794e-8	1.6756e-4	7.7949e-5	2.5407e-4	3.4776e-3
Imag(E)	2.4136e-7	1.1986e-7	1.6525e-4	7.3429e-5	3.6691e-4	2.0203e-3
N	9.1612e-8	4.1508e-8	4.1078e-4	1.2973e-4	1.5194e-5	3.3631e-4

BÖLÜM 5

DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN DEĞİŞKEN KATSAYILI PARABOLİK KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN HAAR DALGACIK YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu tezin konusu lineer olmayan kısmi türevli denklemler olmasına rağmen Haar dalgacık yönteminin lineer problemlerdeki başarısını görmek için bu bölümde,

$$\mu(x)u_{tt} + EI(x)u_{xxxx} = F(x,t), \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.1)$$

dördüncü merteben değişken katsayılı parabolik kısmi türevli denklemi

$$u(x,0) = \phi(x),$$

$$u_t(x,0) = \psi(x), \quad a \leq x \leq b,$$

başlangıç koşulları ve

$$u(a,t) = f_1(t), \quad u(b,t) = f_2(t),$$

$$u_{xx}(a,t) = f_3(t), \quad u_{xx}(b,t) = f_4(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

sınır koşullarıyla ele alınmıştır. Bu tip denklemler iki ucundan menteşelenmiş esnek bir kirişin dikey olarak yer değiştirmesini modeller. Burada $u = u(x,t)$, esnek kirişin yerdeğiştirme miktarını, t ve x sırasıyla zaman ve konum değişkenlerini, $\mu(x) > 0$ kirişin yoğunluğunu, $EI(x) > 0$ bükülme sertliğini (*bending stiffness*) ve $F(x,t)$ birim kütle başına düşen itici gücü ifade eder.

Literatürde (5.1) denklemi, sonlu fark yöntemleri [107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118], Adomian ayrışım yöntemi [119], varyasyonel iterasyon

yöntemi [120], Sinc-Galerkin yöntemi [121], kollokasyon yöntemleri [122, 123, 124, 125, 126, 127] gibi nümerik ve analitik yöntemlerle değişik başlangıç ve sınır koşulları altında çözülmüştür.

5.1 Zamana Göre Ayrıklaştırma

(5.1) denklemini çözmek için

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}$$

şeklinde yeni bir değişken tanımlanırsa (5.1) denklemi

$$\begin{aligned} u_t - v &= 0, \\ \mu(x)v_t + EI(x)u_{xxxx} &= F(x, t). \end{aligned} \quad (5.2)$$

biçimindeki bir kısmi türevli denklem sistemi olarak yazılabilir

(5.2) denkleminde zamana göre türevler için ileri sonlu fark yaklaşımı ve v ve u_{xxxx} terimlerinin zamana göre ortalamaları alınır

$$\begin{aligned} \frac{u^{j+1} - u^j}{\Delta t} - \frac{v^{j+1} + v^j}{2} &= 0 \\ \mu(x) \frac{v^{j+1} - v^j}{\Delta t} + EI(x) \frac{u_{xxxx}^{j+1} + u_{xxxx}^j}{2} &= F(x, t^j) \end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned} u^{j+1} - \frac{\Delta t}{2} v^{j+1} &= u^j + \frac{\Delta t}{2} v^j \\ \mu(x)v^{j+1} + \frac{\Delta t EI(x)}{2} u_{xxxx}^{j+1} &= \mu(x)v^j - \frac{\Delta t}{2} u_{xxxx}^j + \Delta t F(x, t^{j+1}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

sistemi bulunur. Burada başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} u^0(x) &= \phi(x), \\ v^0(x) &= \psi(x), \quad a \leq x \leq b \end{aligned} \quad (5.4)$$

ve ayrıklaştırılmış sınır koşulları

$$\begin{aligned} u^{j+1}(a) &= f_1(t^{j+1}), \quad u^{j+1}(b) = f_2(t^{j+1}), \quad 0 \leq t \leq T \\ u_{xx}^{j+1}(a) &= f_3(t^{j+1}), \quad u_{xx}^{j+1}(b) = f_4(t^{j+1}), \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (5.5)$$

biçimindedir. $\Delta t = k$ ve $t^{j+1} = k(j+1)$ $j = 0, 1, \dots, N-1$, $kN = T$ olmak üzere u^{j+1} ve v^{j+1} (5.3)-(5.5) probleminin $(j+1)$. zaman adımındaki çözümleridir.

5.2 Konuma Göre Haar Dalgacıklarıyla Ayrıklaştırma

(5.3) denklemi dördüncü mertebeden olduğu için $u_{xxxx}^{j+1}(x)$ terimi Haar dalgacıkları serisi yardımıyla

$$u_{xxxx}^{j+1}(x) = \sum_{i=1}^{2M} c_i h_i(x) \quad (5.6)$$

şeklinde yazılır. (5.6) denkleminin x' e göre 0'dan x' e integrali alınır

$$u_{xxx}^{j+1}(x) = u_{xxx}^{j+1}(0) + \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,1}(x) \quad (5.7)$$

bulunur. Burada $u_{xxx}^{j+1}(0)$ terimi bilinmediğinden (5.7) denkleminin 0'dan 1'e integrali alınıp (5.5) sınır koşulları kullanılırsa

$$u_{xxx}^{j+1}(0) = f_4(t^{j+1}) - f_3(t^{j+1}) - \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1)$$

elde edilir. Şimdi (5.7) denkleminin 0'dan x' e tekrar integrali alınır $u_{xx}^{j+1}(x)$ ikinci türevi için

$$u_{xx}^{j+1}(x) = \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(x) + f_3(t^{j+1}) + [f_4(t^{j+1}) - f_3(t^{j+1})]x - x \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1) \quad (5.8)$$

eşitliği bulunur. Benzer olarak (5.8) denkleminin de ardışık olarak iki defa 0'dan x' e tekrar integrali alınıp (5.5) sınır koşulları uygulanırsa $u_x^{j+1}(x)$ ve $u^{j+1}(x)$ için sırasıyla

$$\begin{aligned}
u_x^{j+1}(x) &= \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,3}(x) + f_2(t^{j+1}) - f_1(t^{j+1}) - \frac{1}{3} f_3(t^{j+1}) - \sum_{i=1}^{2M} c_i \left[p_{i,4}(1) - \frac{1}{6} p_{i,2}(1) \right] \\
&\quad - \frac{1}{6} f_4(t^{j+1}) + f_3(t^{j+1})x + \frac{x^2}{2} [f_4(t^{j+1}) - f_3(t^{j+1})] - \frac{x^2}{2} \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1), \quad (5.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{j+1}(x) &= \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,4}(x) + f_1(t^{j+1}) + \left[f_2(t^{j+1}) - f_1(t^{j+1}) - \frac{1}{3} f_3(t^{j+1}) - \frac{1}{6} f_4(t^{j+1}) \right] x \\
&\quad - x \sum_{i=1}^{2M} c_i \left[p_{i,4}(1) - \frac{1}{6} p_{i,2}(1) \right] + f_3(t^{j+1}) \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} [f_4(t^{j+1}) - f_3(t^{j+1})] \\
&\quad - \frac{x^3}{6} \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1) \quad (5.10)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Ayrıca (5.3) denkleminde görülen $v^{j+1}(x)$ değişkeni de Haar dalgacıkları serisi cinsinden

$$v^{j+1}(x) = \sum_{i=1}^{2M} d_i h_i(x) \quad (5.11)$$

olarak yazılabilir. Daha sonra elde edilen (5.6), (5.10) ve (5.11) denklemleri (5.3) denkleminde yerine yazılarak sonuçlar $x_l = \frac{l-0.5}{2M}$, $l = 1, 2, \dots, 2M$ kollokasyon noktalarında ayrıklaştırılırsa çözümü Haar dalgacıkları seri açılımındaki c_i ve d_i dalgacık katsayılarını veren bir lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözülüp elde edilen katsayılar (5.6), (5.10) ve (5.11) denklemlerinde yerine yazılarak $u^{j+1}(x)$ ve $v^{j+1}(x)$ nümerik çözümleri ardışık olarak elde edilebilir.

5.3 Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde yukarıda tanımladığımız nümerik şema çerçevesinde elde edilen sonuçlar tablolar yardımıyla verilerek literatürde mevcut olan diğer yöntemlerle karşılaştırılmıştır. Problem 1’de [117], [118] ve [125] çalışmalarını kendi sonuçlarımızı karşılaştırmak için

$$\max_{1 \leq i \leq 2M} \left| \frac{u_i^{\text{tam}} - u_i^{\text{nümerik}}}{u_i^{\text{tam}}} \right|$$

olarak tanımlanan maksimum mutlak bağıl hata hesaplanmıştır. Diğer problemlerde, elde edilen sonuçları daha önceki yöntemlerle karşılaştırmak için $|u_i^{\text{tam}} - u_i^{\text{nümerik}}|$ mutlak hata hesaplanmıştır. $x_l = \frac{l-0.5}{2M}$, $l = 1, 2, \dots, 2M$ kollokasyon noktalarını $x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ noktalarına taşımak için interpolasyon tekniklerinden faydalanılmıştır. Ayrıca

$$L_\infty = \max_i |u_i^{\text{tam}} - u_i^{\text{nümerik}}|$$

olarak tanımlanan L_∞ hata normu da tablolalarda verilmiştir. Burada u_i^{tam} tam çözüm ve $u_i^{\text{nümerik}}$ nümerik çözümdür.

5.3.1 Problem 1

Birinci problem olarak

$$(120x)u_{tt} + (120 + x^5)u_{xxxx} = 0$$

dördüncü mertebeden değişken katsayılı parabolik kısmi türevli denklem

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 1 + \frac{x^5}{120}, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

başlangıç koşulları ve

$$\begin{aligned} u\left(\frac{1}{2}, t\right) &= \frac{3841}{3840} \sin t, & u(1, t) &= \frac{121}{120} \sin t, \\ u_{xx}\left(\frac{1}{2}, t\right) &= \frac{1}{48} \sin t, & u_{xx}(1, t) &= \frac{1}{6} \sin t, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

sınır koşullarıyla göz önüne alınmıştır. Problemin tam çözümü [117], [118] ve [125]

$$u(x, t) = \left(1 + \frac{x^5}{120}\right) \sin t$$

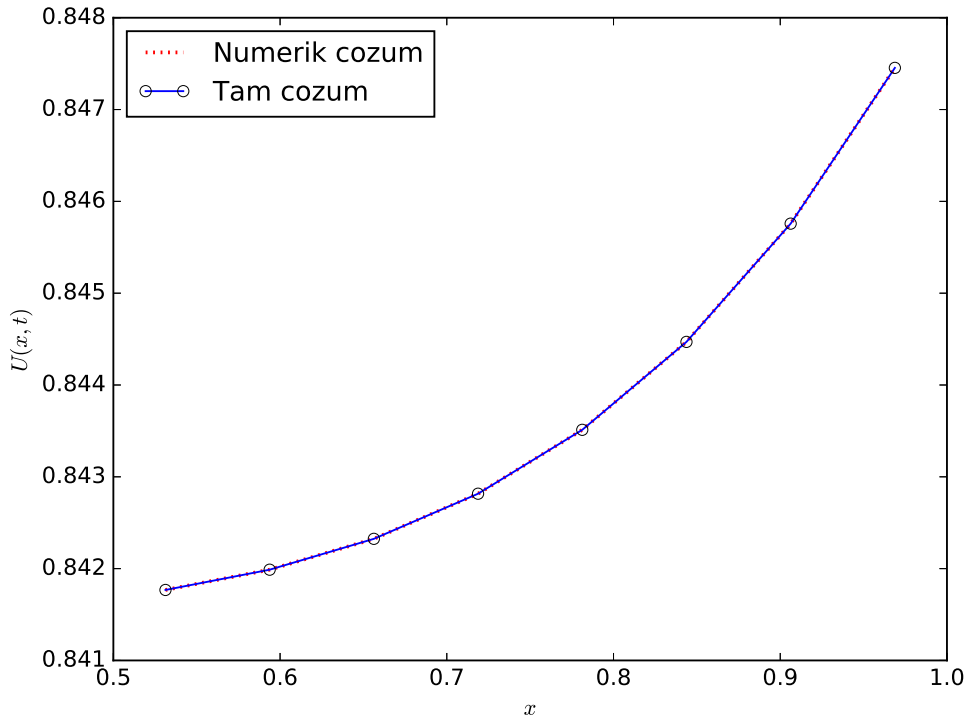
şeklindedir.

