**T.C.**

**İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ**

**SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ**

# $n$'den ARDIL $k$-ÇIKIŞLI SİSTEMLERİN GÜVENİLİRLİĞİ İÇİN SINIR YAKLAŞIMLARI

DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN
**Prof. Dr. Mehmet GÜNGÖR**

HAZIRLAYAN
**Ahmet DEMİRALP**

**MALATYA-2020**

**Bu araştırma İnönü Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi Tarafından SDK-2018/991 Proje Numarası ile Desteklenmiştir.**

T.C.

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ

SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

# $n$'den ARDIL $k$-ÇIKIŞLI SİSTEMLERİN GÜVENİLİRLİĞİ İÇİN SINIR YAKLAŞIMLARI

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN
**Ahmet DEMİRALP**

DANIŞMAN
**Prof. Dr. Mehmet GÜNGÖR**

**MALATYA-2020**

## ONUR SÖZÜ

Prof. Dr. Mehmet GÜNGÖR'ün danışmanlığında doktora tezi olarak hazırladığım **"$n$'den Ardıl $k$-Çıkışlı Sistemlerin Güvenilirliği İçin Sınır Yaklaşımları"** başlıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün yapıtların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterildiğini belirtir, bunu onurumla doğrularım.

**…./…./….**

Ahmet DEMİRALP

**TEŞEKKÜR**

Doktora çalışmamın her aşamasında yardım, öneri ve desteğini esirgemeden beni yönlendiren ve aynı zamanda bölümde gösterdiği anlayış ve yardımlaşmadan ötürü danışman hocam sayın Prof. Dr. Mehmet GÜNGÖR'e,

Bu süreçte göstermiş oldukları anlayış ve yardımlardan ötürü tez izleme komitesindeki sayın hocalarım Prof. Dr. Ahmet UĞUR ve Doç. Dr. Yunus BULUT'a,

Kodlama konusunda beni aydınlatan yorum ve desteklerinden dolayı sevgili dostum Murat GÖZCÜ'ye,

Akademik hayatımın ilk anından itibaren sürekli yanımda olarak desteklerini esirgemeyen çok değerli annem Cemile DEMİRALP, babam Memet DEMİRALP ve kardeşlerim Müge MUTLU ve Onur DEMİRALP'e,

Doktora dönemimde gösterdiği fedakarlık ve özveri için sevgili eşim Tuğba DEMİRALP'e ve bu süreçte oyun oynama isteklerini geri çevirmeme rağmen beni anlayışla karşılayan canım kızlarım Zeynep Derin ve Elif Deren'e,

Son olarak doktora tez projesi ile beni destekleyen İnönü Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi'ne teşekkür ediyorum.

Ahmet DEMİRALP

# ÖZET

Doktora Tezi

$n$’den ARDIL $k$-ÇIKIŞLI SİSTEMLERİN GÜVENİLİRLİĞİ İÇİN SINIR YAKLAŞIMLARI

Ahmet DEMİRALP

İnönü Üniversitesi

Sosyal Bilimler Enstitüsü

Ekonometri Anabilim Dalı

69+xvi sayfa

2020

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet GÜNGÖR

Bu tez, beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tez konusunun tarihsel gelişimi ve tezde kullanılacak sistemin tanıtımı yapılmaktadır.

İkinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve kavramlar ele alınmaktadır.

Üçüncü bölümde, $n$’den ardıl $k$-çıkışlı hatalı(başarılı) sistemlerin doğrusal(dairesel) durumları için güvenilirliklerinin hesaplanması için literatürde önerilen bazı yöntemler verilmektedir.

Dördüncü bölümde, önce doğrusal(dairesel) $n$’den ardıl $k$-çıkışlı başarılı sistemler ile doğrusal $n$’den ardıl $k$-çıkışlı hatalı sistemler için mevcut sınır yaklaşımları incelenmektedir. Sonra doğrusal hatalı sistemler ile ilgili incelenen yaklaşımlardan bazıları, minimal kesen küme özelliği kullanılarak dairesel hatalı sistemler için önerilmektedir. Ayrıca, incelenen bu yaklaşımları karşılaştırmak amacıyla bazı $n$, $k$ ve $q$ değerlerine göre elde edilen sonuçlar tablolarda verilmektedir.

Beşinci bölümde ise, incelenen bu sistemler için örnek model uygulamalara yer verilmektedir. Bu örnek model uygulamaları için dördüncü bölümde önerilen uygun sınır yaklaşımlarının sonuçları grafiklerle verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Doğrusal(dairesel) $n$'den ardıl $k$-çıkışlı başarılı sistemler, doğrusal(dairesel) $n$'den ardıl $k$-çıkışlı hatalı sistemler, sistem güvenilirliği, alt(üst) sınır yaklaşımları.

**ABSTRACT**

Doctorate Thesis

BOUNDARY APPROXIMATIONS FOR RELIABILITY OF CONSECUTIVE-$k$-out-of-$n$ SYSTEMS



Ahmet DEMİRALP

Inonu University

Graduate School of Social Sciences

Department of Econometrics



69+xvi pages

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet GÜNGÖR



This thesis consists of five chapters. In the first chapter, the historical development of the thesis subject is explained and the systems using in the thesis are introduced.

In the second chapter, the basic definitions and terms which will be used in the next sections, are discussed.

In the third chapter, some methods suggested in the literature for calculating the reliability for linear(circular) consecutive-$k$-out-of-$n$ failure(successful) systems are given.

In the fourth chapter, firstly the current boundary approximations for linear(circular) consecutive-$k$-out-of-$n$ successful systems and linear consecutive-$k$-out-of-$n$ failure systems are examined. Then, by using minimal cut set property, some of the examined approximations about linear failure systems are recommended for circular failure systems. In addition, the results obtained according to some $n$, $k$ and $q$ values in order to compare these examined approximations are given in the tables.

In the fifth chapter, sample model applications are given for these systems being examined. The results of the suitable the boundary approximations proposed in the fourth chapter for these sample model applications are given with graphs.



**Key Words:** Linear(circular) consecutive-$k$-out-of-$n$ successful systems, linear(circular) consecutive-$k$-out-of-$n$ failure systems, system reliability, lower(upper) boundary approximations.

## İÇİNDEKİLER

## TABLOLAR LİSTESİ

## ŞEKİLLER LİSTESİ

# SİMGELER VE KISALTMALAR

| | |
|---|---|
| $x_i$ | $i$. bileşen durumu |
| $n$ | Bileşen sayısı |
| $k$ | Sistemin başarılı ya da hatalı olması için gereken bileşen sayısı |
| $\boldsymbol{x}$ | Durum vektörü |
| iid | Özdeş ve bağımsız dağılım |
| $\phi$ | Sistem durumu |
| $\phi(x)$ | Sistem yapı fonksiyonu |
| $p_i$ | $i$. bileşenin güvenilirliği |
| $q_i$ | $i$. bileşenin güvenilmezliği |
| R | Sistem güvenilirliği |
| Q | Sistem güvenilmezliği |
| $(C,\phi)$ | Tutarlı sistem |
| $P$ | Yol kümesi |
| $K$ | Kesen kümesi |
| $\phi^D$ | Dual sistem |
| $\lfloor a \rfloor$ | $a$’dan büyük olmayan tam sayı |
| $\lceil a \rceil$ | $a$’dan küçük olmayan tam sayı |
| $[a]$ | $a$’ya eşit ya da küçük en büyük tam sayı |
| $k/n:F$ | $n$’den $k$-çıkışlı hatalı sistem |
| $k/n:G$ | $n$’den $k$-çıkışlı başarılı sistem |
| $Con/k/n:F$ | $n$’den ardıl $k$-çıkışlı hatalı sistem |
| $Con/k/n:G$ | $n$’den ardıl $k$-çıkışlı başarılı sistem |

| | |
|---|---|
| $Lin/Con/k/n:G$ | Doğrusal $n$'den ardıl $k$-çıkışlı başarılı sistem |
| $Cir/Con/k/n:G$ | Dairesel $n$'den ardıl $k$-çıkışlı başarılı sistem |
| $Lin/Con/k/n:F$ | Doğrusal $n$'den ardıl $k$-çıkışlı hatalı sistem |
| $Cir/Con/k/n:F$ | Dairesel $n$'den ardıl $k$-çıkışlı hatalı sistem |
| $R_{LG}$ | Doğrusal başarılı sistemin güvenilirliği |
| $R_{CG}$ | Dairesel başarılı sistemin güvenilirliği |
| $R_{LF}$ | Doğrusal hatalı sistemin güvenilirliği |
| $R_{CF}$ | Dairesel hatalı sistemin güvenilirliği |
| $l_{LG}$ | Doğrusal başarılı sistem için alt sınır |
| $u_{LG}$ | Doğrusal başarılı sistem için üst sınır |
| $l_{CG}$ | Dairesel başarılı sistem için alt sınır |
| $u_{CG}$ | Dairesel başarılı sistem için üst sınır |
| $l_{LF}$ | Doğrusal hatalı sistem için alt sınır |
| $u_{LF}$ | Doğrusal hatalı sistem için üst sınır |
| $l_{CF}$ | Dairesel hatalı sistem için alt sınır |
| $u_{CF}$ | Dairesel hatalı sistem için üst sınır |
| LLG1 | (4.1) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| ULG1 | (4.2) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LLG2 | (4.3) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| ULG2 | (4.4) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LCG1 | (4.5) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| UCG1 | (4.6) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LLF1 | (4.7) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |

| | |
|---|---|
| ULF1 | (4.8) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LLF2 | (4.9) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| ULF2 | (4.10) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| ULF3 | (4.11) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LLF3 | (4.12) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| ULF4 | (4.13) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LLF4 | (4.14) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| ULF5 | (4.15) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LLF5 | (4.17) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| ULF6 | (4.18) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LLF6 | (4.20) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| ULF7 | (4.21) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LLF7 | (4.23) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| ULF8 | (4.24) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LLF8 | (4.25) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| ULF9 | (4.26) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LLF9 | (4.27) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| ULF10 | (4.28) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LLF10 | (4.29) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| ULF11 | (4.30) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LLF11 | (4.31) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| ULF12 | (4.32) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LLF12 | (4.33) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |

| | |
|---|---|
| ULF13 | (4.34) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LLF13 | (4.35) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| ULF14 | (4.36) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| ULF15 | (4.37) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LLF14 | (4.38) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| ULF16 | (4.39) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| ULF17 | (4.41) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LLF15 | (4.42) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| LLF16 | (4.43) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| LLF17 | (4.45) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| LLF18 | (4.46) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| ULF18 | (4.47) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LLF19 | (4.48) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| ULF19 | (4.49) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LLF20 | (4.50) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| LLF21 | (4.52) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| ULF20 | (4.53) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LLF22 | (4.54) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| ULF21 | (4.55) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LCF1 | (4.56) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| UCF1 | (4.57) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LCF2 | (4.58) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| UCF2 | (4.59) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |

| | |
|---|---|
| LCF3 | (4.60) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| UCF3 | (4.61) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| UCF4 | (4.62) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LCF4 | (4.63) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| UCF5 | (4.63) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LCF5 | Sonuç 4.3’de tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| UCF6 | Sonuç 4.3’de tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LCF6 | Sonuç 4.4’de tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| UCF7 | Sonuç 4.4’de tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LCF7 | (4.64) eşitliğinde tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| UCF8 | (4.65) eşitliğinde tanımlanan üst sınır yaklaşımı |
| LCF8 | Sonuç 4.6’de tanımlanan alt sınır yaklaşımı |
| UCF9 | Sonuç 4.6’de tanımlanan üst sınır yaklaşımı |

# 1. GİRİŞ

İkinci dünya savaşından sonra hızla gelişen teknoloji, karmaşık sistemlerin sayısının artmasına yol açmıştır(Rausand M., A., Hoyland, 2004:2). Kayda değer gelişmeler iletişim, elektrik ve elektronik sistemleri gittikçe daha karmaşık hale getirmiştir. Bu sistemler, belirtilen görevleri yerine getirmek için çeşitli bileşenlerle oluşturulmuştur. Sistemlerin tasarlandıkları görevleri yerine getirmesi her zaman kolay olmamaktadır. Öngörülmesi zor ve önlenmesi güç nedenlerden dolayı bileşenlerin arızalanması, tüm sistemin arızalanmasına neden olabilmektedir. Bu nedenle, mühendisler ve uygulamalı bilimciler bu sistemleri oluşturan bileşenlerin arızalanma sürelerini, ortalama yaşam sürelerinin geliştirilmesi için çalışmışlardır. Genel olarak, bu tür sistemlerin maksimum verimliliğini sağlamak için yeni yöntemler ve teknikler geliştirmişlerdir(Kan, Izmir University of Economics, 2015:1). Bu gelişmeler, güvenilirlik kavramını ortaya çıkarmıştır. Güvenilirlik, bir sistemin belirli şartlar altında verilen bir zaman aralığında tatmin edici bir şekilde performans gösterme olasılığıdır. Cihaz açısından güvenilirlik ise, birçok bileşenden oluşan bir sistem veya bir sistemdeki bir bileşen olarak da tanımlanabilir. Olasılık teorisi, bu bileşenlerden oluşan sistemlerin güvenilirliğinin yanı sıra bileşenlerin güvenilirliğini analiz etmek için de kullanılabilir. Sistemin performansı büyük ölçüde her bir bileşenin performansına bağlı olduğundan, en genel haliyle bir sistemin güvenilirliği bileşenlerinin güvenilirliğinin bir işlevi olarak adlandırılabilir(Kuo, W., ve M., J., Zuo, 2003:32).

Güvenilirliğin değerlendirilmesi ise, mühendislik sistemlerinin işlenmesinde ve bu sistemlerin kontrolünün her safhasında oldukça önemli bir yer tutmaktadır. Sistemin güvenilirliğini değerlendirmek için, operasyonun kurallarını ve sistemin bileşenleri arasındaki ilişkileri tanımlayan sistemin yapısının açıkça belirtilmesi gerekir. Sistem güvenilirliği üzerine yapılan ilk çalışmalar, ikili sistem modellemesine odaklanmıştır(Kan, Izmir University of Economics, 2015:1). Bir sistemin önemi ve faydası performansına bağlıdır ve performansı da sistemin tasarımına bağlıdır. Güvenilirlik sorunları, özellikle karmaşık ve yüksek teknolojik sistemler için giderek daha da önemli hale gelmiştir. Özellikle güvenlik ve maliyet açısından sistem arızasının sonuçları söz konusu olduğunda endişeler daha da önemli bir hal almaktadır. Dolayısıyla doğru bir şekilde sistemlerin güvenilirliğinin hesaplanması çok önemlidir(Kuo, W., ve M., J., Zuo, 2003:85).

Literatürü incelediğimizde şimdiye kadar yapılan çalışmalarda bileşenlerin dizilişlerine göre çeşitli güvenilirlik modelleri tanımlanmış ve çalışılmıştır. Bunlardan en çok bilinenleri kuşkusuz seri ve paralel sistemler ve $n$'den $k$-çıkışlı hatalı(başarılı) sistemler gelmektedir. Bu sistemlerden başka son yıllarda en çok tercih edilen sistemler ardıl sistemler olarak bilinen $n$'den ardıl $k$-çıkışlı hatalı(başarılı) sistemlerdir. Bu sistemlerin tercih edilmesindeki en temel iki etken, hem sistemin herkes tarafından anlaşılabilir olması hem de uygulamalarla destekleniyor olmasıdır.

Ardıl $k$-çıkışlı başarılı sistemler ile ilgili ilk çalışma, Tong(1985) tarafından verilmiştir. Bir $Con/k/n{:}\,G$ sistem kavramı ise Kuo vd.(1990) tarafından ayrıntılı olarak açıklanmıştır. Başarılı sistemlerin doğrusal(dairesel) durumları için güvenilirlik hesaplamalarını Kuo vd.(1990) ve Zuo ve Kuo(1990) vermişlerdir.

$n$'den ardıl $r$-çıkışlı hatalı sistemler ile ilgili ilk çalışma Kontoleon(1979) tarafından verilmiştir ve sadece numaralandırma algoritması vermiştir. Literatürdeki adıyla kullanımını veren Chiang ve Niu(1981), özel olarak $Con/2/n{:}\,F$ sisteminin güvenilirliğinin hesaplanması için yinelemeli denklemleri kullanarak bir yöntem önermişlerdir. Bu çalışma, ardıl sistemler çalışmalarının başvuru kaynağı olmuştur. Shanthikumar(1982), eşit olmayan bileşen güvenilirliğine sahip hatalı sistemlerin güvenilirliğinin hesaplanması için yinelemeli formül vermiştir. Derman vd.(1982), tam güvenilirliğin hesabı için yinelemeli formül önermişlerdir. Bollinger ve Salvia(1982), ardıl $k$-çıkışlı hatalı sistemin güvenilirliğini belirlemek için bir sayma şeması geliştirmişlerdir. Bollinger(1982), ardıl sistemlerin arıza olasılığını belirlemek için basit ve kesin bir birleşik yöntem sunmuştur. Chao ve Lin(1984), ispatladıkları limit formülü ile maliyet dengesinin dikkate alınabileceği büyük boyutlu sistemler için güvenilirlik hesaplamasını veren bir yöntem geliştirmişlerdir. Lambiris ve Papastavridis(1985), $n$ bileşenden(iid) oluşan doğrusal(dairesel) hatalı sistemlerin güvenilirliklerini hesaplamışlardır. Fu(1985,1986), sistem güvenilirliğini, aynı hata olasılıklarına sahip büyük boyutlu ardıl $k$ sistemler için elde etmiştir. Bollinger ve Salvia(1985), arızaların birbirini takip ettiği ardıl $k$-çıkışlı hatalı sistemler için bir arızalanma zaman modeli geliştirmişlerdir. Bollinger(1986), iid bileşenlerden oluşan ardıl $k$-çıkışlı hatalı sistemler ile ilişkili arıza olasılığı polinomların katsayılarının bir tablosunu hesaplamak için bir algoritma vermiştir. Antonopoulou ve Papastavridis(1987), dairesel hatalı sistemlerin güvenilirliği için yinelemeli algoritma önermişlerdir. Chan vd.(1988), sistemi temsil etmek için yapı fonksiyonun ve ağ diyagramlarını kullanarak, tüm minimal yol ve kesen kümelerini üretmek için sistem güvenilirliğini ve algoritmaları elde etmiştir. Kuo vd.(1990), $n$'den ardıl $k$-çıkışlı hatalı sistem ile $n$'den ardıl $k$-çıkışlı başarılı sistem arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir ve her iki sistem için güvenilirlik ve sınır yaklaşımları elde etmişlerdir. Chao vd.(1995), bu sistemlerin güvenilirliğinin hesaplanmasını veren çalışmaların kronolojisini vermişlerdir. Peköz ve Ross(1995), eşit bileşen güvenilirliğe sahip doğrusal ve dairesel hatalı sistemlerin tam güvenilirlik hesabı için formüller vermişlerdir. Cluzeau(2008), bağımsız fakat özdeş olması gerekmeyen bileşenlerden oluşan doğrusal ve dairesel $n$'den ardıl $k$-çıkışlı hatalı sistemlerin güvenilirliği için algoritma geliştirmişlerdir. Eryılmaz (2010), son on yılda $n$'den ardıl $k$-çıkışlı ve bunlarla ilgili sistemlerin güvenilirlikleri üzerine yapılan çalışmaları derlemiştir. Gökdere vd.(2016), küçük boyutlu doğrusal ve dairesel $n$'den ardıl $k$-çıkışlı hatalı sistemlerin güvenilirliğinin hesaplanması için yeni bir metot önermişlerdir.

Yüksek teknoloji sayesinde ortaya çıkan birçok karmaşık yapıdaki sistemlerin tam güvenilirliğini hesaplamak hem maliyet açısından hem de zaman açısından her zaman kolay olmamaktadır. Bu nedenle yüksek boyutlu karmaşık yapıdaki sistemlerin tam güvenilirliğini hesaplamak yerine bu tam güvenilirlik değeri için alt ve üst sınır yaklaşımları geliştirilmiştir. Bu sınır yaklaşımları ile ilgili çalışma, Chiang ve Niu(1981) tarafından verilmiştir. Salvia(1982), hatal sistemleri için bazı eşitsizlikler önermiştir. Derman vd.(1982), doğrusal(dairesel) hatalı sistemler için üst sınır yaklaşımı vermişlerdir. Feller(1968) ve Griffith ve Govindarajulu(1985), büyük boyutlu iid bileşenlerden oluşan doğrusal hatalı sistem için yaklaşım önermişlerdir. Fu(1985,1986), eşit hata olasılıklarına sahip büyük boyutlu hatalı sistemler için bazı güvenilirlik sınırları vermiştir. Papastavridis(1986), doğrusal(dairesel) hatalı sistemler için alt(üst) sınır yaklaşımları elde etmiştir. Chan vd.(1988) sistem güvenilirliği için alt(üst) sınırlar vermişlerdir. Zuo(1990), hatalı ve başarılı sistemlerin birbirlerinin dualleri olduğunu göstererek doğrusal sistemler için alt(üst) sınır yaklaşımları önermiştir. Papastavridis ve Koutras(1993), $n$'den ardıl $k$ içinde $m$-çıkışlı hatalı sistemler için önerdiği alt ve üst sınır yaklaşımları için özel olarak $m = k$ alarak $n$'den ardıl $k$-çıkışlı hatalı sistemler için alt(üst) sınır yaklaşımlarını vermişlerdir. Barbour vd.(1995), Stein-Chen yöntemini kullanarak bileşik poisson yaklaşımı ile sınır yaklaşımları vermişlerdir. . Muselli(1997), hatalı sistemlerin güvenilirliği için eşitsizlikler önermiştir. Muselli(2000a, 2000b), hatalı sistemlerin güvenilirliği için çeşitli alt ve üst sınır yaklaşımları vermiştir. Dauş ve Beiu(2015), doğrusal hatalı sistemlerin güvenilirliği için alt(üst) sınır aileleri tanımlamıştır.

