T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇİFT DİZİ VE SERİ UZAYLARI ÜZERİNE

YURDAL SEVER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2006

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İş bu tez çalışması Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan

Prof. Dr. İhsan Solak

Üye

Prof. Dr. Feyzi Başar

Üye

Doç. Dr. Hüsamettin Coşkun

ONAY

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Prof.Dr.Ali ŞAHİN
Enstitü Müdürü
……/……./2006

Özet

İki bölümden oluşan bu çalışmada; çift dizilerin $\mathcal{L}_p$ uzayı inşa edildi ve bu uzayın bazı özellikleri incelendi.

Birinci bölümde; ikinci bölümde kullanacağımız bazı temel tanımlar ve teoremler verildi. Ayrıca çift diziler ve serilerle ilgili daha önce yapılan çalışmalarda elde edilmiş sonuçlar ifade edildi.

İkinci bölümde; çift dizilerin $\mathcal{L}_p$ uzayı tanımlanarak, bu uzayın Banach uzayı olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, diğer uzaylarla arasındaki kapsama bağıntıları araştırıldı ve bu uzayın solid olduğu gösterilerek $\alpha-, \beta(\upsilon)-$ ve $\gamma-$ dualleri hesaplanmıştır.

Abstract

In this study, which consists of two parts, $\mathcal{L}_p$ spaces of double sequence spaces was constructed and some properties of this sequence space were investigated.

The present thesis is organized as follows:

In the first part, some basic definition and theorems which used in the second part were given. Also, The results obtained in the previous studies concerning double sequences were stated.

In the second part, we have defined the $\mathcal{L}_p$ spaces of double sequences. Then some inclusion relations were given. Thus $\alpha-$, $\beta(v)-$ and $\gamma-$ duals of space were calculated.

Teşekkür

Bu tez konusunu bana veren ve tamamlanıncaya kadar, sabırla çalışmalarımın her safhasında yakın alâka ve emeğini gördüğüm hocam; sayın Prof. Dr. Feyzi BAŞAR'a minnet ve şükranlarımı sunarım. Konunun ihtiyaç duyduğum kısımlarında kendileriyle fikir teatisinde bulunduğum Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı öğretim üyesi Doç. Dr. Bilâl ALTAY'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Yurdal SEVER

İçindekiler

Gösterimler

$\mathbb{R}$: Reel sayılar cümlesi

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar cümlesi

$\mathbb{C}$: Kompleks sayılar cümlesi

Ω: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı bütün çift dizilerin uzayı

$\mathcal{L}_p$: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı p-mutlak toplanabilen çift dizilerin uzayı

$\mathcal{C}_p$: Pringsheim anlamında yakınsak olan bütün kompleks terimli çift diziler uzayı

$\mathcal{C}_r$: Regüler yakınsak bütün kompleks terimli çift diziler uzayı

$\mathcal{C}_{0p}$: Pringsheim anlamında sıfıra yakınsak olan bütün kompleks terimli çift diziler uzayı

$\mathcal{M}_u$: Kompleks terimli sınırlı çift dizilerin uzayı

$\mathcal{C}_{bp}$: Sınırlı ve Pringsheim anlamında yakınsak çift dizilerin uzayı

$\mathcal{C}_{0bp}$: Sınırlı ve Pringsheim anlamında sıfıra yakınsak çift dizilerin uzayı

$\mathcal{BS}$: Kısmî toplamları sınırlı olan bütün kompleks terimli çift seriler uzayı

$\mathcal{CS}_p$: Kısmî toplamları Pringsheim anlamında yakınsak olan bütün kompleks terimli seriler uzayı

$\mathcal{CS}_r$: Kısmî toplamları regüler yakınsak olan bütün kompleks terimli seriler uzayı

$\upsilon-\lim$: Çift dizinin υ-yakınsaklığa göre limiti

υ-yakınsak: υ anlamında yakınsaklık

X^{α}: X dizi uzayının α-duali

$X^{\beta(\upsilon)}$: X dizi uzayının $\beta(\upsilon)$-duali

X^{γ}: X dizi uzayının γ-duali

$\sum_{k,l}^{s,t} x_{kl} : \sum_{k=0}^{s} \sum_{l=0}^{t} x_{kl}$

$\sum_{k,l} x_{kl} : \sum_{k,l=0}^{\infty,\infty} x_{kl}$

$\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$: Terimleri 0 ve 1 sayılarından oluşan dizilerin cümlesi

Giriş

Çift dizilerde, tek dizilerin aksine birden fazla yakınsaklık çeşidi tanımlanmıştır. İlk olarak Pringsheim [**13**] çift dizilerin yakınsaklığı ile ilgilendi. Daha sonra Hardy [**6**], Robison [**15**], Kojima [**9**] ve Hamilton [**5**] gibi yazarlar, çift diziler üzerindeki yakınsaklık ve bazı çift dizi uzaylarının özelliklerini inceledi. Bu uzaylar arasındaki matris sınıfları karekterizasyonunu Hamilton [**5**] verdi.

Son yıllarda çift diziler üzerinde çalışmalar yoğunlaşmaktadır. Jardas ve Sarapa [**8**] iki tek dizinin koordinatsal çarpımı şeklinde ifade edilebilen çift diziler üzerinde çalışmıştır. Moricz [**4**], tek indisli c ve c_0 dizi uzaylarına karşılık gelen Pringsheim ve regüler anlamında yakınsak ve sıfıra yakınsak çift dizilerin $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{0p}$ ve $\mathcal{C}_r$ uzaylarının bazı özelliklerini inceledi. Hill [**7**], fonksiyonel analiz metodunu çift dizilere uyguladı.

Türkmenoğlu [**16**], $t = (t_{mn})$ pozitif reel sayıların bir dizisi olmak üzere, bazı çift dizi uzayları tanımlayarak, bu uzayların özelliklerini ve duallerini inceledi.

Boos, Leiger ve Zeller [**3**] çift dizilerde e-, be- ve c-yakınsaklığı tanımladı ve SM metodunu kullanarak bu yakınsaklık çeşitlerinin bazı topolojik özelliklerini verdi.

Zeltser [**17**] tezinde, Boos, Leiger ve Zeller tarafından verilen e-, be- ve c-yakınsak çift dizi uzaylarının taşıdığı bazı özellikleri inceledi. Ayrıca, çift dizilerde bir A metodunun e-, be- ve c- etki alanlarının yapısını verdi.

Altay [**1**]; kısmî toplamları sınırlı, Pringsheim ve regüler yakınsak seri oluşturan çift dizilerin ve sınırlı salınımlı çift dizilerin uzaylarını inşa ederek, bu uzaylar ile ilgili bazı özellikleri inceledi.

Bu çalışmada; çift dizilerin $\mathcal{L}_p$ uzayını inşa ederek, bu uzayın bazı özelliklerini inceledik, $\alpha-, \beta(\upsilon)-$ ve $\gamma-$ duallerini hesapladık.

BÖLÜM 1

Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde; çalışmamızda kullanılan tanım, teorem ve eşitsizlikleri vereceğiz.

1.1. Lineer Uzay

TANIM 1.1.1. X, boş olmayan bir cümle ve $\mathbb{C}$, kompleks sayılar cismi olsun. Bu durumda;

$$+ : X \times X \longrightarrow X$$

ve

$$\cdot : \mathbb{C} \times X \longrightarrow X$$

fonksiyonları, eğer her $x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için

- $L1)$ $x + y = y + x$,
- $L2)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$,
- $L3)$ $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ mevcut,
- $L4)$ $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $-x \in X$ mevcut,
- $L5)$ $1 \cdot x = x$,
- $L6)$ $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,
- $L7)$ $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,
- $L8)$ $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

şartlarını sağlarsa, X cümlesine $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir *lineer* uzay denir.

X, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve $Y \subset X$ ise, Y cümlesinin de X cümlesi üzerinde tanımlanan $+$ ve $\cdot$ işlemleri altında lineer uzay olması için her $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $y_1, y_2 \in Y$ bakımından $\lambda y_1 + y_2 \in Y$ bulunması yeterlidir.

TANIM 1.1.2. X boş olmayan bir cümle ve $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için,

$$\begin{array}{ll} M1) & d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \\ M2) & d(x,y) = d(y,x), \\ M3) & d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \end{array}$$

şartlarını sağlayan d fonksiyonuna X üzerinde bir *metrik* ve (X, d) ikilisine de bir *metrik uzay* denir.

TANIM 1.1.3. X bir lineer uzay ve $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x, y \in X$ vektörü ve $\lambda_n \in \mathbb{C}$ skaları için;

$P1)$ $g(\theta) = 0$,

$P2)$ $g(x) = g(-x)$,

$P3)$ $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$,

$P4)$ $\lambda_n \to \lambda_0$ ve $x_n \to x_0$ olması $g(\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0) \to 0$ olmasını gerektirir

şartlarını sağlıyorsa, g fonksiyonuna X üzerinde bir *paranorm* ve (X, g) ikilisine de *paranormlu uzay* denir.

TANIM 1.1.4. X bir lineer uzay ve $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $x, y \in X$ vektörü ve her λ skaları için;

$$\begin{array}{ll} YN1) & \|x\| \geq 0, \\ YN2) & \|\theta\| = 0, \\ YN3) & \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \\ YN4) & \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \end{array}$$

şartları sağlanıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *yarı-norm* ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir *yarı-normlu uzay* denir. Eğer $\|x\| = 0 \iff x = \theta$ şartı sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna bir *norm* ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de *normlu uzay* denir.

Uzayların tamlığını karakterizasyonunda kullanılan Cauchy dizi tanımı aşağıdaki gibidir.

TANIM 1.1.5. (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) de X'deki noktaların bir dizisi olsun. Bu durumda; her $\varepsilon > 0$ ve $n, m \geq n_0$ olan bütün n, m'ler için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ kalacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa o zaman "(x_n) dizisi, (X, d) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir" denir.

TANIM 1.1.6. Bir (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise, X uzayına *tam metrik uzay* denir. Eğer X uzayı üzerindeki metrik bir normdan elde edilmiş ise tam metrik uzaya *Banach uzayı* denir.

Son olarak, dual hesabında kullanacağımız, yarı normlu uzaylar arasındaki dönüşüm ailesinin düzgün sınırlılığını gösteren Düzgün sınırlılık prensibi ve Banach-Steinhaus teoremlerini verelim.

TEOREM 1.1.1. [**2**, Teorem 6.3.35, sh.290] *(X, p) ve (Y, q) yarı normlu uzay, (X, p) tam ve $\emptyset \neq \Phi \subset B(X, Y)$ olsun. Φ noktasal yakınsak ise, düzgün sınırlıdır.*

TEOREM 1.1.2. [**2**, Teorem 6.3.38, sh.290] *(X, p) tam yarı normlu uzay, (Y, q) yarı normlu uzay ve $(T_n) \subset B(X, Y)$ bir dizi olsun. Eğer (T_n) dizisi*

$$\begin{aligned} T: \quad X &\longrightarrow Y \\ x &\longrightarrow T(x) = \lim_{n \to \infty} T_n(x) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı T dönüşümüne noktasal yakınsak ise, $T \in B(X, Y)$ ve

$$||T|| \leq \lim_{n \to \infty} \inf ||T_n|| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} ||T_n|| < \infty$$

olur.

1.1.1. Bazı Eşitsizlikler. Bu kısımda, daha sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı eşitsizlikleri vereceğiz.[**10**, shf. 21-22]

(1) a ve b, herhangi iki kompleks sayı olsun. O zaman,

$$|a + b| \leq |a| + |b| \tag{1.1.1}$$

üçgen eşitsizliği geçerlidir.

(2) p ile q, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $a \geq 0, b \geq 0$ için

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{1.1.2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

(3) $a_k,\ b_k$ kompleks sayılar olsun. $0 < p < 1$ için,

$$|a_k|^p - |b_k|^p \leq |a_k + b_k|^p \leq |a_k|^p + |b_k|^p \tag{1.1.3}$$

ve $p \geq 1$ için,

$$(|a_k| + |b_k|)^p \geq |a_k|^p + |b_k|^p \tag{1.1.4}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

(4) $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda; $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$|a_k b_k| \leq |a_k|^p + |b_k|^q \tag{1.1.5}$$

eşitsizliği sağlanır.

(5) $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in \ell_p$ ve $p \geq 1$ için

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^p\right)^{1/p} \tag{1.1.6}$$

Minkowski eşitsizliği geçerlidir.

(6) p ile q, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $x = (x_n) \in \ell_p$, $y = (y_n) \in \ell_q$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q} \tag{1.1.7}$$

Hölder eşitsizliği geçerlidir.

1.2. Çift Diziler ve Yakınsaklık Çeşitleri

Tanım 1.2.1. X, boş olmayan herhangi bir cümle olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & X \\ & & (m,n) & \longrightarrow & f(m,n) = x_{mn} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna bir x terimli *çift dizi* denir. Bundan sonraki kısımlarda çift dizi yerine kısaca dizi ifadesi kullanılacaktır.

Herhangi bir $x = (x_{mn})$ çift dizisinin x_{mn} elemanlarını,

$$\begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0n} & \dots \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & \dots \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ x_{m0} & x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

şeklinde bir tablo olarak düşünebiliriz. Ω ile kompleks veya reel terimli bütün çift dizilerin cümlesini göstereceğiz. Buna göre;

$$\Omega = \{x = (x_{mn}) : \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ için } x_{mn} \in \mathbb{C}\}$$

olup bu cümle, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ve $\forall x,\, y \in \Omega$ için $\alpha x = (\alpha x_{mn})$ ve $x + y = (x_{mn} + y_{mn})$ işlemleri altında bir lineer uzaydır.

$x = (x_{mn})$ kompleks terimli bir çift dizi olmak üzere

$$\sup_{m,n \geq 0} |x_{mn}| < \infty$$

oluyorsa, x dizisine *sınırlıdır* denir. Bütün sınırlı çift dizilerin cümlesini $\mathcal{M}_u$ ile göstereceğiz. Buna göre;

$$\mathcal{M}_u = \left\{ x = (x_{mn}) \in \Omega \, : \, ||x||_\infty = \sup_{m,n \in \mathbb{N}} |x_{mn}| < \infty \right\}$$

şeklinde olup, bu uzay $|| \cdot ||_\infty$ normu ile, Banach uzayı teşkil eder.

Tek dizilerdeki durumun tersine, çift dizilerde birden fazla yakınsaklık kavramı mevcuttur. Bunlardan en çok çalışılanlar Pringsheim ve regüler yakınsaklıktır. Diğer yakınsaklık çeşitleri de, meselâ; SM metoduyla bağlantalı olarak, $c-$, $be-$ ve $e-$ yakınsaklık Przysyblski [**12**] ve Boos, Leiger ve Zeller[**3**] tarafından, çalışılmıştır.

Öncelikle bahsettiğimiz altı çeşit yakınsaklığın tanımlarını verelim.