Tablo 5.1’de k ’nın farklı değerleri için $t = 0.01$ ’de elde edilen maksimum mutlak bağıl hatalar literatürde mevcut olan diğer yöntemlerden elde edilen hatalarla karşılaştırılmıştır. Diğer yöntemlerde konum değişkeninin adım uzunluğu $h = 0.05$ olarak alındığı için Haar dalgacıklarında buna en yakın olan $2M = 8$ kollokasyon noktası seçilmiştir. Tablo 5.1’den Haar dalgacık yöntemiyle elde edilen sonuçların sektik spline

[125] ve sonlu fark [117], [118] yöntemlerinden elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu görülmektedir. Nümerik ve tam çözümlerin grafikleri $2M = 8$, $k = 0.0025$ ve $t = 1$ için Şekil 5.1’de verilmiştir.

Tablo 5.1: Problem 1 için $t = 0.01$ ’de maksimum mutlak bağıl hatalar ve karşılaştırmaları.

	Haar Yöntemi	Rashidinia ve Mohammadi [125]	Andrade ve Mckee [117]	Khaliq ve Twizell [118]
	$2M = 8$	$h = 0.05$	$h = 0.05$	$h = 0.05$
$k = 0.000625$	6.61e-09	3.51e-08	4.10e-07	3.30e-07
$k = 0.00025$	1.04e-09	9.97e-08	7.20e-07	3.30e-07
$k = 0.000125$	2.60e-10	5.33e-08	1.90e-06	3.30e-07



Şekil. 5.1: Problem 1 için $t = 1$ ’de $2M = 8$, $k = 0.0025$ için tam çözüm ve nümerik çözüm.

Tablo 5.2’de problem 2’nin $0 \leq x \leq 1$ aralığında $k = 0.001$ ve artan kollokasyon noktaları için $t = 1$ ’deki L_∞ hataları verilmiştir. Tablodan hatanın artan kollokasyon noktaları için azaldığı görülmektedir.

Tablo 5.2: Problem 2'nin $0 \leq x \leq 1$ aralığında $k = 0.001$ ve farklı $2M$ değerleri için $t = 1$ 'deki L_∞ hata normları.

$2M$	L_∞
8	6.4919e-09
16	6.4765e-09
32	6.3582e-09
64	6.3178e-09

Tablo 5.3'te $0 \leq x \leq 1$ aralığında $2M = 8$, $k = 0.0025$ için $x_l = \frac{l-0.5}{8}$, $l = 1, 2, \dots, 8$ kollokasyon noktalarında $t = 1$ zamanındaki tam çözüm, elde edilen nümerik çözüm ve mutlak hatalar verilmiştir.

Tablo 5.3: Problem 1'in $0 \leq x \leq 1$ aralığında $2M = 8$ ve $k = 0.0025$ için $t = 1$ 'deki mutlak hataları.

x	Nümerik çözüm	Tam çözüm	Mutlak hata
1/16	0.84147099	0.84147099	6.22579666e-09
3/16	0.84147259	0.84147261	1.90313278e-08
5/16	0.84149185	0.84149188	3.20103550e-08
7/16	0.84158334	0.84158338	4.07609513e-08
9/16	0.84186583	0.84186587	4.20603837e-08
11/16	0.84254796	0.8425480	3.58678560e-08
13/16	0.84395395	0.84395397	2.36805021e-08
15/16	0.84654923	0.84654924	7.76129849e-09

5.3.2 Problem 2

İkinci problem olarak değişken katsayılı

$$(\sin x)u_{tt} + (x - \sin x)u_{xxxx} = 0$$

denklemini

$$u(x, 0) = x - \sin x, \quad u_t(x, 0) = -(x - \sin x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

başlangıç koşulları ve

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, & u(1, t) &= e^{-t}(1 - \sin 1), \\ u_{xx}(0, t) &= 0, & u_{xx}(1, t) &= e^{-t} \sin 1, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

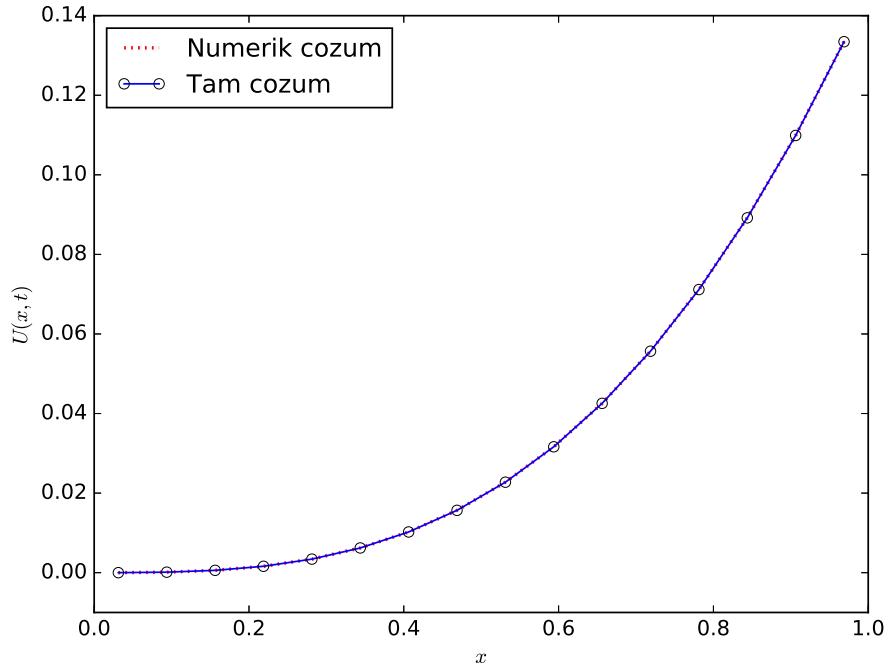
sınır koşullarıyla göz önüne alınmıştır . Problemin tam çözümü

$$u(x, t) = (x - \sin x) e^{-t}$$

olarak verilmiştir [125]. Problem, $2M = 16$ kollokasyon noktası ve zaman adımı uzunluğu $k = 0.05$ alınarak 10 ve 16 zaman adımı için çözülmüştür. Tablo 5.4'te L_∞ hata normu, $x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ noktalarında elde edilen mutlak hatalar ve bunların sektik spline yöntemi [125] ile karşılaştırılması verilmiştir. Tablo 5.4'ten Haar dalgacık yöntemiyle elde edilen sonuçların daha iyi olduğu görülmektedir. Problemin nümerik ve tam çözümlerinin grafikleri $2M = 16, k = 0.005$ ve $t = 0.08$ için Şekil 5.2'de verilmiştir.

Tablo 5.4: Problem 2 için mutlak hatalar.

Yöntemler	Zaman adım s.	Parametreler	$x = 0.1$	$x = 0.2$	$x = 0.3$	$x = 0.4$	$x = 0.5$
Haar	10	$2M = 16$	1.68e-09	4.59e-10	3.90e-10	1.91e-10	2.00e-10
Haar	16	$2M = 16$	1.12e-09	1.39e-10	1.57e-09	3.58e-09	5.77e-09
[125]	10	$h = 0.05$	8.35e-08	4.51e-08	8.25e-08	2.33e-08	4.52e-08
[125]	16	$h = 0.05$	8.42e-08	2.62e-08	5.32e-08	1.45e-08	2.89e-08
Haar	10	$2M = 16$	$L_\infty = 9.0052e - 09$				
Haar	16	$2M = 16$	$L_\infty = 2.6720e - 08$				



Şekil. 5.2: Problem 2 için $t = 0.08$ 'de $2M = 16, k = 0.005$ için tam çözüm ve nümerik çözüm.

Tablo 5.5'te problem 2'nin $0 \leq x \leq 1$ aralığında $k = 0.0025$ ve artan kollokasyon noktaları için $t = 1$ 'deki L_∞ hataları verilmiştir. Tablodan hatanın artan kollokasyon noktaları için azaldığı görülmektedir.

Tablo 5.5: Problem 2'nin $0 \leq x \leq 1$ aralığında $k = 0.0025$ ve farklı $2M$ değerleri için $t = 1$ 'deki L_∞ hata normları.

$2M$	L_∞
8	1.6757e-06
16	4.3862e-07
32	1.1097e-07
64	2.9200e-08

Tablo 5.6'da $0 \leq x \leq 1$ aralığında $2M = 8$, $k = 0.0025$ için $x_l = \frac{l-0.5}{8}$, $l = 1, 2, \dots, 8$ kollokasyon noktalarında $t = 1$ zamanındaki tam çözüm, elde edilen nümerik çözüm ve mutlak hatalar verilmiştir.

Tablo 5.6: Problem 2'nin $0 \leq x \leq 1$ aralığında $2M = 8$ ve $k = 0.0025$ için $t = 1$ 'deki mutlak hataları.

x	Nümerik çözüm	Tam çözüm	Mutlak hata
1/16	1.54021297e-05	1.49661294e-05	4.36000319e-07
3/16	4.04631686e-04	4.03454574e-04	1.17711157e-06
5/16	1.86359632e-03	1.86201643e-03	1.57988930e-06
7/16	5.08714646e-03	5.08547077e-03	1.67568179e-06
9/16	1.07426531e-02	1.07410961e-02	1.55695175e-06
11/16	1.94594798e-02	1.94582178e-02	1.26191770e-06
13/16	3.18192096e-02	3.18183876e-02	8.22010841e-07
15/16	4.83465938e-02	4.83463085e-02	2.85384565e-07

5.3.3 Problem 3

Üçüncü problem olarak (5.1) denkleminde $\mu(x) = EI(x) = 1$ alınmasıyla elde edilen sabit katsayılı dördüncü mertebeden homogen olmayan

$$u_{tt} + u_{xxxx} = (\pi^4 - 1) \sin(\pi x) \cos t$$

parabolik kısmi türevli denklemi

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

başlangıç koşulları ve

$$u(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \quad t \geq 0$$

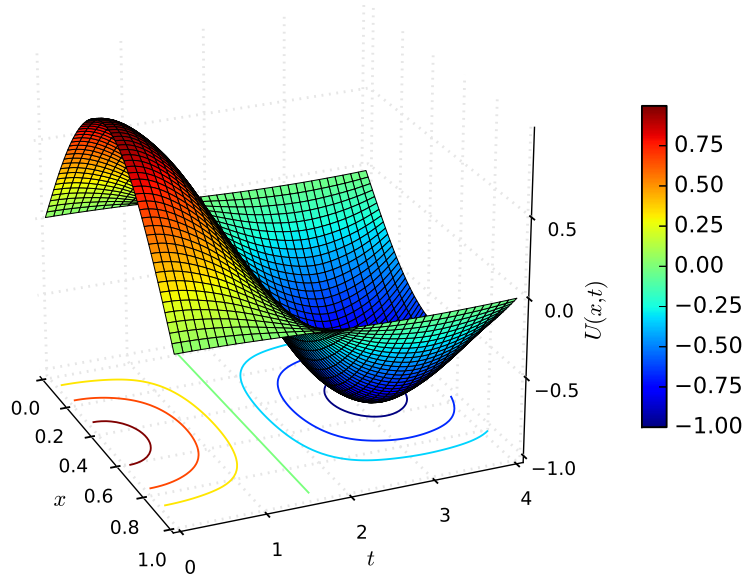
sınır koşullarıyla göz önüne alınmıştır. Problemin tam çözümü

$$u(x,t) = \sin(\pi x) \cos t$$

olarak verilmiştir [112]. Tablo 5.7’de, $x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ noktalarında $2M = 16, 128$ ve $k = 0.00125, 0.005$ için $t = 0.02, 0.05$ zamanlarındaki mutlak hatalar verilmiştir. Aynı zamanda elde edilen sonuçları karşılaştırmak için daha önceki çalışmaların da sonuçları verilmiştir. Tablo 5.7’den Haar dalgacık yöntemiyle elde edilen sonuçların AGE yöntemi [112], beşinci mertebeden B-spline yöntemi [124] ve yeniden tanımlanmış temel fonksiyonlu B-spline yöntemlerinden [126] daha iyi sonuç verdiği ve [122, 123, 125, 127] çalışmalarındaki sonuçlarla uyum içinde olduğu görülmektedir. Şekil 5.3’te nümerik çözümün $2M = 64$ ve $k = 0.05$ için değişimi verilmiştir.