Bu çalışmada, ilk olarak doğrusal(dairesel) $n$'den ardıl $k$-çıkışlı:$G(F)$ sistemler için güvenilirlik hesaplamaları verilecektir. Ardından $Lin(Cir)/Con/k/n{:}\,G$ ve $Lin/Con/k/n{:}\,F$ sistemler için, literatürde yer alan güvenilirlik sınır yaklaşım yöntemlerinin kronolojisi verilecektir. $Cir/Con/k/n{:}\,F$ sistemler için ise, minimal kesen küme özelliğini kullanarak bazı alt(üst) sınır yaklaşımları önerilerek tezin esas kısmı oluşturulacaktır. Bu sistemlerin bazı $n$, $k$ ve $q$ değerleri için elde edilecek sonuçlar tablolar halinde verilecektir. Bu sonuçlar ışığında önerilen yöntemler içinde en iyi yaklaşımı veren yöntemler belirlenerek uygun şartları taşıyanlar örnek model uygulamalara uygulanarak grafiklerle sonuçları karşılaştırmalı olarak verilecektir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

**Tanım 2.1.** $x_i$ değişkeni, $1 \leq i \leq n$ için $i.$ bileşenin durumunu göstermek üzere

$$x_i = \begin{cases} 1, i.\,bileşen\ başarılı \\ 0, i.\,bileşen\ hatalı \end{cases}$$

şeklindedir. Burada, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ durum vektörü, sistemi oluşturan bütün bileşenlerin durumlarını temsil etmektedir. Sistemin durumu, $\phi$ ile gösterilmek üzere;

$$\phi = \begin{cases} 1, sistem\ başarılı \\ 0, sistem\ hatalı \end{cases}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Buna göre bütün bileşenlerin durumları biliniyorsa, sistemin durumu da bilinmektedir. Ayrıca sistem durumu, bileşenlerin durumunun deterministik bir fonksiyonu olarak

$$\phi = \phi(\boldsymbol{x}) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

şeklinde yazılır ve $\phi(\boldsymbol{x})$'e, sistemin yapı fonksiyonu adı verilir(Kuo, W., ve M., J., Zuo, 2003:87).

Sistemlerin belirlenen süre içinde yapması beklenen görevleri yerine getirip getiremediğinin ölçülmesi gerekmektedir. Bu performans ölçme işleminde güvenilirlik kullanılmaktadır. Yukarıda verilen $i.$ bileşenin durumunu gösteren $x_i$ değişkeni için $p_i = \Pr(x_i = 1) = E(x_i)$ ifadesi $i.$ bileşenin güvenilirliğini gösterir ve E(.), bir rassal değişkenin beklenen değeridir. $q_i = 1 - p_i$ ise $i.$ bileşenin güvenilmezliğini gösterir. O zaman $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ vektörleri için $\phi$ sisteminin güvenilirliği ve güvenilmezliği

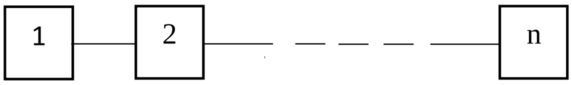
$$R = \Pr(\phi(\boldsymbol{x}) = 1) = E(\phi(\boldsymbol{x})) \quad \text{ve} \quad Q = \Pr(\phi(\boldsymbol{x}) = 0) = 1 - R$$

şeklinde tanımlanır(Kuo, W., ve M., J., Zuo, 2003:101).

**Tanım 2.2. (Seri Sistem)** Sistemi oluşturan her bileşenin başarılı olması durumunda sistem de başarılıysa bu sistem seri sistem olarak adlandırılır. Başka bir ifadeyle, herhangi bir bileşen hatalı iken sistem de hatalı ise bu sistem yine seri sistem olarak adlandırılır. Seri sistemin yapı fonksiyonu,

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

şeklindedir(Kuo, W., ve X., Zhu, 2012:17) ve $n$ bileşenden oluşan seri sistemin güvenilirlik blok diyagramı aşağıdaki gibidir.

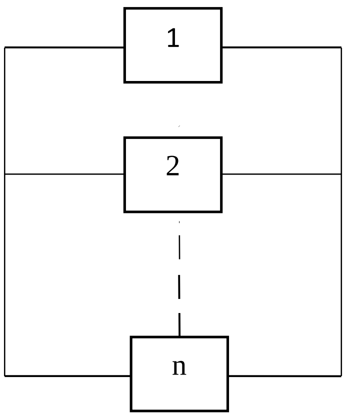



**Şekil 2.1.** Seri sistem(Aven, T., ve U., Jensen, 1998:20)

**Tanım 2.3. (Paralel Sistem)** Sistemi oluşturan bütün bileşenlerin hatalı olması durumunda sistem de hatalı oluyorsa bu sistem paralel sistem olarak adlandırılır. Başka bir ifadeyle, sistemdeki bileşenlerden en az bir tane bileşen başarılı olduğunda sistem de başarılı ise bu paralel sistemdir. Paralel sistemin yapı fonksiyonu,

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \coprod_{i=1}^{n} x_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

şeklinde(Kuo, W., ve X., Zhu, 2012:17) olup $n$ bileşenden oluşan paralel sistemin güvenilirlik blok diyagramı aşağıdaki gibidir.




**Şekil 2.2.** Paralel sistem(Aven, T., ve U., Jensen, 1998:21)

Bir paralel sistemde, sistemin düzgün çalışması için bütün bileşenlere ihtiyaç duyulmaz. Esasında, sistemin düzgün çalışması için sadece bir bileşenin düzgün çalışmasına ihtiyaç vardır. Bu yüzden geri kalan $n - 1$ tane bileşene gereksiz bileşen denilmektedir. Bu gereksiz bileşenler, en az bir başarılı bileşenin olma olasılığını arttırmak için sisteme dahil edilirler(Kuo, W., ve M., J., Zuo, 2003:89).

**Tanım 2.4.** $n$ bileşenden oluşan bir $n$'den $k$-çıkışlı: F sistemin hatalı olması için en az $k$ bileşenin hatalı olması gerekmektedir. Sistemin yapı fonksiyonu,

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \sum_{i=1}^{n} x_i > n-k \\ 0, \sum_{i=1}^{n} x_i \leq n-k \end{cases}$$

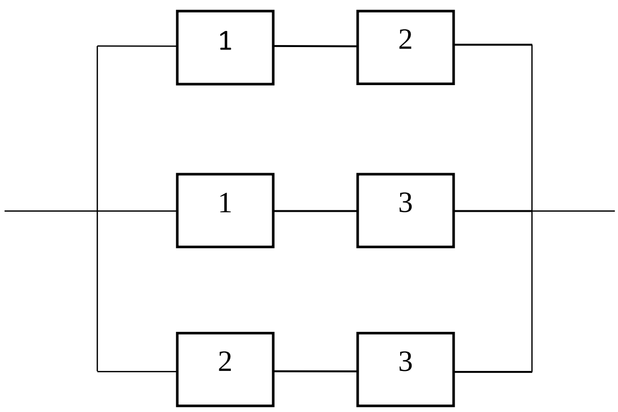
şeklindedir(Kan, Izmir University of Economics, 2015:4).

Benzer şekilde $n$ bileşenden oluşan bir $n$'den $k$-çıkışlı: G sistemin başarılı olması için en az $k$ bileşenin başarılı olması gerekmektedir. Özel olarak, bir seri sistem $n$'den $n$ çıkışlı sistem ve paralel sistem ise $n$'den 1 çıkışlı sistemdir. Sistemin yapı fonksiyonu,

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \\ 0, \sum_{i=1}^{n} x_i < k \end{cases}$$

şeklindedir(Aven,T.,veU.,Jensen,1988:21).

Bu sistemi açıklamak için aşağıdaki sistem örnek olarak verilebilir.




**Şekil 2.3.** 3'den 2-çıkışlı sistem(Aven, T., ve U., Jensen, 1988:22)

**Tanım 2.5.** Doğrusal olarak sıralanmış $n$ bileşenden oluşan $n$'den ardıl $k$-çıkışlı sistemin hatalı olması için en az ardıl $k$ tane bileşenin hatalı olması gerekmektedir. Bu sistemin yapı fonksiyonu,

$$\phi_{LF}(x) = \prod_{i=1}^{n-k+1}\left(1 - \prod_{j=i}^{i+k-1}(1 - x_j)\right)$$

şeklindedir. Benzer şekilde dairesel durumlar ele alındığında, bütün $i = n + 1, n + 2, \dots, n + k - 1$ için $x_i = x_{i-n}$ olduğundan, dairesel sistemlerin yapı fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\phi_{CF}(x) = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \prod_{j=i}^{i+k-1}(1 - x_j)\right)$$

Bileşenleri doğrusal olarak sıralanmış ardıl sistemin başarılı olması için en az ardıl $k$ tane bileşenin başarılı olması gerekmektedir. Bu şekilde oluşturulan sistemin yapı fonksiyonu,

$$\phi_{LG}(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n-k+1}\left(1 - \prod_{j=i}^{i+k-1} x_j\right)$$

şeklinde olup hatalı sistemlerin dairesel durumu için verilen durumu gibi başarılı sistemlerin dairesel durumu için yapı fonksiyonu,

$$\phi_{CG}(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \prod_{j=i}^{i+k-1} x_j\right)$$

şeklinde ifade edilir(Akiba vd., 2019:3; Kan, Izmir University of Economics, 2015:4).

**Tanım 2.6.** Eğer sistemin durumu bileşenin durumundan etkilenmiyorsa, bu bileşen sistemin performansı ile ilişkisizdir denir. Yani, herhangi bir $\boldsymbol{x}$ bileşen durum vektörü için $\phi(1_i, \boldsymbol{x}) = \phi(0_i, \boldsymbol{x})$ şartı sağlanıyorsa $i$. bileşen $\phi$ yapı fonksiyonu ile ilişkisizdir denir(Kuo, W., ve M., J., Zuo, 2003:90).

**Tanım 2.7. (Tutarlı Sistem)** $\phi(\boldsymbol{x})$ yapı fonksiyonuna sahip bir sistemin tutarlı olması için, $\phi(\boldsymbol{x})$'in azalmayan ve her bir bileşeninin ilişkili olması gerekmektedir. Ayrıca, tutarlı bir sistem aşağıdaki şartları sağlaması gerekmektedir:

i. $\phi(\mathbf{0}) = 0$. Yani, bütün bileşenler çalışmadığında sistem de çalışmaz.

ii. $\phi(\mathbf{1}) = 1$. Yani, bütün bileşenler çalıştığında sistem de çalışır.

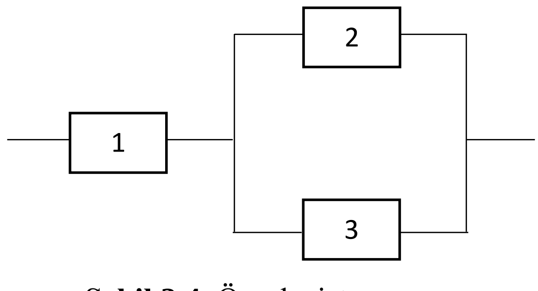
iii. $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$ ise $\phi(\boldsymbol{x}) \leq \phi(\boldsymbol{y})$'dir. Yani, herhangi bir bileşenin iyileştirilmesi sistemin performansını düşürmez.

iv. Her *i* bileşeni için, sistemin durumunu belirleyen bir bileşen durum vektörü vardır (Kuo, W., ve M., J., Zuo, 2003:91).

**Tanım 2.8. (Yol ve Minimal Yol Vektörü)** $C$, bir sistemdeki bileşenlerin kümesi, $(C, \phi)$'de tutarlı bir sistem olsun. $C$'de sistemin başarılı olmasını sağlayan bileşenlerin kümesi de $P$ yol kümesi olsun. Eğer yol kümesinin elemanı azaltıldığında yol kümesi özelliğini devam ettiremiyorsa o zaman bir yol kümesi bir minimal yol kümesi adını alır (Rausand M., A., Hoyland, 2004:129). Bir sistemin eş zamanlı olarak çalışmasını sağlayan bileşenlerin kümesi bir yoldur. Bir sistemin eş zamanlı olarak çalışmasını sağlayan bileşenlerin bir minimal kümesi ise bir minimal yoldur(Kuo, W., ve M., J., Zuo, 2003:93).

**Tanım 2.9. (Kesen ve Minimal Kesen Vektörü)** $C$, bir sistemdeki bileşenlerin kümesi, $(C, \phi)$'de tutarlı bir sistem olsun. $C$'de sistemin hatalı olmasını sağlayan bileşenlerin kümesi de $K$ kesen kümesi olsun. Eğer kesen kümesinin elemanı azaltıldığında kesen kümesi özelliğini devam ettiremiyorsa o zaman bir kesen kümesi bir minimal kesen kümesi adını alır (Rausand M., A., Hoyland, 2004:129). Bir sistemin eş zamanlı olarak arızalanmasını sağlayan bileşenlerin kümesi bir kesendir. Bir sistemin eş zamanlı olarak arızalanmasını sağlayan bileşenlerin bir minimal kümesi ise bir minimal kesendir(Kuo, W., ve M., J., Zuo, 2003:93).

Minimallik kavramını daha iyi ifade edebilmek için aşağıdaki sistem örnek olarak verilebilir.




**Şekil 2.4.** Örnek sistem

Verilen üç bileşenli örnek sistemin yol kümeleri $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ ve $\{1,2,3\}$ şeklindedir. $\{1,2,3\}$ yol kümesinin elemanı azaltıldığında hala yol kümesi özelliğini koruduğu için bu yol kümesi minimal yol kümesi değildir. Diğer iki yol kümesi ise bu durumda yol kümesi özelliğini koruyamadığı için minimal yol kümesidir. Sistemin kesen kümeleri ise, $\{1\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ ve $\{1,2,3\}$ şeklindedir. Minimal yoldakine benzer düşünceyle $\{1\}$ ve $\{2,3\}$ minimal kesen kümesidir.

Genel olarak, seri sistemler için her bileşenin kendisi bir minimal kesen ve bütün bileşenlerin kümesi de bir minimal yoldur. Yani, bir seri sistem $n$ farklı minimal kesen ve bir tane minimal yola sahiptir. Paralel sistemler için ise, her bileşen bir minimal yol ve bütün bileşenlerin kümesi bir minimal kesendir. Yani, bir paralel sistem $n$ minimal yola ve bir minimal kesene sahiptir(Kuo, W., ve M., J., Zuo, 2003:93).

**Tanım 2.10. (Güvenilirlik Fonksiyonu)** $X_i$ rassal bir değişken olmak üzere,

$$X_i = \begin{cases} 1, i.\, bileşen\ başarılı \\ 0, i.\, bileşen\ hatalı \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir. $\Pr\{X_i = 1\} = p_i = E(X_i)$ ifadesi, i. bileşenin güvenilirliğini gösterir. $q_i = 1 - p_i$ ise, i. bileşenin güvenilmezliğidir. $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ve daha önceki $\boldsymbol{p}$ vektörü için $\phi$ sistem güvenilirliği aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$R = \Pr\{\phi(\boldsymbol{X}) = 1\} = E(\phi(\boldsymbol{X}))$$

Bu ifadeye göre seri sistemlerin güvenilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$R(p) = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

Benzer şekilde, paralel sistemlerin güvenilirlik fonksiyonu da,

$$R(p) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)$$

şeklinde tanımlanır(Kuo, W., ve X., Zhu, 2012:27-28).

**Tanım 2.11. (Duallik)** Bir $\phi(\boldsymbol{x})$ yapı fonksiyonunun duali, $\boldsymbol{1} - \boldsymbol{x} = (1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_n)$ olmak üzere, $\phi^D(\boldsymbol{x}) = 1 - \phi(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{x})$ eşitliği ile tanımlanır(Kuo, W., ve M., J., Zuo, 2003:90).

$F$ ve $G$ sistemler arasındaki ilişkinin açıklanabilmesi için aşağıdaki teorem ve sonuç ifade edilmiştir(Kuo, W., ve X., Zhu, 2012:40-41).

**Teorem 2.1.** (Kuo, W., ve X., Zhu, 2012:40-41) $Con/k/n:F$ ve $Con/k/n:G$ sistemler birbirlerinin dualleri(çifti)dir.

**İspat** Doğrusal(dairesel) $Con/k/n:F$ ve $Con/k/n:G$ sistemlerin yapı fonksiyonları sırasıyla $\phi_F(\boldsymbol{x})$ ve $\phi_G(\boldsymbol{x})$ olsun. Varsayalım ki $\boldsymbol{x}$ durum vektöründe $k$ ardıl 0 elemanı varsa o zaman $1-\boldsymbol{x}$ durum vektöründe $k$ ardıl 1 elemanı vardır. Bu sebeple, $\phi_F(\boldsymbol{x})=0$ ve $\phi_G(1-\boldsymbol{x})=1$ dir. Eğer $\boldsymbol{x}$ durum vektöründe $k$ ardıl 0 elemanı yoksa o zaman $1-\boldsymbol{x}$ durum vektöründe $k$ ardıl 1 elemanı yoktur. Buradan $\phi_F(\boldsymbol{x})=1$ ve $\phi_G(1-\boldsymbol{x})=0$ dır. Bu sonuçla, genel olarak $\phi_G(1-\boldsymbol{x})=1-\phi_F(\boldsymbol{x})$ dir(Kuo, W., ve X., Zhu, 2012:40-41).

Teorem 2.1'in sonucu için aşağıdaki ifade önerilmiştir(Kuo, W., ve X., Zhu, 2012:40-41).

**Sonuç 2.1.** $Con/k/n$ sistem aynı $n$ ve $k$ değerine ve aynı dizilime(doğrusal veya dairesel) sahip ise ve $i=1,2,\dots,n$ için, örneğin $Con/k/n:F$ şeklindeki sistemde $i.$ bileşenin güvenilirliği $Con/k/n:G$ tipindeki bir başka sistemdeki $i.$ bileşenin güvenilmezliğine eşit ise o zaman bir sistemin güvenilirliği bir başka sistemin güvenilmezliğine eşittir ve $Con/k/n:F$ ve $G$ sistemler birbirlerinin aynadaki görüntüleridir.

**İspat** $Con/k/n:F$ sisteminin güvenilirliği ve güvenilmezliği sırasıyla $R_F$ ve $Q_F$ ve $Con/k/n:G$ sisteminin de güvenilirliği ve güvenilmezliği sırasıyla $R_G$ ve $Q_G$ olsun.

$$Q_F = 1-R_F = \Pr\{Con/k/n:F\ sisteminde\ en\ az\ k\ ardıl\ bileşen\ hatalı\}$$

$$= \Pr\{x\ durum\ vektörü\ en\ az\ k\ ardıl\ 0\ elemanı\ içerir\}$$

$$R_G = 1-Q_G = \Pr\{Con/k/n:G\ sisteminde\ en\ az\ k\ ardıl\ bileşen\ başarılı\}$$

$$= \Pr\{x\ durum\ vektörü\ en\ az\ k\ ardıl\ 1\ elemanı\ içerir\}$$

$i=1,2,\dots,n$ için $Con/k/n:F$ sisteminde $\Pr\{X_i=0\}$, $Con/k/n:G$ sistemindeki $\Pr\{X_i=1\}$ ile aynı ise o zaman $Q_F=R_G$ ve $R_F=Q_G$ dir(Kuo, W., ve X., Zhu, 2012:40-41).

# 3. $n$'den ARDIL $k$-ÇIKIŞLI SİSTEMLERİN GÜVENİLİRLİĞİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ

Ardıl sistemler olarak bilinen bu sistem modelleri, güvenilirlik değerlendirmesi ve entegre devre, telekomünikasyonda mikrodalga röle istasyonları, petrol boru hattı sistemleri, hızlandırıcılarda vakum sistemleri, bilgisayar halka ağları ve uzay aracı röle istasyonlarının dizaynı gibi sistemler için önerilmiştir. Böyle sistemler, doğrusal(dairesel) olarak dizilmiş bileşenlerle ifade edilir(Kuo, W., ve M., J., Zuo, 2003:325).

$n$ bileşenin doğrusal(dairesel) olarak birbirlerine bağlı olduğu varsayımı altında sistemin hatalı olması için en az ardıl $k$ tane bileşenin hatalı olması gerekmektedir. Bu şekilde tanımlanan sisteme doğrusal(dairesel) $n$'den ardıl $k$-çıkışlı hatalı sistem adı verilir ve kısaca $Lin(Cir)/\,Con/k/n:F$ şeklinde gösterilir. Eğer sistem başarılı ise o zaman en az ardıl $k$ tane bileşenin başarılı olması gerekir. Bu tür sistem doğrusal(dairesel) $n$'den ardıl $k$-çıkışlı başarılı sistem denir ve kısaca $Lin(Cir)/\,Con/k/n:G$ şeklinde gösterilir. $n$'den ardıl $k$-çıkışlı hatalı sistemler için, her ardıl $k$ bileşen bir minimal kesen küme oluşturur. Benzer şekilde, $n$'den ardıl $k$-çıkışlı başarılı sistemler için de her ardıl $k$ bileşen bir minimal yol kümesi oluşturur. Doğrusal ardıl sistemlerde bileşenler 1'den $n$'ye bir doğru boyunca sıralanırken, dairesel sistemde ise bileşenler 1'den $n$'ye doğru saat yönünde sıralandığı varsayılır(Kuo, W., ve M., J., Zuo, 2003:325).

Doğrusal(dairesel) $n$'den ardıl $k$-çıkışlı sistemler özel durumlar olarak seri ve paralel sistemleri içerir. Doğrusal(dairesel) $Con/k/n:F$ sistemler, $k=1$ olduğunda seri sistem ve $k=n$ olduğunda da paralel bir sistem haline gelir. Benzer düşünceyle doğrusal ve dairesel $Con/k/n:G$ sistemler ise $k=1$ olduğunda paralel sisteme ve $k=n$ olduğunda seri sisteme dönüşür (Kuo, W., ve X., Zhu, 2012:39; Kuo, W., ve M., J., Zuo, 2003:325).

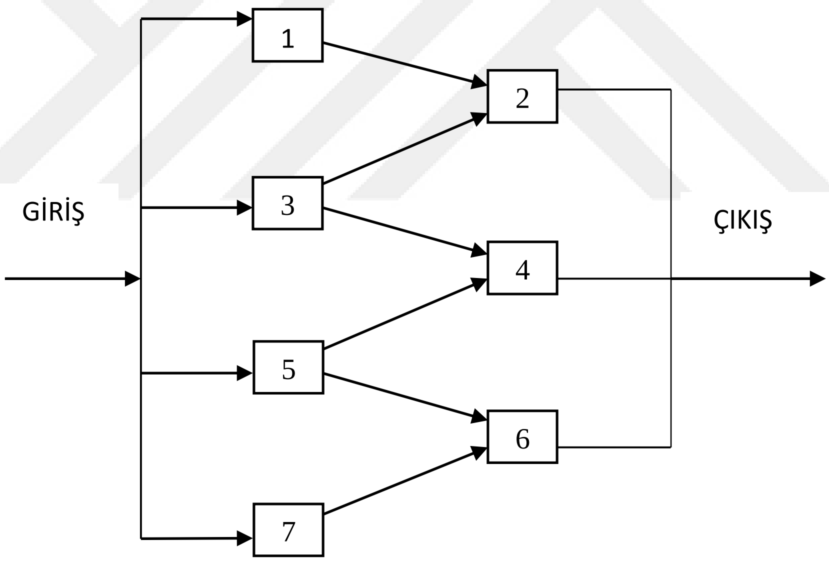
Bu sistemlerin güvenilirlik değerlendirmeleri için birçok yazar tarafından çeşitli yöntemler önerilmiştir(Chiang ve Niu, 1981; Bollinger ve Salvia, 1982; Kuo vd., 1990; Zuo ve Kuo, 1990; Hwang, 1989; Derman vd., 1982; Goulden, 1987; Hwang, 1986). Önerilen yöntemlerin kodları C# programlama dilinde yazılarak daha önceki çalışmalarda elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bunlar arasında en iyi sonuçları veren yöntemlerin yinelemeli denklemlerle verilen yöntemler olduğu sonucuna varılmıştır. Bu nedenle bu bölümde her bir durum için sadece bir yöntem tanıtılarak birer örnekle çalışma prensipleri açıklanmaya çalışılmıştır.