Reel yada kompleks terimli bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi eğer verilen $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > N$ olduğunda

$$|x_{mn} - l| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı bulunabiliyorsa, $x = (x_{mn})$ dizisi, $l \in \mathbb{C}$ sayısına *Pringsheim anlamında yakınsak* ve l değerine de x dizisinin *Pringsheim limiti* denir. Pringsheim anlamında yakınsak bir $x = (x_{mn})$ dizisine kısaca p-yakınsak dizi diyeceğiz ve limitini de $p - \lim x_{mn} = l$ ile göstereceğiz. Pringsheim anlamında yakınsak dizilerin cümlesi, $\mathcal{C}_p$ ile gösterilir. $\mathcal{C}_p$ cümlesi,

$$\mathcal{C}_p = \{x = (x_{mn}) \in \Omega \mid \exists p_x \in \mathbb{C}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall m, n \geq k \ni |x_{mn} - p_x| < \varepsilon\}$$

biçiminde ifade edilebilir. $\mathcal{C}_p$ cümlesi, çift dizilerin koordinatsal toplama ve skalarla çarpma işlemleri altında lineer uzay olup,

$$||x||_{\mathcal{C}_p} = \lim_{N\to\infty} \sup_{m,n\geq N} |x_{mn}|$$

ile bir tam yarınormlu uzay teşkil ettiği Moricz [**4**] tarafından gösterildi.

Pringsheim anlamında yakınsak bir çift dizi, sınırlı olmak zorunda değildir. Pringsheim anlamında l noktasına yakınsak olmasına ilâve olarak $\sup_{m,n} |x_{mn}| < \infty$ oluyorsa x dizisine, l noktasına Pringsheim anlamında *sınırlı yakınsak dizi* denir. Bu şekildeki dizilerin cümlesini $\mathcal{C}_{bp}$ ile göstereceğiz. Buna göre;

$$\mathcal{C}_{bp} = \left\{x = (x_{mn}) \in \mathcal{C}_p \mid ||x||_\infty = \sup_{m,n\geq 0} |x_{mn}| < \infty\right\} = \mathcal{C}_p \cap \mathcal{M}_u$$

olarak tanımlanmaktadır. Bu uzayın da $|| \cdot ||_\infty$ normu ile bir Banach uzayı teşkil ettiği Moricz [**4**] tarafından gösterilmiştir.

Hardy [**6**]; regüler yakınsaklığı aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

Pringsheim anlamında l noktasına yakınsak olmasına ilâve olarak her $n \in \mathbb{N}$ için $\lim_m x_{mn}$ ve her $m \in \mathbb{N}$ için $\lim_n x_{mn}$ limitleri mevcut olan $x = (x_{mn})$ dizisine, "l noktasına regüler yakınsaktır (kısaca, l' ye $r-$yakınsak)" denir. Regüler yakınsak bir $x = (x_{mn})$ dizisi için $\lim_n \lim_m x_{mn}$ ve $\lim_m \lim_n x_{mn}$ limitleri mevcut ve Pringsheim limitine eşittirler. Regüler yakınsak dizilerin $\mathcal{C}_r$ cümlesi,

$$\mathcal{C}_r = \left\{x = (x_{mn}) \in \mathcal{C}_p \mid (x_{mn})_m, (x_{mn})_n \in c, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}\right\}$$

olarak tanımlanabilir. Burada c ile yakınsak tek dizilerin uzayı ve $(x_{mn})_n \in c$ ile m indisine göre yakınsaklığı göstermektedir. Regüler yakınsaklık kavramında, yakınsak her çift dizinin sınırlı olduğu kolaylıkla görülür.

$\mathcal{C}_r$ ve $\mathcal{C}_{0r}$ (sıfıra $r-$yakınsak dizilerin uzayı) cümlelerinin $||\cdot||_\infty$ normu ile Banach uzayı teşkil ettiği Moricz tarafından gösterildi.

Boos, Leiger ve Zeller [**3**], Pringsheim anlamında yakınsaklıktan daha zayıf olan çift dizilerin l' ye e-yakınsaklığını,

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0\, \exists m_0 \in \mathbb{N} :\ m \geq m_0 \Rightarrow |x_{mn} - l| \leq \varepsilon$$

şeklinde tanımladı. e-yakınsak bir $x = (x_{mn})$ dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $\sup_m |x_{mn}|$ değeri sonlu ve $\lim_m x_{mn}$ mevcut ise x dizisine sırasıyla *be-yakınsak* ve *c-yakınsak* denir. Açık olarak $be-$ ve $c-$yakınsaklık sırayla $bp-$ ve $r-$yakınsaklığın genelleştirmesidir. c-yakınsak bir $x = (x_{mn})$ dizisi için $\lim_n \lim_m x_{mn}$ mevcut ve e- limitine eşittir. Buna göre; e-yakınsak dizilerin $\mathcal{C}_e$ cümlesi,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_e = \Big\{x = (x_{mn}) \in \Omega \quad | \quad & \exists a_x \in \mathbb{C},\, \forall\varepsilon > 0 \text{ için } \exists n_0 \in \mathbb{N},\, \forall n \geq n_0, \\ & \exists m_n \in \mathbb{N},\ \forall m \geq m_n \text{ için } |x_{mn} - a_x| < \varepsilon\Big\}\end{aligned}$$

şeklindedir.

$\mathcal{C}_p$ uzayının topolojisi Boos, Leiger ve Zeller [**3**] tarafından verildi. Boos, Leiger ve Zeller [**3**] tarafından tanımlanan $e-, be-$ ve $c-$ yakınsak dizilerin topolojik özellikleri, Zeltser [**17**] tarafından doktora çalışması olarak incelendi. Bazı tek dizi uzaylarından çift dizi uzaylarına, çift dizi uzaylarından tek dizi uzaylarına matris dönüşümleri ile çift dizi uzayları arasındaki matris dönüşümlerinin karekterizasyonunu verdi.

υ herhangi bir yakınsaklık kavramını göstermek üzere, υ-yakınsak bütün dizilerin cümlesi $\mathcal{C}_\upsilon$ ile ve $x \in \mathcal{C}_\upsilon$ dizisinin limiti de $\upsilon - \lim x$ ile gösterildi. Sıfıra υ-yakınsak olan dizilerin cümlesini de $\mathcal{C}_{0\upsilon}$ ile gösterildi.

Genel olarak, bir çift dizinin sınırlılığı düzgün sınırlılık, yani $sup_{m,n}|x_{mn}|$'nin sonlu bulunması anlamındadır. Bu $r-$ ve $bp-$yakınsaklık için tabii bir sınırlılık tanımıdır.

Yukarıda tanımlanan yakınsaklık çeşitlerinin kendilerine özgü sınırlılık tanımları aşağıda verilmektedir.

Tanım 1.2.2. [**17**, sh. 33] $x = (x_{mn})$ çift dizisi;

(1) Eğer $\overline{\lim}_{\mathbb{N}} \sup_{m,n\geq N} |x_{mn}| < \infty$ ise, *p-sınırlıdır.*

(2) Eğer $\overline{\lim}_{n}\ \overline{\lim}_{m} |x_{mn}| < \infty$ ise, *e-sınırlıdır.*

(3) Eğer $\sup_{n} \overline{\lim}_{m} |x_{mn}| < \infty$ ise, *be-sınırlıdır.*

(4) Eğer $\sup_{n} |\lim_{m} x_{mn}| < \infty$ ise, *c-sınırlıdır.*

Tanım 1.2.3. Eğer verilen $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n, p, q > N$ olduğunda

$$|x_{mn} - x_{pq}| < \varepsilon$$

kalacak şekilde bir N doğal sayısı varsa o zaman $x = (x_{mn})$ kompleks terimli dizisine bir p-Cauchy dizisi denir.