Tablo 5.7: Farklı parametrelere göre Problem 3 için hatalar.

Yöntemler	Zaman	Parametreler	$x = 0.1$	$x = 0.2$	$x = 0.3$	$x = 0.4$	$x = 0.5$
Haar	$t = 0.02$	$2M = 128$ $k = 0.00125$	1.65e-07	3.17e-07	4.36e-07	5.12e-07	5.39e-07
	$t = 0.05$	$2M = 128$ $k = 0.005$	2.38e-06	4.52e-06	6.22e-06	7.31e-06	7.69e-06
	$t = 0.02$	$2M = 16$ $k = 0.00125$	7.06e-07	2.32e-05	2.66e-05	2.72e-05	2.73e-05
	$t = 0.05$	$2M = 16$ $k = 0.005$	4.69e-05	1.11e-04	1.47e-04	1.69e-04	1.77e-04
Evans [112]	$t = 0.02$	$h = 0.05$ $k = 0.00125$	2.50e-05	4.70e-05	6.60e-05	7.80e-05	8.20e-05
	$t = 0.05$	$h = 0.05$ $k = 0.005$	2.20e-04	4.10e-04	5.40e-04	6.20e-04	6.50e-04
Caglar [124]	$t = 0.02$	$n = 121$ $k = 0.005$	4.80e-06	9.70e-06	1.40e-05	1.90e-05	2.40e-05
	$t = 0.02$	$n = 191$ $k = 0.005$	5.20e-06	2.10e-06	3.10e-06	4.20e-06	5.20e-06
Mittal M1 [126]	$t = 0.02$	$n = 181$ $k = 0.005$	8.00e-06	1.52e-05	2.09e-05	2.46e-05	2.59e-05
	$t = 0.05$	$n = 181$ $k = 0.005$	8.97e-06	1.71e-05	2.35e-05	2.76e-05	2.90e-05
Mittal M2 [126]	$t = 0.02$	$n = 181$ $k = 0.005$	1.50e-07	2.90e-07	3.90e-07	4.60e-07	4.90e-07
	$t = 0.05$	$n = 181$ $k = 0.005$	1.10e-06	2.09e-06	2.88e-06	3.38e-06	3.56e-06
Khan vd. [122]	$t = 0.02$	$h = 0.05$ $k = 0.00125$	9.07e-06	7.79e-06	2.75e-06	1.01e-06	2.59e-06
	$t = 0.05$	$h = 0.05$ $k = 0.005$	1.87e-06	2.13e-05	1.49e-05	8.60e-06	5.96e-06
Rashidinia [125]	$t = 0.02$	$h = 0.05$ $k = 0.00125$	4.47e-07	2.66e-07	1.39e-07	1.55e-07	1.57e-07
	$t = 0.05$	$h = 0.05$ $k = 0.005$	2.91e-06	1.73e-06	1.60e-06	2.23e-06	2.60e-07
Aziz vd. [123]	$t = 0.02$	$h = 0.05$ $k = 0.00125$	9.20e-06	7.90e-06	2.80e-06	9.80e-07	2.50e-06
	$t = 0.05$	$h = 0.05$ $k = 0.005$	9.30e-06	8.00e-06	2.80e-06	1.00e-06	2.70e-06
Mohammadi [127]	$t = 0.02$	$h = 0.05$ $k = 0.00125$	4.29e-07	2.51e-07	1.24e-07	1.38e-07	1.40e-07
	$t = 0.05$	$h = 0.05$ $k = 0.005$	2.96e-06	1.77e-06	1.64e-06	2.28e-06	2.65e-07
Haar	$t = 0.02$	$2M = 128$ $k = 0.00125$	$L_\infty = 5.3820e - 07$				
	$t = 0.05$	$2M = 128$ $k = 0.005$	$L_\infty = 7.6895e - 06$				



Şekil. 5.3: $2M = 64$ ve $k = 0.05$ için $t = 0$ ile $t = 4$ arasında problem 3'ün nümerik çözümü.

5.3.4 Problem 4

Son problem olarak (5.1) denkleminde $\mu(x) = EI(x) = 1$ ve $F(x, t) = 0$ alınmasıyla elde edilen sabit katsayılı dördüncü mertebeden homogen

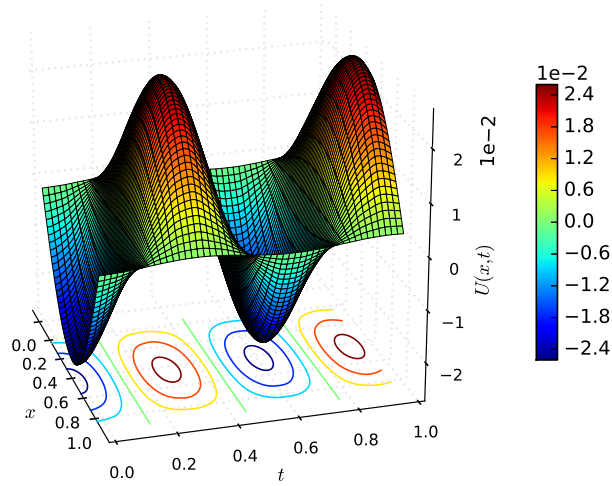
$$u_{tt} + u_{xxxx} = 0$$

parabolik kısmi türevli denklemi $u(x, 0) = \frac{x}{12}(2x^2 - x^3 - 1)$, $u_t(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq 1$ başlangıç koşulları ve $u(0, t) = u(1, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0$, $t \geq 0$ sınır koşullarıyla göz önüne alınmıştır. Problemin tam çözümü, $a_s = \frac{4}{s^5\pi^5}(\cos(s\pi) - 1)$ olmak üzere $u(x, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s \sin(s\pi x) \cos(s^2\pi^2 t)$ şeklindedir [114].

Elde edilen sonuçların diğer sonuçlarla karşılaştırılması için $2M = 16$ ve $2M = 64$ seçilmiştir. Tablo 5.8'de $2M = 16$ için $t = 0.02$ zamanında Haar dalgacık yönteminin H.O.C.M. (*high order correction method*) [115] yöntemi hariç tüm yöntemlerden daha iyi sonuç verdiği $t = 1$ zamanında ise en iyi sonuçları verdiği gözlemlenmiştir. Kollokasyon noktaları $2M = 64$ olarak seçildiğinde ise Tablo 5.8'deki hiçbir yöntemin Haar dalgacık yöntemi kadar iyi sonuçlar veremediği gözlemlenmiştir. Şekil 5.4'te, $2M = 64$ ve $k = 0.01$ için $t = 0$ ile $t = 1$ arasında nümerik çözümün değişimi verilmiştir.

Tablo 5.8: Farklı parametrelere göre Problem 4 için hatalar.

Yöntemler	Zaman	Parametreler	$x = 0.1$	$x = 0.2$	$x = 0.3$	$x = 0.4$	$x = 0.5$	
Haar	$t = 0.02$	$2M = 16$	$k = 0.00125$	3.53e-07	1.87e-06	1.43e-06	2.50e-07	1.07e-06
	$t = 1$	$2M = 16$	$k = 0.005$	5.14e-05	7.63e-05	6.40e-05	4.06e-05	3.32e-05
	$t = 0.02$	$2M = 64$	$k = 0.00125$	1.89e-07	9.21e-08	3.85e-07	4.05e-07	1.14e-07
	$t = 1$	$2M = 64$	$k = 0.005$	1.59e-05	1.27e-05	9.09e-06	2.99e-05	3.78e-05
H.O.C.M.	$t = 0.02$	$h = 0.05$	$k = 0.00125$	1.40e-07	2.90e-07	5.60e-07	3.40e-07	1.70e-07
[115]	$t = 1$	$h = 0.05$	$k = 0.005$	2.59e-03	1.91e-03	7.17e-04	2.20e-03	6.65e-04
Danea	$t = 0.02$	$h = 0.05$	$k = 0.00125$	2.50e-06	3.90e-06	1.37e-05	2.60e-06	9.80e-06
[113]	$t = 1$	$h = 0.05$	$k = 0.005$	3.19e-03	2.73e-03	9.80e-03	1.25e-02	1.40e-02
Evans	$t = 0.02$	$h = 0.05$	$k = 0.00125$	8.44e-06	1.42e-05	1.74e-05	1.40e-06	1.20e-05
[114]	$t = 1$	$h = 0.05$	$k = 0.005$	3.20e-03	2.73e-03	9.80e-03	1.25e-02	1.40e-02
Richtmyer	$t = 0.02$	$h = 0.05$	$k = 0.00125$	2.24e-04	3.67e-04	4.03e-04	3.64e-04	3.35e-04
[116]	$t = 1$	$h = 0.05$	$k = 0.005$	2.73e-03	9.48e-03	1.74e-02	2.30e-02	2.24e-02
Semi-explicit	$t = 0.02$	$h = 0.05$	$k = 0.00125$	3.01e-05	6.19e-05	6.69e-05	5.10e-05	1.34e-05
[115]	$t = 1$	$h = 0.05$	$k = 0.005$	2.74e-03	5.93e-03	4.48e-03	2.32e-03	6.51e-03
Mittal	$t = 0.02$	$n = 181$	$k = 0.005$	2.70e-07	9.00e-08	5.73e-06	8.80e-07	1.00e-05
[126]	$t = 1$	$n = 181$	$k = 0.005$	1.51e-05	9.85e-06	1.23e-05	3.15e-05	3.79e-05
Haar	$t = 0.02$	$2M = 64$	$k = 0.00125$	$L_\infty = 4.3782e-07$				
	$t = 1$	$2M = 64$	$k = 0.005$	$L_\infty = 3.7724e-05$				



Şekil. 5.4: Problem 4'ün $2M = 64$ ve $k = 0.01$ için $t = 0$ ile $t = 1$ arasında nümerik çözümün değişimi.

BÖLÜM 6

KESİRLİ MERTEBEDEN BURGERS VE İKİLİ BURGERS DENKLEMLERİNİN HAAR DALGACIK YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Son yıllarda kesirli kalkülüsün mühendislik, fizik ve kimya gibi bilim dallarından bir çok problemi modellemede daha gerçekçi bir yaklaşım sunduğu ortaya çıkmıştır. Bundan dolayı araştırmacılar kesirli matematik analiz ve analitik geometri ve uygulamalarına yoğun bir ilgi duymuşlardır [128],[129]. Örneğin kesirli mertebeden türevin en önemli uygulamalarından biri, belli tipte gözenekli bir ortamdaki yayılma (difüzyon) olayının modellenmesidir [130].

Kesirli mertebeden türevli denklemlerin tam çözümünü elde etmek için bazı yöntemler varsa da çoğu zaman bu denklemlerin tam çözümünü elde etmek mümkün değildir [131, 132]. Dolayısıyla kesirli mertebeden türevli denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için bir çok yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden bazıları; sonlu fark yöntemleri [133, 134, 136, 135, 137, 138, 139], sonlu eleman yöntemleri [131, 132, 140], homotopi analiz yöntemi [141], genelleştirilmiş diferensiyel transform yöntemi [142, 143], Adomian ayrışım yöntemi [144, 145] ve varyasyonel iterasyon yöntemleridir [146].