### 3.1. $n$'den Ardıl $k$-Çıkışlı Başarılı Sistemler

$n$ bileşenden oluşan $n$'den ardıl $k$-çıkışlı sistemin başarılı olması için en az ardıl $k$ bileşenin başarılı olması gerekmektedir. Bileşenlerin bir doğru veya daire boyunca sıralanmasına bağlı olarak isimlendirilirler ve bu sistemler sırasıyla $Lin/Con/k/n : G$ ve $Cir/Con/k/n : G$ şeklinde gösterilirler.

#### 3.1.1. Doğrusal $n$'den Ardıl $k$-Çıkışlı Başarılı Sistemlerin Güvenilirliğinin Değerlendirilmesi

Doğrusal olarak $n$ bileşenden oluşan sistemin başarılı olması için en az ardıl $k$ tane bileşenin başarılı olması yeterlidir. Doğrusal başarılı sistem için aşağıdaki sistem, örnek olarak verilebilir.




**Şekil 3.1.** Doğrusal 7'den ardıl 2-çıkışlı başarılı sistem(Zhang, Iowa State University, 1988:5)

Doğrusal olarak düzenlenmiş $n$ bileşenli bir sistem ele alalım. Bileşenler de 1'den $n$'ye kadar numaralandırılmış olsun. Sistem güvenilirliğini hesaplamak için sistemin başarılı olduğu tüm durumları göz önünde bulundurmak gerekmektedir. $i$. bileşen $p_i$ olasılıkla başarılıdır ve $q_i$ olasılıkla hatalıdır. Sistemin çalışması, sistemde ardıl $k$ tane başarılı bileşen olmasına bağlıdır.

Kuo vd.(1990:244-253), $n$'den ardıl $k$-çıkışlı başarılı sistemlerin güvenilirliğinin hesaplanması için bir yöntem vermişlerdir. Bu çalışmada, sistemdeki bütün bileşenlerin iid olduğu ve aynı güvenilirliğe sahip olduğu durumlar göz önüne alınarak aşağıdaki eşitliği vermişlerdir:

$$R_{LG}(n,k) = \begin{cases} 0, & n < k \\ p^k, & n = k \\ R_{LG}(n-1,k) + Q_{LG}(n-1-k,k)qp^k, & n > k \end{cases}$$

(Kuo vd., 1990:245; Hwang, 1982:448). Verilen bu yöntemi daha iyi anlayabilmek için aşağıdaki örnek verilebilir.

**Örnek 3.1** $k = 3$ ve $n = 6$ olan bir doğrusal $Con/k/n:G$ sistemin güvenilirliği, bütün bileşenlerin aynı güvenilirlik değerine sahip olduğu varsayımı altında aşağıdaki gibi hesaplanır.

Yukarıda verilen eşitliğe göre;

$R_{LG}(0,3) = R_{LG}(1,3) = R_{LG}(2,3) = 0$

$R_{LG}(3,3) = p^3$

$$\begin{aligned} R_{LG}(4,3) &= R_{LG}(3,3) + qp^3 Q_{LG}(0,3) \\ &= p^3 + qp^3\left(1 - R_{LG}(0,3)\right) \\ &= 2p^3 - p^4 \end{aligned}$$

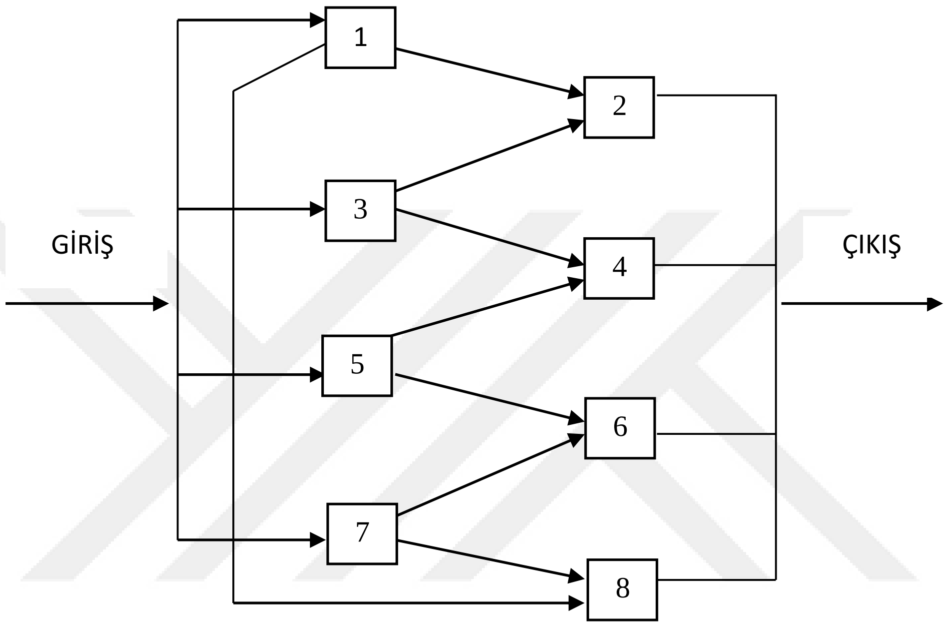
$$\begin{aligned} R_{LG}(5,3) &= R_{LG}(4,3) + qp^3 Q_{LG}(1,3) \\ &= 2p^3 - p^4 + qp^3\left(1 - R_{LG}(1,3)\right) \\ &= 3p^3 - 2p^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{LG}(6,3) &= R_{LG}(5,3) + qp^3 Q_{LG}(2,3) \\ &= 3p^3 - 2p^4 + qp^3\left(1 - R_{LG}(2,3)\right) \\ &= 4p^3 - 3p^4 \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir.

### 3.1.2. Dairesel $n$'den Ardıl $k$-Çıkışlı Başarılı Sistemlerin Güvenilirliğinin Değerlendirilmesi

Bu sistemin özel bir durumu olarak, sistemi oluşturan tüm bileşenler bir daire şeklinde düzenlenmişse, o zaman sistemin dairesel $n$'den ardıl $k$-çıkışlı başarılı sistem olduğu söylenir. Dairesel başarılı sistemler için aşağıdaki sistem, örnek olarak verilebilir.




**Şekil 3.2.** Dairesel 8'den ardıl 2-çıkışlı başarılı sistem(Zhang, Iowa State University, 1988:29)

Aynı $k$ ve $n$ için, dairesel sistemin güvenilirliğinin doğrusal sistemin güvenilirliğinden daha yüksek olduğu açıktır. Örneğin, $k = 2$ olması durumunda, sadece iki uç bileşen doğrusal sistemin başarısız olmasına neden olur. Bununla birlikte, dairesel sistem, bir daire oluşturmak için iki uç bileşeni kapalı olan doğrusal sistem olarak düşünülebilir ve bu durumda, iki uç bileşen iyi olduğunda sistem çalışır (Zhang, Iowa State University, 1988:28).

$n$ bileşenden oluşan bir sistemdeki bileşenler artan bir sırada saat yönünde numaralandırılmış olsun. Her bileşen için başarılı ve hatalı şeklinde iki durum söz konusu olup bileşenlerin iid oldukları varsayılsın. Tüm bu varsayımlar altında (Kuo vd.,1990:245; Antonopoulou ve Papastavridis, 1987:83) çalışmalarında

$Cir/Con/k/n:G$ sistemin güvenilirliğini her bir bileşenin eşit güvenilirlik değeri aldığı varsayımı altında aşağıdaki şekilde vermişlerdir:

$$R_{CG}(n,k) = \begin{cases} 0, & n < k \\ p^k, & n = k \\ p^k + kqp^k, & n = k+1 \\ qR_{LG}(n-1,k) + pR_{CG}(n-1,k) & \\ \quad +kq^2p^kQ_{LG}(n-k-2,k), & n > k+1 \end{cases}$$

Yukarıda verilen dairesel başarılı sistemin güvenilirliğini hesaplayabilmek için aşağıdaki örnek verilebilir.

**Örnek 3.2.** $k = 3$ ve $n = 7$ olan bir dairesel $Con/k/n:G$ sistemin güvenilirliği, bütün bileşenlerin aynı güvenilirlik değerine sahip olduğu varsayımı altında aşağıdaki gibi hesaplanır.

Yukarıda verilen eşitliğe göre;

$R_{CG}(0,3) = R_{CG}(1,3) = R_{CG}(2,3) = 0$

$R_{CG}(3,3) = p^3$

$R_{CG}(4,3) = p^3 + 3qp^3 = 4p^3 - 3p^4$

$$\begin{aligned} R_{CG}(5,3) &= qR_{LG}(4,3) + pR_{CG}(4,3) + 3q^2p^3Q_{LG}(0,3) \\ &= q(p^3 + qp^3) + p(4p^3 - 3p^4) + 3q^2p^3\big(1 - R_{LG}(0,3)\big) \\ &= 5p^3 - 5p^4 + p^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{CG}(6,3) &= qR_{LG}(5,3) + pR_{CG}(5,3) + 3q^2p^3Q_{LG}(1,3) \\ &= q(p^3 + 2qp^3) + p(5p^3 - 5p^4 + p^5) + 3q^2p^3\big(1 - R_{LG}(1,3)\big) \\ &= 6p^3 - 6p^4 + p^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{CG}(7,3) &= qR_{LG}(6,3) + pR_{CG}(6,3) + 3q^2p^3Q_{LG}(2,3) \\ &= q(4p^3 - 3p^4) + p(6p^3 - 6p^4 + p^6) + 3q^2p^3\big(1 - R_{LG}(2,3)\big) \\ &= 7p^3 - 7p^4 + p^7 \end{aligned}$$

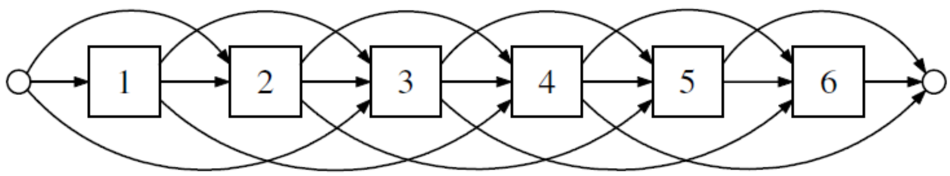
ifadeleri elde edilir.

### 3.2. $n$'den Ardıl $k$-Çıkışlı Hatalı Sistemler

$n$ sıralı bileşenden oluşan bir sistemin hatalı olması için en az ardıl $k$ tane bileşenin hatalı olması gerekmektedir. Bu sistemler, kısaca $Con/k/n:F$ şeklinde gösterilir. Başarılı sistemlerde olduğu gibi bu sistemler de, bileşenlerin dizilme şekline göre doğrusal(dairesel) olarak isimlendirilirler ve sırasıyla $Lin/Con/k/n:F$ ve $Cir/Con/k/n:F$ şeklinde gösterilirler.

#### 3.2.1. Doğrusal $n$'den Ardıl $k$-Çıkışlı Hatalı Sistemlerin Güvenilirliğinin Değerlendirilmesi

Sistemi oluşturan bileşenler bir doğru boyunca sıralanıyorsa bu sistem doğrusal $n$'den ardıl $k$-çıkışlı hatalı sistem olarak adlandırılmaktadır. Doğrusal hatalı sistemler için aşağıdaki şekilde verilen sistem örnek olarak verilebilir.




**Şekil 3.3.** Doğrusal 6'dan ardıl 3-çıkışlı hatalı sistem(Kuo, W., ve M., J., Zuo,2003:326)

Şekil 3.3'de, doğrusal 6'dan ardıl 3-çıkışlı hatalı sistem verilmiştir. Bu sistemde hatalı ardıl bileşen sayısı 3'den az olduğunda, kaynaktan çıkışa doğru giden sinyal akışı kesintiye uğramaz ve sistem çalışmaya devam eder. Sistemin hata vermesi için en az ardıl 3 bileşenin hata vermesi gerekmektedir.

Bir doğru boyunca 1'den $n$ ye kadar numaralandırılmış bileşenlerden oluşmaktadır. Bu durumda, doğrusal $n$'den ardıl $k$-çıkışlı hatalı sistemin güvenilirlik hesabı için aşağıdaki formül bileşenlerin iid olduğu varsayımı altında;

$$R_{LF}(n,k) = \begin{cases} 1, & n < k \\ 1 - q^k, & n = k \\ R_{LF}(n-1,k) - pq^k R_{LF}(n-1-k,k), & n > k \end{cases}$$

şeklinde verilmiştir(Kuo, W., ve M., J., Zuo,2003:339-341).

Doğrusal hatalı sistemlerin güvenilirliğinin hesaplanması için aşağıdaki örnek verilebilir.

**Örnek 3.3.** $k = 3$ ve $n = 7$ olan bir doğrusal $Con/k/n: F$ sistemin güvenilirliği, bütün bileşenlerin aynı güvenilirlik değerine sahip olduğu varsayımı altında aşağıdaki gibi hesaplanır.

Yukarıda verilen eşitlik göz önünde bulundurularak,

$R_{LF}(0,3) = R_{LF}(1,3) = R_{LF}(2,3) = 1$

$R_{LF}(3,3) = 1 - q^3$

$$
\begin{aligned}
R_{LF}(4,3) &= R_{LF}(3,3) - pq^3 R_{LF}(0,3) \\
&= 1 - q^3 - pq^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{LF}(5,3) &= R_{LF}(4,3) - pq^3 R_{LF}(1,3) \\
&= 1 - q^3 - pq^3 - pq^3 \\
&= 1 - q^3 - 2pq^3
\end{aligned}
$$

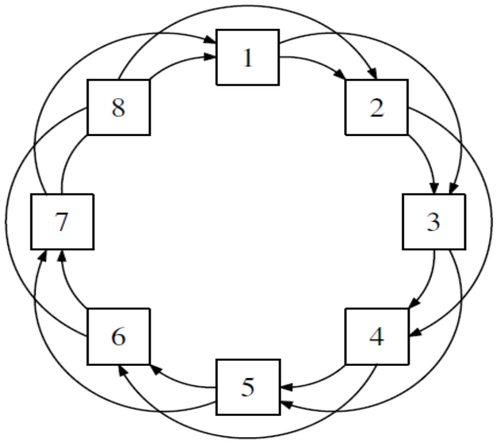
$$
\begin{aligned}
R_{LF}(6,3) &= R_{LF}(5,3) - pq^3 R_{LF}(2,3) \\
&= 1 - q^3 - 2pq^3 - pq^3 \\
&= 1 - q^3 - 3pq^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{LF}(7,3) &= R_{LF}(6,3) - pq^3 R_{LF}(3,3) \\
&= 1 - q^3 - 3pq^3 - pq^3(1 - q^3) \\
&= 1 - q^3 - 4pq^3 + pq^6
\end{aligned}
$$

ifadeleri yazılabilir.

### 3.2.2. Dairesel $n$'den Ardıl $k$-Çıkışlı Hatalı Sistemlerin Güvenilirliğinin Değerlendirilmesi

Dairesel sistemlerde, birinci ve $n$. bileşenler birbirine komşu olacak şekilde $n$ tane bileşen bir daireye yerleştirilir. Bu şekilde oluşturulan sistemin hatalı olması için en az ardıl $k$ tane bileşenin hatalı olması yeterlidir. Dairesel hatalı sistemler için aşağıdaki şekilde verilen sistem, örnek olarak verilebilir.




**Şekil 3.4.** Dairesel 8'den ardıl 2-çıkışlı hatalı sistem(Kuo, W., ve M., J., Zuo,2003:326)

Şekil 3.4'de dairesel 8'den ardıl 2-çıkışlı hatalı sistemin şemasını göstermektedir. Çalışmayan ardıl bileşen sayısı 2'ye ulaştığında dairesel sinyal akışı kesintiye uğrar ve sistem çalışmaz.

Bu sistemin güvenilirlik hesabı için aşağıdaki yinelemeli denklem formülü bileşenlerin iid olduğu varsayımı altında;

$$R_{CF}(n,k) = \begin{cases} 1, & n < k \\ 1 - q^k, & n = k \\ 1 - q^n - npq^k, & n \leq 2k+1 \\ pR_{LF}(n-1,k) + qR_{CF}(n-1,k) & \\ \quad -kp^2q^kR_{LF}(n-k-2,k), & n > 2k+1 \end{cases}$$

şeklindedir(Kuo, W., ve M., J., Zuo,2003:343).

Dairesel hatalı sistemlerin güvenilirliğinin hesaplanması için aşağıdaki örnek verilebilir.

**Örnek 3.4.** $k = 3$ ve $n = 8$ olan bir dairesel $Con/k/n : F$ sistemin güvenilirliği, bütün bileşenlerin aynı güvenilirlik değerine sahip olduğu varsayımı altında aşağıdaki gibi hesaplanır.

Yukarıda verilen eşitliğe göre;

$R_{CF}(0,3) = R_{CF}(1,3) = R_{CF}(2,3) = 1$

$R_{CF}(3,3) = 1 - q^3$

$R_{CF}(4,3) = 1 - q^4 - 4pq^3$

$R_{CF}(5,3) = 1 - q^5 - 5pq^3$

$R_{CF}(6,3) = 1 - q^6 - 6pq^3$

$R_{CF}(7,3) = 1 - q^7 - 7pq^3$

$$\begin{aligned} R_{CF}(8,3) &= pR_{LF}(7,3) + qR_{CF}(7,3) - 3p^2q^3R_{LF}(3,3) \\ &= p(1 - q^3 - 4pq^3 + pq^6) + q(1 - q^7 - 7pq^3) - 3p^2q^3(1 - q^3) \\ &= p + q - pq^3 - 7p^2q^3 + 4p^2q^6 - 7pq^4 - q^8 \end{aligned}$$

ifadeleri yazılabilir.

# 4. $n$'den ARDIL $k$-ÇIKIŞLI SİSTEMLERİN GÜVENİLİRLİK SINIRLARI

Bir sistemin tam güvenilirliğinin veya güvenilmezliğinin değerlendirilmesi için birçok yöntemi önerilmiştir. Küçük boyutlu sistemlerin güvenilirlik hesabı için önerilen bu yöntemler kullanışlı olabilir. Ancak büyük boyutlu sistemler için, güvenilirlikleri hesaplamak her zaman kolay olmamaktadır. Hem maliyet hem de zaman açısından külfetli olabilmektedir. Bu durumu ortadan kaldırmak için güvenilirlik hesaplaması yerine sınır yaklaşımları önerilmiştir. Çoğu zaman bir sınırlama tekniği, çok daha kısa sürede tam sistem güvenilirliği veya güvenilmezliği için yaklaşık değerler sağlayabilir(Kuo, W., ve M., J., Zuo,2003:343). Sistemlerin güvenilirlik değerlerine yaklaşım için alt(üst) sınır yaklaşımları geliştirilmiştir.

Bu bölümde, $n$'den ardıl $k$-çıkışlı hem başarılı hem de hatalı sistemlerin doğrusal ve dairesel durumları için literatürde önerilen bütün yöntemler tanıtılacak ve tam güvenilirlik değerlerine yaklaşımlarını görmek için C# programlama dilinde belli $n$ ve $k$ değerleri için elde edilen sonuçlar karşılaştırmalı olarak tablolarla verilecektir. Hatalı sistemlerin dairesel durumları için ise minimal kesen küme özellikleri yardımıyla doğrusal durumlar için önerilen bazı yaklaşımlar dairesel sistemlere uyarlanacaktır.

## 4.1. $n$'den Ardıl $k$-Çıkışlı Başarılı Sistemlerin Güvenilirliği İçin Sınır Yaklaşımları

Başarılı bir sistemin, yüksek güvenilirliğe sahip olması gerektiğini söyleyebiliriz. Buradan, bir sistemin güvenilirliğinin alt sınırının, sistem güvenilirliğinin üst sınırından daha önemli olması gerektiği sonucuna varabiliriz(Zhang, Iowa State University, 1988:47).

### 4.1.1. Doğrusal $n$'den Ardıl $k$-Çıkışlı Başarılı Sistemlerin Güvenilirliği İçin Alt(Üst) Sınır Yaklaşımları

$n$ bileşenden oluşan bir doğrusal sistemde bütün bileşenler $p$ güvenilirlik değerine sahip olsun. Herhangi bir ardıl $k$ bileşen, sistemin çalışmasını sağlar ve herhangi bir ardıl $k$ bileşen dizisi ise açık veya kapalı bir yol oluşturur. Doğrusal bir sistemde $n-k+1$ gibi farklı yollar vardır ve yolun açık olma olasılığı $p^k$'dır. Eğer sistem çalışıyorsa, en az açık bir yol olmalıdır(Zhang, Iowa State University, 1988:47). Bu şartlarla aşağıdaki sınır yaklaşım değerleri verilmiştir.

- **Kuo vd.(1990) Alt(Üst) Sınır Yaklaşımı**

  Bütün bileşenlerin iid olduğu varsayımı altında alt(üst) sınır yaklaşım değerleri;

$$l_{LG}(n,k) = 1 - (1 - p^k)^{[n/k]} \tag{4.1}$$

$$u_{LG}(n,k) = 1 - (1 - p^k)^{n-k+1} \tag{4.2}$$

şeklindedir(Kuo vd.,1990:246).

- **Zuo(1993) Alt(Üst) Sınır Yaklaşımı**

  Bütün bileşenlerin iid olduğu varsayımı altında alt(üst) sınır yaklaşım değerleri;

$$l_{LG}(n,k) = 1 - (1 - p^k)^{[n/k]} \tag{4.3}$$

$$u_{LG}(n,k) = \prod_{i=1}^{k}(1 - q^{m_i+1}) \tag{4.4}$$

şeklinde olup, $m_i = [(n-i)/k]$ dır(Zuo, 1993:255).

Doğrusal başarılı sistemlerin güvenilirliği için elde edilen alt(üst) sınır yaklaşımlarının farklı $n$ ve $k$ değerleri için sonuçları aşağıdaki tablolarda verilmiştir. LLG1 ve LLG2 aynı yaklaşımlar olduğu için sonuçları tek bir sütunda verilmiştir.

