

2491

H KO-GRUPLAR ÜZERİNDE DEMETLER

VE

BAZI KARAKTERİZASYONLAR

DOKTORA TEZİ

27

Ahmet Ali ÖÇAL

İ.Ü.Fen-Edebiyat Fakültesi

Matematik Bölümü Asistanı

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ  
GENEL KÜTÜPHANESİ

Ankara-1983



Bu Tez Konusunu veren, çalışmalarım süresince daima yol gösteren ve yakın alakaları ile beni teşvik eden, Muhterem Hocam Cengiz ULUÇAY'a en derin şükran ve hürmetlerimi arz etmeyi bir borç bilirim.

Ahmet Ali Öçal

## ÖNSÖZ

Bu çalışmada, Cebirsel Topolojinin çok önemli iki konusu; Homotopi Teorisi-H Ko-grupları ve Demet Teorisi birlikte ele alınarak, H ko-grupları vasıtasıyla yeni bir cebirsel yapıllı demet inşa edilmiş ve önemli cebirsel topolojik karakterizasyonlar verilmiştir.

Bölüm I ve Bölüm II de çalışmanın kolay anlaşılmasını sağlamak gayesi ile Homotopi Teorisi, H ko-grupları ve Demet Teorisine ait bilgiler verilmiştir. Bölüm I de Homotopinin umumi tarifinden hareketle, konuyu H ko-gruplarına getirerek, H ko-grupları teşkil ve tetkik edilmiştir. Bölüm II de Demet Teorisine bir giriş yapılmış, Demetin tarifi ile birlikte önemli bazı tarif ve teoremler verilmiştir. Nihayet, bu bölümün sonunda, Demetlerin topolojik yapılarının yanında bir cebirsel yapıyı da haiz olabilecekleri görülmüştür.

Çalışmamızın üçüncü Bölümünde, cebirsel yapıllı demetlere bir misâl teşkil edecek şekilde, yeni bir demet teşkil edilmiştir. Şöyle ki; taban cümle olarak bir Q topolojik uzayını alıp, farklı her  $q_i$ ,  $i \in I$  noktası için  $(Q, q_i)$  noktalı topolojik uzayları teşkil edilmiş ve  $(Q, q_i)$  ile  $(Q, q_j)$ ,  $i, j \in I$ ,  $i \neq j$ , noktalı topolojik uzayları aynı homotopi tipinde alındığında birisi H ko-grubu ise, diğeri de H ko-grubu olduğundan  $(Q, q_i)$  H ko-gruplarının herbirine,  $(X, x_0)$  herhangi bir noktalı topolojik uzay olmak üzere, farklı  $[ (Q, q_i); X ]$  grupları tekabül etmektedir. Herbir  $(Q, q)$  H ko-grupları için Q üzerinde  $H(Q) = \bigvee_{q \in Q} [ (Q, q); X ]$  cümlesi teşkil edilmiş ve  $\varphi: H(Q) \rightarrow Q$  tabii tasvir, yani her  $\sigma = [ f ]_q \in [ (Q, q); X ] = H(Q)_q \subset H(Q)$  için  $\varphi(\sigma) = \varphi([ f ]_q) = q$ , olmak üzere H(Q) üzerinde bir tabii topoloji inşa edilmiş ve bu topolojiye nazaran  $\varphi$  nin lokal topolojik olduğu, H(Q) nun saplarındaki grup operasyonunun bu topolojiye nazaran sürekliliği gösterilmiştir.

Daha sonra, bu tip demetler ve altındaki topolojik uzaylar arasında bazı cebirsel topolojik karakterizasyonlar verilmiştir.

## İÇİNDEKİLER

### BÖLÜM I

#### HOMOTOPI TEORİSİ VE H KO-GRUPLARI

1.1.	Homotopi Kavramı .....	1
1.2.	H Ko-grupları .....	6

### BÖLÜM II

#### DEMET TEORİSİ

2.1.	Demet Kavramı .....	13
2.2.	Demetlere Misaller .....	19

### BÖLÜM III

3.1.	H Ko-gruplar Üzerinde Demetler .....	23
3.2.	Karakterizasyonlar .....	28
	Referanslar .....	36

## BÖLÜM I

### HOMOTOPI TEORİSİ VE H KO-GRUPLARI

Bu bölümde homotopi kavramı genel olarak ele alındıktan sonra, önemli olan H ko-grupları üzerinde durulmuş ve çalışmamızın doğrultusunda gerekli olan tarif, teorem ve karakterizasyonlar verilmiştir.

#### 1.1. Homotopi Kavramı.

Tarif 1.1.1. X bir topolojik uzay,  $A \subset X$  bir altcümle ve  $x \in X$  olsun. x noktasına A'nın bir kapanış noktası denir, şayet x i ihtiva eden her bir açık cümle A ya ait bir nokta ihtiva ediyorsa. A'nın kapanışı  $\bar{A}$  ile gösterilecektir.

Teorem 1.1.1. U, V bir topolojik X uzayında iki altcümle ise, bu taktirde  $\overline{U \cup V} = \bar{U} \cup \bar{V}$ .

İspat. Bak [1].

Teorem 1.1.2.  $f: X \rightarrow Y$  tasviri süreklidir, yalnız ve yalnız her bir  $A \subset X$  için  $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$  ise.

İspat. Bak [1].

Teorem 1.1.3. Farzedelim ki X iki kapalı alt uzayın birleşimidir,  $X = A \cup B$ . Şayet  $f: A \rightarrow Y$ ,  $g: B \rightarrow Y$  sürekli tasvirler ise öyleki,  $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$ . Bu taktirde  $h: X \rightarrow Y$ , öyleki  $h|_A = f$ ,  $h|_B = g$  tasviri süreklidir.

İspat.  $Q \subset X$  bir altcümle olsun.  $Q_1 = Q \cap A$ ,  $Q_2 = Q \cap B$  vazedelim. Bu taktirde  $Q = Q_1 \cup Q_2$  ve dolayısıyla  $h(Q) = h(Q_1) \cup h(Q_2)$ . Teorem 1.1.1 den dolayı  $\bar{Q} = \bar{Q}_1 \cup \bar{Q}_2$ . O halde,  $h(\bar{Q}) = h(\bar{Q}_1) \cup h(\bar{Q}_2)$ . Şimdi,  $x \in \bar{Q}_1 = \overline{Q_1 \cap A}$  bir nokta olsun. Bu taktirde x i ihtiva eden her bir açık cümle  $Q \cap A$  ya ait bir nokta ihtiva eder, ve dolayısıyla A ya ait bir nokta ihtiva eder. O halde  $x \in \bar{A}$ . Fakat A kapalıdır, dolayısıyla  $x \in A$ . Demek ki,  $\bar{Q}_1 \subset A$  ve dolayısıyla  $h(\bar{Q}_1) = f(\bar{Q}_1)$ . Aynı şekilde

$\bar{Q}_2 \subset B$  ve  $h(\bar{Q}_2) = g(\bar{Q}_2)$ . Fakat  $f$  ve  $g$  sürekli olduklarından Teorem 1.1.2. den dolayı  $f(\bar{Q}_1) \subset \overline{f(Q_1)}$  ve  $g(\bar{Q}_2) \subset \overline{g(Q_2)}$ . Dolayısıyla,  $h(\bar{Q}) = h(\bar{Q}_1) \cup h(\bar{Q}_2) = f(\bar{Q}_1) \cup g(\bar{Q}_2) \subset \overline{f(Q_1)} \cup \overline{g(Q_2)} = \overline{h(Q_1)} \cup \overline{h(Q_2)}$ . Halbu ki, Teorem 1.1.1. den dolayı,  $\overline{h(Q)} = \overline{h(Q_1) \cup h(Q_2)} = \overline{h(Q_1)} \cup \overline{h(Q_2)}$ . Dolayısıyla  $h(\bar{Q}) \subset \overline{h(Q)}$ , yani  $h$  süreklidir.

Tarif 1.1.2.  $X, Y$  iki topolojik uzay ve  $f, g: X \rightarrow Y$  sürekli iki tasvir olsun.

$f, g$  ye homotopur denir, ve  $f \sim g$  veya  $f \overset{F}{\sim} g$  ile gösterilir, şayet  $\exists F(x, t) = F: X \times J \rightarrow Y \ni F$  tasviri sürekli ve her  $x \in X$  için  $F(x, 0) = f, F(x, 1) = g$ .

$F$  tasvirine ise  $f$  den  $g$  ye homotopi denir.

Teorem 1.1.4.  $\sim$  homotopi bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat. (i)  $f \sim f$  dir. Zira,  $F: X \times J \rightarrow Y$  tasviri,  $F(x, t) = f(x)$  olarak tarif edilirse,  $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = f(x)$  ve  $F(x, t)$  süreklidir. Dolayısıyla  $f \sim f$  dir.

(ii)  $f \sim g$  ise  $g \sim f$  dir. Zira,  $f \sim g \Rightarrow \exists F(x, t): X \times J \rightarrow Y$  tasviri sürekli ve  $F(x, 0) = f, F(x, 1) = g$ .  $G(x, t) = F(x, 1-t)$  şeklinde tarif edilmiş olsun. Bu taktirde,  $G$  sürekli ve  $G(x, 0) = F(x, 1) = g, G(x, 1) = F(x, 0) = f$ , dolayısıyla  $g \sim f$ .

(iii)  $f \sim g, g \sim h$  ise  $f \sim h$  dır. Zira,  $f \sim g \Rightarrow \exists F(x, t): X \times J \rightarrow Y \ni F$  sürekli ve  $F(x, 0) = f, F(x, 1) = g$ .  $g \sim h \Rightarrow \exists G(x, t): X \times J \rightarrow Y \ni G$  sürekli ve  $G(x, 0) = g, G(x, 1) = h$ . Şimdi,  $H(x, t): X \times J \rightarrow Y$  tasvirini

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x, 2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tarif edelim. Teorem 1.1.3 den dolayı  $H(x, t)$  süreklidir. Diğer taraftan,  $H(x, 0) = F(x, 0) = f, H(x, 1) = G(x, 1) = h$ . Dolayısıyla  $f \sim h$ .

Demek ki,  $X$  topolojik uzayından  $Y$  topolojik uzayına bütün sürekli tasvirlerin cümlesi  $\sim$  bağıntısı vasıtasıyla ayrık eşdeğerlik sınıflara ayrılmış bulunmaktadır.