Kesirli mertebeden türev tanımları için farklı yaklaşımlar mevcuttur. Bunlardan en sık kullanılanlar Grünwald-Letnikov, Riemann- Liouville ve Caputo yaklaşımlarıdır. Bu bölümde ele alınan kısmi türevli denklemlerdeki kesirli mertebeden türevler Caputo anlamında olduğu için Caputo anlamında kesirli mertebeden türev tanımı ve Caputo anlamında kesirli mertebeden türevi ayırklaştırmak için bilinen L1 formülü [147] verilmiştir.

Tanım 6.1. m , α 'dan büyük en küçük tamsayı olmak üzere Caputo anlamında kesirli mertebeden türev $\alpha > 0$ olmak üzere

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial^m u(x,s)}{\partial s^m} (t-s)^{m-\alpha-1} ds, & m-1 < \alpha < m \\ \frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m} & m = \alpha. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [130, 131].

Tanım 6.2. Caputo anlamında kesirli mertebeden türevi ayırklaştırmak için kullanılan ve L1 formülü olarak bilinen formül

$$\left. \frac{\partial^\alpha f(t)}{\partial t^\alpha} \right|_{t_n} = \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} b_k^\alpha [f(t_{n-k}) - f(t_{n-1-k})] + O(\Delta t) \quad (6.1)$$

olarak verilmektedir [147]. Burada Δt , t değişkeninin adım uzunluğu, $0 < \alpha \leq 1$ ve

$$b_k^\alpha = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}$$

dır.

6.1 Kesirli Mertebeden Türevli Burgers Denklemi

Bu bölümde,

$$D_t^\alpha u + uu_x - \nu u_{xx} = F(x,t), \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (6.2)$$

olarak verilen ve

$$u(x,0) = \phi(x), \quad t \geq 0$$

başlangıç koşulu ile

$$u(0,t) = f_1(t), \quad u(1,t) = f_2(t), \quad 0 \leq x \leq 1$$

sınır koşullarına sahip kesirli mertebeden türevli Burgers denklemi ele alınmıştır. Burada, $F(x, t)$ bilinen bir fonksiyon ve D_t^α Caputo anlamında kesirli mertebeden türev operatörü olup

$$D_t^\alpha u(t) = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{\partial^n u(\tau)}{\partial \tau^n} d\tau, \quad n-1 < \alpha < n$$

olarak verilmektedir.

6.1.1 Zamana göre ayrıklaştırma

(6.2) denkleminde bulunan kesirli mertebeden türev için (6.1) formülü kullanılıp u_{xx} ve uu_x terimlerinin zaman adımına göre ortalamaları alınır

$$\begin{aligned} & \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} (u_{n+1} - u_n) + \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{n-1} b_k^\alpha [u_{n-k+1} - u_{n-k}] \\ & + \frac{(uu_x)_{n+1} + (uu_x)_n}{2} - \nu \frac{(u_{xx})_{n+1} + (u_{xx})_n}{2} = F(x, t) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $(uu_x)_{n+1}$ lineer olmayan terimi için $u_{n+1}(u_x)_n + u_n(u_x)_{n+1} - (uu_x)_n$ lineerleştirme tekniği [71] uygulanıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned} Au_{n+1} + \frac{u_{n+1}(u_x)_n + u_n(u_x)_{n+1}}{2} - \frac{\nu}{2} (u_{xx})_{n+1} &= Au_n + \frac{\nu}{2} (u_{xx})_n \\ & - A \sum_{k=1}^{n-1} b_k^\alpha [u_{n-k+1} - u_{n-k}] + F(x, t_{n+1}). \end{aligned} \quad (6.3)$$

denklemi bulunur. (6.2) ile verilen denklemin başlangıç koşulu

$$u_0 = \phi(x)$$

ve ayrıklaştırılmış sınır koşulları

$$u_{n+1}(0) = f_1(t_{n+1}), \quad u_{n+1}(1) = f_2(t_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.4)$$

biçimindedir. Burada $n = 0, 1, \dots, N-1$ olmak üzere $t_{n+1} = \Delta t(n+1)$, $\Delta t N = T$, $A = \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$ ve u_{n+1} (6.3)-(6.4) probleminin $(n+1)$. zaman adımındaki çözümüdür.

6.1.2 Konuma göre Haar dalgacıklarıyla ayrıklaştırma

(6.2) denkleminde bulunan $(u_{xx})_{n+1}$ terimi Haar dalgacıkları serisine açılırsa

$$(u_{xx})_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{2M} c_i h_i(x) \quad (6.5)$$

yazılır. (6.5) denkleminin x 'e göre 0'dan x 'e integrali alınır

$$(u_x)_{n+1}(x) = (u_x)_{n+1}(0) + \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,1}(x) \quad (6.6)$$

bulunur. (6.6) denkleminde bulunan $(u_x)_{n+1}(0)$ terimi bilinmiyor. Bu terimi bulmak için (6.6) denkleminin 0'dan 1'e integrali alınarak (6.4) sınır şartları kullanılırsa $(u_x)_{n+1}(0)$ terimi

$$(u_x)_{n+1}(0) = f_2(t_{n+1}) - f_1(t_{n+1}) - \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1) \quad (6.7)$$

olarak bulunur. Daha sonra (6.7) denklemini (6.6) denkleminde yerine yazılırsa birinci türev için

$$(u_x)_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,1}(x) + f_2(t_{n+1}) - f_1(t_{n+1}) - \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1). \quad (6.8)$$

elde edilir. Son olarak (6.8) denkleminin 0'dan x 'e integrali alınır

$$u_{n+1}(x) = f_1(t_{n+1}) + x(f_2(t_{n+1}) - f_1(t_{n+1})) + \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(x) - x \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1) \quad (6.9)$$

bulunur. Elde edilen (6.5), (6.8) ve (6.9) eşitlikleri (6.3) denkleminde yerine yazılarak sonuçlar $x_l = \frac{l-0.5}{2M}$, $l = 1, 2, \dots, 2M$ noktalarında ayrıklaştırılırsa kesirli mertebeden türevli Burgers denklemi için

$$\sum_{i=1}^{2M} c_i \left[A(p_{i,2}(x_l) - x_l p_{i,2}(1)) + \frac{(u_x)_n}{2} (p_{i,2}(x_l) - x_l p_{i,2}(1)) + \frac{u_n}{2} (p_{i,1}(x_l) - p_{i,2}(1)) - \frac{v}{2} h_i(x_l) \right] =$$

$$Au_n + \frac{v}{2} (u_{xx})_n - A \sum_{k=1}^{n-1} b_k^\alpha [u_{n-k+1} - u_{n-k}] - A [f_1(t_{n+1}) + x_l (f_2(t_{n+1}) - f_1(t_{n+1}))]$$

$$- \frac{(u_x)_n}{2} [f_1(t_{n+1}) + x_l (f_2(t_{n+1}) - f_1(t_{n+1}))] - \frac{u_n}{2} [f_2(t_{n+1}) - f_1(t_{n+1})] + F(x_l, t_{n+1})$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözülmesiyle c_i dalgacık katsayıları elde edilir. Daha sonra bu katsayılar (6.5), (6.8) ve (6.9) denklemlerinde yerine yazılarak nümerik çözüm ardışık olarak bulunur.

6.2 Kesirli Mertebeden Türevli İkili Burgers Denklemi

Bu bölümde,

$$D_t^\alpha u - u_{xx} - 2uu_x + (uv)_x = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

$$D_t^\beta v - v_{xx} - 2vv_x + (uv)_x = 0, \quad 0 < \beta \leq 1 \quad (6.10)$$

olarak verilen ve

$$u(x, 0) = v(x, 0) = \phi(x)$$

başlangıç koşulları ile

$$u(a, t) = f_1(t), \quad u(b, t) = f_2(t), \quad a \leq x \leq b,$$

$$v(a, t) = g_1(t), \quad v(b, t) = g_2(t), \quad a \leq x \leq b$$

sınır koşullarına sahip kesirli mertebeden türevli ikili Burgers denklemi ele alınmıştır. Burada D_t^α ve D_t^β Caputo anlamında kesirli mertebeden türev operatörleridir.

6.2.1 Zamana göre ayrıklaştırma

(6.10) denkleminde bulunan kesirli mertebeden türevler (6.1) formülüne göre ayrıklaştırılıp u_{xx} ve v_{xx} terimlerinin zaman adımına göre ortalamaları alınırsa

$$\frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}(u_{n+1}-u_n)+\frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{k=1}^{n-1}b_k^\alpha[u_{n-k+1}-u_{n-k}]-\frac{(u_{xx})_{n+1}+(u_{xx})_n}{2}-2(uu_x)_{n+1}+[(uv)_x]_n=0,$$

$$\frac{(\Delta t)^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}(v_{n+1}-v_n)+\frac{(\Delta t)^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\sum_{k=1}^{n-1}b_k^\beta[v_{n-k+1}-v_{n-k}]-\frac{(v_{xx})_{n+1}+(v_{xx})_n}{2}-2(vv_x)_{n+1}+[(uv)_x]_n=0.$$

elde edilir. $u_{n+1}(u_x)_n+u_n(u_x)_{n+1}-(uu_x)_n$ lineerleştirme yaklaşımı [71] ile $(uu_x)_{n+1}$ ve $(vv_x)_{n+1}$ lineer olmayan terimleri lineerleştirilip gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$Au_{n+1}-(u_{xx})_{n+1}-2[u_{n+1}(u_x)_n+u_n(u_x)_{n+1}]=\begin{cases} Au_n-A\sum_{k=1}^{n-1}b_k^\alpha[u_{n-k+1}-u_{n-k}] \\ -2u_n(u_x)_n+(u_{xx})_n-[(uv)_x]_n \end{cases}$$

$$Bv_{n+1}-(v_{xx})_{n+1}-2[v_{n+1}(v_x)_n+v_n(v_x)_{n+1}]=\begin{cases} Bv_n-B\sum_{k=1}^{n-1}b_k^\beta[v_{n-k+1}-v_{n-k}] \\ -2v_n(v_x)_n+(v_{xx})_n-[(uv)_x]_n \end{cases} \quad (6.11)$$

denklem sistemi bulunur. Sistemin başlangıç koşulları

$$u_0=v_0(x)=\phi(x)$$

ve ayrıklaştırılmış sınır koşulları

$$u_{n+1}(a)=f_1(t_{n+1}), u_{n+1}(b)=f_2(t_{n+1}), \quad n=0,1,\dots,N-1$$

$$v_{n+1}(a)=g_1(t_{n+1}), v_{n+1}(b)=g_2(t_{n+1}), \quad n=0,1,\dots,N-1$$

biçimindedir. Burada $n=0,1,\dots,N-1$ olmak üzere $t_{n+1}=\Delta t(n+1)$, $\Delta tN=T$ dir. $A=\frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$, $B=\frac{(\Delta t)^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}$ ve u_{n+1} , v_{n+1} (6.11) probleminin $(n+1)$. zaman adımındaki çözümleridir.