**Tablo 4.1**. Doğrusal 10'dan ardıl 2-çıkışlı başarılı sistemlerin sınır yaklaşımları ile güvenilirliğinin karşılaştırılması

| $p$ | LLG1 | ULG1 | ULG2 | $R_{LG}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.10 | 0.0490100 | 0.0864828 | 0.1676984 | 0.0802528 |
| 0.20 | 0.1846273 | 0.3074660 | 0.4520142 | 0.2733368 |
| 0.30 | 0.3759679 | 0.5720702 | 0.6921075 | 0.5035885 |
| 0.40 | 0.5817881 | 0.7917843 | 0.8505266 | 0.7099863 |
| 0.50 | 0.7626953 | 0.9249153 | 0.9384766 | 0.8593750 |
| 0.60 | 0.8926258 | 0.9819856 | 0.9796249 | 0.9466537 |
| 0.70 | 0.9654975 | 0.9976658 | 0.9951459 | 0.9859515 |
| 0.80 | 0.9939534 | 0.9998984 | 0.9993601 | 0.9980232 |
| 0.90 | 0.9997524 | 0.9999997 | 0.9999800 | 0.9999372 |
| **Hata Normu** | | | | |
| $\|e\|_1$ | 0.1491435 | 0.0645666 | 0.2725775 | |

**Tablo 4.2.** Doğrusal 100'den ardıl 3-çıkışlı başarılı sistemlerin sınır yaklaşımları ile güvenilirliğin karşılaştırılması

| $p$ | LLG1 | ULG1 | ULG2 | $R_{LG}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.10 | 0.0324774 | 0.0933956 | 0.9130283 | 0.0847652 |
| 0.20 | 0.2328414 | 0.5448612 | 0.9982263 | 0.4743514 |
| 0.30 | 0.5947493 | 0.9315996 | 0.9999791 | 0.8639479 |
| 0.40 | 0.2324558 | 0.9984688 | 0.9999999 | 0.9879819 |
| 0.50 | 0.4138184 | 0.9999979 | 1.0000000 | 0.9997382 |
| 0.60 | 0.6221980 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.9999991 |
| 0.70 | 0.8136791 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.9999999 |
| 0.80 | 0.9432874 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 |
| 0.90 | 0.9946064 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 |
| **Hata Normu** | | | | |
| $\|\|e\|\|_1$ | 0.3794001 | 0.0377379 | 1.2272829 | |

**Tablo 4.3.** Doğrusal 1000'den ardıl 4-çıkışlı başarılı sistemlerin sınır yaklaşımları ile güvenilirliğin karşılaştırılması

| $p$ | LLG1 | ULG1 | ULG2 | $R_{LG}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.10 | 0.0246913 | 0.0948956 | 1.0000000 | 0.0865230 |
| 0.20 | 0.3298947 | 0.7973911 | 1.0000000 | 0.7259063 |
| 0.30 | 0.8690901 | 0.9996991 | 1.0000000 | 0.9971315 |
| 0.40 | 0.9984713 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.9999999 |
| 0.50 | 0.9999999 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.9999999 |
| 0.60 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 |
| 0.70 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 |
| 0.80 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 |
| 0.90 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 |
| **Hata Normu** | | | | |
| $\|\|e\|\|_1$ | 0.1544563 | 0.0219799 | 1.2153429 | |

Elde edilen sınır yaklaşım değerlerinin güvenilirlik değerlerine ne kadar yakın olduğunu gösterebilmek için aşağıdaki hata normundan yararlandık(Demiralp, İnönü Üniversitesi, 2013:23).

$$\|e\|_1 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m-1}\left|1 - \frac{Alt(Üst)\ Sınır\ yaklaşımı}{Tam\ güvenilirlik}\right|$$

Hata normunda mutlak değer içindeki ifade bağıl hata hesabıdır. Dolayısıyla bu hata normu sıfıra ne kadar yakınsa hesaplanan yaklaşım değerinin, güvenilirliğe o kadar yakın olduğunu söyleyebilmemiz mümkündür.

LLG1'in, $n$'nin ve $k$'nın küçük değerleri için elde edilen hata normu en küçük olup en iyi yaklaşımı verdiği gözlenmiştir. Üst sınır yaklaşımları için tablolar incelendiğinde ULG1'in, ULG2'den daha üstün olduğunu hata normlarını inceleyerek söyleyebiliriz. Ayrıca $n$'nin ve $p$'nin değeri arttıkça ULG1 ve ULG2'nin 1 değerine yaklaştıkları gözlenmiştir.

### 4.1.2. Dairesel $n$'den Ardıl $k$-Çıkışlı Başarılı Sistemlerin Güvenilirliği İçin Alt(Üst) Sınır Yaklaşımları

Bütün bileşenleri eşit $p$ güvenilirlik değerine sahip $n$ bileşenden oluşan dairesel sistemde uç bileşen yoktur. Bunun sonucu olarak, yoldaki bütün ardıl $k$ bileşen çalıştığında sistemi destekleyecek $n$ farklı yol vardır. Dairesel sistemin çalışması $n$ farklı yoldan en azından birinin açık olmasına bağlıdır (Zhang, Iowa State University, 1988:49). Bu varsayımlar altında aşağıdaki yöntem verilmiştir.

- **Kuo vd.(1990) Alt(Üst) Sınır Yaklaşımı**

Bütün bileşenlerin iid olduğu varsayımı altında alt(üst) sınır yaklaşım değerleri:

$$l_{CG}(n,k) = 1 - (1 - p^k)^{[(n+k-1)/k]} \quad (4.5)$$

$$u_{CG}(n,k) = 1 - (1 - p^k)^n \quad (4.6)$$

şeklinde elde edilmiştir(Kuo vd.,1990:246).

Dairesel başarılı sistemlerin güvenilirliği için önerilen alt(üst) sınır yaklaşımlarının sonuçları farklı $n$ ve $k$ değerleri için aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

**Tablo 4.4.** Dairesel 10'dan ardıl 2-çıkışlı başarılı sistemlerin sınır yaklaşımları ile güvenilirliğin karşılaştırılması

| $p$ | LCG1 | UCG1 | $R_{CG}$ |
|---|---|---|---|
| 0.10 | 0.0490100 | 0.0956179 | 0.0879823 |
| 0.20 | 0.1846273 | 0.3351674 | 0.2947278 |
| 0.30 | 0.3759679 | 0.6105839 | 0.5332814 |
| 0.40 | 0.5817881 | 0.8250988 | 0.7385522 |
| 0.50 | 0.7626953 | 0.9436865 | 0.8798828 |
| 0.60 | 0.8926258 | 0.9884708 | 0.9575065 |
| 0.70 | 0.9654975 | 0.9988096 | 0.9897878 |
| 0.80 | 0.9939534 | 0.9999634 | 0.9987457 |
| 0.90 | 0.9997524 | 0.9999999 | 0.9999679 |
| **Hata Normu** | | | |
| $\|e\|_1$ | 0.1848714 | 0.0668172 | |

**Tablo 4.5.** Dairesel 100'den ardıl 3-çıkışlı başarılı sistemlerin sınır yaklaşımları ile güvenilirliğin karşılaştırılması

| $p$ | LCG1 | UCG1 | $R_{CG}$ |
|---|---|---|---|
| 0.10 | 0.0334449 | 0.0952079 | 0.0863291 |
| 0.20 | 0.2389786 | 0.5521143 | 0.4804730 |
| 0.30 | 0.6056911 | 0.9352434 | 0.8685421 |
| 0.40 | 0.8944693 | 0.9986585 | 0.9888203 |
| 0.50 | 0.9893273 | 0.9999984 | 0.9997700 |
| 0.60 | 0.9997449 | 1.0000000 | 0.9999993 |
| 0.70 | 0.9999994 | 1.0000000 | 0.9999999 |
| 0.80 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 |
| 0.90 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 |
| **Hata Normu** | | | |
| $\|e\|_1$ | 0.1693287 | 0.0376589 | |

**Tablo 4.6.** Dairesel 1000'den ardıl 4-çıkışlı başarılı sistemlerin sınır yaklaşımları ile güvenilirliğin karşılaştırılması

| $p$ | LCG1 | UCG1 | $R_{CG}$ |
|---|---|---|---|
| 0.10 | 0.0246913 | 0.0951671 | 0.0861021 |
| 0.20 | 0.3298947 | 0.7983620 | 0.7240228 |
| 0.30 | 0.8690901 | 0.9997063 | 0.9970338 |
| 0.40 | 0.9984713 | 1.0000000 | 0.9999999 |
| 0.50 | 0.9999999 | 1.0000000 | 1.0000000 |
| 0.60 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 |
| 0.70 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 |
| 0.80 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 |
| 0.90 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 |
| **Hata Normu** | | | |
| $\|\|e\|\|_1$ | 0.1541604 | 0.0234042 | |

Doğrusal sistemin aksine dairesel sistemlerde ise $n$ ve $k$ değerleri yeterince büyüdüğünde alt sınır yaklaşımının daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür. Hata normları incelendiğinde de hata normunun en küçük değerini $n = 1000$ değerinde aldığını söyleyebiliriz. Benzer şekilde, üst sınır yaklaşımının hata normlarını incelediğimizde alt sınırdakine benzer şekilde $n$'nin değeri yeterince büyük seçildiğinde normunun daha küçük olduğu ve iyi bir yaklaşım sergilediği gözlenmektedir.

## 4.2. $n$'den Ardıl $k$-Çıkışlı Hatalı Sistemlerin Güvenilirliği İçin Sınır Yaklaşımları

Herhangi ardıl $k$ bileşenin hatalı olması, $n$'den ardıl $k$-çıkışlı sistemin hatalı olmasına sebep olduğu için, herhangi bir ardıl $k$ bileşen, minimal bir kesen kümesi oluşturur.

### 4.2.1. Doğrusal $n$'den Ardıl $k$-Çıkışlı Hatalı Sistemlerin Güvenilirliği İçin Alt(Üst) Sınır Yaklaşımları

Doğrusal olarak sıralanmış iid olduğu varsayılan $n$ bileşenden oluşan ardıl $k$ sistemler için literatürde önerilen sınır yaklaşımları aynı $q$ değerine sahip olma durumları için incelenmişlerdir. Ayrıca, ardıl $k$ bileşenler, $n$'den ardıl $k$-çıkışlı hatalı sisteminin tek minimal kümesini oluşturur ve $n-k+1$ tane minimal kesen kümesi vardır. Eğer sistem çalışıyorsa, her kesen kümesinde en az bir çalışan bileşen vardır (Chiang ve Niu,1981:88).

- **Chiang ve Niu(1981) Alt(Üst) Sınır Yaklaşımı**

Doğrusal $n$'den ardıl $k$ çıkışlı hatalı sistemler için güvenilirlik sınır yaklaşımları ilk kez Chiang ve Niu(1981) tarafından verilmiştir. Bileşenlerin iid olduğu varsayımı altında aşağıdaki eşitsizlikleri vermişlerdir(Chiang ve Niu,1981:88):

$$l_{LF}(n,k) = (1-q^k)^{n-k+1} \leq R_{LF}(n,k,q) \tag{4.7}$$

$$u_{LF}(n,k) = (1-q^k)^{[n/k]} \geq R_{LF}(n,k,q) \tag{4.8}$$

- **Salvia(1982) Alt(Üst) Sınır Yaklaşımı**

Salvia(1982), bileşenler iid olduğunda sistemlerin güvenilirliklerinin hesaplanması için aşağıdaki sınır yaklaşımlarını vermiştir(Salvia,1982:450).

$$l_{LF}(n,k) = 1-(n-k+1)q^k \leq R_{LF}(n,k,q) \tag{4.9}$$

$$u_{LF}(n,k) = 1-(n-k+1)p^{n-k}q^k \tag{4.10}$$

- **Derman vd.(1982) Üst Sınır Yaklaşımı**

Derman vd.(1982), bütün bileşenlerin aynı güvenilirliğe sahip olduğu ve bileşenlerin iid olduğu varsayımı altında doğrusal hatalı sistemler için üst sınır yaklaşımını aşağıdaki gibi önermişlerdir(Derman vd., 1982:59; Xie ve Lai, 1998:111).

$$u_{LF}(n,k) = 1-A/B \tag{4.11}$$

ve

$$A = (n-k+1)^2 q^{2k}$$

$$B = (n-k+1)^2 q^k + \sum_{j=k+1}^{\min(2k,n)} (n-j+1)q^j + \binom{n-2k+1}{2} q^{2k}$$

şeklindedir.

- **Fu(1985,1986) Alt(Üst) Sınır Yaklaşımı**

Fu(1985,1986), büyük boyutlu sistemlerin güvenilirliğinin hesaplanması için aşağıdaki sınır yaklaşımlarını vermiştir(Fu,1985:127-130; Fu,1986:316-319; Muselli, 2000a:239).

$$l_{LF}(n,k) = (1-q^k)^{n-k+1} \leq R_{LF}(n,k,q) \tag{4.12}$$

$$u_{LF}(n,k) = (1-pq^k)^{n-k+1} \geq R_{LF}(n,k,q) \tag{4.13}$$

- **Papastavridis(1986) Alt(Üst) Sınır Yaklaşımı**

Papastavridis(1986), bileşen hata olasılığı $q$'nun $k/(k+1)$'den az olmak üzere alt(üst) sınır yaklaşımı için aşağıdaki teoremi vermiştir.

**Teorem 4.1.**

$$bm^{n+1} - e < R_{LF}(n,k) < aM^{n+1} + e$$

ve

$$m = 1 - \frac{pq^k}{(1-q^k)^k}$$

$$M = 1 - pq^k$$

$$a = \frac{m^k - q^k}{m^k - (k+1)pq^k}$$

$$b = \frac{M^k - q^k}{M^k - (k+1)pq^k}$$

$$e = \frac{2(k-1)q^{n+2}}{p(k+(k+1)q)}$$

dir ve alt(üst) sınır yaklaşımları,

$$l_{LF}(n,k) = bm^{n+1} - e < R_{LF}(n,k) \tag{4.14}$$

$$u_{LF}(n,k) = aM^{n+1} + e > R_{LF}(n,k) \tag{4.15}$$

şeklinde verilmiştir(Papastavridis,1986:607; Kuo, W., ve M., J., Zuo,2003:348-349).

- **Papastavridis(1986) Alt(Üst) Sınır Yaklaşımı**

Papastavridis(1986), fonksiyon üretme tekniğini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği vermiştir.

$$|R_{LF}(n,k,q)-(1-pq^k)^n|<(k-1)q^n \tag{4.16}$$

(4.16)'dan,

$$(1-pq^k)^n-(k-1)q^n<R_{LF}(n,k,q)<(1-pq^k)^n+(k-1)q^n$$

ifadesi yazılabilir. Buradan alt(üst) sınır yaklaşımları aşağıdaki gibi elde edilir(Papastavridis,1986:613-615; Chao vd.,1995:120-127; Kuo, W., ve M., J., Zuo,2003:349).

$$l_{LF}(n,k)=(1-pq^k)^n-(k-1)q^n \tag{4.17}$$

$$u_{LF}(n,k)=(1-pq^k)^n+(k-1)q^n \tag{4.18}$$

- **Chrysaphinou ve Papastavridis(1990) Alt(Üst) Sınır Yaklaşımı**

Chrysaphinou ve Papastavridis(1990), $q$ yeterince küçük($q\sim\lambda/n^{1/k}$) seçildiğinde sınır yaklaşımları için aşağıdaki eşitsizliği vermişlerdir(Chrysaphinou ve Papastavridis,1990:452-458;Chao vd.,1995:120-127).

$$|R_{LF}(n,k,q)-\exp(-\lambda_n)|\leq(2k-1)q^k+2(k-1)q \tag{4.19}$$

olup, $\lambda_n\equiv(n-k+1)q^k$ dır. (4.19)'dan,

$$-(2k-1)q^k-2(k-1)q+e\,\mathrm{xp}(-\lambda_n)\leq R_{LF}(n,k,q)$$
$$\leq(2k-1)q^k+2(k-1)q+exp(-\lambda_n)$$

ve buradan alt(üst) sınır yaklaşım ifadeleri aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$l_{LF}(n,k)=-(2k-1)q^k-2(k-1)q+exp(-\lambda_n)\leq R_{LF}(n,k,q) \tag{4.20}$$

$$u_{LF}(n,k)=(2k-1)q^k+2(k-1)q+exp(-\lambda_n)\geq R_{LF}(n,k,q) \tag{4.21}$$

- **Barbour vd.(1991) Alt(Üst) Sınır Yaklaşımı**

Barbour vd.(1991), Stein-Chen yöntemini kullanarak (4.19)'da verilen eşitsizlikten yola çıkarak aşağıdaki ifadeyi vermişlerdir(Chao vd., 1995:124).

$$|R_{LF}(n,k,q)-\exp(-p\lambda_n)|\leq(2kp-1)q^k \tag{4.22}$$

Burada $\lambda_n \equiv (n-k+1)q^k$ olup, (4.22) ile verilen eşitsizlikten aşağıdaki yaklaşımı elde ederiz.

$$\exp(-p\lambda_n) - (2kp-1)q^k \leq R_{LF}(n,k,q) \leq \exp(-p\lambda_n) + (2kp-1)q^k$$

Buradan da alt(üst) sınır yaklaşımları

$$l_{LF}(n,k) = \exp(-p\lambda_n) - (2kp-1)q^k \leq R_{LF}(n,k,q) \qquad (4.23)$$

$$u_{LF}(n,k) = \exp(-p\lambda_n) + (2kp-1)q^k \geq R_{LF}(n,k,q) \qquad (4.24)$$

şeklinde yazabiliriz.

- **Barbour vd.(1992) Alt(Üst) Sınır Yaklaşımı**

Barbour vd.(1992), güvenilirlik hesaplaması için aşağıdaki alt(üst) sınır yaklaşım ifadelerini aşağıdaki şekilde önermişlerdir(Dauş ve Beiu, 2015:1129).

$$l_{LF}(n,k) = e^{-(n-k+1)pq^k} - (2kp-1)q^k \leq R_{LF}(n,k,q) \qquad (4.25)$$

$$u_{LF}(n,k) = e^{-(n-k+1)pq^k} + (2kp-1)q^k \geq R_{LF}(n,k,q) \qquad (4.26)$$

- **Papastavridis ve Koutras(1993) Alt(Üst) Sınır Yaklaşımı**

Papastavridis ve Koutras(1993), $m = k \geq 2$ için aşağıdaki alt(üst) sınır yaklaşımlarını aşağıdaki gibi önermişlerdir.

$$l_{LF}(n,k) = \prod_{i=k}^{n}(1-Q_{k,i}) \leq R_{LF}(n,k,q) \qquad (4.27)$$

$$u_{LF}(n,k) = \prod_{i=k}^{n}(1-p_{i-k}Q_{k,i}) \geq R_{LF}(n,k,q) \qquad (4.28)$$

Burada $q_0 \equiv 0$ ve $Q_{k,i} \equiv \prod_{j=i-k+1}^{i} q_j$ şeklindedir(Papastavridis ve Koutras,1993:158). Burada (4.27) ile önerilen eşitlik, Chiang ve Niu(1981)'nun önerdiği sonuçlar ile (4.28) ile verilen eşitlik ise Fu(1985)'nun önerdiği sonuçlar ile aynıdır.

- **Zuo(1993) Alt(Üst) Sınır Yaklaşımı**

Zuo(1993), bileşenlerin iid olduğu varsayımı altında aşağıdaki sınır yaklaşımlarını vermiştir(Zuo,1993:254).

$$l_{LF}(n,k) = 1 - \prod_{i=1}^{k}(1-p^{m_i+1}), \qquad m_i = [(n-i)/k] \qquad (4.29)$$

$$u_{LF}(n,k) = (1-q^k)^{[n/k]} \qquad (4.30)$$

- **Barbour vd.(1995) Alt(Üst) Sınır Yaklaşımı**

Barbour vd.(1995), poisson yaklaşımı için Stein-Chen yöntemini kullanarak aşağıdaki sınır yaklaşımlarını vermişlerdir.

$$l_{LF}(n,k) = \vartheta - \varepsilon_1 \leq R_{LF}(n,k,q) \tag{4.31}$$

$$u_{LF}(n,k) = \vartheta + \varepsilon_1 \geq R_{LF}(n,k,q) \tag{4.32}$$

ve burada

$$\vartheta = e^{-(n-k+1)pq^k} - q^{k+1}e^{-(n-2k)pq^k}$$

$$\varepsilon_1 = \left\{1 - e^{-(n-k+1)pq^k} + q^{k+1}\left(1 - e^{-(n-2k)pq^k}\right)\right\}(2k+1)pq^k$$

dir(Barbour vd., 1995:399).

- **Barbour vd.(1995) Alt(Üst) Sınır Yaklaşımı**

$q \leq 1/3$ ve $n > 3k-2$ olmak üzere bileşik poisson alt(üst) sınır yaklaşımını aşağıdaki gibi önermişlerdir.

$$l_{LF}(n,k) = \exp(-\mu) - \varepsilon_2 \leq R_{LF}(n,k,q) \tag{4.33}$$

$$u_{LF}(n,k) = \exp(-\mu) + \varepsilon_2 \geq R_{LF}(n,k,q) \tag{4.34}$$

ve burada

$$\varepsilon_2 = q^{2k}[(6k-5)n - (k-1)(13k-9)]$$

$$\mu = (n-k+1)q^k - (n-k)q^{(k+1)} - 2(n-k+2)q^{(2k-1)}$$

$$+2(n-2)q^{2k} + \tfrac{2k(n-k+2)}{2k-1}q^{(3k-2)}$$

$$-(n+k-4)q^{(3k-1)} + [2k(n-k+2) - 2(2k-1)$$

$$* (n-k+1)q + 2(k-1)(n-k)q^2]q^{(k-1)}h(q,k)$$

$$h(q,k) = \sum_{i=k}^{2k-2} {q^i}/{i}$$

dir(Barbour vd., 1995:399).