Tarif 1.1.3.  $X, Y$  iki topolojik uzay,  $X_0 \subset X$  herhangi bir altcümle ve

$f, g: X \rightarrow Y$  de her  $x_0 \in X_0$  için  $f(x_0) = g(x_0)$  şartını sağlayan iki sürekli tasvir olsun.  $f$  tasviri  $X_0$  a nazaran  $g$  ye homotoptur denir ve  $f \sim g$  rel.  $X_0$  ile gösterilir, şayet aşağıdaki şartları sağlayan bir  $F(x, t) = F: X \times J \rightarrow Y$  sürekli tasviri varsa:

(i) Her  $x \in X$  için  $F(x, 0) = f$ ,  $F(x, 1) = g$ .

(ii) Her  $x_0 \in X_0$  için  $F(x_0, t) = f(x_0) = g(x_0)$ .

$X_0 = \emptyset$  ise sadece  $f \sim g$  yazıyoruz. Demek ki, adi homotopi relatif homotopinin bir özel halidir. Ayrıca gösterilebilir ki,  $\sim$  rel.  $X_0$  bağıntısı da bir eşdeğerlik bağıntısıdır. [2].

**Teorem 1.1.5.**  $f, g: X \rightarrow Y$  sürekli tasvirler olsun, öyle ki,  $f \sim g$ . Diğer taraftan,  $h: Y \rightarrow Z$  bir sürekli tasvir ise, bu taktirde  $hf, hg: X \rightarrow Z$  tasvirleri süreklidir ve  $hf \sim hg$ .

**İspat.** İki sürekli tasvirin terkinin de sürekli bir tasvir olmasından dolayı,  $hf$  ve  $hg$  süreklidir. Diğer taraftan,

$f \sim g \Rightarrow \exists F: X \times J \rightarrow Y \ni F$  sürekli ve her  $x \in X$  için  $F(x, 0) = f$ ,  $F(x, 1) = g$ .

Şimdi,  $G: X \times J \rightarrow Z$  tasvirini  $G(x, t) = h(F(x, t))$  şeklinde tarif edelim. Bu taktirde,  $h, F$  sürekli ve  $G = h \circ F$  olduğundan  $G$  süreklidir. Diğer taraftan,  $G(x, 0) = h(F(x, 0)) = h(f(x)) = hf$ ,  $G(x, 1) = h(F(x, 1)) = h(g(x)) = hg$ . Dolayısıyla,  $hf \sim hg$ .

Benzer şekilde aşağıdaki teoremi ispat edebiliriz.

**Teorem 1.1.6.**  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g, h: Y \rightarrow Z$  sürekli tasvirler, öyle ki,  $g \sim h$  olsun. Bu taktirde,  $gf, hf: X \rightarrow Z$  tasvirleri süreklidir ve  $gf \sim hf$ .

**İspat.** Açık olarak,  $gf$  ve  $hf$  sürekli olduklarından,  $gf \sim hf$  olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur. Halbuki,

$g \sim h \Rightarrow \exists F: Y \times J \rightarrow Z \ni F$  sürekli bir tasvir olup, her  $y \in Y$  için

$F(y, 0) = g(y)$ ,  $F(y, 1) = h(y)$ . Şimdi  $G(x, t) = G: X \times J \rightarrow Z$  tasvirini  $G(x, t) = F(f(x), t)$  şeklinde tarif edelim,  $G$  süreklidir ve  $G(x, 0) = F(f(x), 0) = gf$ ,  $G(x, 1) = F(f(x), 1) = hf$ . Dolayısıyla,  $gf \sim hf$ .

Tarif 1.1.4.  $X, Y$  iki topolojik uzay ve  $f: X \rightarrow Y$  sürekli bir tasvir olsun.  $f$  tasvirine "homotopi eşdeğerlilik" denir, şayet aşağıdaki şartları sağlayan sürekli bir  $f': Y \rightarrow X$  tasviri varsa:

$$(1) \quad ff' \sim 1_Y$$

$$(2) \quad f'f \sim 1_X .$$

$X$  uzayından  $Y$  uzayına, homotopi eşdeğerlilik bir  $f$  tasvirinin varlığı halinde,  $X$  ve  $Y$  uzayları "homotopi eşdeğerdirler" veya "aynı homotopi tipindedirler" denir. Ayrıca ispat edilebilir ki, aynı homotopi tipinden olma bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır ve homotopik eşdeğer uzayların sınıfları topolojik eşdeğer uzayların sınıflarının cümlesinden daha geniştir [2]. Dolayısıyla, topolojik eşdeğerlik homotopik eşdeğerlikten daha kuvvetlidir. Yani, bir homotopi invaryant (homotopik eşdeğer uzayların taşıdığı bir değer) aynı zamanda bir topolojik invaryanttır. Aksine, bir topolojik invaryant, bir homotopi invaryant olmayabilir.

Teorem 1.1.7.  $X, Y$  topolojik eşdeğer iki uzay olsun. Bu taktirde,  $X$  ve  $Y$  homotopik eşdeğerdir.

İspat.  $X, Y$  topolojik eşdeğer olduklarından,  $f: X \rightarrow Y$   $f$ , sürekli, birebir ve üzerine, ve  $f$  nin  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  inverside süreklidir, dolayısıyla  $ff^{-1} = 1_Y$ ,  $f^{-1}f = 1_X$ .  $\sim$  bağıntısı, bir eşdeğerlik bağıntısı olduğundan  $ff^{-1} \sim 1_Y$ ,  $f^{-1}f \sim 1_X$ . Binaenaleyh, tariftten dolayı  $X \sim Y$ .

Tarif 1.1.5. Bir  $\mathcal{C}$  kategorisi

(a) Nesnelerin bir sınıfıdır.

(b) Her  $X, Y$  sıralı nesne çifti için,  $\text{hom}(X, Y)$  ile gösterilen bir fonksiyon cümlesi tarif edilmiştir ki, herbir fonksiyona morfizm denir. Herbir morfizmin tarif bölgesi  $X$ , değer bölgesi ise  $Y$  dir.  $f \in \text{hom}(X, Y)$  ise,  $f: X \rightarrow Y$  veya  $X \xrightarrow{f} Y$  yazılır.

(c) Morfizmler için bir kompozisyon tarif edilmiştir ki, her  $X, Y, Z$  sıralı nesne üçlüsü için  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z \Rightarrow gf = gof: X \rightarrow Z$  dir.  $gf = gof$  ye  $f$  ve  $g$  nin terkihi, veya kompozisyonu denir.

(a), (b), (c) aşağıdaki şartları sağlarlar:

(i) Asosyatiflik:  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: Z \rightarrow W$  ise,  $h(gf) = (hg)f$ .

(ii) Özdeşlik: Herbir  $Y$  nesnesi için  $\exists 1_Y: Y \rightarrow Y$  morfizmi  $\rightarrow f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  ise, bu taktirde,  $1_Y f = f, h 1_Y = h$ .  $1_Y$  ye özdeş morfizm denir.

Tarif 1.1.6.  $\mathcal{C}$  ve  $\mathcal{D}$  iki kategori olsun.  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tasvirine fonktor veya kovaryant fonktor denir, şayet  $\mathcal{C}$  ye ait herbir  $X$  nesneye  $\mathcal{D}$  de bir  $F(X)$  nesne,  $f: X \rightarrow Y$  morfizmine de  $\mathcal{D}$  de  $F(f): F(X) \rightarrow F(Y)$  morfizmi tahsis olunmaktadır, şöyle ki;

$$(1) F(1_X) = 1_{F(X)} .$$

$$(2) F(gf) = F(g) F(f) .$$

Tarif 1.1.7.  $\mathcal{C}$  ve  $\mathcal{D}$  iki kategori olsun.  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tasvirine kontrafonktor veya kontravaryant fonktor denir, şayet  $\mathcal{C}$  ye ait herbir  $X$  nesneye  $\mathcal{D}$  de bir  $F(X)$  nesne,  $f: X \rightarrow Y$  morfizmine  $\mathcal{D}$  de  $F(f): F(Y) \rightarrow F(X)$  morfizmi tahsis olunmaktadır, şöyle ki;

$$(1) F(1_X) = 1_{F(X)} .$$

$$(2) F(gf) = F(f) F(g) . [2]$$

Tarif 1.1.8.  $X$  bir topolojik uzay ve  $x_0 \in X$  olsun.  $(X, x_0)$  çiftine noktalı topolojik uzay adı verilir.

Tarif 1.1.9. Nesnelere, Noktalı Topolojik uzaylar ve morfizmleri, homomorfizm  $[(X, x_0), (Y, y_0)] = [X, x_0, Y, y_0]$  olan kategoriye, Noktalı Topolojik uzayların homotopi kategorisi denir.

Tarif 1.1.10. Bir  $H$  uzayı, bir  $P$  noktalı topolojik uzayı ile bir  $\mu: P \times P \rightarrow P$  sürekli çarpmasını ihtiva eder, öyleki,  $c: P \rightarrow P$  sabit tasviri (bir tek) bir "homotopi özdeşliktir", yani herbir  $P \xrightarrow{(c,1)} P \times P \xrightarrow{\mu} P$  ve  $P \xrightarrow{(1,c)} P \times P \xrightarrow{\mu} P$  kompozisyonu  $1_P$  ye homotoptur.

$\mu$  çarpmasına "homotopi asosyatiftir" denir, Şayet

$$\begin{array}{ccc} P \times P \times P & \xrightarrow{\mu \times 1} & P \times P \\ \downarrow 1 \times \mu & & \downarrow \mu \\ P \times P & \xrightarrow{\mu} & P \end{array}$$

karesi, homotopi komütatif ise. Yani,  $\mu \circ (\mu \times 1) \sim \mu \circ (1 \times \mu)$ .

Bir  $\phi: P \rightarrow P$  sürekli tasvirine  $P$  ve  $\mu$  için bir "Homotopi inverstir" denir, şayet  $P \xrightarrow{(1,\phi)} P \times P \xrightarrow{\mu} P$  ve  $P \xrightarrow{(\phi,1)} P \times P \xrightarrow{\mu} P$  kompozisyonlarının herbiri  $c: P \rightarrow P$  sabit tasvirine homotop ise.

Tarif 1.1.11. Bir homotopi inversli, homotopi asosyatif  $H$  uzayı homotopi grup aksiyomlarını sağlar. Böyle bir noktalı uzaya  $H$  grubu denir. [2].