Teorem 1.2.1. *Kompleks terimli bir $x = (x_{mn})$ dizisinin p-yakınsak olması için gerek ve yeter şart bir p-Cauchy dizisi olmasıdır.*

Tanım 1.2.4. $x = (x_{kl})$ reel sayıların bir çift dizisi ve

$$\alpha_n(x) = \sup_{k,l\geq n} x_{kl} \quad \text{ve} \quad \beta_n(x) = \inf_{k,l\geq n} x_{kl}$$

olsun. Bu durumda; en az bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı için $\alpha_n(x) < \infty$ ve $\beta_n(x) > -\infty$ ise $x = (x_{kl})$ dizisi Pringsheim anlamında bir üst ve alt limite sahiptir. Buna göre; bir $x = (x_{kl})$ dizisinin Pringsheim alt limiti,

i) Eğer her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n(x) = -\infty$ ise

$$p - \liminf x = -\infty,$$

ii) Eğer bazı $n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n(x) > -\infty$ ise

$$p - \liminf x = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k,l\geq n} x_{kl} \right) = \sup_{n} \beta_n(x)$$

ve Pringsheim üst limiti

i)Eğer her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n(x) = +\infty$ ise

$$p - \limsup x = +\infty,$$

ii) Eğer bazı $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n(x) < +\infty$ ise

$$p - \limsup x = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k,l\geq n} x_{kl} \right) = \inf_n \alpha_n(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Aşağıda vereceğimiz örnek, bir çift dizinin alttan ve üstten sınırsız olmasına rağmen, Pringsheim üst ve alt limitlerinin varlığını göstermektedir.

Örnek 1.2.1. $x = (x_{kl})$ çift dizisi; $k, l \in \mathbb{N}$ için

$$x_{kl} = \begin{cases} k & , \quad (l = 1) \\ -l & , \quad (k = 1) \\ (-1)^k & , \quad (k = l > 1) \\ 0 & , \quad (\text{diğer hâllerde}) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, $\sup x_{kl} = +\infty$ ve $\inf x_{kl} = -\infty$ olduğu hâlde, $n \geq 2$ için $\alpha_n(x) = 1$ ve $\beta_n(x) = -1$ bulunduğundan

$$p - \liminf x = -1 \quad \text{ve} \quad p - \limsup x = 1$$

olur.

Teorem 1.2.2. *(i)* $\lim_{N\to\infty}(\sup_{m,n\geq N} x_{mn}) = L$ *olması için gerek ve yeter şart verilen her* $\varepsilon > 0$ *için*

(a) Yeteri kadar büyük her $m, n \geq N$ *için* $x_{mn} < L + \varepsilon$ *ve*

(b) Sonsuz çoklukta (m, n) *için* $x_{mn} > L + \varepsilon$ *olmasıdır.*

(ii) $\lim_{N\to\infty}(\inf_{m,n\geq N} x_{mn}) = K$ *olması için gerek ve yeter şart verilen her* $\varepsilon > 0$ *için*

(a) Yeteri kadar büyük her $m, n \geq N$ *için* $x_{mn} > K + \varepsilon$ *ve*

(b) Sonsuz çoklukta (m, n) *için* $x_{mn} < K + \varepsilon$ *olmasıdır.*

Tanım 1.2.5.

$$\begin{aligned} f \quad : \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad &\longrightarrow \quad X \\ (m, n) \quad &\longrightarrow \quad f(m, n) = x_{mn} \end{aligned}$$

dizisi verilmiş olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} i:\mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ m &\to i(m)=i_m \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} j:\mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\to j(n)=j_n \end{aligned}$$

artan fonksiyonlar (diziler) olmak üzere

$$\begin{aligned} h \;:\; \mathbb{N}\times\mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ (m,n) &\longrightarrow h(m,n)=(i_m,j_n) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} f\circ h \;:\; \mathbb{N}\times\mathbb{N} &\longrightarrow X \\ (m,n) &\longrightarrow f\circ h(m,n)=x_{i_m j_n} \end{aligned}$$

bileşke fonksiyonuna, "(x_{mn}) dizisinin bir alt dizisi" denir.

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ cümlesinin sonsuz çoklukta $(i_m j_n)$ dizisi bulunabileceğinden, bir (x_{mn}) dizisinin sonsuz çoklukta alt dizisi vardır. Bir anlamda alt diziyi, orjinal diziden satır ve sütunlar atmakla elde ediyoruz. $(x_{i_m j_n})$ alt dizisinin her teriminin (x_{mn}) dizisinin bir terimi olduğu açıktır.

TEOREM 1.2.3. *Yakınsak bir dizinin her alt dizisi yakınsaktır.*

TEOREM 1.2.4. *$x=(x_{kl})$ reel değerli bir çift dizi olsun. Bu durumda dizinin p-limitleri arasında aşağıdaki ilişkiler mevcuttur:*

(1) $\liminf x \leq \limsup x$,

(2) $p-\lim x = L \quad \Longleftrightarrow \quad \liminf x = L = \limsup x$,

(3) $\limsup(-x) = -\liminf x$,

(4) $\limsup(x+y) \leq \limsup x + \limsup y$,

(5) $\liminf(x+y) \geq \liminf x + \liminf y$,

(6) Eğer z, x çift dizisinin bir alt dizisi ise

$$\liminf x \leq \liminf z \leq \limsup z \leq \limsup x.$$

TANIM 1.2.6. [**11**, sh. 278] $m \leq m'$ ve $n \leq n'$ olduğunda $s_{mn} \leq s_{m'n'}$ oluyorsa (s_{mn}) dizisine *monoton artan*, $m \geq m'$ ve $n \geq n'$ olduğunda $s_{mn} \leq s_{m'n'}$ oluyorsa (s_{mn}) dizisine *monoton azalan* dizi denir.

Monoton çift diziler hakkındaki teoremler, monoton tek diziler hakkındaki teoremlerle aynı yapıya sahiptir.

TEOREM 1.2.5. *Artan bir çift dizi üstten sınırlı ise limiti supremumuna, azalan bir çift dizi alttan sınırlı ise limiti infimumuna eşittir.*

Genel olarak gözönüne alınan çift dizi uzayları,

$$e_{ij}^{kl} = \begin{cases} 1 & , \quad ((k,l) = (i,j)) \\ 0 & , \quad (\text{diğer durumlarda}) \end{cases}$$

olarak tanımlanan e^{kl} dizilerinin gerdiği Φ uzayını kapsarlar.

Her $x = (x_{kl})$ çift dizisi için, dizinin m, n. kısmı

$$x^{[m,n]} := \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} x_{kl} e^{kl} \quad ; \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlanır.

1.3. Çift Seriler

Bu kısımda; çift seriler ile ilgili kavramlar tanıtılarak, çift serilerle ilgili bazı teoremler verilecektir.

TANIM 1.3.1. $x = (x_{mn})$ çift dizisi verilmiş olsun. Şimdi,

$$s_{mn} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij} \quad ; \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlanan (s_{mn}) dizisini gözönüne alalım. Bu durumda; $((x_{mn}), (s_{mn}))$ ikilisine bir *çift seri* denir. x_{mn} terimine serinin *genel terimi*, (s_{mn}) dizisine de serinin *kısmî toplamlar dizisi* denir. Eğer (s_{mn}) kısmî toplamlar dizisi bir s sayısına υ-yakınsak, yani

$$\upsilon - \lim_{mn} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij} = s$$

ise "$((x_{mn}), (s_{mn}))$ serisi υ-yakınsaktır ve serinin υ-toplamı s'dir" denir. Yakınsak olmayan seriye *ıraksak seri* denir.