- **Muselli(1997) Alt(Üst) Sınır Yaklaşımı**

Muselli(1997), $1 \leq k \leq n$ ve $0 \leq p \leq 1$ olmak üzere aşağıdaki alt(üst) sınır yaklaşımlarını vermiştir(Muselli, 1997:625).

$$l_{LF}(n,k) = (1-q^k)^{n-k+1} \leq R_{LF}(n,k,q) \tag{4.35}$$

$$u_{LF}(n,k) = (1-q^k)^{\lfloor n/k \rfloor} \geq R_{LF}(n,k,q) \tag{4.36}$$

- **Xie ve Lai(1998) Üst Sınır Yaklaşımı**

Bir $Con/k/n$ sistem için, minimal kesen kümelerinin birbirlerine seri olarak bağlanmış $k$ ardıl bileşenler olduğunu söyleyebiliriz. $j < k$ için, bütün kesen kümeleri arasında $i.$ ve $(i-j)$. bileşenler çalışmazsa o zaman bu ikisi de çalışmaz. Yazarlar bu şarta dayanarak yeni bir yaklaşım önermişlerdir. Bağımlılık sadece komşu bileşenler için güçlü olduğunda koşullu yaklaşımların iyi olması beklenir. Küçük $k$ değerleri için, bu koşullu yaklaşımın oldukça doğru sonuçlar vermesi beklenmektedir. Bu durumda doğrusal hatalı sistemler için üst sınır yaklaşımını aşağıdaki gibi vermişlerdir(Xie ve Lai, 1998:111).

$$u_{LF}(n,k) = (1-q^k)\left[1-\frac{(1-q)q^k}{1-q^k}\right]^{n-k} \tag{4.37}$$

- **Muselli(2000a,2000b) Alt(Üst) Sınır Yaklaşımı**

Muselli(2000a, 2000b), $h = 1$ ve $h = k$ değerleri için sırasıyla aşağıdaki alt(üst) sınır yaklaşımları elde etmiştir(Muselli, 2000b:1165).

$$(1-q^k)^{\lfloor (n-k)/h \rfloor + 1}$$

ve,

$h = 1$ için alt sınır

$$l_{LF}(n,k) = (1-q^k)^{\lfloor (n-k) \rfloor + 1} \leq R_{LF}(n,k,q) \tag{4.38}$$

şeklinde ifade edilirken, $h = k$ için üst sınır ise

$$u_{LF}(n,k) = (1-q^k)^{\lfloor (n-k)/k \rfloor + 1} \geq R_{LF}(n,k,q) \tag{4.39}$$

şeklindedir. Ayrıca burada dikkat etmemiz gereken durum $h$'nin tamsayı olduğu ve en fazla $k$ değerini alabileceğidir.

Daha sonra, $1 \leq k \leq n$ ve $0 < q < 1$ için aşağıdaki eşitsizliği vermiştir.

$$(1-q^k)^{((n-k)/h_L)+1} \leq R_{LF}(n,k,q) \leq (1-q^k)^{((n-k)/h_U)+1} \qquad (4.40)$$

Burada

$$h_U(n,k) = \frac{1-q^k}{p}$$

eşitliğinden üst sınırı

$$u_{LF}(n,k) = (1-q^k)^{1+\left(\frac{p(n-k)}{1-q^k}\right)} \geq R_{LF}(n,k,q) \qquad (4.41)$$

şeklinde ifade ederiz. (4.40) eşitsizliğinde alt sınır yaklaşımı için aşağıdaki teoremi vermiştir(Muselli, 2000b:1166).

**Teorem 4.2.** $n \geq k \geq \max(q/p\,, 1)$ ve $0 < q < 1$ için

$$(1-q^k)^{((n-k)/h_L)+1} \leq R_{LF}(n,k,q)$$

eşitsizliği

$$h_L(n,k) = \frac{(1-q^k)^k}{p}$$

olması durumunda sağlanır(Muselli, 2000b:1166).

Teorem 4.2'den alt sınırı;

$$l_{LF}(n,k) = (1-q^k)^{1+\left(\frac{p(n-k)}{(1-q^k)^k}\right)} \qquad (4.42)$$

şeklinde elde ederiz. Ayrıca (4.40) ile verilen eşitsizlik için bir başka alt sınır yaklaşımı için aşağıdaki teoremi vermiştir(Muselli, 2000b:1167).

**Teorem 4.3.** $n \geq k \geq \max(q/p\,, 1)$ ve $0 < q < 1$ olmak üzere eğer $\overline{h_L}(n,k) = (1-q^k)^k/p$ ise o zaman alt sınır

$$h_L(n,k) = \frac{(1-q^k)^{k/(\overline{h_L}(n,k))}}{p}$$

şeklindedir(Muselli, 2000b:1167).

Teorem 4.3'den,

$$h_L(n,k) = \frac{(1-q^k)^{kp/(1-q^k)^k}}{p}$$

ifadesini elde ederiz. Buradan alt sınır

$$l_{LF}(n,k) = (1-q^k)^{1+(p(n-k)/(1-q^k))^{kp/(1-q^k)^k}} \tag{4.43}$$

şeklinde elde edilir.

**Teorem 4.4.** $0 < q < 1$ ve $1 \leq k \leq n - h(n,k)$ olmak üzere

$$(1-q^k)^{n-k+1-l(n,k)(h(n,k)-1)} \leq R_{LF}(n,k,q) \tag{4.44}$$

eşitsizliği

$$l(n,k) = \left\lfloor \frac{n-k}{h(n,k)+1} \right\rfloor \text{ ve } \; h(n,k) = \left\lfloor \frac{1-q^k}{p} \right\rfloor$$

iken sağlanır(Muselli, 2000a:243).

Buradan alt sınır;

$$l_{LF}(n,k) = (1-q^k)^{n-k+1-\left\lfloor \frac{n-k}{h(n,k)+1} \right\rfloor (\left\lfloor \frac{1-q^k}{p} \right\rfloor - 1)} \tag{4.45}$$

şeklinde elde edilir.

Muselli(2000a)'nin bir başka alt sınır yaklaşımı, $0 < q < 1$ ve $1 \leq k \leq n$ için

$$(1-q^k)^{2l'(n,k)} \leq R_{LF}(n,k,q) \tag{4.46}$$

şeklinde olup, burada

$$l'(n,k) = \left\lceil \frac{n-k+1}{h(n,k)+1} \right\rceil$$

dır(Muselli, 2000a:244).

- **Cabezon ve Wynn(2011) Alt(Üst) Sınır Yaklaşımı**

$r$. alt(üst) sınır yaklaşımlarını($L_r$ ve $U_r$) $n \geq 4k+2$ varsayımı altında açık formüllerini aşağıdaki şekilde vermişlerdir(Cabezon ve Wynn, 2011:72-73). Sadece $r = 1$ ve $r = 2$ için sınır yaklaşımları:

$$U_1 = A \quad (4.47)$$

$$L_1 = A - B \quad (4.48)$$

$$U_2 = A - B + C \quad (4.49)$$

$$L_2 = A - B + C - D \quad (4.50)$$

şeklinde olup burada,

$$A = (n - k + 1)p^k$$

$$B = (n - k)p^{k+1}\frac{1}{2}(n - 2k + 1)(n - 2k)p^{2k}$$

$$C = (n - 2k)^2 p^{2k+1} + \frac{1}{6}(n - 3k - 1)(n - 3k)(n - 3k + 1)p^{3k}$$

$$D = \frac{1}{2}(n - 2k - 1)(n - 2k)p^{2k+2} + \frac{1}{2}(n - 3k - 1)(n - 3k)^2 p^{3k+1}$$
$$+ \frac{1}{24}(n - 4k - 2)(n - 4k - 1)(n - 4k)(n - 4k + 1)p^{4k}$$

dır(Cabezon ve Wynn, 2011:72-73).

- **Dăuş ve Beiu(2015) Alt(Üst) Sınır Yaklaşımı**

Dăuş ve Beiu(2015), $1/(n - k) > pq^k$ ise o zaman alt(üst) sınır için aşağıdaki eşitsizliği önermişlerdir.

$$L_r \leq R_{LF}(n, k, q) \leq U_r \quad (4.51)$$

Burada her $r = 0, 1, \ldots, \lfloor (n - 2k - 1)/(2k + 2) \rfloor$ için,

$$L_r = \sum_{j=0}^{2r+1} (-1)^j C_{n-jk}^{j} (pq^k)^j - q^k \sum_{j=0}^{2r} (-1)^j C_{n-k-jk}^{j} (pq^k)^j$$

ve

$$U_r = \sum_{j=0}^{2r} (-1)^j C_{n-jk}^{j} (pq^k)^j - q^k \sum_{j=0}^{2r+1} (-1)^j C_{n-k-jk}^{j} (pq^k)^j$$

dir(Dăuş ve Beiu, 2015:1131). Özel olarak $r = 0$ ve $r = 1$ alınırsa alt(üst) sınırlar aşağıdaki gibi elde edilir.

$$L_0 = 1 - [(n-k)p + 1]q^k \tag{4.52}$$

$$U_0 = 1 - [1 - (n-2k)pq^k]q^k \tag{4.53}$$

ve

$$L_1 = 1 - (n-k)pq^k + \frac{(n-2k-1)(n-2k)}{2}(pq^k)^2$$
$$- \frac{(n-3k-2)(n-3k-1)(n-3k)}{6}(pq^k)^3$$
$$-q^k[1 - (n-2k)pq^k + {(n-3k-1)(n-3k)}/{2}\,(pq^k)^2] \tag{4.54}$$

ve

$$U_1 = 1 - (n-k)pq^k + \frac{(n-2k-1)(n-2k)}{2}(pq^k)^2$$
$$-q^k[1 - (n-2k)pq^k + {(n-3k-1)(n-3k)}/{2}\,(pq^k)^2$$
$$- {(n-4k-2)(n-4k-1)(n-4k)}/{6}\,(pq^k)^3] \tag{4.55}$$

Yukarıda son kırk yıl içinde önerilmiş olan bütün sınır yaklaşımları verilmeye çalışılmıştır. Ayrıca yukarıda verilmiş olan bütün alt(üst) sınır yaklaşım yöntemleri aşağıda tablo halinde verilmiştir.

**Tablo 4.7.** $n$'den ardıl $k$-Çıkışlı Hatalı Sistemlerin Güvenilirlikleri İçin Alt Sınır Yaklaşımları

| Yıl | Yazar(lar) | Alt Sınır(lar) | Ek Bilgi | Şart(lar) |
|---|---|---|---|---|
| 1981,1985 | Chiang ve Niu, Fu | $(1-q^k)^{n-k+1}$ | | |
| 1982 | Salvia | $1-(n-k+1)q^k$ | | |
| 1986 | Papastavridis | $(1-pq^k)^n-(k-1)q^n$ | | |
| 1986 | Papastavridis | $bm^{n+1}-e$ | $m=1-pq^k/(1-q^k)^k$<br>$M=1-pq^k$<br>$b=(M^k-q^k)/(M^k-(k+1)pq^k)$<br>$e=[2(k-1)q^{n+2}/p(k+(k+1)q)]$ | $q<k/(k+1)$ |
| 1990 | Chrysaphinou ve Papastavridis | $-(2k-1)q^k-2(k-1)q+\exp(-\lambda_n)$ | $\lambda_n \equiv (n-k+1)q^k$ | $q \sim \lambda/n^{1/k}$ |
| 1991 | Barbour vd. | $\exp(-p\lambda_n)-(2kp-1)q^k$ | $\lambda_n \equiv (n-k+1)q^k$ | |
| 1992 | Barbour vd. | $e^{-(n-k+1)pq^k}-(2kp-1)q^k$ | | |
| 1993 | Papastavridis ve Koutras | $\prod_{i=k}^{n}(1-Q_{k,i})$ | $Q_{k,i} \equiv \prod_{j=i-k+1}^{i} q_j$ | |
| 1993 | Zuo | $1-\prod_{i=1}^{k}(1-p^{m_i+1})$ | $m_i=[(n-i)/k]$ | |

| Yıl | Yazar(lar) | Alt Sınır | Ek Bilgi | Şart(lar) |
|---|---|---|---|---|
| 1995 | Barbour vd. | $\vartheta - \varepsilon_1$ | $\vartheta = e^{-(n-k+1)pq^k} - q^{k+1}e^{-(n-2k)pq^k}$<br>$\varepsilon_1 = \left\{1 - e^{-(n-k+1)pq^k} + q^{k+1}\left(1 - e^{-(n-2k)pq^k}\right)\right\}$<br>$* (2k+1)pq^k$ | |
| 1995 | Barbour vd. | $\exp(-\mu) - \varepsilon_2$ | $\varepsilon_2 = q^{2k}[(6k-5)n - (k-1)(13k-9)]$<br>$\mu = (n-k+1)q^k - (n-k)q^{k+1} - 2(n-k+2)q^{2k-1}$<br>$+2(n-2)q^{2k} + (2k(n-k+2)/(2k-1))q^{3k-2}$<br>$-(n+k-4)q^{3k-1} + [2k(n-k+2) - 2(2k-1)$<br>$* (n-k+1)q + 2(k-1)(n-k)q^2]q^{k-1}h(q,k)$<br>$h(q,k) = \sum_{i=k}^{2k-2} q^i/i$ | $q \leq 1/3$<br>$n > 3k-2$ |
| 1997 | Muselli | $(1-q^k)^{n-k+1}$ | | |
| 2000 | Muselli | $(1-q^k)^{\lfloor n-k \rfloor+1}$ | | |
| 2000 | Muselli | $(1-q^k)^{1+(n-k)p/(1-q^k)^k}$ | | $k \geq \max(q/p\,,1)$ |
| 2000 | Muselli | $(1-q^k)^{n-k+1-l(n,k)[h(n,k)-1]}$ | $l(n,k) = \lfloor (n-k)/[h(n,k)+1] \rfloor$<br>$h(n,k) = \lfloor (1-q^k)/p \rfloor$ | $k \leq n - h(n,k)$ |
| 2000 | Muselli | $(1-q^k)^{2l'(n,k)}$ | $l'(n,k) = \lceil (n-k+1)/[h(n,k)+1] \rceil$<br>$h(n,k) = \lfloor (1-q^k)/p \rfloor$ | |
| 2000 | Muselli | $(1-q^k)^{1+(n-k)/h_L(n,k)}$ | $h_L(n,k) = (1-q^k)^{kp/(1-q^k)^k}/p$ | $k \geq \max(q/p\,,1)$ |

| Yıl | Yazar(lar) | Alt Sınır(lar) | Ek Bilgi | Şart(lar) |
|---|---|---|---|---|
| 2011 | Cabezon ve Wynn | $L_1 = A - B$ | $A = (n-k+1)p^k$ | $n \geq 4k+2$ |
| | | $L_2 = A - B + C - D$ | $B = (n-k)p^{k+1}\frac{1}{2}(n-2k+1)(n-2k)p^{2k}$ | |
| | | | $C = (n-2k)^2p^{2k+1} + \frac{1}{6}(n-3k-1)(n-3k)(n-3k+1)p^{3k}$ | |
| | | | $D = \frac{1}{2}(n-2k-1)(n-2k)p^{2k+2} + \frac{1}{2}(n-3k-1)(n-3k)^2p^{3k+1}$ $+\frac{1}{24}(n-4k-2)(n-4k-1)(n-4k)(n-4k+1)p^{4k}$ | |
| 2015 | Dăuş ve Beiu | $L_0 = 1 - [(n-k)p+1]q^k$ | | $1/(n-k) > pq^k$ |
| | | $L_1 = 1 - (n-k)pq^k + \frac{(n-2k-1)(n-2k)}{2}(pq^k)^2$ $-\frac{(n-3k-2)(n-3k-1)(n-3k)}{6}(pq^k)^3$ $-q^k\left[1-(n-2k)pq^k + \frac{(n-3k-1)(n-3k)}{2}(pq^k)^2\right]$ | | |

**Tablo 4.8.** $n$'den ardıl $k$-çıkışlı Hatalı Sistemlerin Güvenilirlikleri İçin Üst Sınır Yaklaşımları

| Yıl | Yazar(lar) | Üst Sınır(lar) | Ek Bilgi | Şart(lar) |
|---|---|---|---|---|
| 1981 | Chiang ve Niu,Zuo | $(1-q^k)^{[n/k]}$ | | |
| 1982 | Salvia | $1-(n-k+1)p^{n-k}q^k$ | | |
| 1982 | Derman vd. | $1-{}^{A}/_{B}$ | $A=(n-k+1)^2q^{2k}$<br>$B=(n-k+1)^2q^k+\sum_{j=k+1}^{\min(2k,n)}(n-j+1)q^j+\binom{n-2k+1}{2}q^{2k}$ | |
| 1985<br>1986 | Fu | $(1-pq^k)^{n-k+1}$ | | |
| 1986 | Papastavridis | $aM^{n+1}+e$ | $m=1-pq^k/(1-q^k)^k$ , $M=1-pq^k$<br>$a=(m^k-q^k)/(m^k-(k+1)pq^k)$<br>$e=2(k-1)q^{n+2}/p(k+(k+1)q)$ | $q<k/(k+1)$ |
| 1986 | Papastavridis | $(1-pq^k)^n+(k-1)q^n$ | | |
| 1990 | Chrysaphinou ve Papastavridis | $(2k-1)q^k+2(k-1)q+\exp(-\lambda_n)$ | $\lambda_n\equiv(n-k+1)q^k$ | $q\sim\lambda/n^{1/k}$ |
| 1991 | Barbour vd. | $\exp(-p\lambda_n)+(2kp-1)q^k$ | $\lambda_n\equiv(n-k+1)q^k$ | |
| 1992 | Barbour vd. | $e^{-(n-k+1)pq^k}+(2kp-1)q^k$ | | |
| 1993 | Papastavridis ve Koutras | $\prod_{i=k}^{n}(1-p_{i-k}Q_{k,i})$ | $Q_{k,i}\equiv\prod_{j=i-k+1}^{i}q_j$ | |

| Yıl | Yazar(lar) | Üst Sınır(lar) | Ek Bilgi | Şart(lar) |
|---|---|---|---|---|
| 1995 | Barbour vd. | $\vartheta + \varepsilon_1$ | $\vartheta = e^{-(n-k+1)pq^k} - q^{k+1}e^{-(n-2k)pq^k}$<br>$\varepsilon_1 = \left\{1 - e^{-(n-k+1)pq^k} + q^{k+1}\left(1 - e^{-(n-2k)pq^k}\right)\right\} * (2k+1)pq^k$ | |
| 1995 | Barbour vd. | $\exp(-\mu) + \varepsilon_2$ | $\varepsilon_2 = q^{2k}[(6k-5)n - (k-1)(13k-9)]$<br>$\mu = (n-k+1)q^k - (n-k)q^{k+1} - 2(n-k+2)q^{2k-1} + 2(n-2)q^{2k} + \frac{2k(n-k+2)}{2k-1}q^{3k-2} - (n+k-4)q^{3k-1} + [2k(n-k+2) - 2(2k-1) * (n-k+1)q + 2(k-1)(n-k)q^2]q^{k-1}h(q,k)$<br>$h(q,k) = \sum_{i=k}^{2k-2} q^i/i$ | $q \le 1/3\,, n > 3k-2$ |
| 1997 | Muselli | $(1-q^k)^{\lfloor n/k \rfloor}$ | | |
| 1998 | Xie ve Lai | $(1-q^k)[1-(1-q)q^k/(1-q^k)]^{n-k}$ | | |
| 2000 | Muselli | $(1-q^k)^{\lfloor (n-k)/k \rfloor + 1}$ | | |
| 2000 | Muselli | $(1-q^k)^{1+(n-k)p/(1-q^k)}$ | | |

| Yıl | Yazar(lar) | Üst Sınır(lar) | Ek Bilgi | Şart(lar) |
|---|---|---|---|---|
| 2011 | Cabezon ve Wynn | $U_1 = A$ | $A = (n-k+1)p^k$ | $n \geq 4k+2$ |
| | | $U_2 = A - B + C$ | $B = (n-k)p^{k+1}\frac{1}{2}(n-2k+1)(n-2k)p^{2k}$ | |
| | | | $C = (n-2k)^2 p^{2k+1} + \frac{1}{6}(n-3k-1)(n-3k)(n-3k+1)p^{3k}$ | |
| 2015 | Dăuş ve Beiu | $U_0 = 1 - [1-(n-2k)pq^k]q^k$ | | $1/(n-k) > pq^k$ |
| | | $U_1 = 1-(n-k)pq^k + \frac{(n-2k-1)(n-2k)}{2}(pq^k)^2$ | | |
| | | $-q^k[1-(n-2k)pq^k + \frac{(n-3k-1)(n-3k)}{2}(pq^k)^2$ | | |
| | | $-\frac{(n-4k-2)(n-4k-1)(n-4k)}{6}(pq^k)^3]$ | | |

Doğrusal hatalı sistemlerin güvenilirliği için önerilen alt sınır yaklaşımlarını karşılaştırabilmek için farklı $n$, $k$ ve $q$ değerleri için elde edilen sonuçlar ile tam güvenilirlik değerleri aşağıdaki tablolarda verilmiştir. LLF1 yaklaşımının sonuçları ile LLF3, LLF9, LLF13, LLF14 ve LLF17 yaklaşımlarının sonuçları aynı çıktığı için bu sonuçların hepsi tek bir sütunda LLF1 yaklaşımı altında, LLF7 ve LLF8 yaklaşımlarının sonuçları aynı olduğundan tek bir sütunda LLF7 yaklaşımı altında verilmiştir. LLF19 ve LLF20 ile önerilen alt sınır yaklaşımlarının sonuçları tam güvenilirlikten oldukça uzak bir görüntü çizdiği görülmüştür. Bu yüzden formülasyon olarak ifade edilmesine rağmen sonuçlarını vermedik.