## 1.2. $H$ Ko-grupları.

Bu kısım esas olarak  $H$  gruplarının neticelerinin duallerinden ibarettir.  $Q$  noktalı topolojik uzayını gözönüne alacağız, öyleki  $\Pi_Q$ , noktalı uzayların homotopi kategorisinden gruplar ve homomorfizmleri kategorisine bir kovaryant fonktor olup, bu,  $H$  grubunun duali olan  $H$  ko-grubu ile ilgilidir.

Şayet  $X$  ve  $Y$  noktalı topolojik uzaylar ise,  $[X;Y]$  taban noktasını muhafaza eden  $X \rightarrow Y$  ( $X$  den  $Y$  ye) sürekli tasvirlerin homotopi sınıflarının cümlesini gösterecektir (Bütün homotopiler taban noktasına rölatif olarak anlaşılacaktır), ve noktalı topolojik uzaylar kategorisinde bunların toplamı  $X^Y$  ile gösterilecektir. Şayet  $x_0$ ,  $X$  in,  $y_0$ ,  $Y$  nin taban noktaları ise  $X^Y$ ,  $X \times Y$  nin  $X \times y_0 \cup x_0 \times Y$  altuzayı olarak gözönüne alınabilir. Şayet  $f: X \rightarrow Y$  ve  $g: Y \rightarrow Z$  ise

$(f,g):X \times Y \rightarrow Z$  tasviri ile, toplamın karakteristik özelliğini tarif edeceğiz (yani,  $(f,g)|_X = f, (f,g)|_Y = g$ ).

Tarif 1.2.1. Bir  $H$  ko-uzayı, bir  $Q$  noktalı topolojik uzayı ile birlikte bir  $v:Q \rightarrow Q \vee Q$  sürekli ko-çarpmasını ihtiva eder, öyleki,  $c:Q \rightarrow Q$  sabit tasviri (bir tek) bir "homotopi özdeşliktir", yani her bir  $Q \xrightarrow{v} Q \vee Q \xrightarrow{(c,1)} Q$  ve  $Q \xrightarrow{v} Q \vee Q \xrightarrow{(1,c)} Q$  kompozisyonu  $1_Q$  ya homotoptur.

Tarif 1.2.2. Bir  $Q$   $H$  ko-uzayına, bir  $H$  ko-grubu denir, öyleki aşağıdaki özellikler caridir:

Homotopi asosyatiflik:

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{v} & Q \vee Q \\ v \downarrow & & \downarrow 1 \vee v \\ Q \vee Q & \xrightarrow{v \vee 1} & Q \vee Q \vee Q \end{array}$$

karesi homotopi komütatiftir.

Homotopi inversin varlığı: Bir  $\psi:Q \rightarrow Q$  tasviri vardır  $\rightarrow$  her bir  $Q \xrightarrow{v} Q \vee Q \xrightarrow{(1,\psi)} Q$  ve  $Q \xrightarrow{v} Q \vee Q \xrightarrow{(\psi,1)} Q$  kompozisyonları  $c:Q \rightarrow Q$  ye homotoptur.

Şayet  $X$  herhangi bir noktalı topolojik uzay ve  $Q$  herhangi bir  $H$  ko-grubu ise  $[f_1][f_2] = [(f_1, f_2) \circ v]$  şeklinde tarif edilen ve  $[Q; X]$  i bir grup yapan  $[Q; X]$  de bir terkip kanunu vardır.

Tarif 1.2.3. Bir  $H$  ko-grubuna abeliandır denir, şayet

$$\begin{array}{ccc} & Q & \\ v \swarrow & & \searrow v \\ Q \vee Q & \xrightarrow{T'} & Q \vee Q \end{array}$$

üçgeni,  $q_1, q_2 \in Q$  için  $T'(q_1, q_2) = (q_2, q_1)$  olmak üzere, homotopi komütatiftir.

Tarif 1.2.4. Farzedelim ki  $Q$  ve  $Q'$ , sırası ile,  $v$  ve  $v'$  ko-çarpmaları ile birlikte birer  $H$  ko-grubu olsun. Bu taktirde bir  $\beta:Q \rightarrow Q'$  sürekli tasvirine "homomorfizm" denir, şayet

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{v} & QvQ \\ \beta \downarrow & & \downarrow \beta v \beta \\ Q' & \xrightarrow{v'} & Q'vQ' \end{array}$$

karesi homotopi komütatif ise.

Tarif 1.2.5.  $Q, Q'$  herhangi iki  $H$  ko-grubu ve  $\beta: Q \rightarrow Q'$  bir homomorfizm olsun.  $\beta$  ya "izomorfizm" denir, şayet  $\beta$  birebir ve  $\beta^{-1}$  sürekli ise.

Teorem 1.2.1. Farzedelim ki  $Q$  bir  $H$  ko-grubu olsun. Bu taktirde  $\Pi_Q$  noktalı uzayların homotopi kategorisinden gruplar ve homomorfizmleri kategorisine bir kovaryant funktordur. Şayet  $Q$  bir abelian  $H$  ko-grubu ise  $\Pi_Q$  değerlerini abel grupları kategorisinde alır.

İspat.  $Q$  bir  $H$  ko-grubu ise  $\Pi_Q(X)$  in bir grup olabileceği yukarıda söylenmişti.

Şimdi, her  $f: X \rightarrow Y$  morfizmi için  $\Pi_Q(f) = f_{\#}: [Q; X] \rightarrow [Q; Y]$  ise,  $f_{\#}$  in bir homomorfizm olduğunu gösterelim.  $[g]: Q \rightarrow X$  bir morfizm olsun, o halde  $f_{\#}([g]) = [fog]$ .  $[g_1], [g_2]: Q \rightarrow X$  iki morfizm olsun.

$$f_{\#}([g_1] [g_2]) = f_{\#}([ (g_1, g_2) \circ v ]) = [ fo(g_1, g_2) \circ v ].$$

$$f_{\#}([g_1]) f_{\#}([g_2]) = [ fog_1 ] [ fog_2 ] = [ (fog_1, fog_2) \circ v ] = [ fo(g_1, g_2) \circ v ].$$

$$0 \text{ halde, } f_{\#}([g_1] [g_2]) = f_{\#}([g_1]) f_{\#}([g_2]).$$

Dolayısıyla,  $\Pi_Q$  noktalı topolojik uzayların homotopi kategorisinden gruplar ve homomorfizmleri kategorisine bir tasvirdir. Gösterilebilir ki,  $\Pi_Q$  bir kovaryant funktordur. Gerçekten:

(1)  $X=Y$ ,  $f=1_X$  ise  $\Pi_Q(1_X) = 1_X^{\#}: [Q; X] \rightarrow [Q; X] \rightarrow$  her  $[g]: Q \rightarrow X$  morfizmi için  $1_X^{\#}([g]) = 1_X \circ [g] = [1_X \circ g]$ .  $\Pi_Q(1_X)([g]) = [g] = 1_{\Pi_Q(X)}$ .

(2)  $f: X \rightarrow Y$ ,  $h: Y \rightarrow Z$  ise

$$\Pi_Q(f): [Q; X] \rightarrow [Q; Y], \Pi_Q(h): [Q; Y] \rightarrow [Q; Z] \text{ ve } \Pi_Q(foh): [Q; X] \rightarrow [Q; Z]$$

dir.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{h} & Z \\
 & \searrow g & \uparrow g' & \nearrow g'' & \\
 & & Q & & 
 \end{array}$$

diagramında da görülüyor ki,  $[g'] = [f \circ g]$ . O halde,

$$\Pi_Q(h)([g']) = [hog'] = [hofog] = \Pi_Q(hof)([g]).$$

$$\Pi_Q(h)([g']) = \Pi_Q(h)(\Pi_Q(f)([g])) = (\Pi_Q(h) \circ \Pi_Q(f))( [g] ).$$
 O halde,

$$\Pi_Q(hof) = \Pi_Q(h) \circ \Pi_Q(f).$$

Binaenaleyh,  $\Pi_Q$  noktalı topolojik uzayların homotopi kategorisinden gruplar ve homomorfizmleri kategorisine bir kovaryant funktordur.

**Teorem 1.2.2.** Bir noktalı uzay,  $H$  ko-uzayının (veya  $H$  ko-grubunun) kendisi ile aynı homotopi tipine haiz ise, bu taktirde bu noktalı uzayda bir  $H$  ko-uzayıdır (veya  $H$  ko-grubudur), öyleki burada homotopi eşdeğerlilik bir homomorfizmdir.

**İspat.**  $f:Q \rightarrow Q'$  ve  $g:Q' \rightarrow Q$  homotopi inversler ve  $Q$ , ko-çarpması  $v:Q \rightarrow QvQ$  olan bir  $H$  ko-uzayı olsun. Şayet,  $v':Q' \rightarrow Q'vQ'$   $Q' \xrightarrow{g} Q \xrightarrow{v} QvQ \xrightarrow{fvf} Q'vQ'$  kompozisyonu olarak tarif edilmiş ise, bu taktirde  $v'$ ,  $Q'$  de bir sürekli ko-çarpmadır ve  $Q' \xrightarrow{v'} Q'vQ' \xrightarrow{(1,c')} Q'$  kompozisyonu  $Q' \xrightarrow{g} Q \xrightarrow{v} QvQ \xrightarrow{(1,c')} Q \xrightarrow{f} Q'$  kompozisyonuna eşit olup bu  $Q' \xrightarrow{g} Q \xrightarrow{f} Q'$  kompozisyonuna homotoptur. Zira,  $fg \sim 1_{Q'}$ ,  $(1,c') \circ v' \sim 1_{Q'}$ . Benzer şekilde  $(c',1) \circ v'$  tasviri  $1_{Q'}$  ye homotoptur. Bundan dolayı  $Q'$  bir  $H$  ko-uzayıdır.

$$\begin{array}{ccc}
 Q' & \xrightarrow{v'} & Q'vQ' \\
 g \downarrow & & \downarrow gvg \\
 Q & \xrightarrow{v} & QvQ
 \end{array}$$

karesi homotopi komütatiftir, zira  $v' = (fvf) \circ v$  olduğundan,  $v' \circ f = ((fvf) \circ v) \circ (g \circ f)$  ve  $g \circ f = gf \sim 1_Q$  olduğundan Teorem 1.1.6 dan dolayı  $((fvf) \circ v) \circ (g \circ f) \sim ((fvf) \circ v) \circ 1_Q = (fvf) \circ v$  dir. O halde  $v' \circ f \sim (fvf) \circ v$  dir. Binaenaleyh,  $f$  bir homo-

morfizmdir. Aynı şekilde  $g$  nin de bir homomorfizm olduğu gösterilir. Şayet  $v$  homotopi asosyatif veya homotopi abelian ise,  $v'$  de homotopi asosyatif veya homotopi abeliandır, zira  $lvv' = lv((fvf) \circ v \circ g) \sim (fvfvf) \circ lvv \circ g$  ve  $lvv \sim vv'l$  olduğundan,  $(fvfvf) \circ lvv \circ g \sim (fvfvf) \circ v \circ v' \circ g$ . O halde  $lvv' \sim v'vl$  yani  $v'$  homotopi asosyatifdir. Aynı şekilde  $v'$  nün homotopi abelian olduğu gösterilir.