Genel terimi x_{mn} ve toplamı s olan yakınsak seri,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x_{mn} = s$$

şeklinde gösterilir. Seri ister yakınsak ister ıraksak olsun, genel terimi x_{mn} olan seri

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x_{mn}$$

ile gösterilir. υ-yakınsak çift seri oluşturan dizilerin uzayını $\mathcal{CS}_\upsilon$ ile göstereceğiz. Buna göre;

$$\mathcal{CS}_\upsilon = \left\{ x \in \Omega \mid \upsilon - \sum_{i,j} x_{ij} = \upsilon - \lim_{mn} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij} \text{ mevcut} \right\}$$

şeklindedir.

Teorem 1.3.1. *Yakınsak bir serinin genel teriminin limiti sıfırdır.*

Tanım 1.3.2.

$$R_{mn} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=n+1}^{\infty} x_{ij} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} x_{ij} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} x_{ij}$$

toplamına, $\sum_{i,j} x_{ij}$ *serisinin kalan kısmı* denir.

Teorem 1.3.2. *Yakınsak bir seride kalan kısmın limiti sıfırdır.*

UYARI:

$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} x_{mn}$ ve $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} x_{mn}$ serilerine *sıralı seriler* denir. Sıralı seriler, aynı toplama sahip olmak zorunda değildir. Gerçekten $x = (x_{kl})$ çift dizisi,

$$x_{mn} = \begin{cases} 1 & , \quad (m = n+1, n = 0,1,2,...) \\ -1 & , \quad (m = n-1, n = 0,1,2,...) \\ 0 & , \quad (\text{diğer durumlarda}) \end{cases}$$

için $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} x_{mn} = 1$ fakat $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} x_{mn} = -1$' dir.

TANIM 1.3.3. Eğer $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} |x_{ij}|$ serisi yakınsak ise, $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} x_{ij}$ kompleks terimli serisi *mutlak yakınsaktır* denir.

TEOREM 1.3.3. *Mutlak yakınsak bir çift seri yakınsaktır.*

TEOREM 1.3.4. *Pozitif reel terimli bir serinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart bu serinin kısmî toplamlar dizisinin sınırlı olmasıdır.*

TEOREM 1.3.5. *Reel terimli (a_{ij}) ve (b_{ij}) dizilerini gözönüne alalım. $\forall i, j \in \mathbb{N}$ için $0 \leq a_{ij} \leq b_{ij}$ ve $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} b_{ij}$ serisi yakınsak ise bu durumda $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ serisi de yakınsaktır ve*

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \leq \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} b_{ij}$$

eşitsizliği geçerlidir.

UYARI:

Yakınsak bir çift serinin kismî toplamları sınırlı olmak zorunda değildir. Gerçekten genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} 1 & , \quad (m = 1 \;\; ise) \\ -1 & , \quad (m = 2 \;\; ise) \\ 0 & , \quad (m \geq 3 \;\; ise) \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\sum x_{mn}$ serisi yakınsak fakat kısmî toplamlar dizisi sınırlı değildir.

Mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin cümlesini $\mathcal{L}_u$ ile göstereceğiz. Yani;

$$\mathcal{L}_u = \left\{ x \in \Omega \mid ||x||_1 = \sum_{i,j} |x_{ij}| < \infty \right\}.$$

Tanım 1.3.4. $\mathbb{C}$ cismi üzerinde E_1 ve E_2 iki lineer uzay olsunlar. Her $(x,y) \in E_1 \times E_2$ çifti için tanımlı

$$
\begin{aligned}
<,> \;&:\; E_1 \times E_2 \to \mathbb{C} \\
&\quad (x,y) \mapsto < x,y >
\end{aligned}
$$

fonksiyoneli;

(D1) : $<,>$ bilineer dönüşümdür, yani;

$$< x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 >= \alpha_1 < x, y_1 > + \alpha_2 < x, y_2 >$$

$$< \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, y >= \beta_1 < x_1, y > + \beta_2 < x_2, y >$$

(D2) : i) Bütün $y \in E_2$'ler için $< x, y >= 0$ ise $x = \theta$,

ii) Bütün $x \in E_1$'ler için $< x, y >= 0$ ise $y = \theta$

şartlarını sağlıyorsa, bu durumda *E_1 ve E_2 uzayları dualdir* denir.

(D1) şartı; bir $y \in E_2$ elemanının, E_1 uzayının E_1^* cebirsel dualinde bir fonksiyonel tanımladığını ifade eder. Farklı y elemanlarının farklı fonksiyoneller belirteceği açıktır.

(D2)(ii) şartı, E_2 uzayının E_1^* cebirsel dualinin bir altuzayı olduğunu gösterir.

Tanım 1.3.5. Bir E dizi uzayının $\alpha-$ ve $\beta(\upsilon)-$ dualleri,

$$E^{\alpha} = \left\{ (a_{ij}) \in \Omega \mid \forall x \in E \text{ için } \sum_{i,j} |a_{ij} x_{ij}| < \infty \right\}$$

ve

$$E^{\beta(\upsilon)} = \left\{ (a_{ij}) \in \Omega \mid \forall x \in E \text{ için } \upsilon - \sum_{i,j} a_{ij} x_{ij} \text{ mevcut} \right\}$$

olarak tanımlanır.

E çift dizi uzayı, $\beta(\upsilon)$-duali olan $E^{\beta(\upsilon)}$ uzayı ile

$$<,>: E \times E^{\beta(\upsilon)} \to \mathbb{C}, \quad (x,a) \mapsto \upsilon - \sum_{k,l} a_{kl} x_{kl}$$

bilineer formu altında dualdirler.

Herhangi bir E dizi uzayı, her $x \in E$ ve $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ için $xy = (x_{kl}y_{kl}) \in E$ şartını sağlarsa monoton uzay olarak adlandırılır. Monoton bir uzayın α- ve $\beta(\upsilon)$-dualleri çakışıktır [**17**, sh.36].

A. Türkmenoğlu [**16**] doktora çalışmasında; $t = (t_{mn})$ pozitif reel sayıların bir dizisi olmak üzere,

$$\mathcal{M}_u(t) = \left\{ x = (x_{mn}) \in \Omega \ : \sup_{m,n} |x_{mn}|^{t_{mn}} < \infty \right\}$$

$$\mathcal{C}_p(t) = \left\{ x \in \Omega : p - \lim_{m,n} |x_{mn} - L|^{t_{mn}} = 0 \text{ olacak şekilde } L \in \mathbb{C} \text{ vardır.} \right\}$$

$$\mathcal{C}_{0p}(t) = \left\{ x \in \Omega : p - \lim_{m,n} |x_{mn}|^{t_{mn}} = 0 \right\}$$

$$\mathcal{L}_u(t) = \left\{ x \in \Omega : \sum_{m,n} |x_{mn}|^{t_{mn}} < \infty \right\}$$

$$\mathcal{C}_{bp}(t) = \mathcal{C}_p(t) \cap \mathcal{M}_u(t) \text{ ve } \mathcal{C}_{0bp}(t) = \mathcal{C}_{0p}(t) \cap \mathcal{M}_u(t)$$

cümlelerini tanımlayarak , bu cümleler ile bilinen $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_{0bp}$ ve $\mathcal{L}_u$ uzayları arasındaki kapsama bağıntılarını , lineer uzay ve paranormlu uzay olma şartlarını vererek paranorm altında tam lineer metrik uzay olduklarını ve bu uzayların η duallerini inceledi.

Tek dizilerin toplanabilme teorisindeki Tauberian teoremleri ve çekirdek kavramı ile ilgili bilgiler, Patterson [**14**] tarafından çift dizilere uygulandı.