**Tablo 4.9.** $Lin/Con/k/n:F$ sistemlerin farklı $n$, $k$ ve $q$ değerleri için alt sınır yaklaşımları ile güvenilirliğin karşılaştırılması

| $n$ | $k$ | $q$ | LLF1 | LLF2 | LLF4 | LLF5 | LLF6 | LLF7 | $R_{LF}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 3 | .01 | 0.9999920 | 0.9999920 | 0.9999921 | 0.9999901 | 0.9599870 | 0.9999871 | 0.9999921 |
| 10 | 3 | .05 | 0.9990004 | 0.9990000 | 0.9990439 | 0.9988131 | 0.7983755 | 0.9984630 | 0.9990439 |
| 100 | 3 | .01 | 0.9999020 | 0.9999020 | 0.9999030 | 0.9999010 | 0.9598970 | 0.9998980 | 0.9999030 |
| 100 | 3 | .05 | 0.9878240 | 0.9877500 | 0.9884189 | 0.9881945 | 0.7871997 | 0.9878425 | 0.9884191 |
| 100 | 4 | .01 | 0.9999990 | 0.9999990 | 0.9999990 | 0.9999990 | 0.9399990 | 0.9999990 | 0.9999990 |
| 100 | 4 | .05 | 0.9993939 | 0.9993937 | 0.9994239 | 0.9994064 | 0.6993502 | 0.9993830 | 0.9994239 |
| 100 | 5 | .01 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.9200000 | 1.0000000 | 1.0000000 |
| 100 | 5 | .05 | 0.9999700 | 0.9999700 | 0.9999715 | 0.9999703 | 0.5999672 | 0.9999688 | 0.9999715 |
| 1000 | 3 | .01 | 0.9990025 | 0.9990020 | 0.9990125 | 0.9990105 | 0.9589975 | 0.9990075 | 0.9990125 |
| 1000 | 3 | .05 | 0.8827107 | 0.8752500 | 0.8881895 | 0.8880235 | 0.6820926 | 0.8876532 | 0.8881915 |
| 1000 | 4 | .01 | 0.9999900 | 0.9999900 | 0.9999901 | 0.9999901 | 0.9399900 | 0.9999901 | 0.9999901 |
| 1000 | 4 | .05 | 0.9937881 | 0.9937687 | 0.9940973 | 0.9940801 | 0.6937444 | 0.9940565 | 0.9940973 |
| 1000 | 5 | .01 | 0.9999999 | 0.9999999 | 0.9999999 | 0.9999999 | 0.9199999 | 0.9999999 | 0.9999999 |
| 1000 | 5 | .05 | 0.9996888 | 0.9996888 | 0.9997043 | 0.9997032 | 0.5996860 | 0.9997017 | 0.9997043 |
| **Hata Normu** | | | | | | | | | |
| $\|e\|_1$ | | | 0.0005133 | 0.0011201 | 0.0000002 | 0.0000493 | 0.1742205 | 0.0001338 | |

**Tablo 4.9. (Devamı)** $Lin\ /\ Con\ /\ k\ /\ n{:}F$ sistemlerin farklı $n$, $k$ ve $q$ değerleri için alt sınır yaklaşımları ile güvenilirliğin karşılaştırılması

| $n$ | $k$ | $q$ | LLF10 | LLF11 | LLF12 | LLF15 | LLF16 | $R_{LF}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 3 | .01 | 0.9999652 | 0.9999921 | 0.9999921 | 0.9999921 | 0.9999921 | 0.9999921 |
| 10 | 3 | .05 | 0.9962267 | 0.9990434 | 0.9990483 | 0.9990438 | 0.9990439 | 0.9990439 |
| 100 | 3 | .01 | 0.9769380 | 0.9999030 | 0.9999030 | 0.9999030 | 0.9999030 | 0.9999030 |
| 100 | 3 | .05 | 0.4505869 | 0.9884142 | 0.9884603 | 0.9884188 | 0.9884190 | 0.9884191 |
| 100 | 4 | .01 | 0.9975633 | 0.9999990 | 0.9999990 | 0.9999990 | 0.9999990 | 0.9999990 |
| 100 | 4 | .05 | 0.7273428 | 0.9994239 | 0.9994240 | 0.9994239 | 0.9994239 | 0.9994239 |
| 100 | 5 | .01 | 0.9997998 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 |
| 100 | 5 | .05 | 0.8913497 | 0.9999715 | 0.9999715 | 0.9999715 | 0.9999715 | 0.9999715 |
| 1000 | 3 | .01 | 0.1015937 | 0.9990125 | 0.9990126 | 0.9990125 | 0.9990125 | 0.9990125 |
| 1000 | 3 | .05 | 0.0000001 | 0.8881423 | 0.8885401 | 0.8881911 | 0.8881891 | 0.8881915 |
| 1000 | 4 | .01 | 0.2868984 | 0.9999901 | 0.9999901 | 0.9999901 | 0.9999901 | 0.9999901 |
| 1000 | 4 | .05 | 0.0000108 | 0.9940972 | 0.9940982 | 0.9940973 | 0.9940973 | 0.9940973 |
| 1000 | 5 | .01 | 0.5128750 | 0.9999999 | 0.9999999 | 0.9999999 | 0.9999999 | 0.9999999 |
| 1000 | 5 | .05 | 0.0000000 | 0.9997043 | 0.9997043 | 0.9997043 | 0.9997043 | 0.9997043 |
| **Hata Normu** | | | | | | | | |
| $\|e\|_1$ | | | 0.4322832 | 0.0000044 | 0.0000314 | 0.0000001 | 0.0000002 | |

**Tablo 4.9.(Devamı)** $Lin\ /\ Con\ /\ k\ /\ n$: $F$ sistemlerin farklı $n$, $k$ ve $q$ değerleri için alt sınır yaklaşımları ile güvenilirliğin karşılaştırılması

| $n$ | $k$ | $q$ | LLF18 | LLF21 | LLF22 | $R_{LF}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 3 | .01 | 0.9999920 | 0.9999921 | 0.9999921 | 0.9999921 |
| 10 | 3 | .05 | 0.9990004 | 0.9990438 | 0.9990439 | 0.9990439 |
| 100 | 3 | .01 | 0.9999020 | 0.9999030 | 0.9999030 | 0.9999030 |
| 100 | 3 | .05 | 0.9878240 | 0.9883562 | 0.9884191 | 0.9884191 |
| 100 | 4 | .01 | 0.9999990 | 0.9999990 | 0.9999990 | 0.9999990 |
| 100 | 4 | .05 | 0.9993877 | 0.9994237 | 0.9994239 | 0.9994239 |
| 100 | 5 | .01 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 |
| 100 | 5 | .05 | 0.9999700 | 0.9999715 | 0.9999715 | 0.9999715 |
| 1000 | 3 | .01 | 0.9990025 | 0.9990120 | 0.9990125 | 0.9990125 |
| 1000 | 3 | .05 | 0.8827107 | 0.8814812 | 0.8881838 | 0.8881915 |
| 1000 | 4 | .01 | 0.9999900 | 0.9999901 | 0.9999901 | 0.9999901 |
| 1000 | 4 | .05 | 0.9937819 | 0.9940800 | 0.9940973 | 0.9940973 |
| 1000 | 5 | .01 | 0.9999999 | 0.9999999 | 0.9999999 | 0.9999999 |
| 1000 | 5 | .05 | 0.9996888 | 0.9997043 | 0.9997043 | 0.9997043 |
| **Hata Normu** | | | | | | |
| $\|e\|_1$ | | | 0.0005624 | 0.0005455 | 0.0000006 | |

Tablolarda sonuçlarını verdiğimiz alt sınır yaklaşımlarının kıyaslanabilmesi için ise bağıl hatanın ortalamasını veren $\|e\|_1$ hata normunu kullandık. Hata normu ne kadar küçük ise o yaklaşımın tam güvenilirliğe yakın olduğunu söyleyebiliriz. Alt sınır yaklaşımları için elde edilen tablolar incelendiğinde LLF6 ve LLF10 dışındaki yaklaşımların iyi sonuçlar verdiğini söyleyebiliriz. LLF6, $n$ ve $k$'ya bağlı olmaksızın sadece çok küçük $q(q < 0.05)$ değerlerinde iyi sonuçlar vermektedir. LLF10 ise, $n$'nin değeri büyüdükçe($n > 100$) tam güvenilirlikten uzaklaştığı görülmektedir. LLF4, LLF5, LLF11, LLF12, LLF15, LLF16 ve LLF22'nin hata normları diğerlerinden daha küçük çıkmıştır ve dolayısıyla diğer yaklaşımlardan daha iyi olduklarını söyleyebiliriz. Ayrıca, LLF11, LLF12, LLF15 ve LLF16'nın birbirlerine yakın sonuçlar verdikleri gözlenmiştir. Bu yedi yaklaşım içinde ise en iyi yaklaşımları veren yöntemler LLF4 ve LLF15'dir.

Doğrusal hatalı sistemlerin güvenilirliği için önerilen üst sınır yaklaşımlarını karşılaştırabilmek için farklı $n$, $k$ ve $q$ değerleri için elde edilen sonuçlar ile tam güvenilirlik değerleri aşağıdaki tablolarda verilmiştir. ULF1'in sonuçları ile ULF11, ULF14 ve ULF16'nın sonuçları aynı olduğundan bu sonuçların hepsi tek bir sütunda ULF1'in altında; ULF4 ve ULF10'nun sonuçları aynı olduğundan tek bir sütunda ULF4'ün altında ve ULF8 ile ULF9'un sonuçları aynı olduğundan bunlar da tek bir sütunda ULF8'in altında verilmiştir.

**Tablo 4.10.** $Lin/Con\ /\ k\ /\ n{:}F$ sistemlerin farklı $n$, $k$ ve $q$ değerleri için üst sınır yaklaşımları ile güvenilirliğin karşılaştırılması

| $n$ | $k$ | $q$ | ULF1 | ULF2 | ULF3 | ULF4 | ULF5 | ULF6 | ULF7 | $R_{LF}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 3 | .01 | 0.9999970 | 0.9999925 | 0.9999990 | 0.9999921 | 0.9999921 | 0.9999901 | 1.0399970 | 0.9999921 |
| 10 | 3 | .05 | 0.9996250 | 0.9993017 | 0.9998757 | 0.9990504 | 0.9990444 | 0.9988131 | 1.1996250 | 0.9990439 |
| 100 | 3 | .01 | 0.9999670 | 0.9999630 | 0.9999990 | 0.9999030 | 0.9999030 | 0.9999010 | 1.0399070 | 0.9999030 |
| 100 | 3 | .05 | 0.9958832 | 0.9999154 | 0.9998751 | 0.9884293 | 0.9884233 | 0.9881945 | 1.1884500 | 0.9884191 |
| 100 | 4 | .01 | 0.9999998 | 0.9999996 | 1.0000000 | 0.9999990 | 0.9999990 | 0.9999990 | 1.0599990 | 0.9999990 |
| 100 | 4 | .05 | 0.9998438 | 0.9999956 | 0.9999938 | 0.9994242 | 0.9994239 | 0.9994064 | 1.2994380 | 0.9994239 |
| 100 | 5 | .01 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0800000 | 1.0000000 |
| 100 | 5 | .05 | 0.9999938 | 0.9999998 | 0.9999997 | 0.9999715 | 0.9999715 | 0.9999703 | 1.3999730 | 0.9999715 |
| 1000 | 3 | .01 | 0.9996671 | 1.0000000 | 0.9999990 | 0.9990125 | 0.9990125 | 0.9990105 | 1.0390070 | 0.9990125 |
| 1000 | 3 | .05 | 0.9592269 | 1.0000000 | 0.9998750 | 0.8882345 | 0.8882291 | 0.8880235 | 1.0833430 | 0.8881915 |
| 1000 | 4 | .01 | 0.9999975 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.9999901 | 0.9999901 | 0.9999901 | 1.0599900 | 0.9999901 |
| 1000 | 4 | .05 | 0.9984387 | 1.0000000 | 0.9999938 | 0.9940978 | 0.9940975 | 0.9940801 | 1.2938320 | 0.9940973 |
| 1000 | 5 | .01 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.9999999 | 0.9999999 | 0.9999999 | 1.0800000 | 0.9999999 |
| 1000 | 5 | .05 | 0.9999375 | 1.0000000 | 0.9999997 | 0.9997044 | 0.9997043 | 0.9997032 | 1.3996920 | 0.9997043 |
| **Hata Normu** | | | | | | | | | | |
| $\|e\|_1$ | | | 0.0067062 | 0.0104047 | 0.0104352 | 0.0000047 | 0.0000034 | 0.0000493 | 0.1731953 | |

**Tablo 4.10.(Devamı)** $Lin\ /\ Con\ /\ k\ /\ n\!:\!F$ sistemlerin farklı $n$, $k$ ve $q$ değerleri için üst sınır yaklaşımları ile güvenilirliğin karşılaştırılması

| $n$ | $k$ | $q$ | ULF8 | ULF12 | ULF13 | ULF15 | ULF17 | ULF20 | ULF21 | $R_{LF}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 3 | .01 | 0.9999970 | 0.9999921 | 0.9999921 | 0.9999921 | 0.9999921 | 0.9999990 | 0.9999921 | 0.9999921 |
| 10 | 3 | .05 | 0.9996380 | 0.9990450 | 0.9990505 | 0.9990440 | 0.9990440 | 0.9998751 | 0.9990439 | 0.9990439 |
| 100 | 3 | .01 | 0.9999079 | 0.9999030 | 0.9999030 | 0.9999030 | 0.9999030 | 0.9999990 | 0.9999030 | 0.9999030 |
| 100 | 3 | .05 | 0.9890175 | 0.9884334 | 0.9884991 | 0.9884217 | 0.9884216 | 0.9998764 | 0.9884191 | 0.9884191 |
| 100 | 4 | .01 | 0.9999991 | 0.9999990 | 0.9999990 | 0.9999990 | 0.9999990 | 1.0000000 | 0.9999990 | 0.9999990 |
| 100 | 4 | .05 | 0.9994655 | 0.9994239 | 0.9994241 | 0.9994239 | 0.9994239 | 0.9999938 | 0.9994239 | 0.9994239 |
| 100 | 5 | .01 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 |
| 100 | 5 | .05 | 0.9999742 | 0.9999715 | 0.9999715 | 0.9999715 | 0.9999715 | 0.9999997 | 0.9999715 | 0.9999715 |
| 1000 | 3 | .01 | 0.9990174 | 0.9990125 | 0.9990127 | 0.9990125 | 0.9990125 | 0.9999990 | 0.9990125 | 0.9990125 |
| 1000 | 3 | .05 | 0.8888282 | 0.8883281 | 0.8889445 | 0.8882158 | 0.8882154 | 0.9998898 | 0.8881862 | 0.8881915 |
| 1000 | 4 | .01 | 0.9999902 | 0.9999901 | 0.9999901 | 0.9999901 | 0.9999901 | 1.0000000 | 0.9999901 | 0.9999901 |
| 1000 | 4 | .05 | 0.9941390 | 0.9940978 | 0.9940997 | 0.9940974 | 0.9940974 | 0.9999938 | 0.9940973 | 0.9940973 |
| 1000 | 5 | .01 | 0.9999999 | 0.9999999 | 0.9999999 | 0.9999999 | 0.9999999 | 1.0000000 | 0.9999999 | 0.9999999 |
| 1000 | 5 | .05 | 0.9997070 | 0.9997043 | 0.9997043 | 0.9997043 | 0.9997043 | 0.9999997 | 0.9997043 | 0.9997043 |
| **Hata Normu** | | | | | | | | | | |
| $\lVert e \rVert_1$ | | | 0.0001443 | 0.0000121 | 0.0000670 | 0.0000022 | 0.0000021 | 0.0104364 | 0.0000004 | |

Tablolar incelendiğinde ULF7 hariç diğer bütün yaklaşımların güvenilirlik için uygun yaklaşımlar olduğunu söyleyebiliriz. ULF2, $n$ değeri arttıkça($n > 100$) yaklaşık aynı değeri aldığı gözlenmiştir. Her birinin hata normları incelendiğinde ise ULF4, ULF5, ULF15, ULF17 ve ULF21'in normları en küçük çıkmıştır. Bu yaklaşımlar içinde ULF21'in diğerlerinden üstün olduğunu söyleyebiliriz.

### 4.2.2 Dairesel $n$'den Ardıl $k$-Çıkışlı Hatalı Sistemlerin Güvenilirliği İçin Alt(Üst) Sınır Yaklaşımları

Eşit güvenilirlik değerine sahip $n$ bileşenden oluşan sistemde, herhangi ardıl $k$ bileşen bir minimal kesen kümesi oluşturur ve bu sistemin arızalanmasına neden olur. Dairesel $n$'den ardıl $k$-çıkışlı hatalı sistemlerde bu şekilde oluşturulan $n$ tane minimal kesen kümesi vardır(Kuo, W., ve M., J., Zuo, 2003:346; Derman vd., 1982:58).

- Chiang ve Niu(1981), (4.7) ve (4.8) eşitlikleri ile doğrusal hatalı sistemler için

alt(üst) sınır yaklaşımlarını önermişlerdir. Doğrusal sistem için $n - k + 1$ tane minimal kesen kümesi olduğu varsayımı altında verilen bu eşitlikleri, benzer düşünceyle dairesel sistemler için de $n$ tane minimal kesen kümesi olduğu varsayımıyla alt sınır yaklaşımı bileşenlerin iid oldukları varsayımı altında aşağıdaki gibidir(Kuo, W., ve M., J., Zuo, 2003:346).

$$l_{CF}(n,k) = (1 - q^k)^n \leq R_{CF}(n,k,q) \quad (4.56)$$

Üst sınır yaklaşımını elde etmek için Chiang ve Niu(1981), $Lin/Con/k/n{:}F$ sistemi $n - k\lfloor n/k \rfloor$ bileşene sahip sonuncusu hariç her bir alt sistemi ardıl $k$ bileşene sahip bağımsız $\lfloor n/k \rfloor + 1$ alt sisteme bölmüştür. Dairesel sistemler için tam olarak aynı alt sistemler elde edilir. $n - k\lfloor n/k \rfloor < k$ olduğu için sonuncu alt sistem hatalı değildir. Sistem çalıştığı için bütün $\lfloor n/k \rfloor + 1$ alt sistemler çalışmak zorundadır. Bu nedenle dairesel sistemler için üst sınır aşağıdaki gibidir(Kuo, W., ve M., J., Zuo, 2003:347).

$$u_{CF}(n,k) = (1 - q^k)^{\lfloor n/k \rfloor} \geq R_{CF}(n,k,q) \quad (4.57)$$

Bölüm 4.2.1'de doğrusal hatalı sistemlerin güvenilirliği için literatürde önerilen mevcut birçok sınır yaklaşım yöntemleri incelenmiştir. Bu yöntemlerin çoğu minimal kesen kümesi özelliği yardımıyla elde edilmiştir. Doğrusal sistemlerde $n - k + 1$ tane minimal kesen küme varken dairesel sistemlerde $n$ tane minimal kesen küme vardır. Bu özellikten yararlanarak doğrusal sistemler için önerilen yöntemlerden uygun olanlar, dairesel sistemler için yeniden türetilerek aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

**Sonuç 4.1.** Benzer düşünceyle Fu(1985,1986)'nun (4.12) ve (4.13) eşitlikleri ile doğrusal sistemler için önermiş olduğu alt(üst) sınır yaklaşımını yukarıdaki varsayımıyla dairesel sistemlere uyarladığımızda alt(üst) sınır yaklaşımları aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$l_{CF}(n,k) = (1-q^k)^n \tag{4.58}$$

$$u_{CF}(n,k) = (1-pq^k)^n \tag{4.59}$$

**Sonuç 4.2.** Dairesel sistemler için $n$ tane minimal kesen kümesi olduğu varsayımıyla Salvia(1982)'nın (4.9) ve (4.10) eşitlikleri ile verdiği alt(üst) sınır yaklaşım ifadeleri dairesel sistem için aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$l_{CF}(n,k) = 1-nq^k \tag{4.60}$$

$$u_{CF}(n,k) = 1-np^{n-k}q^k \tag{4.61}$$

- **Derman vd.(1982) Üst Sınır Yaklaşımı**

Derman vd.(1982), bütün bileşenlerin aynı güvenilirliğe sahip olduğu ve bileşenlerin iid olduğu varsayımı altında dairesel sistemlerin üst sınır yaklaşımı için aşağıdaki teoremi vermişlerdir.

**Teorem 4.5.** (Derman vd., 1982:59)

$$R_{CF}(n,k,q) \leq 1 - A/B = u_{CF}(n,k) \tag{4.62}$$

ve,

$$A = nq^k$$

$$B = (1+(n-2k+1)q^k + 2q(1-q^{k-1}))/p$$

şeklindedir.

- **Papastavridis(1986) Alt(Üst) Sınır Yaklaşımı**

Papastavridis(1986), $q$'nun $k/(k+1)$'den az olduğu kısıtlaması altında dairesel sistemler için alt(üst) sınır yaklaşımları için aşağıdaki teoremi vermiştir.

**Teorem 4.6.** (Papastavridis,1986:607-610)

$$l_{CF}(n,k) = M^n - (k-1)q^n < R_{CF}(n,k) < M^n + (k-1)q^n = u_{CF}(n,k) \quad (4.63)$$

olup burada,

$$M = 1 - pq^k$$

şeklindedir.

**Sonuç 4.3.** Chrysaphinou ve Papastavridis(1990)'in (4.20) ve (4.21) eşitliği ile doğrusal sistemler için sadece $q$'nun yeterince küçük seçildiği durumlar için önerdikleri alt ve üst sınır yaklaşımını dairesel sistemlerin $n$ tane minimal kesen kümesine sahip olması şartıyla dairesel sistemler için aynı alt(üst) sınır yaklaşımları sadece $\lambda_n \equiv nq^k$ değişikliği yapılarak elde edilir.

**Sonuç 4.4.** Barbour vd.(1991)'nin (4.23) ve (4.24) eşitlikleri ile doğrusal sistemler için önerdikleri alt ve üst sınır yaklaşımını dairesel sistemlerin $n$ tane minimal kesen kümesine sahip olması şartıyla dairesel sistemler için aynı alt(üst) sınır yaklaşımları sadece $\lambda_n \equiv nq^k$ değişikliği yapılarak elde edilir.

**Sonuç 4.5.** Barbour vd.(1992)'nin, (4.25) ve (4.26) eşitlikleri ile önermiş oldukları alt ve üst sınır yaklaşımları dairesel sistemlerin $n$ tane minimal kesen kümesine sahip olması durumuyla dairesel sistemlerin alt(üst) sınır yaklaşımları aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$l_{CF}(n,k) = e^{-npq^k} - (2kp-1)q^k \leq R_{CF}(n,k,q) \quad (4.64)$$

$$u_{CF}(n,k) = e^{-npq^k} + (2kp-1)q^k \geq R_{CF}(n,k,q) \quad (4.65)$$

**Sonuç 4.6.** Barbour vd.(1995), (4.31) ve (4.32) eşitlikleri ile vermiş oldukları alt(üst) sınır yaklaşımları dairesel sistemler için aynı olup ancak aşağıdaki değişiklikler yapılır.

$$\vartheta = e^{-npq^k} - q^{k+1}e^{-(n-2k)pq^k}$$

$$\varepsilon_1 = \left\{1 - e^{-npq^k} + q^{k+1}\left(1 - e^{-(n-2k)pq^k}\right)\right\}(2k+1)pq^k$$

Dairesel hatalı sistemlerin güvenilirliği için önerilen alt sınır yaklaşımlarını karşılaştırabilmek için farklı $n$, $k$ ve $q$ değerleri için elde edilen sonuçlar ile güvenilirlik değerleri aşağıdaki tablolarda verilmiştir. LCF1 ile LCF2 aynı sonuçları verdiğinden; LCF6 ile LCF7 de aynı sonuçları verdiğinden bunların sonuçları tek bir sütunda verilmiştir.