Şayet  $\psi: Q \rightarrow Q'$ ,  $Q$  ve  $v$  için bir homotopi invers ise, bu taktirde  $f\psi g: Q' \rightarrow Q'$ ,  $Q'$  ve  $v'$  için bir homotopi inverstir, zira,  $f\psi g = \psi'$  dersek,  $(1, \psi') \circ v' = (1, \psi) \circ ((fvf) \circ v \circ g) = (1, f\psi g) \circ ((fvf) \circ v \circ g) \sim f \circ (1, \psi) \circ v \circ g$ . Halbuki  $(1, \psi) \circ v \sim c$  (sabit tasvir) dir. O halde  $f \circ (1, \psi) \circ v \circ g \sim c'$  (sabit tasvir). Binaenaleyh,  $f\psi g$   $Q'$  ve  $v'$  için bir homotopi inverstir.

Bir  $Q$   $H$  ko-uzayı verilmiş olsun. Herhangibir  $X$  noktalı topolojik uzayı için  $[g_1] [g_2] = [(g_1, g_2) \circ v]$  ile tarif edilen  $[Q; X]$  de bir terkip kanunu vardır. Şayet  $Q$  bir  $H$  ko-grubu ise  $[Q; X]$  bu terkip kanunu ile birlikte bir grup olur şöyleki:

(i) Asosyatiflik:  $[g_1], [g_2], [g_3] \in [Q; X]$  ise,

$$[g_1]([g_2][g_3]) = [g_1]([(g_2, g_3) \circ v]) = [(g_1, (g_2, g_3) \circ v) \circ v] \\ = [(g_1, (g_2, g_3)) \circ (lvv) \circ v] . \text{ Halbuki, } (lvv) \circ v \sim (vvl) \circ v \text{ idi.}$$

Dolayısıyla ,

$$[g_1]([g_2][g_3]) = [((g_1, g_2), g_3) \circ (vvl) \circ v] = ([g_1][g_2])[g_3] .$$

(ii) Özdeş eleman:  $[g] \in [Q; X]$  ve  $[q] \in [Q; X] \rightarrow q: Q \rightarrow X$  ve

$q(Q) = x_0$  (taban nokta)  $\in X$  olsun.

$[g][q] = [(g, q) \circ v] = [g \circ (1, c) \circ v]$  . Halbuki,  $(1, c) \circ v \sim 1_Q$  olduğundan  $g \circ (1, c) \circ v \sim g \circ 1_Q = g$ . O halde,  $[g][q] = [g]$ . Binaenaleyh,  $q: Q \rightarrow X$  sabit tasvir olmak üzere  $[q] \in [Q; X]$  özdeş elemandır.

(iii) Invers eleman:  $\psi: Q \rightarrow Q'$ ,  $v$  ve  $Q$  için bir homotopi invers olsun.

$g: Q \rightarrow X$  bir tasvir ise,  $g \circ \psi: Q \rightarrow X$  bir tasvirdir. O halde  $[g \circ \psi] \in [Q; X]$  dir.

$$[g] [go\psi] = [(g, go\psi)ov] = [go(1, \psi)ov] .$$

Halbuki,  $(1, \psi)ov \sim c$  olduğundan  $go(1, \psi)ov \sim goc = q$ . Binaenaleyh,  $[g] [go\psi] = [q] \in [Q; X]$  (özdeş eleman).

Şayet  $f: X \rightarrow Y$  ise, bu taktirde  $f_{\#}: [Q; X] \rightarrow [Q; Y]$  bir homomorfizmdir. Zira,  $[g_1], [g_2] \in [Q; X]$  ise,

$$f_{\#}([g_1] [g_2]) = f_{\#}([(g_1, g_2)ov]) = [fo(g_1, g_2)ov] .$$

$$f_{\#}([g_1]) f_{\#}([g_2]) = [fog_1] [fog_2] = [(fog_1, fog_2)ov] = [fo(g_1, g_2)ov] .$$

Bu halde  $f_{\#}([g_1] [g_2]) = f_{\#}([g_1]) f_{\#}([g_2])$ .

**Teorem 1.2.3.** Farzedelim ki  $Q$ , bir noktalı uzay, öyleki  $\Pi_Q$ , değerlerini gruplar kategorisinde alsın. Bu taktirde,  $Q$  bir  $H$  ko-grubudur (abeliandır, şayet  $\Pi_Q$  değerlerini abel grupları kategorisinde alırsa). Üstelik herhangi bir  $X$  uzayı için,  $\Pi_Q(X)$  üzerindeki grup yapısı Teorem 1.2.1 ile verilenin aynısıdır.

**İspat.**  $q_1: Q \rightarrow QvQ$  ve  $q_2: Q \rightarrow QvQ$  projeksiyonlar olsun,  $v: Q \rightarrow QvQ$  bir tasvir  $\rightarrow [v] = [q_1] * [q_2]$  olmak üzere  $*$   $[Q; QvQ]$  grubunda bir kompozisyon kaidesidir. Herhangi  $f, g: Q \rightarrow X$  tasvirleri için  $(f, g)_{\#}: [Q; QvQ] \rightarrow [Q; X]$  bir homomorfizmdir ve,

$$\begin{aligned} [(f, g)ov] &= (f, g)_{\#} [v] = (f, g)_{\#} ([q_1] * [q_2]) = (f, g)_{\#} [q_1] * (f, g)_{\#} [q_2] \\ &= [f] * [g] . \end{aligned}$$

Bu göstermektedir ki,  $[Q; X]$ ,  $v$  ko-çarpma tasviri tarafından istintaç edilmiştir.

$X$  bir tek nokta uzayı olsun. Birtek  $Q \rightarrow X$  tasviri,  $[Q; X]$  grubunun özdeş elemanını temsil eder. Birtek  $X \rightarrow Q$  tasviri bir  $[Q; X] \rightarrow [Q; Q]$  homomorfizmini istintaç ettiğinden dolayı  $Q \rightarrow X \rightarrow Q$  kompozisyonu, ki bu  $c: Q \rightarrow Q$  sabit tasviridir,  $[Q; Q]$  nun özdeş elemanını temsil eder. Buradan  $(1_Q, c)ov \sim 1_Q$  ve  $(c, 1_Q)ov \sim 1_Q$ . Bundan dolayı  $Q$  bir  $H$  ko-uzayıdır.

$v$  nün homotopi asosyatif olduğunu ispat etmek için  $p_1, p_2, p_3: Q \rightarrow QvQvQ$  projeksiyonlarını gözönüne alalım. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} [(1vv)ov] &= (1vv)_{\#} [v] = (1vv)_{\#} [q_1] * (1vv)_{\#} [q_2] = [p_1] * [(p_2, p_3)ov] \\ &= [p_1] * ([p_2] * [p_3]) \text{ dır. Benzer şekilde,} \end{aligned}$$

$[(vvl)ov] = ([p_1] * [p_2]) * [p_3]$  dür.  $[Q; QvQvQ]$  nun bir asosyatif ko-çarpması olduğundan  $(1vv)ov \sim (vvl)ov$ .

$Q$  nun bir homotopi inversi olduğunu göstermek için  $\psi: Q \rightarrow Q \rightarrow [1_Q] * [\psi] = [c]$  olsun, bu taktirde  $(1_Q, \psi)ov \sim c$ . Aynı zamanda,  $[\psi] * [1_Q] = [c]$  olup böylece  $(\psi, 1_Q)ov \sim c$ . Böylelikle  $\psi$ ,  $Q$  nun bir homotopi inversidir. Bu ispat etmektedir ki,  $Q$  bir  $H$  ko-grubudur, ve  $\Pi_Q$  daki ko-çarpma  $Q$  üzerinden istintaç edilir. Şayet  $[Q; QvQ]$  bir abelian grup ise, benzer düşünce ile  $Q$  nun bir abelian  $H$  ko-grubu olduğu gösterilir.

## BÖLÜM II

## DEMET TEORİSİ

Bu bölümde evvelâ, genel olarak demet kavramı ele alınmış ve demetlerle ilgili, temel tarif ve teoremler verilmiştir. Daha sonra demetlerin topolojik ve cebirsel yapıları üzerinde durulmuş ve bir cebirsel yapıyı da haiz olabilecekleri görülmüştür. Nihayet, cebirsel yapıları demetlere misâl teşkil edecek şekilde iki önemli demet incelenmiştir.

## 2.1. Demet Kavramı

Tarif 2.1.1.  $X, S$  iki topolojik uzay ve  $\pi: S \rightarrow X$  lokal topolojik bir tasvir olsun. Bu taktirde,  $(S, \pi)$  çiftine  $X$  üzerinde bir demet denir.

Her  $x \in X$  için  $S_x = \pi^{-1}(x)$  ye  $x$  üzerinde  $(S, \pi)$  nin veya sadece  $S$  nin sapı denir.

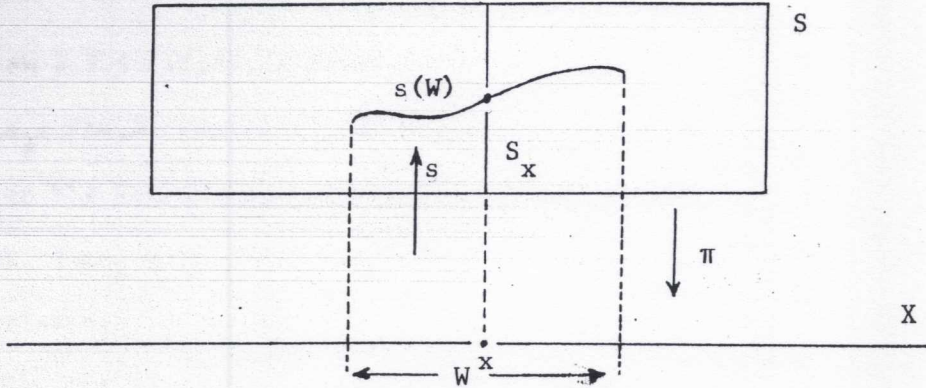
Tarif 2.1.2.  $(S, \pi)$ ,  $X$  üzerinde bir demet olsun.  $S^* \subset S$  açık bir cümle ve  $\pi^* = \pi|_{S^*}$  ise, bu taktirde,  $(S^*, \pi^*)$  a  $S$  nin altdemeti denir.