B. Altay [**1**] doktora çalışmasında ; $\mathcal{M}_u$ ve $\mathcal{M}_u(t)$ sınırlı çift dizi uzaylarına karşılık

$$\mathcal{BS} = \left\{ x \in \Omega : \sup_{m,n\geq 0} \left| \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij} \right| < \infty \right\}$$

ve

$$\mathcal{BS}(t) = \left\{ x \in \Omega : \sup_{m,n\geq 0} \left| \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij} \right|^{t_{mn}} < \infty \right\}$$

seri uzaylarını ve $\upsilon = \{p, r, bp\}$ olmak üzere, υ-yakınsak dizi uzaylarına karşılık gelen $\mathcal{CS}_\upsilon$ seri uzaylarını tanımlayarak, bazı özelliklerini , sınırlı salınımlı çift dizilerin $\mathcal{BV}$ cümlesini,

$$\mathcal{BV} = \left\{ x \in \Omega : \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |x_{ij} - x_{i-1,j} - x_{i,j-1} + x_{i-1,j-1}| < \infty \right\}$$

olarak tanımlayarak, bu uzayın lineer uzay olduğunu gösterip bazı kapsama bağıntılarını verdi. Seri uzaylarının $\alpha-$ ve $\beta(\upsilon)-$ duallerini ve çift dizi uzayları arasındaki bazı matris sınıflarının karakterizasyonunu verdi.

BÖLÜM 2

Çift Dizilerin $\mathcal{L}_p$ Uzayı

2.1. $\mathcal{L}_p$ Çift Dizi Uzayı ve Bazı Kapsama Bağıntıları

Bu bölümde; çift dizilerin $\mathcal{L}_p$ uzayı inşa edilerek, $\mathcal{L}_p$ cümlesinin normlu bir lineer uzay olduğunu göstereceğiz. Daha sonra, $\mathcal{L}_p$ uzayı ile ilgili bazı kapsama bağıntılarını vererek, $\mathcal{L}_p$ uzayının $\alpha-$, $\beta(\upsilon)-$ ve $\gamma-$duallerini belirleyeceğiz.

Teorem 2.1.1. $\mathcal{L}_p = \left\{x = (x_{ij}) \in \Omega : \sum_{i,j} |x_{ij}|^p < \infty\right\}$ *cümlesi , $p \geq 1$ için dizilerin koordinatsal toplama ve skalarla çarpma işlemleriyle bir lineer uzay teşkil eder.*

İspat. $x, y \in \mathcal{L}_p$ ve α, $\beta \in \mathbb{C}$ alalım. Bu durumda, $\alpha x + \beta y$ elamanlarının $\mathcal{L}_p$ uzayına ait olduğunu gösterelim.

$\alpha x + \beta y = (\alpha x_{ij} + \beta y_{ij})$ olup üçgen ve Minkowski eşitsizlikleri dikkate alınarak,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i,j} |\alpha x_{ij} + \beta y_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{i,j} (|\alpha x_{ij}| + |\beta y_{ij}|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq |\alpha| \left(\sum_{i,j} |x_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}} + |\beta| \left(\sum_{i,j} |y_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $\alpha x + \beta y \in \mathcal{L}_p$ olduğunu gösterir. Şu hâlde $\mathcal{L}_p$ uzayı, dizilerin koordinatsal toplama ve skalarla çarpma işlemleriyle bir lineer uzay teşkil etmektedir. □

Teorem 2.1.2. $1 \leq p < \infty$ *için , $\mathcal{L}_p$ lineer uzayı*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i,j} |x_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

İSPAT. Önce $\mathcal{L}_p$ uzayının, $\|\cdot\|_p$ ile normlu uzay teşkil ettiğini ispatlayalım. Bunun için norm şartlarını sağladığını görelim.

(i) Mutlak değer tanımından dolayı,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i,j} |x_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$$

olduğu açıktır. Yani, (N1) sağlanır.

(ii) $\|x\|_p = 0$, yani

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i,j} |x_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

olsun. Bu durumda; $\forall\ i, j \in \mathbb{N}$ için

$$x_{ij} = 0$$

olur ki bu $x = \theta$ olduğunu gösterir.

Tersine olarak $x = \theta$ iken $\|x\|_p = 0$ olduğu aşikardır. Yani (N2) sağlanır.

(iii) Herhangi bir $x = (x_{ij}) \in \mathcal{L}_p$ ve λ skaları için

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_p &= \left(\sum_{i,j} |\lambda x_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\lambda| \left(\sum_{i,j} |x_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\lambda| . \|x\|_p \end{aligned}$$

olduğundan (N3) sağlanır.

(iv) Herhangi $x, y \in \mathcal{L}_p$ için üçgen ve Minkowski eşitsizlikleri yardımıyla,

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|_p &= \left(\sum_{i,j} |x_{ij}+y_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{i,j} (|x_{ij}|+|y_{ij}|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{i,j} |x_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i,j} |y_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|x\|_p + \|y\|_p
\end{aligned}
$$

olduğundan (N4) üçgen eşitsizliği sağlanır.

$\mathcal{L}_p$ uzayı üzerindeki $\|\cdot\|_p$ fonksiyonu, (N1)-(N4) aksiyomlarını sağladığından bir norm olup, $(\ \mathcal{L}_p, \|\cdot\|_p\ )$ ikilisi bir normlu uzaydır.

Şimdi, $\mathcal{L}_p$ uzayının tam olduğunu gösterelim. $x^k = \left(x_{ij}^k\right)$ olmak üzere (x^k), $\mathcal{L}_p$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda; her $\varepsilon > 0$ için $k, l > N$ olduğunda

(2.1.1) $$\|x^k - x^l\| = \left(\sum_{i,j} |x_{ij}^k - x_{ij}^l|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

kalacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Burada her sabit $(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ çifti için,

$$|x_{ij}^k - x_{ij}^l| < \varepsilon$$

yazabiliriz ki bu $(x_{ij}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin $\mathbb{C}$'de bir Cauchy dizi olduğunu gösterir. $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde her Cauchy dizisi yakınsak olduğundan her bir sabit $i,j \in \mathbb{N}$ için

(2.1.2) $$\lim_{k\to\infty} x_{i,j}^k = x_{ij}$$

olacak şekilde $x_{ij} \in \mathbb{C}$'ler mevcuttur. Bu yolla elde ettiğimiz x_{ij} sayılarından $x = (x_{ij})$ dizisini oluşturalım. Her $k \in \mathbb{N}$ için $x^k \in \mathcal{L}_p$ olduğundan herhangi $m, n \in \mathbb{N}$'ler için

$$\sum_{i,j}^{m,n} |x_{ij}^k|^p \leq M$$

olacak şekilde bir $M \in \mathbb{R}$ vardır. Bu eşitsizlikte önce $k \to \infty$ daha sonra $m, n \to \infty$ için limit alırsak

$$\sum_{i,j}^{\infty} |x_{ij}|^p \leq M$$

elde ederiz ki bu $x \in \mathcal{L}_p$ olduğunu gösterir. Ayrıca (2.1.1)'den herhangi $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\sum_{i,j} |x_{ij}^k - x_{ij}^l|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

yazabiliriz. Bu eşitsizlikte $l \to \infty$ ve daha sonra $m, n \to \infty$ için limit alırsak (2.1.2)'den

$$\left(\sum_{i,j} |x_{ij}^k - x_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

elde ederiz. Bu ise $k > N$ olmak üzere;

$$|x_{ij}^k - x_{ij}| < \varepsilon$$

yani, $x^k \to x$ olduğunu gösterir. Şu halde $\mathcal{L}_p$ uzayı tamdır. □

TEOREM 2.1.3. $1 \leq p < q < \infty$ *olmak üzere,* $\mathcal{L}_p \subset \mathcal{L}_q$ *kapsamı geçerlidir.*

İSPAT. $x \in \mathcal{L}_p$ alalım. Bu durumda;

$$K = \{(i, j) : i > N \vee j > N\}$$

cümlesi üzerinde

$$|x_{ij}| < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği geçerlidir. $p < q$ eşitsizliğinden her $(i, j) \in K$ için,

$$|x_{ij}|^q < |x_{ij}|^p$$

elde ederiz. Buna göre,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=0}^{\infty} |x_{ij}|^q &= \sum_{(i,j) \notin K} |x_{ij}|^q + \sum_{(i,j) \in K} |x_{ij}|^q \\ &\leq A + \sum_{(i,j) \in K} |x_{ij}|^p \\ &\leq A + \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan $\sum_{i,j=0}^{\infty}|x_{ij}|^q < \infty$ ve şu hâlde $x \in \mathcal{L}_q$' dur. $\square$

TEOREM 2.1.4. *$p > 1$ olmak üzere $\mathcal{L}_p \subset M_u$ kapsamı geçerlidir.*

İSPAT. Bunun için, $x \notin M_u$ ise $x \notin \mathcal{L}_p$ olduğunu gösterelim.