**Tablo 4.11.** $Cir\ /\ Con\ /\ k\ /\ n{:}F$ sistemlerin farklı $n, k$ ve $q$ değerleri için alt sınır yaklaşımları ile güvenilirliğin karşılaştırılması

| $n$ | $k$ | $q$ | LCF1 | LCF3 | LCF4 | $R_{CF}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 3 | .01 | 0.9999900 | 0.9999900 | 0.9999901 | 0.9999911 |
| 10 | 3 | .05 | 0.9987507 | 0.9987500 | 0.9988131 | 0.9989313 |
| 100 | 3 | .01 | 0.9999000 | 0.9999000 | 0.9999010 | 0.9999020 |
| 100 | 3 | .05 | 0.9875770 | 0.9875000 | 0.9881945 | 0.9883078 |
| 100 | 4 | .01 | 0.9999990 | 0.9999990 | 0.9999990 | 0.9999990 |
| 100 | 4 | .05 | 0.9993752 | 0.9993750 | 0.9994064 | 0.9994123 |
| 100 | 5 | .01 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.9999999 |
| 100 | 5 | .05 | 0.9999688 | 0.9999687 | 0.9999703 | 0.9999706 |
| 1000 | 3 | .01 | 0.9990005 | 0.9990000 | 0.9990105 | 0.9990115 |
| 1000 | 3 | .05 | 0.8824900 | 0.8750000 | 0.8880235 | 0.8880914 |
| 1000 | 4 | .01 | 0.9999900 | 0.9999900 | 0.9999901 | 0.9999901 |
| 1000 | 4 | .05 | 0.9937695 | 0.9937500 | 0.9940801 | 0.9940858 |
| 1000 | 5 | .01 | 0.9999999 | 0.9999999 | 0.9999999 | 0.9999999 |
| 1000 | 5 | .05 | 0.9996875 | 0.9996875 | 0.9997032 | 0.9997035 |
| **Hata Normu** | | | | | | |
| $\|e\|_1$ | | | 0.0005439 | 0.0011534 | 0.0000232 | |

**Tablo 4.11.(Devamı)** $Cir\ /\ Con\ /\ k\ /\ n{:}F$ sistemlerin farklı $n$, $k$ ve $q$ değerleri için alt sınır yaklaşımları ile güvenilirliğin karşılaştırılması

| $n$ | $k$ | $q$ | LCF5 | LCF6 | LCF8 | $R_{CF}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 3 | .01 | 0.9599850 | 0.9999852 | 0.9999901 | 0.9999911 |
| 10 | 3 | .05 | 0.7981258 | 0.9982257 | 0.9988060 | 0.9989313 |
| 100 | 3 | .01 | 0.9598950 | 0.9998961 | 0.9999010 | 0.9999020 |
| 100 | 3 | .05 | 0.7869528 | 0.9876077 | 0.9881792 | 0.9883078 |
| 100 | 4 | .01 | 0.9399989 | 0.9999989 | 0.9999990 | 0.9999990 |
| 100 | 4 | .05 | 0.6993314 | 0.9993652 | 0.9994061 | 0.9994123 |
| 100 | 5 | .01 | 0.9200000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.9999999 |
| 100 | 5 | .05 | 0.5999659 | 0.9999677 | 0.9999703 | 0.9999706 |
| 1000 | 3 | .01 | 0.9589955 | 0.9990055 | 0.9990105 | 0.9990115 |
| 1000 | 3 | .05 | 0.6818719 | 0.8874423 | 0.8879312 | 0.8880914 |
| 1000 | 4 | .01 | 0.9399899 | 0.9999900 | 0.9999901 | 0.9999901 |
| 1000 | 4 | .05 | 0.6937257 | 0.9940388 | 0.9940795 | 0.9940858 |
| 1000 | 5 | .01 | 0.9199999 | 0.9999999 | 0.9999999 | 0.9999999 |
| 1000 | 5 | .05 | 0.5996847 | 0.9997005 | 0.9997032 | 0.9997035 |
| **Hata Normu** | | | | | | |
| $\|e\|_1$ | | | 0.1713957 | 0.0001617 | 0.0000323 | |

Tablolar incelendiğinde ise LCF5 dışındaki yaklaşımların iyi sonuçlar verdiğini söyleyebiliriz. LCF4 ve LCF8'in hata normlarını incelediğimizde ise diğer yaklaşımların hata normlarından daha küçük olduğunu ve diğer yaklaşımlardan daha iyi yaklaşımlar verdiğini söyleyebiliriz.

Dairesel hatalı sistemlerin güvenilirliği için önerilen üst sınır yaklaşımlarını karşılaştırabilmek için farklı $n$, $k$ ve $q$ değerleri için elde edilen sonuçlar ile güvenilirlik değerleri aşağıdaki tablolarda verilmiştir. UCF2 ile UCF5; UCF7 ile UCF8 aynı sonuçları verdiğinden bu yaklaşımlar için elde edilen sonuçlar tek bir sütunda verilmiştir.

**Tablo 4.12.** $Cir\ /\ Con\ /\ k\ /\ n{:}F$ sistemlerin farklı $n$, $k$ ve $q$ değerleri için üst sınır yaklaşımları ile güvenilirliğin karşılaştırılması

| $n$ | $k$ | $q$ | UCF1 | UCF2 | UCF3 | UCF4 | $R_{CF}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 3 | .01 | 0.9999970 | 0.9999901 | 0.9999907 | 0.9999902 | 0.9999911 |
| 10 | 3 | .05 | 0.9996250 | 0.9988131 | 0.9991271 | 0.9988694 | 0.9989313 |
| 100 | 3 | .01 | 0.9999670 | 0.9999010 | 0.9999623 | 0.9999020 | 0.9999020 |
| 100 | 3 | .05 | 0.9958832 | 0.9881945 | 0.9999137 | 0.9888081 | 0.9883078 |
| 100 | 4 | .01 | 0.9999998 | 0.9999990 | 0.9999996 | 0.9999990 | 0.9999990 |
| 100 | 4 | .05 | 0.9998438 | 0.9994064 | 0.9999955 | 0.9994348 | 0.9994123 |
| 100 | 5 | .01 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.9999999 |
| 100 | 5 | .05 | 0.9999938 | 0.9999703 | 0.9999998 | 0.9999717 | 0.9999706 |
| 1000 | 3 | .01 | 0.9996671 | 0.9990105 | 1.0000000 | 0.9990208 | 0.9990115 |
| 1000 | 3 | .05 | 0.9592269 | 0.8880235 | 1.0000000 | 0.8983223 | 0.8880914 |
| 1000 | 4 | .01 | 0.9999975 | 0.9999901 | 1.0000000 | 0.9999902 | 0.9999901 |
| 1000 | 4 | .05 | 0.9984387 | 0.9940801 | 1.0000000 | 0.9943767 | 0.9940858 |
| 1000 | 5 | .01 | 1.0000000 | 0.9999999 | 1.0000000 | 0.9999999 | 0.9999999 |
| 1000 | 5 | .05 | 0.9999375 | 0.9997032 | 1.0000000 | 0.9997173 | 0.9997035 |
| **Hata Normu** | | | | | | | |
| $\|e\|_1$ | | | 0.0067330 | 0.0000232 | 0.0004469 | 0.0008454 | |

**Tablo 4.12.(Devamı)** $Cir\ /\ Con\ /\ k\ /\ n{:}F$ sistemlerin farklı $n$, $k$ ve $q$ değerleri için üst sınır yaklaşımları ile güvenilirliğin karşılaştırılması

| $n$ | $k$ | $q$ | UCF6 | UCF7 | UCF9 | $R_{CF}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 3 | .01 | 1.0399950 | 0.9999950 | 0.9999901 | 0.9999911 |
| 10 | 3 | .05 | 1.1993760 | 0.9994007 | 0.9988079 | 0.9989313 |
| 100 | 3 | .01 | 1.0399050 | 0.9999059 | 0.9999010 | 0.9999020 |
| 100 | 3 | .05 | 1.1882030 | 0.9887827 | 0.9881989 | 0.9883078 |
| 100 | 4 | .01 | 1.0599990 | 0.9999991 | 0.9999990 | 0.9999990 |
| 100 | 4 | .05 | 1.2994190 | 0.9994477 | 0.9994061 | 0.9994123 |
| 100 | 5 | .01 | 1.0799690 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.9999999 |
| 100 | 5 | .05 | 1.3999720 | 0.9999730 | 0.9999703 | 0.9999706 |
| 1000 | 3 | .01 | 1.0390050 | 0.9990154 | 0.9990105 | 0.9990115 |
| 1000 | 3 | .05 | 1.0831220 | 0.8886173 | 0.8881173 | 0.8880914 |
| 1000 | 4 | .01 | 1.0599900 | 0.9999902 | 0.9999901 | 0.9999901 |
| 1000 | 4 | .05 | 1.2938130 | 0.9941213 | 0.9940801 | 0.9940858 |
| 1000 | 5 | .01 | 1.0800000 | 0.9999999 | 0.9999999 | 0.9999999 |
| 1000 | 5 | .05 | 1.3996900 | 0.9997058 | 0.9997032 | 0.9997035 |
| **Hata Normu** | | | | | | |
| $\|e\|_1$ | | | 0.1727743 | 0.0001165 | 0.0000199 | |

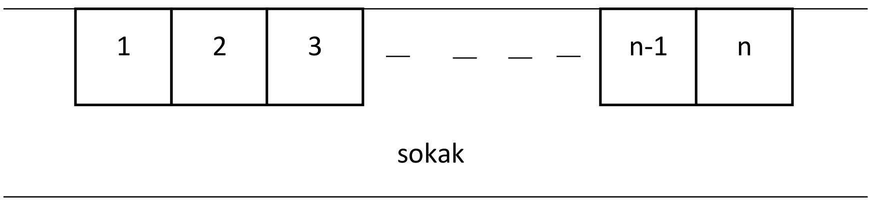
UCF6 dışındaki yaklaşımların güvenilirlikle uyum içinde olduğunu görebiliriz. Tablolardaki hata normlarını incelediğimizde ise UCF2 ve UCF9 ile önerilen yöntemlerin daha iyi yaklaşım gösterdiklerini söyleyebiliriz.

# 5. MODEL UYGULAMALAR

Bu bölümde, $Con/k/n:G$ ve $Con/k/n:F$ sistemlerin her birinin hem doğrusal hem de dairesel durumları için ayrı ayrı güncel sistem uygulamalarına yer verilmiştir. Bu model uygulamaları değerlendirebilmek için 4.bölümde ele aldığımız sınır yaklaşım yöntemlerinden en iyi sonuçları veren yaklaşımları belirleyerek uygun olanları bu sistemlere uygulayıp çıktıları grafikler ile birlikte vereceğiz.

## 5.1. Doğrusal $Con/k/n:G$ Sistem İçin Sokak Park Sistemi Uygulaması

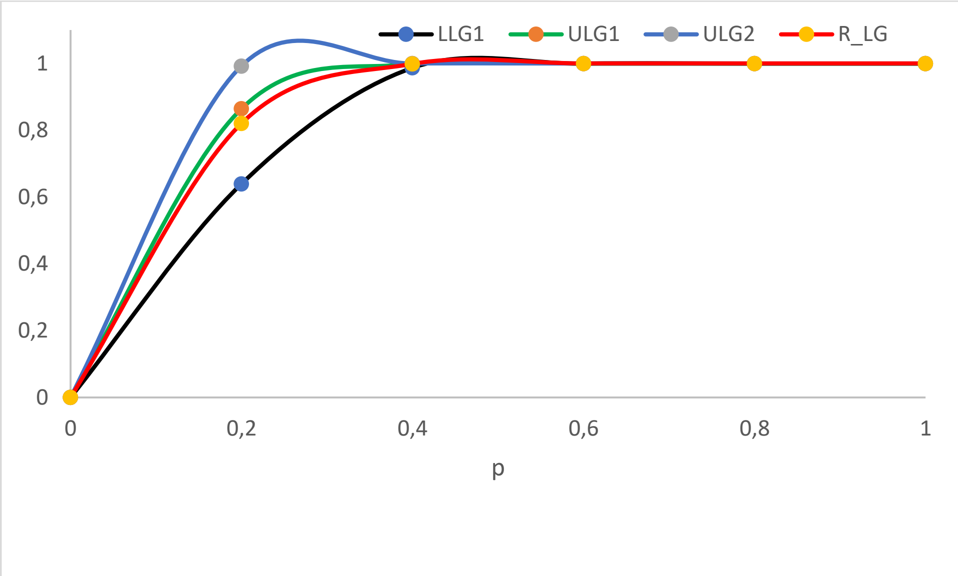
Sokakta $n$ tane paralel park alanı olduğu ve bu her alanın bir arabanın park edebilmesi için uygun olduğu varsayılsın. Ayrıca her park yerinin kullanılabilir olma olasılığı altında eğer bir otobüs(otobüsün iki araba büyüklüğünde olduğu varsayımı altında) bu sokağa park yaparsa ardıl iki tane park alanını işgal edecektir. Burada ortaya çıkan asıl problem ise park yerinde en az ardıl iki park yeri boş olduğunda otobüsü bu park alanına park etme olasılığını hesaplayabilmektir. Ayrıca bu durumda örneğimiz tam olarak doğrusal $n$'den ardıl 2-çıkışlı başarılı sistemlerin güvenilirliği için uygun bir örnektir. Otobüsün park edebilmesi ancak ve ancak iki ardıl park alanının boş olması durumunda geçerlidir(Kuo vd., 1990:244).



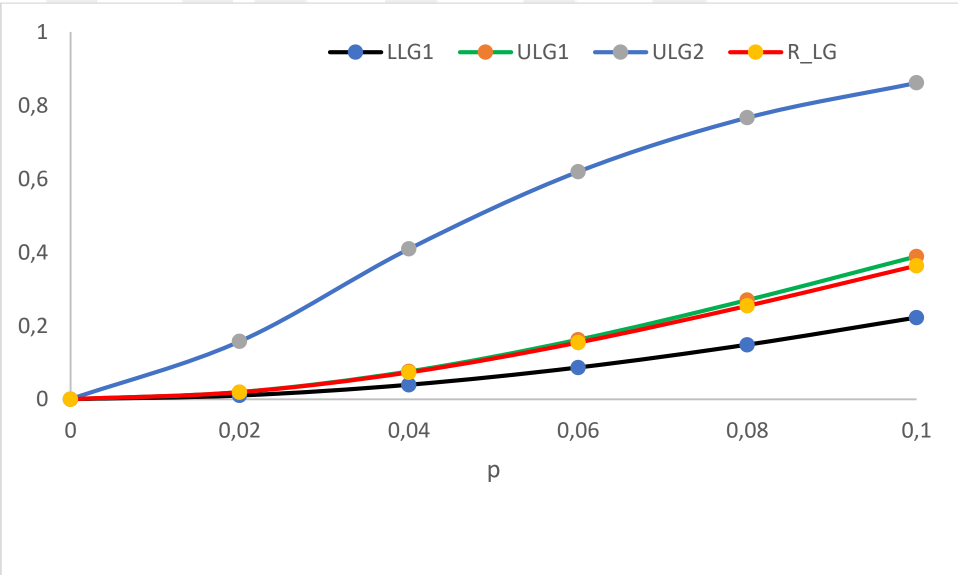

**Şekil 5.1.** Sokak park sistemi

Bu uygulamada, bir otobüsün ortalama iki arabalık yer kaplamak üzere doğrusal $Con/2/n$ başarılı sistemine dönüştü. Ancak bu uygulamayı farklı boyuttaki kara taşıtlarını göz önüne alarak daha da genişletmemiz mümkün.

Bu örnek model sisteminin uygulamasını $n = 50$ ve $k = 2$ değerleri için inceledik. Bunun için $0 < p < 1$ değerleri için inceledik. Ayrıca $0 < p < 0.1$ değerleri için de inceledik. Elde edilen sonuçlar grafikler ile verildi.




**Şekil 5.2.** LLG1, ULG1 ve ULG2 ile $R_{LG}$'nin karşılaştırılması

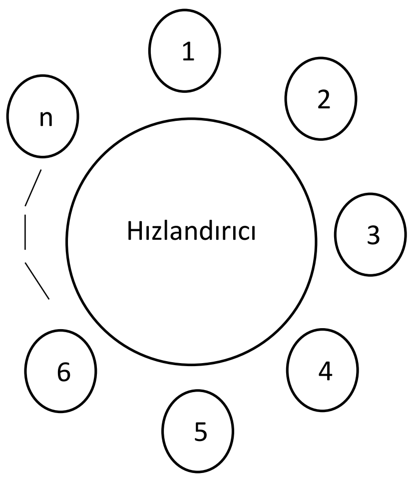



**Şekil 5.3.** p yeterince küçük olduğunda LLG1, ULG1 ve ULG2 ile $R_{LG}$'nin karşılaştırılması

Şekil 5.2'de $p$ değeri arttıkça(özellikle $p > 0.4$) alt(üst) sınır yaklaşım değerlerinin güvenilirliğe yaklaştığını söyleyebiliriz. $p$'nin küçük değerleri için Şekil 5.3'ü incelediğimizde ise LLG1 ve ULG2'nin $p$ değeri arttıkça güvenilirlikten uzaklaştığı bunun yanında ULG1'in ise güvenilirlik ile uyum içinde olduğu görüldü.

## 5.2. Dairesel $Con/k/n : G$ Sistem İçin Parçacık Hızlandırıcıda Fotoğraflama Sistemi Uygulaması

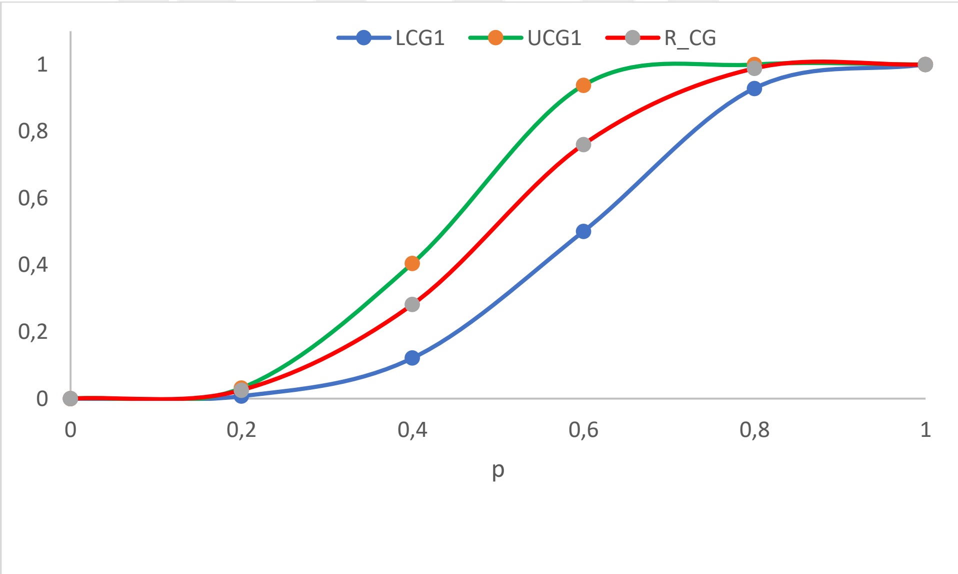
Bir parçacık hızlandırıcı, elektronlar veya protonlar gibi temel parçacıkları çok yüksek enerjilere çıkarmak için hızlandıran bir makinedir. Temel düzeyde, parçacık hızlandırıcıları çeşitli araştırma amaçları için kullanılabilen yüklü parçacık demetleri üretir. Dairesel hızlandırıcılar, parçacıkları dairesel bir yol etrafında iter. Dairesel hızlandırıcılar hem çarpışan ışın hem de sabit hedef deneyleri için kullanılabilirler. Parçacık hızlandırıcıları, manyetik alanlar tarafından yönlendirilen ve odaklanan bir parçacık demetinin enerjisini hızlandırmak ve arttırmak için elektrik alanları kullanır. Parçacık kaynağı, hızlanacak olan protonlar veya elektronlar gibi parçacıkları sağlar. Parçacık demeti metal kiriş borusundaki bir vakum içinde hareket eder. Vakum, parçacık demetinin engellenmeden hareket etmesi için hava ve tozsuz bir ortam sağlamak için çok önemlidir. Elektromıknatıslar, vakum tüpünden geçerken parçacık demetini yönlendirir ve odaklar. Hızlandırıcı etrafındaki elektrik alanları belirli bir frekansta pozitiften negatife geçer ve demetlerde parçacıkları hızlandıran radyo dalgaları oluşturur. Parçacıklar, ince bir metal folyo parçası gibi sabit bir hedefe yönlendirilebilir veya iki parçacık demeti çarpışabilir(https://www.energy.gov/articles/how-particle-accelerators-work,17.05.20).



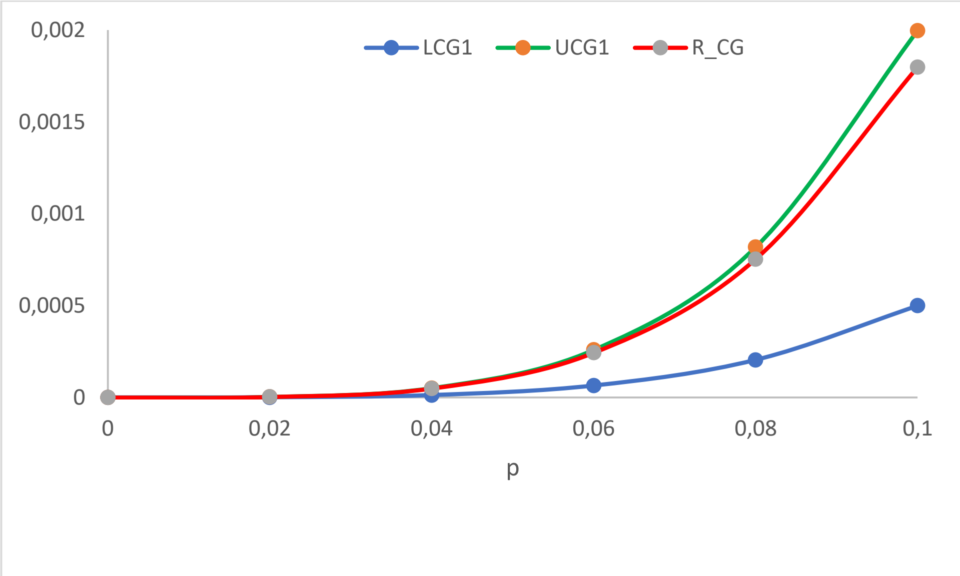

**Şekil 5.4.** Parçacık hızlandırıcıda fotoğraflama sistemi

Burada ele alacağımız sistemin amacı, dairesel tipteki parçacık hızlandırıcının çalışmasını fotoğraflayabilmek. Bir parçacık hızlandırıcıda meydana gelen ivme faaliyetlerini analiz etmek ve bu sürecin fotoğraflarını çekmek için yüksek hızlı kameralara ihtiyaç duyulmaktadır. Eylemin hızı ve böyle bir denemenin uygulanmasındaki maliyet nedeniyle, fotoğraflama sistemi çok güvenilir ve doğru olmalıdır. Düzgün çalışmasını sağlamak ve çekilen fotoğrafların kaliteli olması için kameraların hızlandırıcının etrafına dairesel $Con/k/n:G$ olacak şekilde yerleştirilmiş kamera sisteminin kullanılması gerekmektedir. Hızlandırıcının etrafına bir dizi $n$ kamera yerleştirilmiştir ve yalnızca en az $k$ ardıl kamera düzgün çalışıyorsa fotoğraf sistemi düzgün çalışabilir. Burada ilgilenilen sorun fotoğraflamanın güvenilirliğinin hesaplanmasıdır.(Kuo, W., ve M., J., Zuo, 2003:327). Şekil 5.4'de hızlandırıcının çevresine yerleştirilmiş $n$ adet kamera sistemi görülmektedir.