Not. Herbir altdemet bir demettir. Bunu görebilmek için  $\pi^*: S^* \rightarrow X$  tasvirinin lokal topolojik olduğunu göstermek kâfidir. Gerçekten, her  $\sigma \in S^*$  için  $\exists U(\sigma) \subset S$  ve  $V(\pi(\sigma)) \subset X$  açık civarı  $\ni \pi|_{U}: U \rightarrow V$  tasviri topolojiktir. Fakat  $U^* = U \cap S^*$  ve  $V^* = \pi(U^*)$  sırasıyla,  $\sigma$  nın  $S^*$  da ve  $\pi(\sigma)$  nın  $X$  de açık civarlarıdır. Diğer taraftan,  $\pi^*|_{U^*}: U^* \rightarrow V^*$  topolojiktir.

$W \subset X$  açık, ve  $\pi^{-1}(W) = S|_W$ ,  $S$  nin  $W$  ye tahditi ise, bu taktirde,  $S|_W$  açıktır ve  $(S|_W, \pi|(S|_W))$  de bir demettir,  $S$  nin  $W$  ye tahditidir [ 7 ].

Tarif 2.1.3.  $(S, \pi)$ ,  $X$  üzerinde bir demet,  $W \subset X$  açık bir cümle, ve  $s: W \rightarrow S$  sürekli bir tasvir olsun, öyleki  $\pi \circ s = 1_W$ . Bu taktirde  $s$  ye  $S$  nin  $W$  üzerinde kesiti denir.

$S$  nin  $W$  üzerindeki kesitlerinin tamamını  $\Gamma(W,S)$  ile göstereceğiz.



**Teorem 2.1.1.**  $(S,\pi)$ ,  $X$  üzerinde bir demet,  $W \subset X$  bir açık cümle ve  $s \in \Gamma(W,S)$  olsun. Bu takdirde  $\pi|s(W) : s(W) \rightarrow W$  topolojiktir ve  $s = (\pi|s(W))^{-1}$ .

**İspat.**  $x \in W$  için,  $\pi \circ s = 1_W$  gözönünde tutulursa,

$$s \circ (\pi|s(W)) \circ s(x) = s \circ (\pi \circ s)(x) = s(x).$$

**Teorem 2.1.2.**  $(S,\pi)$ ,  $X$  üzerinde bir demet,  $W \subset X$  bir açık cümle ve  $s:W \rightarrow S$  bir tasvir olsun, öyleki  $\pi \circ s = 1_W$ . Bu takdirde,  $s \in \Gamma(W,S)$  yalnız ve yalnız  $s(W)$ ,  $S$  de açık ise.

**İspat.** Farzedelim ki,  $s$  süreklidir.  $\sigma_0 \in s(W)$  ve  $x_0 = \pi(\sigma_0) \Rightarrow s(x_0) = \sigma_0$ . Üstelik,  $V(x_0) \subset W$ ,  $U(\sigma_0) \subset S$  açık civarları vardır  $\exists \pi|U:U \rightarrow V \cap W$  topolojiktir. Süreklilik hipotezinden dolayı  $\exists V'(x_0) \subset V \ni s(V') \subset U$ . Binaenaleyh,  $(\pi|U) \circ (s|V') = (\pi \circ s)|V' = 1_{V'}$ . Fakat bu takdirde,  $(\pi|U)^{-1}(V') = s(V') \subset s(W)$   $\sigma_0$  in açık bir civarıdır. Yani,  $\sigma_0$ ,  $s(W)$  nin bir iç noktasıdır.

Farzedelim ki,  $s(W)$  açıktır,  $x_0 \in W$  ve  $\sigma_0 = s(x_0)$ . Bu takdirde  $\exists V(x_0) \subset W$ ,  $U(\sigma_0) \subset s(W)$  açık civarları  $\exists \pi|U:U \rightarrow V$  topolojiktir. Şimdi  $s = (\pi|s(W))^{-1}$  ve dolayısıyla  $s|V = (\pi|U)^{-1}$  ve bu tasvir  $x_0$  da süreklidir.

**Teorem 2.1.3.**  $(S,\pi)$ ,  $X$  üzerinde bir demet ve  $\sigma \in S$  olsun. Bu takdirde, bir  $V \subset X$  açık cümlesi ve  $\sigma \in s(V)$  şartını sağlayan bir  $s \in \Gamma(V,S)$  kesiti vardır.

İspat.  $x = \pi(\sigma)$  olsun.  $U(\sigma) \subset S$  ve  $V(x) \subset X$  açık civarlarını  $\pi|U:U \rightarrow V$  topolojiktir. Bu durumda,  $V$  ve  $s = (\pi|U)^{-1}$  istenen şartları yerine getirir.

Teorem 2.1.4.  $(S, \pi)$ ,  $X$  üzerinde bir demet ve  $W \subset X$  bir açık cümle olsun. Şayet  $s_1, s_2 \in \Gamma(W, S)$  kesitleri bir  $x \in W$  noktasında eşit iseler:  $s_1(x) = s_2(x)$ , bu taktirde bir  $V(x) \subset W$  açık civarında eşittirler:  $s_1|V = s_2|V$ .

İspat.  $\sigma = s_1(x) = s_2(x)$  vazedelim. Bu taktirde  $U = s_1^{-1}(W_1) \cap s_2^{-1}(W_2)$ ,  $\sigma$  nın bir açık civarlarıdır, ve  $\pi|U:U \rightarrow V = \pi(U) \subset W$  tasviri topolojiktir. Dolayısıyla  $s_1|V = (\pi|U)^{-1} = s_2|V$ .

Tarif 2.1.4.  $(S_1, \pi_1), (S_2, \pi_2)$ ,  $X$  üzerinde iki demet olsun.

1.  $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$  sapları muhafaza ediyor denir, şayet  $\pi_2 \circ \varphi = \pi_1$  ise. (Dolayısıyla,  $\varphi((S_1)_x) \subset (S_2)_x$ ,  $\forall x \in X$ .)

2. Demet morfizmi diye, sapları muhafaza eden sürekli  $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$  tasvirlerine denir.

3. Demet izomorfizmi diye, sapları muhafaza eden topolojik  $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$  tasvirlerine denir. Bu taktirde,  $S_1$  ve  $S_2$  demetlerine izomorfiktir veya izomorftur denir.

Teorem 2.1.5.  $(S_i, \pi_i)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $X$  üzerinde iki demet ve  $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$  sapları muhafaza eden bir tasvir olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler muadildirler.

1.  $\varphi$  bir demet morfizmidir.
2. Herbir  $W \subset X$  açık cümlesi ve herbir  $s \in \Gamma(W, S_1)$  kesiti için,  $\varphi \circ s \in \Gamma(W, S_2)$ .
3. Herbir  $\sigma \in S_1$  için bir  $W \subset X$  açık cümlesi ve bir  $s \in \Gamma(W, S_1)$  kesiti vardır  $\ni \sigma \in s(W)$  ve  $\varphi \circ s \in \Gamma(W, S_2)$ .

İspat. 1.  $\varphi$  sürekli,  $W \subset X$  açık ve  $s \in \Gamma(W, S_1)$  ise, bu taktirde,  $\varphi \circ s$  de sürekli dir. Üstelik  $\pi_2 \circ (\varphi \circ s) = (\pi_2 \circ \varphi) \circ s = \pi_1 \circ s = 1_W$ . Dolayısıyla  $\varphi \circ s \in \Gamma(W, S_2)$ .

2.  $\sigma \in S_1$  ise, bu taktirde bir  $W \subset X$  açık cümlesi ve bir  $s \in \Gamma(W, S_1)$  vardır öy-

leki  $\sigma \in s(W)$ . 2. deki şartlar sağlanmış ise, bu taktirde  $\varphi \in \Gamma(W, S_2)$ . 3. deki şartlar altında,  $s: W \rightarrow s(W)$  topolojiktir. Dolayısıyla,  $\varphi|_{s(W)} = (\varphi \circ s) \circ s^{-1}: s(W) \rightarrow S_2$  süreklidir ve binaenaleyh  $\varphi, \sigma$  da süreklidir.

Not. Bir  $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$  demet morfizmi, her  $W \subset X$  açık cümlesi için bir  $\varphi_*: \Gamma(W, S_1) \rightarrow \Gamma(W, S_2)$  tasvirini intac eder öyle ki,  $\varphi_*(s) = \varphi \circ s$ . [7,8]

Tarif 2.1.5. Farzedelim ki, her bir  $W \subset X$  açık cümlesine bir  $M_W$  cümlesi tekabül ediyor, ve her bir  $(V, W)$ ,  $V \subset W$ , açık cümle çifti için bir

$\gamma_{W,V}: M_W \rightarrow M_V$  tasviri verilmiştir öyle ki,

$$1. \text{ Her } W \subset X \text{ açık için, } \gamma_{W,W} = 1_{M_W}$$

$$2. U \subset V \subset W \implies \gamma_{V,U} \circ \gamma_{W,V} = \gamma_{W,U}$$

Bu taktirde  $\{X, M_W, \gamma_{W,V}\}$  kolleksiyonuna öndemet denir.  $\gamma_{W,V}$  tasvirine tahdit edici tasvirler denir. [8,9].

Her bir  $(S, \pi)$  demetine tabii şekilde bir öndemet tekabül eder. Nitekim,  $V, W, X$  in açık cümleleri ise  $\exists V \subset W$ ,  $M_W = \Gamma(W, S)$  ve  $\gamma_{W,V}(s) = s|_V$ ,  $s \in M_W$  vazedilebilir. Bu taktirde,  $\{X, \Gamma(W, S), \gamma_{W,V}\}$  bir öndemettir. Bu öndemete,  $S$  demetinin kanonik öndemeti denir.