6.2.2 Konuma göre Haar dalgacıklarıyla ayrıklaştırma

İkili Burgers denkleminin konum adımının ayrıklaştırılması Burgers denkleminde izlenen adımlar takip edilerek $u(x)$ için

$$\begin{aligned}
(u_{xx})_{n+1}(x) &= \sum_{i=1}^{2M} c_i h_i(x), \\
(u_x)_{n+1}(x) &= \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,1}(x) + f_2(t_{n+1}) - f_1(t_{n+1}) - \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1), \\
u_{n+1}(x) &= f_1(t_{n+1}) + x(f_2(t_{n+1}) - f_1(t_{n+1})) + \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(x) - x \sum_{i=1}^{2M} c_i p_{i,2}(1)
\end{aligned} \tag{6.12}$$

eşitlikleri ve $v(x)$ için de

$$\begin{aligned}
(v_{xx})_{n+1}(x) &= \sum_{i=1}^{2M} d_i h_i(x), \\
(v_x)_{n+1}(x) &= \sum_{i=1}^{2M} d_i p_{i,1}(x) + g_2(t_{n+1}) - g_1(t_{n+1}) - \sum_{i=1}^{2M} d_i p_{i,2}(1), \\
v_{n+1}(x) &= g_1(t_{n+1}) + x(g_2(t_{n+1}) - g_1(t_{n+1})) + \sum_{i=1}^{2M} d_i p_{i,2}(x) - x \sum_{i=1}^{2M} d_i p_{i,2}(1)
\end{aligned} \tag{6.13}$$

eşitlikleri elde edilir. (6.12) ve (6.13) eşitlikleri (6.11) denkleminde yerlerine yazılır ve sonra sonuçlar $x_l = \frac{l-0.5}{2M}$, $l = 1, 2, \dots, 2M$ noktalarında ayrıştırılırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2M} c_i [A(p_{i,2}(x_l) - x_l p_{i,2}(1)) - h_i(x_l) - 2[(u_x)_n(p_{i,2}(x_l) - x_l p_{i,2}(1)) + u_n(p_{i,1}(x_l) - p_{i,2}(1))]] = \\
&Au_n - A \sum_{k=1}^{n-1} b_k^\alpha [u_{n-k+1} - u_{n-k}] - 2u_n (u_x)_n + (u_{xx})_n - [(uv)_x]_n - A[f_1(t_{n+1}) + x_l(f_2(t_{n+1}) - f_1(t_{n+1}))] \\
&\quad + 2[(u_x)_n [f_1(t_{n+1}) + x_l(f_2(t_{n+1}) - f_1(t_{n+1}))] + u_n [f_2(t_{n+1}) - f_1(t_{n+1})]] \\
&\sum_{i=1}^{2M} d_i [B(p_{i,2}(x_l) - x_l p_{i,2}(1)) - h_i(x_l) - 2[(v_x)_n(p_{i,2}(x_l) - x_l p_{i,2}(1)) + v_n(p_{i,1}(x_l) - p_{i,2}(1))]] = \\
&Bv_n - B \sum_{k=1}^{n-1} b_k^\beta [v_{n-k+1} - v_{n-k}] - 2v_n (v_x)_n + (v_{xx})_n - [(uv)_x]_n - B[g_1(t_{n+1}) + x_l(g_2(t_{n+1}) - g_1(t_{n+1}))] \\
&\quad + 2[(v_x)_n [g_1(t_{n+1}) + x_l(g_2(t_{n+1}) - g_1(t_{n+1}))] + v_n [g_2(t_{n+1}) - g_1(t_{n+1})]]
\end{aligned}$$

lineer denklem sistemi bulunur. Bu sistemin çözülmesiyle elde edilen c_i ve d_i dalgacık katsayıları (6.12) ve (6.13) denklemlerinde yerine yazılarak nümerik çözümler ardışık olarak bulunur.

6.3 Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde kesirli mertebeden türevli Burgers ve ikili Burgers denklemleri için elde edilen nümerik sonuçlar verilmiştir. Haar dalgacık yöntemiyle elde edilen sonuçların tam çözüme ne kadar iyi yaklaştığını ölçmek için

$$L_2 = \sqrt{\Delta x \sum_{i=1}^{2M} |u_i^{\text{tam}} - u_i^{\text{num}}|^2},$$

$$L_\infty = \max_i |u_i^{\text{tam}} - u_i^{\text{num}}|$$

olarak tanımlanan L_2 ve L_∞ hata normları kullanılmıştır. Burada Δx , x değişkeninin adım uzunluğunu, u_i^{tam} tam çözümü ve u_i^{num} nümerik çözümü göstermektedir.

Problem 1.

Haar dalgacık yönteminin kesirli mertebeden türevli Burgers denklemi için ilk uygulaması olarak (6.2) denklemi $F(x, t)$ fonksiyonu

$$F(x, t) = \frac{2t^{2-\alpha} e^x}{\Gamma(3-\alpha)} + t^4 e^{2x} - vt^2 e^x$$

olmak üzere

$$u(x, 0) = 0, \quad t \geq 0$$

başlangıç koşulu ve

$$u(0, t) = t^2, \quad u(1, t) = et^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

sınır koşulu ile göz önüne alınmıştır. Problemin tam çözümü

$$u(x, t) = t^2 e^x$$

dir [148].

Tablo 6.1'de α 'nın farklı değerleri ve $\Delta t = 0.00025$ için $t = 1$ zamanındaki hatalar verilmiş olup [148] çalışmasında kullanılmış olan kübik B-spline sonlu eleman yöntemiyle karşılaştırılmıştır. Tablo 6.1'den $2M = 32$ kollokasyon noktası için Haar dalgacık yöntemiyle elde edilen sonuçların daha iyi olduğu görülmektedir.

Tablo 6.1: Problem 1 için α 'nın farklı değerleri, $\Delta t = 0.00025$ ve $t = 1$ için hataların karşılaştırılmaları.

	$\alpha = 0.1$		$\alpha = 0.25$		$\alpha = 0.75$	
	Haar	[148]	Haar	[148]	Haar	[148]
	$2M = 32$	$N = 40$	$2M = 32$	$N = 40$	$2M = 32$	$N = 40$
$L_2 \times 10^3$	0.061711	0.096733	0.060373	0.090053	0.057277	0.035448
$L_\infty \times 10^3$	0.088042	0.272943	0.086178	0.258623	0.081753	0.124569

Tablo 6.2'de azalan Δt değerleri ve $\nu = 1$, $\alpha = 0.5$, $2M = 8$ için $t = 1$ zamanındaki hatalar verilmiştir. Elde edilen hatalar [148]'daki hatalar ile karşılaştırıldığında Haar dalgacık yöntemiyle elde edilen hataların daha küçük olduğu görülmektedir.

Tablo 6.2: Problem 1 için Δt 'nin farklı değerleri ve $\nu = 1$, $\alpha = 0.5$ için $t = 1$ zamanındaki hataların karşılaştırılmaları.

	$\Delta t = 0.002$		$\Delta t = 0.001$		$\Delta t = 0.0005$	
	Haar	[148]	Haar	[148]	Haar	[148]
	$2M = 8$	$N = 40$	$2M = 8$	$N = 40$	$2M = 8$	$N = 40$
$L_2 \times 10^3$	0.374531	0.434586	0.084420	0.176195	0.062500	0.068869
$L_\infty \times 10^3$	0.539468	0.642003	0.126338	0.265419	0.085722	0.211883

Problem 2

İkinci uygulama olarak, (6.2) denklemini $F(x, t)$ fonksiyonu

$$F(x, t) = \frac{2t^{2-\alpha} \cos(\pi x)}{\Gamma(3-\alpha)} - \pi t^4 \cos(\pi x) \sin(\pi x) + \nu \pi^2 t^2 \cos(\pi x)$$

olmak üzere

$$u(x, 0) = 0, \quad t \geq 0$$

başlangıç koşulu ve

$$u(0, t) = t^2, \quad u(1, t) = -t^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

sınır koşulu ile ele alınmıştır. Problemin tam çözümü

$$u(x, t) = t^2 \cos(\pi x)$$

dir [148].

Tablo 6.3'te farklı ν değerleri, $\Delta t = 0.0005$ ve $\alpha = 0.5$ için $t = 0.1$ zamanındaki hatalar kübik B-spline sonlu eleman yöntemiyle [148] elde edilen hatalar ile karşılaştırılmıştır. Tablodan ν 'nün azalan değerleri için hataların azaldığı ve Haar dalgacık yöntemiyle elde edilen sonuçların [148] çalışmasındaki sonuçlardan daha iyi olduğu görülmektedir.

Tablo 6.3: Problem 2'de farklı ν değerleri, $\Delta t = 0.0005$ ve $\alpha = 0.5$ için $t = 0.1$ zamanındaki hataların karşılaştırmaları.

	$\nu = 1$		$\nu = 0.5$		$\nu = 0.1$	
	Haar Met. $2M = 16$	[148] $N = 80$	Haar Met. $2M = 16$	[148] $N = 80$	Haar Met. $2M = 16$	[148] $N = 80$
$L_2 \times 10^3$	0.004860	0.006528	0.004580	0.005835	0.003227	0.003105
$L_\infty \times 10^3$	0.006764	0.009164	0.006372	0.008250	0.004461	0.004847

Tablo 6.4'te farklı kollokasyon noktaları ve $\Delta t = 0.00025$, $\nu = 1$, $\alpha = 0.5$ için $t = 1$ zamanındaki hatalar verilmiş olup kübik B-spline sonlu eleman yöntemiyle karşılaştırılmıştır. Tablodan kollokasyon noktaları arttıkça hataların azaldığı ve bu hataların B-spline sonlu eleman yöntemiyle elde edilen hatalarla karşılaştırıldığında daha küçük olduğu görülmektedir.

Tablo 6.4: Problem 2'de farklı kollokasyon noktaları ve $\Delta t = 0.00025$, $\nu = 1$, $\alpha = 0.5$ için $t = 1$ zamanındaki hataların karşılaştırmaları.

	Haar Yöntemi $2M = 8$	[148] $N = 10$	Haar Yöntemi $2M = 16$	[148] $N = 20$	Haar Yöntemi $2M = 32$	[148] $N = 40$
	$L_2 \times 10^3$	1.002460	1.787278	0.253572	0.440305	0.046634
$L_\infty \times 10^3$	1.348227	2.415589	0.353832	0.583583	0.065461	0.120495

Problem 3

Son olarak (6.10) denklemini

$$u(x, 0) = v(x, 0) = \sin(x), \quad t \geq 0$$

başlangıç koşulları ile göz önüne alınmıştır. Denklemin tam çözümü $\alpha = \beta = 1$ için

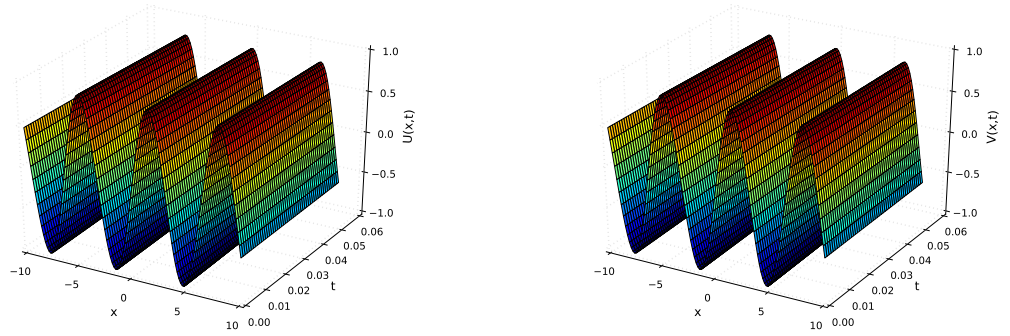
$$u(x, t) = v(x, t) = e^{-t} \sin(x)$$

dir [149]. Problem $[-10, 10]$ aralığında tam çözümden alınan sınır koşullarıyla çözülmüştür. Tablo 6.5'te farklı kollokasyon noktaları ve azalan Δt değerleri için L_∞ hata normu verilmiştir. Tablodan kollokasyon noktaları arttıkça hatanın azaldığı ve zaman adımı uzunluğunun azalmasıyla da hatanın azaldığı görülmektedir. Şekil 6.1'de $\alpha =$

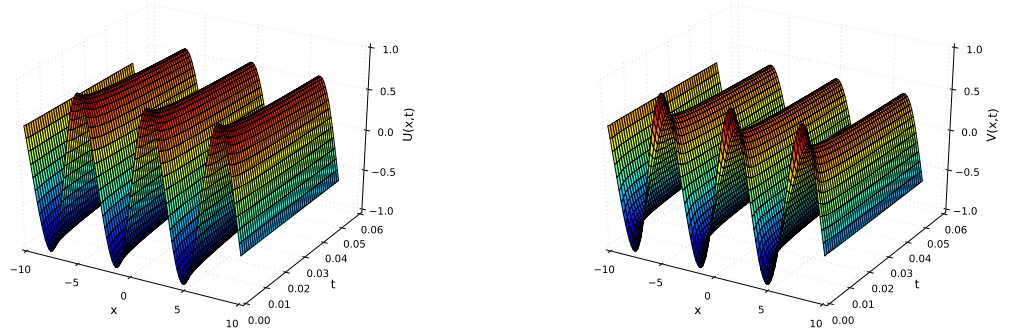
$\beta = 1$ ve $2M = 128$ için $t = 0.05$ 'teki tam çözümlerin ve Şekil 6.2'de $\alpha = 1/2, \beta = 1/4$ ve $2M = 128$ için $t = 0.05$ 'teki nümerik çözümlerin grafikleri verilmiştir.