Ele aldığımız bu örnek modelimizin uygulamasını $n = 20$ ve $k = 4$ değerleri için yapacağız. $p$'nin hem büyük değerlerinde hem de küçük değerlerinde yaklaşımlarımızın nasıl çalıştıklarını görebilmek için hem $0 < p < 1$ değerleri için hem de $0 < p < 0.1$ değerleri için inceledik ve elde edilen sonuçlar aşağıdaki grafikler ile verildi.




**Şekil 5.5.** LCG1 ve UCG1 ile $R_{CG}$'nin karşılaştırılması



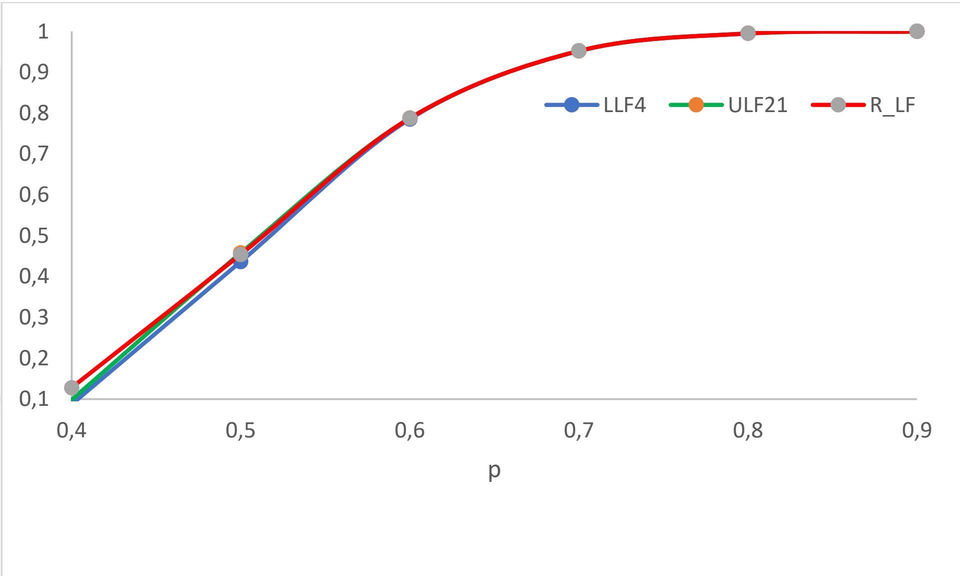

**Şekil 5.6.** $p$ yeterince küçük olduğunda LCG1 ve UCG1 ile $R_{CG}$'nin karşılaştırılması

Şekil 5.5'de özellikle $0 < p < 0.2$ ve $p > 0.8$ değerleri için LCG1 ve UCG1'in güvenilirlik ile yakın sonuçlar vermektedir. Şekil 5.6'da ise $p$ değeri 0.1'e yaklaştıkça LCG1 güvenilirlikten uzaklaşmaktadır. UCG1 ise güvenilirliğe daha yakın sonuçlar verdiği görülmektedir.

### 5.3. Doğrusal $Con/k/n : F$ Sistem İçin Lityum-iyon Polimer Elektrik Batarya Sistemi

Sanayileşmenin ve şehirleşmenin artmasıyla atmosferde oluşan karbon birikimi de artmaya başlamıştır. Bu artışın en önemli sebeplerinden biri de taşıtlardan çıkan egzoz gazının atmosferde birikmesidir. Bu amaçla taşıtlar için kullanılan yakıtın çevreye daha faydalı bir enerji şekline dönüştürülmesi fikri doğmuştur. Bu şekilde toplumu daha çevre dostu hale getirmek için öncelikle elektrikli otobüslerin faaliyete geçmesi gerekmektedir(Kuo, W., ve X., Zhu, 2012:7). Malatya Belediyesi, 2015 yılından itibaren 22 adet elektrikli otobüs devreye sokmuştur. Bu şekilde dizel motorlu araçlara kıyasla %75 oranında tasarruf sağlayarak hem çevre dostu olmuştur hem de 5 yıl gibi bir sürede maliyetini çıkarmıştır(https://www.motas.com.tr/hizmet/trambus-1.html, 25.05.2020). Elektrikli araçlar, uzun süre dayanması gereken güçlü lityum-iyon pillere bağımlıdır ve otobüslerin hatasız ve sürekli çalışmasını sağlamak için şarj istasyonunda yalnızca tam olarak şarj edilmiş pillerle değiştirilir. Normalde, bir kutu pil hücresi, seri olarak 100'den fazla pil biriminden oluşur ve tipik olarak her birimin beklenen ömrü 5–7 yıldır. Böyle bir sistemde, 4 veya 5'ten fazla ünite arızalanırsa pil hücresinin gücü önemli ölçüde azalır ve sistem hata verir. Her birimin önem ölçümleri, hücre içindeki birimlerin konumlarına ve koşullarına bağlı olarak açıkça farklıdır. Bu sistem tipik olarak $n$'den ardıl $k$ çıkışlı hatalı sistem olarak modellenebilir(Kuo, W., ve X., Zhu, 2012:7).

Bu örnek model uygulamasını $n = 100$ ve $k = 6$ değerleri için hesaplayacağız. 4.bölümde elde ettiğimiz sonuçlardan önerilen sınır yaklaşımlarından en iyi sonuçları veren LLF4 ve ULF21 önce $p \geq 0.4$ değerleri için elde edilen sonuçları grafik ile verilecektir.



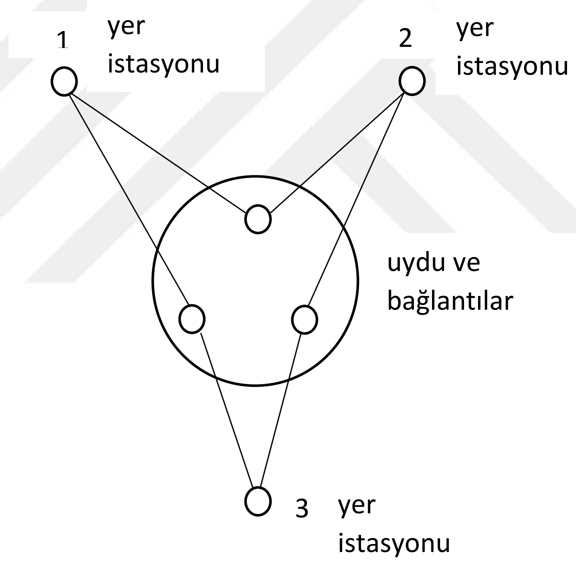

**Şekil 5.7.** LLF4 ve ULF21 ile $R_{LF}$'nin karşılaştırılması

Şekil 5.7'den LLF4 ve ULF21'in $p > 0.6$ değerleri için güvenilirlikle aynı değerleri aldığı görülmektedir. Ayrıca $p > 0.9$ değerleri için ise sınır yaklaşımlarının 1'e yakın değerler aldığı gözlenmektedir.

### 5.4. Dairesel $Con/k/n: F$ Sistem İçin Uydu Haberleşme Sistemi Uygulaması

Bir uydu temel olarak, Dünya'dan sinyal alma ve bu sinyalleri bir aktarıcı (entegre bir alıcı ve radyo sinyallerinin vericisi) kullanarak geri iletme özelliğine sahip bağımsız bir iletişim sistemidir. Bir uydu, fırlatma sırasında saatte 28100 km (17.500 mil) yörünge hızına kadar hızlanma şokuna ve öngörülen çalışma ömrü için radyasyona ve aşırı sıcaklıklara maruz kalabileceği kötü bir uzay ortamına 20 yıla kadar dayanmalıdır. Buna ek olarak, bir uydu fırlatma maliyeti oldukça pahalı ve ağırlığa dayalı olduğu için uydular hafif olmalıdır. Bu zorlukları karşılamak için uydular küçük olmalı, hafif ve dayanıklı malzemelerden yapılmış olmalıdır. Bakım veya onarım beklentisi olmaksızın, uzay boşluğunda yüzde 99,9'dan fazla yüksek güvenilirlikte çalışmalıdırlar (https://www.britannica.com/technology/satellite-communication/How-satellites-work, 25.05.2020).

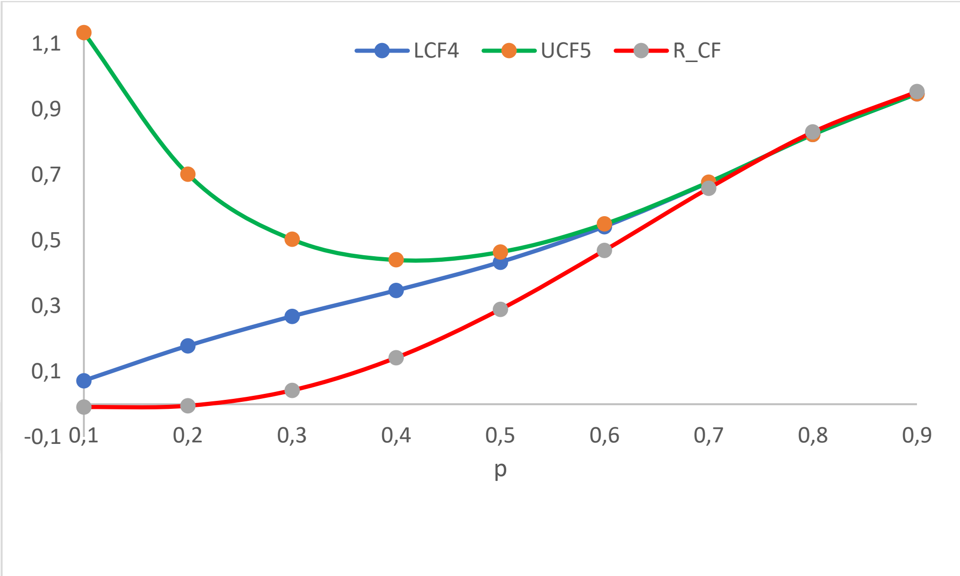
Farz edelim ki basit bir dairesel iletişim sisteminden oluşan bir uyduda üç konektör ve üç tane de yer iletişim istasyonu olsun. Her yer iletişim istasyonu uydudaki iki konektörle kaplıdır ve her konektör de iki yer iletişim istasyonuna bağlıdır. Şekil 5.8'deki gibi.



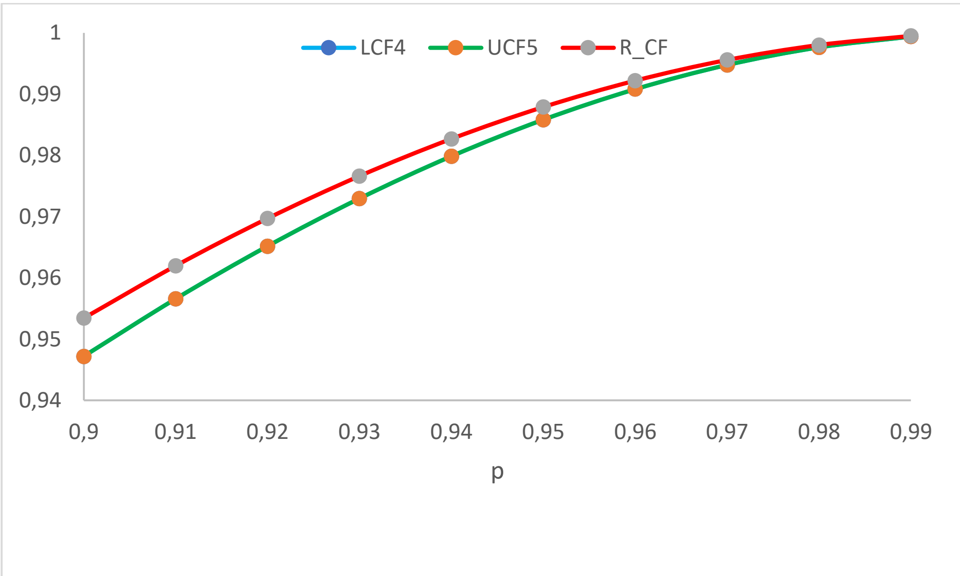

**Şekil 5.8.** Uydu iletişim sistemi(Chang vd., 2000:170)

İletişim bağlantılarının (uydu ve yer alıcı ekipmanları dahil) güvenilirlikleri eşit ve $p$'dir. İletişim sistem güvenilirliği, hiçbir yer istasyonunun ve konektörlerin kesilmeme olasılığıdır. Bu durumda sistemin hatalı olması için altı bağlantılı döngüdeki iki ardıl bağlantının hatalı olması ile mümkündür.

Bu son örnek modelimizin uygulamasını $n = 6$ ve $k = 2$ için yapacağız. 4.bölümde alt ve üst sınır yaklaşımlarından en iyi sonuçları verenler LCF4 ve UCF5'dir. $p$'nin hem büyük değerlerinde hem de küçük değerlerinde yaklaşımlarımızın nasıl çalıştıklarını görebilmek için hem $0 < p < 1$ değerleri için hem de $0.90 < p < 0.99$ değerleri için inceledik ve elde edilen sonuçlar aşağıdaki grafikler ile verildi.




**Şekil 5.9.** LCF4 ve UCF5 ile $R_{CF}$'nin karşılaştırılması




**Şekil 5.10.** $p$ yeterince büyük olduğunda LCF4 ve UCF5 ile $R_{CF}$'nin karşılaştırılması

Şekil 5.9'daki grafik incelendiğinde, LCF4 ve UCF5 için $p$'nin değeri arttıkça özellikle $p > 0.7$ değerinden sonra tam güvenilirliğe yakın değerler aldığı görülmektedir. Şekil 5.10'da ise LCF4 ve UCF5 değerleri $p$'nin büyük değerlerinde aynı yaklaşımı verdiklerini söyleyebiliriz. Güvenilirlikle uyum içinde olduğunu söylemekle birlikte $p$'nin değeri 1'e yaklaştıkça çakıştıkları görülmüştür.

# KAYNAKÇA


Akiba, T., Nakamura, T., Xiao, X., & Yamamoto, H. (2019). Evaluation Methods for Reliability of Consecutive-k Systems. M. Ram, & T. Dohi içinde, *Systems Engineering: Reliability Analysis Using k-out-of-n Structures* (s. 1-25). New York: CRC Press.

Antonopoulou, I., & Papastavridis, S. (1987). Fast Recursive Algorithm to Evaluate the Reliability of a Circular Consecutive-k-out-of-n:F System. *IEEE Transactions on Reliability*, 83-84.

Aven, T., & Jensen, U. (1999). *Stochastic Models in Reliability*. New York: Springer.

Barbour, A. D., Chrysaphinou, O., & Ross, M. (1995). Compound Poisson Approximation in Reliability Theory. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, 398-402.

Bollinger, R. C. (1982). Direct Computation for Consecutive-k-out-of-n:F Systems. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, 444-446.

Bollinger, R. C. (1985). Strict Consecutive-k-out-of-n:F Systems. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, 50-52.

Bollinger, R. C. (1986). An Algorithm for Direct Computation in Consecutive-k-out-of-n:F Systems. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, 611-612.

Bollinger, R. C., & Salvia, A. A. (1982). Consecutive-k-out-of-n:F Networks. *IEEE TRANSACTION ON RELIABILITY*, 53-56.

Bollinger, R. C., & Salvia, A. A. (1985). Consecutive-k-out-of-n:F System With Sequential Failures. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, 43-45.

Chan, F.-Y., Chan, L. K., & Lin, G. D. (1988). On consecutive-k-out-of-n:F systems. *European Journal of Operational Research*, 207-216.

Chang, J. C., & Hwang, F. K. (2003). *Reliabilities of consecutive-k systems.* London: Springer.

Chao, M. T., & Lin, G. D. (1984). Economical Design of Large Consecutive-k-out-of-n:F Systems. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, 411-413.

Chao, M. T., Fu, J. C., & Koutras, M. V. (1995). Survey of Reliability Studies of Consecutive-k-out-of-n:F & Related Systems. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, 120-127.

Chiang, D. T., & Niu, S.-C. (1981). Reliability of Consecutive-k-out-of-n:F System. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, 87-89.

Chrysaphinou, O., & Papastavridis, S. (1990). Reliability of a Consecutive-k-out-of-n System in a Random Environment. *Journal of Applied Probability*, 452-458.

Cluzeau, T., Keller, J., & Schneeweiss, W. (2008). An efficient algorithm for computing the reliability of consecutive-k-out-of-n:F systems. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, 84-87.

Dauş, L., & Beiu, V. (2015). Lower and Upper Reliability Bounds for Consecutive-k-out-of-n:F Systems. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, 1128-1135.

Demiralp, A. (2013). Parabolik Denklemler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları. Malatya, Türkiye: İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Derman, C., Lieberman, G. J., & Ross, S. M. (1982). On the Consecutive-k-out-of-n:F System. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, 57-63.

*energy.gov*. (2020, Mayıs 25). energy.gov: https://www.energy.gov/articles/how-particle-accelerators-work adresinden alındı

Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* New York: Wiley.

Fu, J. C. (1985). Reliability of a Large Consecutive-k-out-of-n:F System. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, 127-130.

Fu, J. C. (1986). Bounds for Reliability of Large Consecutive-k-out-of-n:F Systems with Unequal Component Reliability. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, 316-319.

Goulden, I. P. (1987). Generating functions and reliabilities for consecutive k-out-of-n:F systems. *Utilitas Mathematic*, 141-147.

Gökdere, G., Gürcan, M., & Kılıç, M. B. (2016). A New Method for Computing the Reliability of Consecutive k-out-of-n:F Systems. *Open Phys.*, 166-170.

Griffith, W. S., & Govindarajulu, Z. (1985). Consecutive-k-out-of-n failure systems: Reliability and availability, component importance and multistate extensions. *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, 125-160.

Hwang, F. K. (1982). Fast Solutions for Consecutive-k-out-of-n: F System. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, 447-448.

Hwang, F. K. (1986). Simplified reliabilities for consecutive-k-out-of-n:F systems. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 258-264.

Hwang, F. K. (1989). Invariant permutations for consecutive-k-out-of-n cycles. *IEEE Transactions on Reliability*, 65-67.

Kan, C. (2015, June). Signatured-based Reliability Analysis of Systems. İzmir, Türkiye: Izmir University of Economics.

Kontoleon, J. M. (1980). Reliability determination of a r-succesive-out-of-n:F system. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, 437.

Kuo, W., & Zhu, X. (2012). *Importance Measures in Reliability, Risk and Optimization: Principles and Applications.* New Delhi, India: A John Wiley & Sons, Ltd.

Kuo, W., & Zuo, M. J. (2003). *Optimal Reliability Modeling: Princeples and Applications.* New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Kuo, W., Zhang, W., & Zuo, M. (1990). A Consecutive-k-out-of-n:G System: The Mirror Image of a Consecutive-k-out-of-n:F System. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, 244-253.

Lambiris, M., & Papastavridis, S. (1985). Exact Reliability Formulas for Linear & Circular Consecutive-k-out-of-n:F Systems. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, 124-126.

Makri, F. S., & Psillakis, Z. M. (2011). On success runs of a fixed length in Bernoulli sequences: Exact and asymptotic results. *Computational Mathematics Appl.*, 761-772.

*Motaş*. (2020, Mayıs 25). Motaş: https://www.motas.com.tr/hizmet/trambus-1.html adresinden alındı

Muselli, M. (1997). On Convergence Properties of pocket Algorithm. *IEEE TRANSACTIONS ON NEURAL NETWORKS*, 623-629.

Muselli, M. (2000). New Improved Bounds For Reliability of Consecutive-k-out-of-n:F Systems. *Journal of Applied Probability*, 1164-1170.

Muselli, M. (2000). Useful Inequalities for the Longest Run Distribution. *Statistics & Probability Letters*, 239-249.

Papastavridis, S. (1986). Algorithms for strict consecutive-k-out-of-n:F systems. *IEEE Trans. Reliability*, 613-615.

Papastavridis, S. (1986). Upper and Lower Bounds for the Reliability of a Consecutive-k-out-of-n:F System. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, 607-610.

Papastavridis, S. G., & Koutras, M. V. (1993). Bounds for Reliability of Consecutive k-within-m-out-of-n:F Systems. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, 156-160.

Peköz, E. A., & Ross, S. M. (1995). A Simple Derivation of Exact Reliability Formulas For Linear and Circular Consecutive-k-out-of-n:F Systems. *J. Appl. Prob.*, 554-557.

Rausand, M., & Hoyland, A. (2004). *System Reliability Theory: Models, Statistical Methods and Applications.* New Jersey: A John Wiley & Sons, Inc., Publication.

Saenz-de-Cabezon, E., & Wynn, H. P. (2011). Computational algebraic algorithms for the reliability of generalized k-out-of-n and related systems. *Math. Comput. Simul.*, 68-78.

Salvia, A. A. (1982). Simple Inequalities for Consecutive-k-out-of-n:F Networks. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, 450.

Shanthikumar, J. G. (1982). Recursive Algorithm to Evaluate the Reliability of a Consecutive-k-out-of-n: F System. *IEEE Transactions on Reliability*, 442-443.

Tong, Y. L. (1985). A Rearrangement Inequality For The Longest Run ,With an Application to Network Reliability. *Journal of Applied Probability*, 386-393.

*www.britannica.com*. (2020, Mayıs 25). Encyclopedia Britannica: https://www.britannica.com/technology/satellite-communication/How-satellites-work adresinden alındı

Xie, M., & Lai, C. D. (1998). On Reliability Bounds via Conditional Inequalities. *Journal of Applied Probability*, 104-114.

Zhang, W. (1988). Theory and analysis of consecutive-k-out-of-n:G systems reliability. Ames, Iowa, USA: IOWA STATE UNIVERSITY.

Zuo, M. (1993). Reliability and Component Importance of a Consecutive-k-out-of-n System. *Microelectron Reliab.*, 243-258.