Teorem 2.1.6. Her bir  $\{X, M_W, \gamma_{W,V}\}$  öndemetine bir demet tekabül ettirilebilir (İndüktif limiti teşkil etmek suretiyle). [1,8].

Tarif 2.1.6.  $(S_1, \pi_1), \dots, (S_L, \pi_L)$ ,  $X$  üzerinde demetler olsun.  $W \subset X$  açık için,  $M_W = \Gamma(W, S_1) \times \dots \times \Gamma(W, S_L)$  kartezyen çarpımını teşkil edelim.  $s = (s_1, \dots, s_L) \in M_W$  ve  $V \subset W$  açık için  $\gamma_{W,V}(s) = (s_1|_V, \dots, s_L|_V)$  olsun. Bu taktirde,

$\{X, M_W, \gamma_{W,V}\}$  bir öndemettir. Bu öndemetin tarif ettiği demete ;

$$S^* = S_1 \oplus \dots \oplus S_L, \text{ Whitney toplamı denir.}$$

Teorem 2.1.7.  $(S_i, \pi_i)$ ,  $i=1, \dots, L$ ,  $X$  üzerinde demetler ve  $S^* = S_1 \oplus \dots \oplus S_L$  Whitney toplamları olsun. Bu taktirde, her  $x \in X$  için  $(W, (s_1, \dots, s_L))_x \rightarrow$

$(s_1(x), \dots, s_L(x))$  şeklinde tarifli bir  $\varphi: S_x^* \rightarrow (S_1)_x \times \dots \times (S_L)_x$  bijeksiyonu vardır.

İspat. a)  $\lambda=1, 2$   $x \in (W_1 \cap W_2)$  için  $s_\lambda = (s_1^\lambda, \dots, s_L^\lambda) \in \Gamma(W_\lambda, S)$  olsun.  $(W_1, s_1) \overset{x}{\sim} (W_2, s_2)$  dir, yalnız ve yalnız  $\exists V(x) \subset W_1 \cap W_2$  civarı varsa öyle ki,

$$(s_1^1|_V, \dots, s_L^1|_V) = (s_1^2|_V, \dots, s_L^2|_V).$$

Bu,  $i=1, \dots, L$  için  $s_i^1(x) = s_i^2(x)$  ile eşdeğerdir. Binaenaleyh,  $(W, (s_1, \dots, s_L))_x \rightarrow (s_1(x), \dots, s_L(x))$  şeklinde tarif edilen tasvir injektiftir.

b) Şayet  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_L) \in (S_1)_x \times \dots \times (S_L)_x$  ise ve  $\sigma_i = s_i^*(x) \ni s_i^* \in \Gamma(W_i, S_i)$  dersek, bu taktirde  $W = \bigcap_{i=1}^L W_i$   $x$  in bir civarıdır ve  $s_i^*|_W = s_i \in \Gamma(W, S_i)$  dir. Netice olarak  $s = (s_1, \dots, s_L) \in M_W$  dedir, ve  $\gamma_s, \gamma_s(x) = (W, s)_x \rightarrow s(x) = \sigma$  olacak şekilde  $S$  demetinin bir kesitidir. Dolayısıyla da yukarıdaki tarifli tasvir surjektiftir.

Bundan sonra  $(S_1 \oplus \dots \oplus S_L)_x$  i  $(S_1)_x \times \dots \times (S_L)_x$  ile özdeşliyoruz.

Aynı şekilde gösterilebilir ki,  $\Gamma(W, S_1 \oplus \dots \oplus S_L)$  ile  $\Gamma(W, S_1) \times \dots \times \Gamma(W, S_L)$  cümleleri özdeşlenebilir. [8]

Tarif 2.1.1. , Tarif 2.1.3 de  $S$  demetinin ve  $s \in \Gamma(W, S)$  kesitinin tarifleri verildi. Görüldü ki,  $W \subset X$ ,  $X$  de açık ise ;  $\pi$  lokal topolojik olduğundan,  $s(W)$ ,  $S$  de açıktır, ve  $S$  nin açık cümleleri bu tip açık cümlelerin birleşimidir. Diğer taraftan, yine gördük ki,  $s_1, s_2 \in \Gamma(W, S)$  ve bir  $x \in W$  için  $s_1(x) = s_2(x)$  ise, bu taktirde bütün  $W$  de  $s_1 = s_2$  . Nihayet  $S$  nin herbir elemanına,  $S$  ye ait kesitlerin birer nüvesi gözü ile bakılabilir.

Bizi alâkadar eden demetlerde bir de cebirsel yapı vardır. Meselâ,

Tarif 2.1.7. Bir  $X$  topolojik uzayı üzerinde Abelyen grupların bir demeti bir  $S$  topolojik uzayı ile beraber bir  $\pi: S \rightarrow X$  tasviridir, öyleki aşağıdaki şartlar sağlanmıştır:

(i)  $\pi$  bir lokal topolojik tasvirdir.

(ii) Herbir  $x \in X$  için  $\pi^{-1}(x) = S_x$  sapı bir Abel grubudur.

(iii)  $S \oplus S \xrightarrow{+} S$  (yani  $(\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow \sigma_1 + \sigma_2$ ) süreklidir. Yani Grup işlemleri  $S$  nin topolojisinde süreklidir. [7].

(i) Şartının manası şudur; her  $\sigma \in S$  noktası için  $\sigma$  nın  $S$  de bir  $U$  ve  $\pi(\sigma)$  nın  $X$  de bir  $W$  açık civarı mevcuttur öyleki  $\pi$  tasvirinin  $U$  ya tahditi,  $\pi|_U: U \rightarrow \pi(U) = W$  bir topolojik tasvirdir. Bu taktirde, herbir  $x \in W$  noktası  $\pi$  tasviri altında bir  $\sigma \in U$  noktasının resmidir ve  $(\pi|_U)^{-1}: W \rightarrow U$  tasviri, yani herhangi  $x \in W$  noktasını bir  $\sigma \in U$  noktasına gönderen tasvir, bir  $s: W \rightarrow S$  topolojik tasviridir. Daha evvelce de belirtildiği gibi,  $\pi$  tasvirinin lokal tersleri  $S$  demetinin kesitleridir, netice olarak açıktır ki, herhangi  $\sigma \in S$  noktasından  $\pi(\sigma) \in X$  in bir açık civarı üzerinde, demetin enaz bir kesiti geçer.

(ii) Şartının manası açıktır. (iii) Şartını dikkatle tetkik etmek gerekir :  $S \times S$  kartezyen çarpımında  $SoS$  aşağıdaki tarifli bir altcümle olsun:

$$SoS = \{(\sigma_1, \sigma_2) \in S \times S : \pi(\sigma_1) = \pi(\sigma_2)\}$$

Buradan da anlaşılacağı üzere  $\pi$  nin bir  $\pi^*: SoS \rightarrow X$  tasvirine bir tabii temditi vardır (Hakikatten, şüphesiz  $S \times S$ ,  $X \times X$  kartezyen çarpımı üzerinde bir demettir, ve  $SoS$ ,  $\pi^{-1}(X) \subset S \times S$  altcümlesidir, burada  $X \subset X \times X$  diagonal olarak dahil edilmiştir). Şimdi,  $S$  nin saplarında grup işlemleri  $(\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow \sigma_1 - \sigma_2$  şeklinde iyi tarifli bir tasvir gerektirir. Bu tasvir sürekli ise üçüncü şart da sağlanmış olur.

Şimdi, farzedelim ki, enazbir  $W \subset X$  açık cümlesi için,  $s_1, s_2 \in \Gamma(W, S)$  dir. Bu taktirde  $x \rightarrow (s_1(x), s_2(x))$  tasviri  $W$  den  $SoS$  ye bir tasvirdir ve buradan  $SoS \rightarrow S$  tasviri ile terkibi  $x \rightarrow (s_1(x) - s_2(x)) \in S$  tasviridir, üstelik süreklidir. Şu halde,  $s_1 - s_2$   $W$  üzerinde bir kesittir ve dolayısıyla,  $\Gamma(W, S)$  cümlesi tabii bir gruptur. Açıkca  $\Gamma(W, S)$  nin sıfır elemanı herbir  $x \in W$  noktasına  $0_x \in S_x$  sıfır elemanını tekabül ettiren bir kesittir.  $\Gamma(W, S)$  nin grup

işlemleri altında kapalı olma şartı (iii) şartına eşdeğerdir.

Tarif 2.1.8.  $X$  üzerinde bir  $S$  demetine  $C$ -cebir demeti denir, şayet şu şartlar sağlanıyorsa:

- (1) Herbir  $S_x$  sapı, 1 li komütatif  $C$ -cebirdir.
- (2)  $S \oplus S \xrightarrow{+} S$  (yani,  $(\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow \sigma_1 + \sigma_2$ ) süreklidir.
- (3)  $S \oplus S \xrightarrow{\cdot} S$  (yani,  $(\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow \sigma_1 \cdot \sigma_2$ ) süreklidir.
- (4) Herbir  $c \in C$  için  $S \xrightarrow{c \cdot} S$  (yani,  $\sigma \rightarrow c \cdot \sigma$ ) süreklidir.
- (5)  $I: x \rightarrow I_x \in S_x \Rightarrow I \in \Gamma(X, S)$ .

Neticeler:

1.  $0: x \rightarrow 0_x \in S_x, \Gamma(X, S)$  dedir.
2.  $S \xrightarrow{-} S$  ( $\sigma \rightarrow -\sigma$  özelliğini haiz) süreklidir.
3. Şayet  $W \subset X$  açık ise, bu taktirde  $\Gamma(W, S)$  de bir  $C$ -cebirdir. [8,9]

Tarif 2.1.9.  $\mathcal{A}$ ,  $X$  üzerinde  $C$ -cebirlerin bir demeti, ve  $S$ ,  $X$  üzerinde bir demet olsun.  $S$  ye  $\mathcal{A}$ -modüllerin demetidir denir, şayet şu şartlar sağlanıyorsa;

1. Her  $x \in X$  için,  $S_x$  1 li bir  $\mathcal{A}_x$ -modüldür.
2.  $S \oplus S \xrightarrow{+} S$  süreklidir.
3.  $\mathcal{A} \oplus S \xrightarrow{+} S$  süreklidir.

Not. Herbir  $W$  için  $\Gamma(W, S)$  bir  $\Gamma(W, \mathcal{A})$ -modüldür.