$x = (x_{mn}) \notin M_u$ olsun. Bu durumda, $\sup_{m,n}|x_{mn}| = \infty$ olur. O hâlde, $|x_{m(i),n(j)}| > 2$ olacak şekilde en az birisi kesin artan $m(i)$ ve $n(j)$ dizileri mevcuttur.

$$K = \{(m,n) : m = m(i), n = n(j)\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n}|x_{mn}|^p &= \sum_{(m,n)\in K}|x_{mn}|^p + \sum_{(m,n)\notin K}|x_{mn}|^p \\
&> \sum_{(m,n)\in K}2^p + \sum_{(m,n)\notin K}|x_{mn}|^p \\
&> \infty
\end{aligned}$$

kalır. Bu durumda, $x \notin \mathcal{L}_p$' dir. Bu da istenendir. $\square$

2.2. $\mathcal{L}_p$ Çift Dizi Uzayının $\alpha-$, $\beta(\upsilon)-$ ve $\gamma-$dualleri

TANIM 2.2.1. X bir çift dizi uzayı olsun.

$$\begin{aligned}
X^{\alpha} :&= \left\{y \in \Omega | \forall x \in X : \sum_{k,l}|x_{kl}y_{kl}| < \infty\right\} \\
X^{\beta(\upsilon)} :&= \left\{y \in \Omega | \forall x \in X : \upsilon - \sum_{k,l}x_{kl}y_{kl} \ \text{ mevcuttur.}\right\} \\
X^{\gamma} :&= \left\{y \in \Omega | \forall x \in X : \sup_{m,n}\left|\sum_{k,l}^{m,n}x_{kl}y_{kl}\right| < \infty\right\}
\end{aligned}$$

cümlelerine, sırasıyla, X' in $\alpha-$, $\beta(\upsilon) - ve$ $\gamma-$dual uzayları denir. $X^{\alpha}, X^{\beta(\upsilon)}$ ve X^{γ} cümleleri,

$$X^{\alpha} \subset X^{\beta(\upsilon)} \ \ ve \ \ X^{\alpha} \subset X^{\gamma}$$

kapsama bağıntılarını sağlarlar.

TANIM 2.2.2. [**2**, sh. 342] Eğer $\{(u_{kl}) \in \Omega | \exists (x_{kl}) \in X, \forall k \in \mathbb{N} : |u_{kl}| \leq |x_{kl}|\} \subset X$ oluyorsa, X uzayına *solid* denir.

TANIM 2.2.3. [**17**, sh. 36] X bir çift dizi uzayı olsun. Her $x \in X$ ve $y \in \{\,0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ için $xy := (x_{kl}y_{kl}) \in X$ oluyorsa X çift dizi uzayına *monoton* denir. Monoton her X çift dizi uzayı için, $v \in \{r, bp, p, c, be, e\}$ olmak üzere $X^{\alpha} = X^{\beta(v)}$ eşitliği mevcuttur.

Her solid uzay monotondur fakat bunun tersi her zaman doğru değildir.

TEOREM 2.2.1. *X solid ise $X^{\alpha} = X^{\gamma}$'dır.*

İSPAT. X, bir solid uzay olsun. Bu durumda; $X^{\alpha} = X^{\gamma}$ olduğunu göstermek için $X^{\gamma} \subset X^{\alpha}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$y = (y_{kl}) \in X^{\gamma}$ ve $x = (x_{kl}) \in X$ olmak üzere, $\sup_{m,n}\left|\sum_{k,l}^{m,n} x_{kl}y_{kl}\right| < \infty$ 'dur.

$x = (x_{kl}) \in X$ verilsin. $k, l \in \mathbb{N}$ için $z = (z_{kl})$ dizisini, $z_{kl} := x_{kl}.sgn(x_{kl}y_{kl})$ biçiminde tanımlayalım.

X solid ve $|z_{kl}| \leq |x_{kl}|$ olduğundan $z = (z_{kl}) \in X$ olur. Bu da

$$\begin{aligned}\sum_{k,l=0}^{m,n} |x_{kl}y_{kl}| &= \sum_{k,l=0}^{m,n} y_{kl}x_{kl}sgn(x_{kl}y_{kl}) \\ &= \left|\sum_{k,l=0}^{m,n} z_{kl}y_{kl}\right| \\ &\leq \sup_{m,n}\left|\sum_{k,l=0}^{m,n} z_{kl}y_{kl}\right| < \infty\end{aligned}$$

$x \in X$ keyfi olduğundan $y \in X^{\alpha}$ olur. Yani, X solid ise, $X^{\alpha} = X^{\gamma}$' dır. □

TEOREM 2.2.2. *$p \geq 1$ için $\mathcal{L}_p$ uzayı soliddir.*

İSPAT. $u = (u_{kl}) \in \Omega$ noktası ve $x = (x_{kl}) \in \mathcal{L}_p$ için $|u_{kl}| \leq |x_{kl}|$ eşitsizliği sağlansın. Her $k, l \in \mathbb{N}$ için

$$|u_{kl}| \leq |x_{kl}|$$

olduğundan, $p \geq 1$ olmak üzere

$$|u_{kl}|^p \leq |x_{kl}|^p$$

eşitsizliği sağlanır. $k, l \in \mathbb{N}$ üzerinden toplam alınırsa,

$$\sum_{k,l} |u_{kl}|^p \leq \sum_{k,l} |x_{kl}|^p$$

eşitsizliği elde edilir ki $x \in \mathcal{L}_p$ olduğundan böylece

$$\sum_{k,l} |u_{kl}|^p < \infty$$

yani, $u = (u_{kl}) \in \mathcal{L}_p$ bulunduğu anlaşılır. Dolayısıyla, $\mathcal{L}_p$ uzayı soliddir. $\square$

Şimdi de $\mathcal{L}_p$ çift dizi uzayının $\alpha-, \beta(v) - ve\ \gamma-$ dualerini verelim.

Teorem 2.2.3. *$p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere, $\mathcal{L}_p^{\beta(v)} = \mathcal{L}_q$' dur.*

İspat. $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $x = (x_{mn}) \in \mathcal{L}_q$ ve $y = (y_{mn}) \in \mathcal{L}_p$ alalım. O zaman,

$$|x_{mn} y_{mn}| \leq \frac{|x_{mn}|^q}{q} + \frac{|y_{mn}|^p}{p} \leq |x_{mn}|^q + |y_{mn}|^p$$

eşitsizliği her $m, n \in \mathbb{N}$ için sağlanır. Burada $m, n \in \mathbb{N}$'ler üzerinden toplam alarak

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} |x_{mn} y_{mn}| &\leq \sum_{m,n} |x_{mn}|^q + \sum_{m,n} |y_{mn}|^p \\ &< \infty \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ise bize, $x \in \mathcal{L}_p^\alpha$ olduğunu verir. Burada $\mathcal{L}_p$ uzayınınTeorem 2.2.2'den dolayı solid olduğu dikkate alındığında

$$\mathcal{L}_q \subset \mathcal{L}_p^\alpha \subset \mathcal{L}_p^{\beta(v)} \tag{2.2.1}$$

kapsamının geçerli olduğu görülür.