Tablo 6.5: $\alpha = 1, \beta = 1$ için $t = 1$ 'deki L_∞ hata normu.

		$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.005$	$\Delta t = 0.001$
L_∞	$2M = 64$	2.1616e-03	1.7380e-03	1.5179e-03
	$2M = 128$	1.5112e-03	8.2218e-04	4.1744e-04



Şekil. 6.1: $\alpha = \beta = 1$ ve $2M = 128$ için $t = 0.05$ zamanındaki tam çözümler.



Şekil. 6.2: $\alpha = 1/2, \beta = 1/4$ ve $2M = 128$ için $t = 0.05$ zamanındaki nümerik çözümler.

SONUÇ

Bu tezde, dalgacıklarla ilgili temel bilgiler verilmiş olup Haar dalgacık yönteminin kısmi türevli denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmede nasıl kullanıldığı gösterilmiştir. RLW, KdV, NLS-KdV, dördüncü mertebeden parabolik kısmi türevli denklemler ve kesirli mertebeden türevli Burgers ve ikili Burgers denklemleri model problemler olarak göz önüne alınmıştır. Haar dalgacıklarına dayalı nümerik yöntemin performansı Dirichlet veya Dirichlet-Neumann sınır koşullu, sabit veya değişken katsayılı, homogen veya homogen olmayan farklı yapılarıdaki problemlerle test edilmiştir. Bu problemler için Haar dalgacıklarına dayalı nümerik yöntem ile elde edilen sonuçların, tam çözümler ve sonlu eleman, sonlu fark, ağsız yöntemler gibi literatürde mevcut olan başka yöntemlerin sonuçlarıyla karşılaştırıldığında oldukça iyi olduğu görülmüştür.

Bu gözlemler ışığında Haar dalgacıklarına dayalı nümerik yöntemin bazı avantajları aşağıdaki gibi sıralanabilir.

- Az sayıda kollokasyon noktalarında bile yüksek tamlık elde edilebilir.
- Hesaplama açısından düşük maliyetlidir. Yani bilgisayar tarafından harcanan hafıza miktarı ve geçen işlemci zamanı düşüktür.
- Yöntem bilgisayar ortamında mevcut diğer yöntemlere göre daha kolay programlanabilir.
- Sınırdaki verilen şartların uygulanması oldukça kolaydır.

Diğer taraftan dalgacık tabanlı nümerik yöntemlerin diferensiyel denklemlerin çözümünde başka avantajları da mevcuttur. Örneğin mühendislikte karşılaşılan problemlerin çoğunda öncelikle tam çözüm hakkında fikir veren hızlı ve kaba (*coarse*) bir çözüme ihtiyaç duyulur. Böyle bir çözüm dalgacıklarda bulunan çoklu çözünürlük, diklik ve lokallik özellikleri sayesinde çok hızlı ve az bir çabayla bulunabilir. Daha sonra istenilen yerde çözüm ardışık olarak iyileştirilebilir [9]. Yine dalgacık temel fonksiyonları çoklu çözünürlük, diklik ve lokallik özelliklerinden dolayı çözümünde ani ve keskin değişimler (lokal olaylar) barındıran problemler için klasik sonlu elemanlardaki temel fonksiyonlara göre daha esnek bir araç olarak görünürler [9]. Bu durum Bölüm 2’de üçüncü problemde ve Bölüm 4’teki problemlerde görülebilir.

KAYNAKLAR

- [1] A. Haar, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Erste Mitteilung)*, **Math. Ann.**, 69 (1910) 331-371.
- [2] I. Daubechies, *Orthonormal basis of compactly supported wavelets*, **Comm. Pure Appl. Math.**, XLI (1988) 909-996.
- [3] S. Mallat, *A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation*, **IEEE Trans. on PAMI**, 2:7 (1989) 674-693.
- [4] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, Hermann, **Actualités mathématiques**, 1 (1990).
- [5] D. K. Ruch, P. J. Van Fleet, *Wavelet Theory: An Elementary Approach with Applications* 1st Edition, Wiley, USA, 2009.
- [6] K. P. Soman, K. I. Ramachandran, N. G. Resmi, *Insight into Wavelets: From Theory to Practice*, PHI Learning, India, 2010.
- [7] M. El-Gamel, *A Wavelet-Galerkin method for a singularly perturbed convection-dominated diffusion equation*, **Appl. Math. Comput.**, 181 (2006) 1635-1644.
- [8] B. V. R. Kumar, M. Mehra, *Wavelet-Taylor galerkin method for the burgers equation*, **BIT Numer. Math.**, 45 (2005) 543-560.
- [9] M. Mehra, *Wavelets and differential equations-a short review*, in: AIP Conf. Proc. vol. 1146 (2009) 241-252
- [10] Ü. Lepik, H. Hein, *Application of the Haar wavelet method for solution the problems of mathematical calculus*, **Waves, Wavelets and Fractals**, 1 (2015) 1-16.
- [11] C. Chen, C.H. Hsiao, *Haar wavelet method for solving lumped and distributed parameter systems*, IEE Proc., **Control Theory Appl.**, 144 (1997) 87-94.
- [12] C. Chen, C.H. Hsiao, *Wavelet approach to optimising dynamic systems*, IEE Proc. **Control Theory Appl.**, 146 (1997) 213-219.

- [13] C.H. Hsiao, W.J.Wang, *State analysis of time-varying singular bilinear systems via Haar wavelets*, **Math. Comput. Simul.**, 52 (2000) 11-20.
- [14] C.H. Hsiao, W.J.Wang, *State analysis of time-varying singular nonlinear systems via Haar wavelets*, **Math. Comput. Simul.**, 51 (1999) 91-100.
- [15] C.H. Hsiao, W.J.Wang, *Haar wavelet approach to nonlinear stiff systems*, **Math. Comput. Simul.**, 57 (2001) 347–353.
- [16] C.H. Hsiao, *Haar wavelet direct method for solving variational problems*, **Math. Comput. Simul.**, 64 (2004) 569–585.
- [17] U. Lepik, *Numerical solution of differential equations using Haar wavelets*, **Math. Comput. Simul.**, 68 (2005) 127–143.
- [18] U. Lepik, *Numerical solution of evolution equations by the Haar wavelet method*, **Appl. Math. Comput.**, 185 (2007) 695–704.
- [19] U. Lepik, *Solving PDEs with the aid of two-dimensional Haar wavelets*, **Comput Math Appl.**, 61 (2011) 1873–1879.
- [20] I. Celik, *Haar wavelet method for solving generalized Burgers–Huxley equation*, **Arab. J. Math. Sci.**, 18:1 (2012) 25–37.
- [21] I. Celik, *Haar wavelet approximation for magnetohydrodynamic flow equations*, **Appl. Math. Model.**, 37 (2013) 3894–3902.
- [22] R. Jiwari, *A Haar wavelet quasilinearization approach for numerical simulation of Burgers' equation*, **Comput. Phys. Commun.**, 183 (2012) 2413–2423.
- [23] R. Jiwari, *A hybrid numerical scheme for the numerical solution of the Burgers' equation*, **Comput. Phys. Commun.**, 188 (2015) 59-67.
- [24] Ö. Oruç, F. Bulut, A. Esen, *A Haar wavelet-finite difference hybrid method for the numerical solution of the modified Burgers' equation*, **J. Math. Chem.**, 53:7 (2015) 1592-1607.
- [25] I. Aziz, Siraj-ul-Islam, B. Šarler, *Wavelet collocation methods for the numerical solution of elliptic BV problems*, **Appl. Math. Model.**, 37:3 (2013) 676-694.
- [26] Siraj-ul-Islam, I. Aziz, A.S. Al-Fhaid, A. Shah, *A numerical assessment of parabolic partial differential equations using Haar and Legendre wavelets*, **Appl. Math. Model.**, 37:23 (2013) 9455- 9481.
- [27] G. Hariharan, K. Kannan, *Haar wavelet method for solving some nonlinear Parabolic equations*, **J. Math. Chem.**, 48 (2010) 1044-1061.

- [28] M. Kumar, S. Pandit, *A composite numerical scheme for the numerical simulation of coupled Burgers' equation*, **Comput. Phys. Commun.**, 185:3 (2014) 809-817.
- [29] R.C. Mittal, H. Kaur, V. Mishra, *Haar wavelet-based numerical investigation of coupled viscous Burgers' equation*, **Int. J. Comput. Math.**, 92:8 (2014) 1643-1659.
- [30] H. Kaur, R.C. Mittal, V. Mishra, *Haar wavelet approximate solutions for the generalized Lane–Emden equations arising in astrophysics*, **Comput. Phys. Commun.**, 184 (2013) 2169-2177.
- [31] S. Pandit, M. Kumar, S. Tiwari, *Numerical simulation of second-order hyperbolic telegraph type equations with variable coefficients*, **Comput. Phys. Commun.**, 187 (2015) 83-90.
- [32] Z. Shi, Y. Cao, Q.J. Chen, *Solving 2D and 3D Poisson equations and biharmonic equations by the Haar wavelet method*, **Appl. Math. Model.**, 36 (2012) 5143–5161.
- [33] Siraj-ul-Islam, I. Aziz, M. Ahmad, *Numerical solution of two-dimensional elliptic PDEs with nonlocal boundary conditions*, **Comput. Math. Appl.**, 69 (2015) 180–205.
- [34] A. Patra, S. Saha Ray, *Two-dimensional Haar wavelet Collocation Method for the solution of Stationary Neutron Transport Equation in a homogeneous isotropic medium*, **Ann. Nucl. Energy.**, 70 (2014) 30–35.
- [35] Ü. Lepik, *Haar wavelet method for nonlinear integro-differential equations*, **Appl. Math. Comput.**, 176 (2006) 324–333.
- [36] Ü. Lepik, *Application of the Haar wavelet transform to solving integral and differential equations*, **Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.**, 56:1 (2007) 28–46.
- [37] Ü. Lepik, E. Tamme, *Solution of nonlinear Fredholm integral equations via the Haar wavelet method*, **Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.**, 56 (2007) 17–27.
- [38] I. Aziz, Siraj-ul-Islam, *New algorithms for numerical solution of nonlinear Fredholm and Volterra integral equations using Haar wavelets*, **J. Comput. Appl. Math.**, 239 (2013) 333–345.
- [39] I. Aziz, Siraj-ul-Islam, F. Khan, *A new method based on Haar wavelet for the numerical solution of two-dimensional nonlinear integral equations*, **J. Comput. Appl. Math.**, 272 (2014) 70–80.