## 2.2 Demetlere Misaller.

### 2.2.1. Yakınsak kuvvet serilerinin Demeti.

$z^0 \in C^n$  bir nokta olsun.  $z^0$  ın bir civarında tarifli fonksiyonları gözönüne alalım. İki fonksiyona eşdeğerdir diyeceğiz, şayet bu iki fonksiyon  $z^0$  ın bir civarında çakışıyorlarsa. Bu bir eşdeğerlik bağıntısı tarif eder, ve  $f$  nin  $z^0$  daki eşdeğerlik sınıfı  $f_z^0$  ile gösterilir, ve  $f$  nin  $z^0$  daki nüvesi (veya fonksiyon elemanı) denir.  $f$  bir holomorf fonksiyon ise  $f_z^0$  nüvesi

$z^0$  etrafında yakınsak bir kuvvet serisinden ibarettir:  $f_z = \sum_{v=0}^{\infty} a_v (z-z^0)^v$ .

Binaenaleyh,  $z^0 \in C^n$  ise, bu taktirde,  $\mathcal{O}_{z^0} = (H_n)$ ,  $z^0$  etrafında yakınsak

$f_z$  kuvvet serilerinin  $C$ -cebrini veya halkasını gösterir.

Demek ki, her  $z \in C^n$  için bir  $\mathcal{O}_z$   $C$ -cebrine vardır.

$\mathcal{O}_z$   $C$ -cebirlerinin  $\mathcal{O} = \bigcup_{z \in C^n} \mathcal{O}_z$  ayrık birleşimi  $C^n$  üzerinde bir cümledir.

$\pi: \mathcal{O} \rightarrow C^n$  tabii projeksiyonu  $f_z$  yi  $f_z$  kuvvet serisinin etrafında açıldığı  $z$  noktasına dönüştürür.

$\mathcal{O}$  cümlesi üzerinde tabii bir topoloji vardır öyleki bu topoloji  $\pi$  yi sürekli bir tasvir yapar ve herbir  $\mathcal{O}_z$  sapı üzerinde diskret bir topoloji tevhit eder. Gerçekten,  $f_z \in \mathcal{O}$  ise, bir  $U(z^0) \subset C^n$  açık civarı ve  $U$  üzerinde holomorf bir  $f$  fonksiyonu vardır  $\ni f_z$  serisi  $U$  da  $f$  ye üniform yakınsaktır. Bu kere,  $f$   $U$  nun herbir  $z$  noktasında yakınsak bir kuvvet serisine açılabilir. Böylece,  $f$  bir  $s: U \rightarrow \mathcal{O}$  tasvirini istintaç eder öyleki,

1.  $\pi \circ s = 1_U$ .

2.  $s(z^0) = f_z \in s(U)$ .

Binaenaleyh,  $s(U) = \bigcup_{z \in U} f_z$  açık cümle olarak tarif edilirse, bu gibi cümlelerin kolleksiyonu da açık cümlelerin tabanını teşkil ettiğinden  $\mathcal{O}$  da bir topoloji tarif edilmiş olur. [1,8]

Tarif 2.2.1.  $\mathcal{O}$  ya yukarıdaki topoloji uygulandığı taktirde  $\mathcal{O}$  topolojik uzayına yakınsak kuvvet serilerinin demeti denir.

$$\mathcal{O}_z = \pi^{-1}(z), \text{ } C\text{-cebrine demetin sapı denir.}$$

$\pi$  lokal topolojiktir ve  $\mathcal{O}$  daki cebirsel operasyonlar bu topolojide süreklidirler. [1]

Binaenaleyh,  $\mathcal{O}$  bir  $C$ -cebir demeti hatta bir  $\mathcal{O}$ -modül demetidir. [9,11,12]

Not.  $B \subset C^n$  bir açık cümle olsun.  $B$  de holomorf bir  $f$  fonksiyonundan,  $B$

nin herbir  $z$  noktasına, bu noktanın üzerinde bir  $f_z$  nüvesini karşılık tutan  $f: B \rightarrow \mathcal{O}$  tasviri anlaşılabilir.

$\mathcal{O}_z$  sıfır bölüni olmayan bir tamlık bölgesi olduğundan her  $z \in B$  için  $M_z = \{f_z/g_z : f_z, g_z \in \mathcal{O}_z, g_z \neq 0\}$  bölüm cismini teşkil edebiliriz.  $M = \bigcup_{z \in B} M_z$  cümlesinde şu şekilde bir topoloji tarif edebiliriz:  $\varphi \in M$  olsun. Bu taktirde  $\varphi \in M_{z^0}$  ve  $\varphi = f_{z^0}/g_{z^0}$ , burada  $f, g$   $z^0$  da holomorftur, ve birtek çarpanlara ayrılıştan dolayı  $f$  ve  $g$   $z^0$  da rölatif asal alınabilir.  $U = U(z^0)$ ,  $z^0$  in bir civarı olsun öyleki  $f, g$   $U$  da rölatif asaldır. Her  $z \in U$  için  $f_z/g_z$  ile temsil edilen  $M_z$  bölüm cismini gözönüne alalım. Yukarıda olduğu gibi  $\bigcup_{z \in U} f_z/g_z$  birleşimini bir açık cümle, ve bu gibi cümlelerin kolleksiyonunu da topoloji için taban alabiliriz. Böylece  $M$  de bir topoloji tarif edilmiş olur. [ 13 ]

$M_z$  nin elemanlarına,  $z$  üzerinde meromorfik fonksiyonların nüveleri denir. Demek ki,

Tarif 2.2.2.  $B \subset \mathbb{C}^n$  açık cümlesinde bir meromorfik fonksiyon sürekli bir tasvirdir öyleki  $B$  nin herbir noktasına, bu noktanın üzerinde meromorfik bir nüve tahsis eder.

Meromorfik fonksiyonlar bir cisim teşkil ederler.

Bir  $z^0 \in B \subset \mathbb{C}^n$  noktasında bir  $\varphi$  meromorfik fonksiyonu  $z^0$  da holomorf, rölatif asal, iki fonksiyonun bölümü olarak tarif edilir.

2.2.2. Holomorf Fonksiyonların nüvelerinin Demeti.

$B \subset \mathbb{C}^n$  bir bölge olsun. Herbir  $W \subset B$  açık cümlesine  $W$  üzerinde holomorf fonksiyonların  $M_W$  halkasını tekabül ettirelim.  $(V, W)$ ,  $V \subset W$ , açık cümle çifti için  $\gamma_{W,V} : M_W \rightarrow M_V$  tasvirini, öyleki her  $f \in M_W$  için,  $\gamma_{W,V}(f) = f|_V$  şeklinde tarif edelim. Bu taktirde, kolaylıkla gösterilebilir ki,  $\{B, M_W, \gamma_{W,V}\}$

kolleksiyonu bir öndemettir. Teorem 2.1.6 dan dolayı bu öndemete de bir demet tekabül eder. Gerçekten:

$\{(W,f) : W, z \text{ nin bir açık civarı, } f \in M_W\}$  ailesi üzerinde şu eşdeğerlik bağıntısını tarif edelim:  $(W_1, f_1) \sim (W_2, f_2)$  diyoruz yalnız ve yalnız  $z$  nin bir  $V$  açık civarı varsa  $\exists V \subset W_1 \cap W_2$  ve  $s_1|_V = s_2|_V$ , yani  $f_1$  ve  $f_2$   $z$  nin bir civarında aynı kuvvet serisini haiz ise.  $(W,f)$  çiftlerinin eşdeğerlik sınıfını  $(W,f)_z$  ile,  $(W,f)_z$  sınıflarının tamamını ise  $S_z$  ile gösterelim. Eşdeğerlik bağıntısının tarifinden dolayı  $(W,f)_z$  sınıfı  $f_z$  nüvesi ile,  $S_z$  cümlesi  $\mathcal{O}_z$  cümlesi ile özdeşlenebilir. Dolayısıyla,  $S = \bigvee_{z \in B} S_z$  yerine  $\mathcal{O} = \bigvee_{z \in B} \mathcal{O}_z$  yazabiliriz.  $\pi: \mathcal{O} \rightarrow B$  tabii projeksiyon olsun.

$W \subset B$  açık ve  $f \in M_W$  ise, herbir  $f$  elemanına,  $\gamma f(z) = f_z$ ,  $z \in W$  ile tarifli  $\gamma: W \rightarrow \mathcal{O}$  tasvirini karşılık tutuyoruz. Bu taktirde, gösterilebilir ki,

$$T = \{ (\gamma f = s)(W) : W \subset B \text{ açık, } f \in M_W \}$$

$\mathcal{O}$  üzerinde bir topoloji tabanıdır. Dolayısıyla,  $\mathcal{O}$  ya ait açık cümleler  $T$  ya ait elemanların keyfi birleşimleridir.  $\pi$  bu topolojiye nazaran lokal topolojiktir,  $\mathcal{O}$  daki cebirsel operasyonlar bu topolojide süreklidirler. Bu demet  $B \subset \mathbb{C}^n$  üzerinde holomorf fonksiyonların nüvelerinin demeti denir.  $\mathcal{O}$  bir cebir demetidir.

Tarif 2.2.3.  $B$  üzerinde  $\mathcal{O}$ -modüllerin  $S$  demetine  $B$  üzerinde analitik demet denir.

$\mathcal{O}$  bir analitik demettir. [12,13,16]

## BÖLÜM III

Bu bölüm çalışmamızın esasını teşkil etmektedir. Bunun için evvelâ ; Taban cümle olarak bir  $Q$  topolojik uzayını alıp, farklı her  $q_i \in Q$ ,  $i \in I$  noktası için  $(Q, q_i)$  noktali topolojik uzayları teşkil edilmiş ve  $(Q, q_i)$  ile  $(Q, q_j)$ ,  $i, j \in I$ ,  $i \neq j$ , noktali topolojik uzayları aynı homotopi tipinde alındığında birisi  $H$  ko-grubu ise, diğeri de  $H$  ko-grubu olduğundan,  $(Q, q_i)$   $H$  ko-gruplarının herbirine,  $(X, x_0)$  herhangi bir noktali topolojik uzay olmak üzere, farklı  $[(Q, q_i); X]$  grupları tekabül etmektedir. Herbir  $(Q, q)$   $H$  ko-grupları için  $Q$  üzerinde  $H(Q) = \bigvee_{q \in Q} [(Q, q); X]$  cümlesi teşkil edilmiş ve  $\varphi: H(Q) \rightarrow Q$  tabii tasvir, yani her  $\sigma \in H(Q)$  ( $\sigma \in H(Q) \Rightarrow \exists q \in Q$  için  $\sigma \in H(Q)_q = [(Q, q); X] \Rightarrow \sigma = [f]_q$ ) için  $\varphi(\sigma) = \varphi([f]_q) = q$ , olmak üzere  $H(Q)$  üzerinde bir tabii topoloji inşa edilmiş ve bu topolojiye nazaran  $\varphi$  nin lokal topolojik olduğu gösterilerek, yeni bir demet teşkil edilmiştir. Daha sonra bu tip demetler ve altındaki topolojik uzaylar arasında bazı cebirsel topolojik karakterizasyonlar verilmiştir.