Diğer taraftan, herhangi bir $y = (y_{mn}) \in \mathcal{L}_p^{\beta(v)}$ alalım. $\mathcal{L}_p^{\beta(v)} \subset \mathcal{L}_q$, olduğunu göstermek için Boos [**2**, p. 344, Theorem 7.1.11.c]' de tek diziler için kullandığı metodu uygulayalım. f_n lineer fonksiyonelini ve $y^{[n]}$ çift dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\begin{array}{rcccl} f_n & : & \mathcal{L}_p & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & x=(x_{kl}) & \longmapsto & f_n(x)=\sum_{k,l=0}^{n} x_{kl}y_{kl} \end{array}$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$y^{[n]} = \begin{bmatrix} y_{00} & y_{01} & y_{02} & \cdots & y_{0n} & 0 & \cdots \\ y_{10} & y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} & 0 & \cdots \\ y_{20} & y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots \\ y_{n0} & y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

olsun. $y^{[n]} \in \mathcal{L}_q$ olduğundan, her $x=(x_{kl}) \in \mathcal{L}_p$ için f_n lineer fonksiyonelinin sürekliliğinden Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$|f_n(x)| \leq \sum_{k,l=0}^{n} |x_{kl}y_{kl}| = \sum_{k,l} \left| x_{kl}y_{kl}^{[n]} \right| \leq \|x\|_p \left\| y^{[n]} \right\|_q$$

elde ederiz. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|f_n\| \leq \left\| y^{[n]} \right\|_q \tag{2.2.2}$$

olur.

(2.2.2) eşitsizliğinin tersini ispat etmek için $x^{(n)} = \{x_{kl}^{(n)}\}_{k,l\in\mathbb{N}}$ dizisini,

$$x_{kl}^{(n)} = \begin{cases} \frac{|y_{kl}|^q}{y_{kl}} & , \quad (y_{kl} \neq 0, \text{ ve } k,l \leq n \quad \text{ise }) \\ 0 & , \qquad\qquad (\text{diğer hâllerde}) \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

$x^{(n)} \in \mathcal{L}_p$ ve $q=(q-1)p$ olduğundan,

$$\left\| x^{(n)} \right\|_p = \left(\sum_{k,l=0}^{n} |y_{kl}|^{(q-1)p} \right)^{1/p} = \left(\sum_{k,l=0}^{n} |y_{kl}|^q \right)^{1/p} = \left(\left\| y^{[n]} \right\|_q \right)^{q/p}.$$

Özel olarak $\left\|x^{(n)}\right\|_p \neq 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{\left|f_n\left(x^{(n)}\right)\right|}{\left\|x^{(n)}\right\|_p} = \frac{\sum_{k,l=0}^{n} |y_{kl}|^q}{\left\|x^{(n)}\right\|_p} = \left\|y^{[n]}\right\|_q .$$

$$\left\|y^{[n]}\right\|_q \leq \|f_n\|. \tag{2.2.3}$$

olur.

Böylece, her $n \in \mathbb{N}$ için (2.2.2) ve (2.2.3)' den

$$\|f_n\| = \left\|y^{[n]}\right\|_q$$

elde ederiz.

Şimdi de Banach-Steinhauss Teorem ve hipotezden (f_n) dizisinin noktasal yakınsaklığından faydalanalım.

$(\mathcal{L}_p, \|\cdot\|_p)$ ve $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ Banach uzayı olduğundan,

$$\begin{array}{cccl} f_y & : & \mathcal{L}_q & \longrightarrow \mathbb{C} \\ & & x = (x_{kl}) & \longmapsto f_y(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{k,l} x_{kl} y_{kl} \end{array}$$

süreklidir ve

$$\|f_y\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|y^{[n]}\right\|_q < \infty$$

olur. Böylece $y \in \mathcal{L}_p$ ve

$$\|f_y\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|y^{[n]}\right\|_q = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k,l}^{n} |y_{kl}|^q\right)^{1/q} = \left(\sum_{k,l} |y_{kl}|^q\right)^{1/q} < \infty$$

olduğundan

$$\mathcal{L}_p^{\beta(\upsilon)} \subset \mathcal{L}_q \tag{2.2.4}$$

kapsamasını elde ederiz.

(2.2.1) ve (2.2.4) kapsamalarından istenen sonuç elde edilir.

$\square$

Kaynakça

[1] B. ALTAY, F. BAŞAR, *Some new spaces of double squences,* J. Math. Anal. Appl., **309**(2005), 70-90.

[2] J. BOOS, *Classical and Modern Methods in Summability*, Oxford University Press. New York, Oxford, 2000.

[3] J. BOOS, T. LEIGER, K. ZELLER, *Consistency theory for SM-methods*, Acta Math. Hungar., **76**(1997), 83-116.

[4] F. MÓRICZ, *Extensions of the spaces c and c_0 from single to double sequences,* Acta Math. Hung., **57**(1991), no. 1-2, 129-136.

[5] H. J. HAMILTON, *Transformations of multiple sequences*, Duke Math. J., **2**(1936), 29-60.

[6] G. H. HARDY, *On the convergence of certain multiple series*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **19**(1916-1919), 86-95.

[7] J. D. HILL, *On perfect summability of double sequences*, Bull. Amer. Math. Soc., **46**(1940), 327-331.

[8] C. JARDAS, N. SARAPA, *On the summability of pairs of sequences*, Glasnik Math., **26**(46)(1991), 67-73.

[9] T. KOJIMA, *On the theory of double sequence,* Tôhoku Math. J., **21**(1922), 3-14.

[10] I. J. MADDOX, *Elements of Functional Analysis*, 2^{nd}ed. Cambridge University, 1970.

[11] V. G. IYER, *Mathematical Analysis*, 3^{rd}ed. Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd. New Delhi, 1985.

[12] B. PRZYBYLSKI, *On the perfectness of methods defined by the iteration product of matrix transformations*, Thesis, Univercity of Lódź, 1977.

[13] A. PRINGSHEIM, *Elementare Theorie der unendliche Doppelreihen,* Sitsungs berichte der Math. Akad. der Wissenschafftenzu Münch. Ber., **7**(1898), 101-153.

[14] R. F. PATTERSON, *Some Theorems in the Theory of Divergent Double Sequences,* Phd. Dissertation, Kent State University, 1997.

[15] G. M. ROBISON, *Divergent double sequences and series,* Trans. Amer. Math. Soc., **28**(1926), no.1, 50-73.

[16] A. TÜRKMENOĞLU, *Bazı Çift İndisli Dizi Uzayları*, Fırat Üniv. Fen Bil. Enst. Doktora tezi, 1993.

[17] M. ZELTSER, *Investigation of Double Sequence Spaces by Soft and Hard Analytical Methods*, Dissertationes Mathematicae Universitatis Tartuensis, Tartu, 2001.

Özgeçmiş

1970, Afyonkarahisar-Emirdağ doğumludur. İlk öğrenimini Emirdağ'da ve orta öğrenimini Eskişehir'de tamamladı. 1986 yılında Orta Doğu Teknik Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Öğretmenliği'ni kazandı ve 1991 yılında mezun oldu. 1991-2000 yılları arasında özel okulda görev yaptı. 2000 yılında başladığı Milli Eğitim Bakanlığına bağlı okullardaki matematik öğretmenliği görevini sürdürmektedir.