- [40] Siraj-ul-Islam, I. Aziz, M. Fayyaz, *A new approach for numerical solution of integro-differential equations via Haar wavelets*, **Int. J. Comput. Math.**, 90 (2013) 1971–1989.
- [41] Siraj-ul-Islam, I. Aziz, A.S. Al-Fhaid, *An improved method based on Haar wavelets for numerical solution of nonlinear integral and integro-differential equations of first and higher orders*, **J. Comput. Appl. Math.**, 260 (2014) 449–469.
- [42] Ü. Lepik, *Solving fractional integral equations by the Haar wavelet method*, **Appl. Math. Comput.**, 214 (2009) 468–478.
- [43] J. L. Wu, *A wavelet operational method for solving fractional partial differential equations numerically*, **Appl. Math. Comput.**, 214 (2009) 31–40.
- [44] Y. Li, W. Zhao, *Haar wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations*, **Appl. Math. Comput.**, 216 (2010) 2276–2285.
- [45] M. ur Rehman, R. A. Khan, *Numerical solutions to initial and boundary value problems for linear fractional partial differential equations*, **Appl. Math. Model.**, 37 (2013) 5233–5244.
- [46] S. S. Ray, A. Patra, *Haar wavelet operational methods for the numerical solutions of fractional order nonlinear oscillatory Van der Pol system*, **Appl. Math. Comput.**, 220 (2013) 659–667.
- [47] U. Saeed, M. ur Rehman, *Haar wavelet–quasilinearization technique for fractional nonlinear differential equations*, **Appl. Math. Comput.**, 220 (2013) 630–648.
- [48] L. Wang, Y. Ma, Z. Meng, *Haar wavelet method for solving fractional partial differential equations numerically*, **Appl. Math. Comput.**, 227 (2014) 66–76.
- [49] A. Patra , S.S. Ray, *A numerical approach based on Haar wavelet operational method to solve neutron point kinetics equation involving imposed reactivity insertions*, **Ann. Nucl. Energy.**, 68 (2014) 112–117.
- [50] A. Patra , S.S. Ray, *Numerical simulation based on Haar wavelet operational method to solve neutron point kinetics equation involving sinusoidal and pulse reactivity*, **Ann. Nucl. Energy.**, 73 (2014) 408–412.
- [51] M. Yi, J. Huang, *Wavelet operational matrix method for solving fractional differential equations with variable coefficients*, **Appl. Math. Comput.**, 230 (2014) 383–394.

- [52] A. Boggess, F. J. Narcowich, *A first course in wavelets with Fourier analysis 2nd Edition*, Wiley, New Jersey, 2009.
- [53] D.H. Peregrine, *Calculations of the development of an undular bore*, **J. Fluid Mech.**, 25 (1966) 321–330.
- [54] Q. Chang, G. Wang, B. Guo, *Conservative scheme for a model of nonlinear dispersive waves and its solitary waves induced by boundary motion*, **J. Comput. Phys.**, 93 (1995) 360–375.
- [55] D. Bhardwaj, R. Shankar, *A computational method for regularized long wave equation*, **Comp. Math. Appl.**, 40 (2000) 1397–1404.
- [56] S. Kutluay, A. Esen, *A finite difference solution of the regularized long-wave equation*, **Math. Probl. Eng.**, 2006 (2006) 1-14.
- [57] L.R.T. Gardner, G.A. Gardner, A. Dogan, *A least-squares finite element scheme for the RLW equation*, **Commun. Numer. Meth. Eng.**, 12 (1996) 795-804.
- [58] S.I. Zaki, *Solitary waves of the splitted RLW equation*, **Comput. Phys. Commun.**, 138 (2001) 80–91.
- [59] İ. Dağ, *Least square quadratic B-spline finite element method for the regularized long wave equation*, **Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 182 (2000) 205-215.
- [60] I. Dağ, M.N. Özer, *Approximation of RLW equation by least square cubic B-spline finite element method*, **Appl. Math. Model.**, 25 (2001) 221-231.
- [61] A. Dogan, *Numerical solution of RLW equation using linear finite elements within Galerkins method*, **Appl. Math. Model.**, 26 (2002) 771-783.
- [62] A. Esen, S. Kutluay, *Application of a lumped Galerkin method to the regularized long wave equation*, **Appl. Math. Comput.**, 174 (2006) 833-845.
- [63] P.C. Jain, R. Shankar, T.V. Singh, *Numerical solutions of RLW equation*, **Commun. Numer. Meth. Eng.**, 9 (1993) 587–594.
- [64] K. R. Raslan, *A computational method for the regularized long wave (RLW) equation*, **Appl. Math. Comput.**, 167:2 (2005) 1101–1118.
- [65] İ. Dağ, A. Korkmaz, B. Saka, *Cosine Expansion Based Dierential Quadrature Algorithm for Numerical Solution of the RLW Equation*, **Numer. Meth. Part. D. E.**, 26:3 (2010) 544-560.
- [66] B. Saka, İ. Dağ, *Quartic B-spline Collocation Algorithms for Numerical Solution of the RLW Equation*, **Numer. Meth. Part. D. E.**, 23:3 (2007) 731-751.

- [67] B. Saka, İ. Dağ, *A Numerical Solution of the RLW Equation by Galerkin Method Using Quartic B-splines*, **Commun. Numer. Meth. Engng.**, 24 (2008) 1339-1361.
- [68] B. Saka, İ. Dağ, D. Irk, *Quintic B-spline Collocation Method for Numerical Solutions of the RLW Equation*, **Anziam J.**, 49:3 (2008) 389-410.
- [69] B. Saka, I. Dag, A. Dogan, *Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using quadratic B-spline*, **Int. J. Comput. Math.**, 81 (2004) 727–739.
- [70] B. Saka, A. Şahin, İ. Dağ, *B-spline Collocation Algorithms for Numerical Solution of the RLW Equation*, **Numer. Meth. Part. D. E.**, 27 (2011) 581-607.
- [71] S. G. Rubin, R. A. Graves, *Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics*, NASA TR R-436, Washington, DC, 1975.
- [72] P.J. Olver, *Euler operators and conservation laws of the BBM equation*, **Math. Proc. Camb. Phil. Soc.**, 85 (1979) 143–160.
- [73] C.S.Gardner, J.M.Greene, M.D.Kruskal, R.M.Miura, *Method for solving Korteweg–de Vries equation*, **Phys. Rev. Lett.**, 19 (1967) 1095.
- [74] A.M. Wazwaz, *Two reliable methods for solving variants of the KdV equation with compact and noncompact structures*, **Chaos Soliton fract.**, 28 (2006) 457–462.
- [75] G. Das, J. Sarma, *A new mathematical approach for finding the solitary waves in dusty plasma*, **Phys. Plasmas**, 6 (1999) 4394– 4397.
- [76] A. Osborne, *The inverse scattering transform: Tools for the nonlinear fourier analysis and filtering of ocean surface waves*. **Chaos Soliton fract.**, 5 (1995) 2623–2637.
- [77] L. Ostrovsky, Y.A Stepanyants, *Do internal solitons exist in the ocean?* **Rev. Geophys.**, 27:1 (1989) 293–310.
- [78] A. Ludu, J.P. Draayer, *Nonlinear modes of liquid drops as solitary waves*, **Phys. Rev. Lett.**, 80 (1998) 2125–2128.
- [79] L. Reatto, D. Galli, *What is a ROTON?*, **Int. J. Mod. Phys. B**, 13 (1999) 607–616.
- [80] S. Turitsyn, A. Aceves, C. Jones, V. Zharnitsky, *Average dynamics of the optical soliton in communication lines with dispersion management: Analytical results*, **Phys. Rev. E**, 58 (1998) R48–R51.

- [81] M.W. Coffey, *Nonlinear dynamics of vortices in ultraclean type-II superconductors: Integrable wave equations in cylindrical geometry*, **Phys. Rev. B**, 54 (1996)1279–1285.
- [82] M.A. Helal, M.A. Mehanna, *A comparison between two different methods for solving KdV–Burgers equation*, **Chaos Soliton Fract.**, 28 (2006) 320–326.
- [83] T. Geyikli, D. Kaya, *An application for a modified KdV equation by the decomposition method and finite element method*. **Appl. Math. Comput.**, 169 (2005) 971–981.
- [84] L. Xiangzheng, W. Mingliang, *A sub-ODE method for finding exact solutions of a generalized KdV-mKdV equation with highorder nonlinear terms*, **Phys. Lett. A**, 361 (2007) 115–118.
- [85] Y. Zhenya, *New compacton-like and solitary patterns-like solutions to nonlinear wave equations with linear dispersion terms*, **Nonlinear Anal.**, 64 (2006) 901–909.
- [86] E.J. Kansa, *Multiquadrics-a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics-I*, **Comput. Math. Appl.**, 19 (1990) 127–145.
- [87] E.J. Kansa, Y.C. Hon, *Circumventing the ill-conditioning problem with multiquadric radial basis functions applications to elliptic partial differential equations*. **Comput. Math. Appl.**, 39 (2009) 123–137.
- [88] M. Dehghan, A. Shokri, *A numerical method for KdV equation using collocation and radial basis functions*, **Nonlinear Dyn.**, 50 (2007) 111–120.
- [89] Siraj-ul-Islam, A.J. Khattak, I.A. Tirmizi, *A meshfree method for numerical solution of KdV equation*, **Eng. Anal. Bound. Elem.**, 32 (2008) 849–855.
- [90] M. Inc, Korteweg–de Vries Equation (KdV), *Some Numerical Methods for Solving the*, *Encyclopedia of Complexity and Systems Science* (2009) 5161-5176.
- [91] J. Donea, *A Taylor–Galerkin method for convective transport problems*, **Int. J. Numer. Methods Eng.**, 20 (1984) 101–119.
- [92] J. Donea, S. Giuliani, and H. Laval, *Time-accurate solution of advection-diffusion problems by finite elements*, **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, 45 (1984) 123–146.
- [93] J. Donea, L. Quartapelle, and V. Selmin, *An analysis of time discretization in finite element solution of hyperbolic problems*, **J. Comput. Phys.**, 70 (1987) 463–499.

- [94] A. Canıvar, M. Sari, I. Dag, *A Taylor–Galerkin finite element method for the KdV equation using cubic B-splines*, **Physica B**, 405 (2010) 3376–3383.
- [95] R.M. Miura, C.S. Gardner, M.D. Kruskal, *Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion*, **J. Math. Phys.**, 6 (1968) 1204–1209.
- [96] Siraj-ul-Islam, A.J. Khattak, I.A. Tirmizi, *A meshfree method for numerical solution of KdV equation*, **Eng. Anal. Bound. Elem.**, 32 (2008) 849–855.
- [97] D. Bai, L. Zhang, *The finite element method for the coupled schrödinger-kdv equations*, **Phys. Lett. A**, 373:26 (2009) 2237–2244.
- [98] D. Bai, L. Zhang, *Numerical studies on a novel split-step quadratic b-spline finite element method for the coupled schrödinger-kdv equations*, **Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul.**, 16 (2011) 1263–1273.
- [99] D. Kaya, S. M. El-Sayed, *On the solution of the coupled schrödinger-kdv equation by the decomposition method*, **Phys. Lett. A**, 313:1-2 (2003) 82–88.
- [100] M. Abdou, A. Soliman, *New applications of variational iteration method*, **Physica D (Nonlinear Phenomena)**, 211 (2005) 161–182.
- [101] S. Kucukarslan, *Homotopy perturbation method for coupled schrödinger-kdv equation*, **Nonlinear Anal. Real World Appl.**, 10 (2009) 2264–2271.
- [102] M. Labidi, G. Ebadi, E. Zerrad, A. Biswas, *Analytical and numerical solutions of the schrödinger-kdv equation*, **Pramana-J Phys.**, 78:1 (2012) 59–90.
- [103] R. Abardeh, M. Ramezanpour, A. Doosthoseini, E. Rezaie, *New method for solving coupled schrödinger kdv equation*, **App. Math. Sci.**, 7:86 (2013) 4273–4280.
- [104] K. Appert, J. Vaclavik, *Dynamics of coupled solitons*, **Phys. of Fluids**, 20:11 (1977) 1845–1849.
- [105] A. Golbabai, A. Safdari-Vaighani, *A meshless method for numerical solution of the coupled schrödinger-kdv equations*, **Computing**, 92 (2011) 225–242.
- [106] M. S. Ismail, F. M. Mosally, K. M. Alamoudi, *Petrov-galerkin method for the coupled schrödinger-kdv equation*, **Abstr. Appl. Anal.**, ID 705204.
- [107] L. Collatz, *Hermitian methods for initial value problems in partial differential equations*, in: *J.J.H. Miller (Ed.), Topics in Numerical Analysis*, Academic Press, New York, 1973, 41–61.

- [108] S.D. Conte, *A stable implicit finite difference approximation to a fourth order parabolic equation*, **J. Assoc. Comput. Mech.**, 4 (1957) 18–23.
- [109] S.H. Crandall, *Numerical treatment of a fourth order partial differential equations*, **J. Assoc. Comput. Mech.**, 1 (1954) 111–118.
- [110] M.K. Jain, S.R.K. Iyengar, A.G. Lone, *Higher order difference formulas for a fourth order parabolic partial differential equation*, **Int. J. Numer. Methods Eng.**, 10 (1976) 1357–1367.
- [111] J. Todd, *A direct approach to the problem of stability in the numerical solution of partial differential equations*, **Commun. Pure Appl. Math.**, 9 (1956) 597–612.
- [112] D.J. Evans, W.S. Yousif, *A note on solving the fourth order parabolic equation by the age method*, **Int. J. Comput. Math.**, 40 (1991), 93–97.
- [113] A. Danaee, A. Khan, I. Khan, T. Aziz, D.J. Evans, *Hopscotch procedure for a fourth-order parabolic partial differential equation*, **Math. Comput. Simulat.**, XXIV (1982) 326–329.
- [114] D.J. Evans, *A stable explicit method for the finite difference solution of a fourth order parabolic partial differential equation*, **Comput. J.**, 8 (1965) 280–287.
- [115] G. Fairweather, A.R. Gourlay, *Some stable difference approximations to a fourth order parabolic partial differential equation*, **Math. Comput.**, 21 (1967) 1–11.
- [116] R.D. Richtmyer, K.W. Morton, *Difference methods for Initial value Problems, second ed.*, John Wiley & Sons, 1967.
- [117] C. Andrade, S. McKee, *High accuracy A.D.I. methods for fourth-order parabolic equations with variable coefficients*, **J. Comput. Appl. Math.**, 3:1 (1977), 11–14.
- [118] A.Q.M. Khaliq, E.H. Twizell, *A family of second order methods for variable coefficient fourth order parabolic partial differential equations*, **Int. J. Comput. Math.**, 23 (1987), 63–76.
- [119] A.M. Wazwaz, *Analytic treatment for variable coefficient fourth-order parabolic partial differential equations*, **Appl. Math. Comput.**, 123 (2001) 219–227.
- [120] Y. Liu, C.S. Gurram, *The use of He's variational iteration method for obtaining the free vibration of an Euler–Bernoulli beam*, **Math. Comput. Model.**, 50 (2009) 1545–1552.

- [121] R.C. Smith, K.L. Bowers, J. Lund, *A fully Sinc–Galerkin method for Euler–Bernoulli Beam Models*, **Numer. Methods Partial Diff. Equ.**, 8 (1992) 171–202.
- [122] A. Khan, I. Khan, T. Aziz, *Sextic spline solution for solving a fourth-order parabolic partial differential equation*, **Int. J. Comput. Math.**, 82:7 (2005) 871–879.
- [123] T. Aziz, A. Khan, J. Rashidinia, *Spline methods for the solution of fourth-order parabolic partial differential equations*, **Appl. Math. Comput.**, 167 (2005) 153–166.
- [124] H. Caglar, N. Caglar, *Fifth-degree B-spline solution for a fourth-order parabolic partial differential equations*, **Appl. Math. Comput.**, 201 (2008) 597–603.
- [125] J. Rashidinia, R. Mohammadi, *Sextic spline solution of variable coefficient fourth-order parabolic equations*, **Int. J. Comput. Math.**, 87:15 (2010) 3443–3454.
- [126] R.C. Mittal, R.K. Jain, *B-splines methods with redefined basis functions for solving fourth order parabolic partial differential equations*, **Appl. Math. Comput.**, 217 (2011) 9741–9755.
- [127] R. Mohammadi, *Sextic B-spline collocation method for solving Euler–Bernoulli Beam Models*, **Appl. Math. Comput.**, 241 (2014) 151–166.
- [128] S. Monami, Z. Odibat, *Analytical approach to linear fractional partial differential equations arising in fluid mechanics*, **Phys. Lett. A**, 355(2006) 271–279.
- [129] J. Sabatier, O.P. Agrawal, J.A. Tenreiro Machado (Eds.), *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, Springer, 2007.
- [130] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [131] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [132] O.P. Agrawal, *Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain*, **Nonlin. Dynam.**, 29 (2002) 145–155.
- [133] H. Sun, W. Chen, C. Li, et al, *Finite difference schemes for variable-order time fractional diffusion equation*, **Int. J. Bifurcation Chaos**, 22:4 (2012) 1250085.

- [134] M.M. Meerschaert, H.P. Scheffler, C. Tadjeran, *Finite difference methods for two-dimensional fractional dispersion equation*, **J. Comput. Phys.**, 211 (2006) 249–261.
- [135] S.B. Yuste, *Weighted average finite difference methods for fractional diffusion equations*, **J. Comput. Phys.**, 216 (2006) 264–274.
- [136] S.B. Yuste, L. Acedo, *An explicit finite difference method and a new von Neumann-type stability analysis for fractional diffusion equations*, **SIAM J. Numer. Anal.**, 42 (2005) 1862–1874.
- [137] J. Quintana-Murillo, S.B. Yuste, *An Explicit Difference Method for solving Fractional Diffusion and Diffusion-Wave Equations in the Caputo Form*, **J. Comput. Nonlinear Dynam.**, 6:2 (2010) doi:10.1115/1.4002687.
- [138] N.H. Sweilam, M.M. Khader, A.M.S. Mahdy, *Crank-Nicolson Finite Difference Method For Solving Time-Fractional Diffusion Equation*, **J. Fractional Calc. & Appl.**, 2 (2012) 1–9.
- [139] C. Çelik, M. Duman, *Crank-Nicolson method for the fractional diffusion equation with the Riesz fractional derivative*, **J. Comput. Phys.**, 231(2012) 1743–1750.
- [140] A. Esen, Y. Ucar, N.M. Yagmurlu, O. Tasbozan, *A Galerkin Finite Element Method to Solve Fractional Diffusion and Fractional Diffusion-Wave Equations*, **Math. Model Anal.**, 18:2 (2013) 260–273.
- [141] I. Hashim, O. Abdulaziz, *Homotopy analysis method for fractional IVPs*, **Commun Nonlinear Sci Numer Simul.**, 14:3 (2009) 674–684.
- [142] S. Momani, Z. Odibat, *Generalized differential transform method for solving a space and time-fractional diffusion-wave equation*, **Phys. Lett. A**, 370 (2007) 379–387.
- [143] Z. Odibat, S. Momani, *Generalized differential transform method: application to differential equations of fractional order*, **Appl. Math. Comput.**, 197 (2008) 467–477.
- [144] M.M. Hosseini, *Adomian decomposition method for solution of nonlinear differential algebraic equations*, **Appl. Math. Comput.**, 181 (2006) 1737–1744.
- [145] I.L. EI-Kalla, *Convergence of the Adomian method applied to a class of nonlinear integral equations*, **Appl. Math. Comput.**, 21 (2008) 372–376.

- [146] Z. Odibat, *A study on the convergence of variational iteration method*, **Math. Comput. Model.**, 51 (2010) 1181–1192.
- [147] K. B. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic, New York, 1974.
- [148] A. Esen, O. Tasbozan, *Numerical Solution of Time Fractional Burgers Equation by Cubic B-spline Finite Elements*, **Mediterr. J. Math.**, (2015) 1-13, <http://dx.doi.org/10.1007/s00009-015-0555-x>.
- [149] Y. Chen, H. Li An, *Numerical solutions of coupled Burgers equations with time- and space-fractional derivatives*, **Appl. Math. Comput.**, 200 (2008) 87–95.

ÖZGEÇMİŞ

- Ad Soyad** : ÖMER ORUÇ
- Doğum Yeri ve Tarihi** : Diyarbakır / 1986
- Adres** : İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü
- E-posta** : omeroruc0@gmail.com
- Lisans** : Dicle Üniversitesi, Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi,
Matematik Öğretmenliği, 2004 - 2009.
- Yüksek Lisans** : TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi,
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim
Dalı, Uygulamalı Matematik, 2009 - 2011.
- Yüksek Lisans Tez Konusu** : Genelleştirilmiş Hukuhara Yöntemi ile Bazı
Bulanık Başlangıç Değer Problemlerinin
Çözümlerinin araştırılması
- Mesleki Deneyim** : 2009-2010, TOBB Ekonomi ve Teknoloji
Üniversitesi: Asistan,
2010 -, MEB: Öğretmen.

Yayın Listesi :

- Ö. Akın, T. Khaniev, Ö. Oruç, İ.B. Türkşen, "An algorithm for the solution of second order fuzzy initial value problems", **Expert Systems with Applications**, 40 (3) (2013) 953-957 (SCI)
- Ö. Akın, Ö. Oruç, "A prey predator model with fuzzy initial values", **Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics**, 41 (3) (2012) 387-395 (SCI-E)

- Ö. Akın, T. Khaniyev, Ö. Oruç, İ. B. Türkşen, "Some possible fuzzy solutions for second order fuzzy initial value problems involving forcing terms"
An International Journal of Applied and Computational Mathematics, 13 (2) (2014) 239-249 (SCI)
- Alaattin ESEN, Fatih BULUT, **Ömer ORUÇ**, "Wavelet-Galerkin Metoduyla Bazı Diferansiyel Denklemlerin Numerik Çözümleri", 26. Ulusal Matematik Sempozyumu, 4-7 Eylül 2013, Dicle Üniversitesi, Diyarbakır/ Türkiye.
- Ömer Oruç, Fatih Bulut and Alaattin Esen, "Numerical Solutions of Huxley Equation By Haar Wavelet Method", Boundary Value Problems Workshop, March 12-13, 2014, Dicle University, Diyarbakır/ Turkey.
- Ö. Oruç, F. Bulut, A. Esen, "A Haar wavelet-finite difference hybrid method for the numerical solution of the modified Burgers' equation", **Journal of Mathematical Chemistry**, 53 (7) (2015) 1592-1607 (SCI)
- F. Bulut, Ö. Oruç and A. Esen, "Numerical Solutions of Fractional System of Partial Differential Equations By Haar Wavelets", **Computer Modeling in Engineering & Sciences**, 108 (4) (2015) 263-284 (SCI)

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

- Ö. Oruç, F. Bulut, A. Esen, "Numerical Solutions of Regularized Long Wave Equation By Haar Wavelet Method", **Mediterranean Journal of Mathematics**, Accepted, (2016) (SCI-E)
- Ömer Oruç, Alaattin Esen, Fatih Bulut, "A HAAR WAVELET COLLOCATION METHOD FOR COUPLED NONLINEAR SCHRÖDINGER-KdV EQUATIONS"
International Journal of Modern Physics C, Accepted, (2016) (SCI)
- A. Esen, F. Bulut, Ö. Oruç, "A Unified Approach for the Numerical solution of Time Fractional Burgers' Type Equations", **The European Physical Journal Plus**, Accepted, (2016) (SCI)
- A. Esen, F. Bulut, Ö. Oruç, "Numerical Solution of the KdV Equation by Haar Wavelet Method", **Pramana Journal of Physics**, Accepted, (2016) (SCI)
- F. BULUT, Ö. ORUÇ , A. ESEN, "A NUMERICAL SCHEME BASED ON HAAR WAVELETS FOR COUPLED NONLINEAR SCHRÖDINGER-KDV EQUATIONS", 9th International Physics Conference of the Balkan Physical Union 24-27 August 2015, İstanbul University, İstanbul / Turkey.