3.1.  $H$  Ko-Gruplar üzerinde Demetler.

Burada taban cümle olarak bir  $Q$  topolojik uzayını gözönüne alıp, farklı her  $q_i$ ,  $i \in I$  noktası için  $(Q, q_i)$  noktali topolojik uzayları teşkil edilmiş, öyleki  $(Q, q_i)$  ile  $(Q, q_j)$ ,  $i, j \in I$  noktali topolojik uzayları aynı homotopi tipinde alındığında, bunlardan biri bir  $H$  ko-grubu ise, diğeri de  $H$  ko-grubu olduğu Teorem 1.2.2 den gösterilebilir. Yani  $i, j \in I$ ,  $i \neq j$  için  $(Q, q_i)$  bir  $H$  ko-grubu ise  $(Q, q_j)$  de  $H$  ko-grubudur. Üstelik  $(Q, q_i)$   $H$  ko-gruplarının herbirine farklı  $[(Q, q_i); X]$  grupları tekabül etmektedir ( Burada  $(X, x_0)$  herhangi bir noktali topolojik uzay ve  $[(Q, q_i); X]$  ise  $(Q, q_i)$  den  $(X, x_0)$  a taban noktalarını muhafaza eden sürekli tasvirlerin homotopi sınıflarının

cümlesidir). Gerçekten;  $[ (Q, q_0); X ]$ ,  $[ (Q, q_1); X ]$  iki keyfi grup ve  $[ f ] \in [ (Q, q_0); X ]$ ,  $[ g ] \in [ (Q, q_1); X ]$  keyfi elemanlar ise, bu taktirde  $f(q_0) = x_0$  ve  $g(q_1) = x_0$  dır. Dolayısıyla  $[ f ] \neq [ g ]$  dir.  $[ f ]$  ve  $[ g ]$  keyfi olduklarından  $[ (Q, q_0); X ] \neq [ (Q, q_1); X ]$ . Binaenaleyh, her  $i, j \in I$ ,  $i \neq j$  için  $[ (Q, q_i); X ] \neq [ (Q, q_j); X ]$  dir.

Herbir  $(Q, q)$  H ko-grupları için  $[ (Q, q); X ]$  gruplarının  $H(Q) =$

$\bigvee_{q \in Q} [ (Q, q); X ]$  ayrık birleşimi Q üzerinde bir cümledir.  $\varphi: H(Q) \rightarrow Q$  tabii tasvirini her  $\sigma \in H(Q)$  ( $\sigma \in H(Q) \Rightarrow \exists q \in Q$  için  $\sigma \in H(Q)_q = [ (Q, q); X ] \Rightarrow \sigma = [ f ]_q$ ) için  $\varphi(\sigma) = \varphi([ f ]_q) = q$  şeklinde tarif edelim.

Şimdi,  $H(Q)$  cümlesi üzerinde,  $\varphi$  tasvirini lokal topolojik kılan ve herbir  $H(Q)_q = [ (Q, q); X ]$  sapında diskret bir topoloji tevlid eden, bir tabii topolojinin inşasına geçelim.

$\sigma = [ f ]_q \in H(Q)_q \subset H(Q) \Rightarrow \varphi(\sigma) = \varphi([ f ]_q) = q$  ve  $W \subset Q$  keyfi bir açık cümle olsun. W de bir  $q_0$  keyfi sabit noktasını seçelim. O halde  $W = W(q_0)$  olarak gözönüne alabiliriz. Şimdi  $s: W \rightarrow H(Q)$  tasvirini şöyle tarif edelim.

$q_0 \in Q$  ise  $[ (Q, q_0); X ] \subset H(Q)$  grubu vardır.  $[ f ]_{q_0} \in [ (Q, q_0); X ]$  homotopi sınıfını alalım. O halde  $y \in W$  herhangi bir nokta ise,  $(Q, q_0)$  ve  $(Q, y)$  homotopik eşdeğer olduklarından  $\Phi: (Q, y) \rightarrow (Q, q_0)$  homotopi eşdeğerlilik tasviri vardır. Dolayısıyla,

$$\begin{array}{ccc} (Q, q_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \\ \Phi \uparrow & \nearrow & \\ (Q, y) & \xrightarrow{fo\Phi} & \end{array}$$

üçgen diagramında da görüldüğü gibi  $fo\Phi: (Q, y) \rightarrow (X, x_0)$  a sürekli ve taban noktasını muhafaza eder.  $fo\Phi$  tasvirinin homotopi sınıfı  $[ fo\Phi ]_y \in [ (Q, y); X ]$  dir. O halde  $s(y) = [ fo\Phi ]_y$  diyelim. Bu şekilde tarif edilen s tasviri tek anlamlıdır ve aşağıdaki şartları sağlar;

1) Her  $y \in W$  için  $(\varphi \circ s)(y) = \varphi(s(y)) = \varphi([f \circ \phi]_y) = y$ . O halde  $\varphi \circ s = 1_W$ .

2)  $q_0$ ,  $W$  de keyfi bir nokta olmak üzere  $W = W(q_0)$  için  $s(q_0) = [f \circ 1_{q_0}]_{q_0} = [f]_{q_0} \in s(W)$ . O halde herhangi bir  $y \in W$  için  $s(y) = [f \circ \phi]_y$  olduğundan  $f \circ \phi = h$  dersek  $s(y) = [f \circ \phi]_y = [h]_y$ . Bu taktirde  $s(W) = \bigcup_{y \in W} [h]_y$  olarak yazılabilir.  $s(W)$  yı açık cümle olarak tarif edersek, gösterebiliriz ki,

$$T = \{s(W) : W = W(q) \subset Q\}$$

ailesi  $H(Q)$  üzerinde bir topoloji tabanıdır. Bunun için  $s_1(W_1), s_2(W_2) \in T$  olmak üzere  $s_1(W_1) \cap s_2(W_2) \in T$  olduğunu göstermek kâfidir. Halbuki,

$$(i) s(W) = s_1(W_1) \cap s_2(W_2) \neq \emptyset \Rightarrow \exists [f]_y \in s(W) \ni y \in W(y) = (W_1 \cap W_2)(y)$$

dir. Bu taktirde  $s(W(y)) = s_1(W_1) = s_2(W_2)$ . Dolayısıyla  $s_1(W_1) \cap s_2(W_2) \in T$ .

$$(ii) s_1(W_1) \cap s_2(W_2) = \emptyset \text{ ise, } \emptyset \in T \text{ olduğundan } s_1(W_1) \cap s_2(W_2) \in T.$$

Binaenaleyh,  $T$ ,  $H(Q)$  üzerinde bir topoloji tabanıdır ve  $H(Q)$  nun açık cümleleri  $T$  nin elemanlarının keyfi birleşimleridir. Dolayısıyla, bu topoloji ile birlikte  $H(Q)$  bir topolojik uzaydır.

Şimdi gösterelim ki,  $\varphi: H(Q) \rightarrow Q$  tabii tasviri bir lokal topolojik tasvirir. Bunun için göstermeliyiz ki, her  $\sigma = [h]_y \in H(Q)$ ,  $y \in Q$  için bir  $U(\sigma) \subset H(Q)$  ve  $W(y = \varphi(\sigma)) \subset Q$  açık civarları vardır  $\ni \varphi|_U: U \rightarrow W$  bir topolojik tasvirdir. Halbuki,  $\sigma = [h]_y \in H(Q)$  için  $\varphi(\sigma) = \varphi([h]_y) = y$  idi. Bu taktirde  $y$  yi ihtiva eden  $W$  açık civarı için bir  $s: W \rightarrow H(Q)$  tasviri vardır  $\ni s(y) = \sigma$ . Ayrıca,  $(\sigma) = s(W)$  ve  $\varphi|_U = \varphi^*$  vazedelim.

1.  $\varphi^* = \varphi|_U = s(W): U \rightarrow W$  birebirdir. Zira;  $y \in W$  ve  $s$  tasviri  $(Q, y)$  den  $(X, x_0)$  a taban noktalarını muhafaza eden sürekli tasvirlerin homotopi sınıfı olarak tarif edildiğinden, herhangi  $\sigma_1, \sigma_2 \in s(W)$  için  $W$  de sırasıyla  $y_1, y_2 \in W$  olan noktalar vardır  $\ni \sigma_1 = s(y_1) = [f \circ \phi]_{y_1}$ ,  $\sigma_2 = s(y_2) = [f \circ \phi]_{y_2}$ .

$$\begin{array}{ccc} (Q, q_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \\ \uparrow \phi & \nearrow f \circ \phi & \\ (Q, y_1) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (Q, q_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \\ \uparrow \phi' & \nearrow f \circ \phi' & \\ (Q, y_2) & & \end{array}$$

şimdi  $\varphi^*(\sigma_1) = \varphi^*(\sigma_2)$  ise, bu demektir ki  $\varphi^*(s(y_1)) = \varphi^*(s(y_2)) \Rightarrow \varphi^*([f \circ \phi]_{y_1}) = \varphi^*([f \circ \phi']_{y_2}) = y_1 = y_2$ , dolayısıyla  $\phi \sim \phi' \Rightarrow f \circ \phi \sim f \circ \phi' \Rightarrow$

$[f \circ \phi]_{y_1} = [f \circ \phi']_{y_2} = \sigma_1 = \sigma_2$ . O halde  $\varphi^*$  birebirdir.

2.  $\varphi^* = \varphi|_{U:U \rightarrow W}$  süreklidir. Zira;  $\sigma \in U = s(W)$  herhangi bir eleman ve  $\varphi^*(\sigma) = y \in W$ ,  $V = V(y) \subset W$  herhangi bir civar olmak üzere  $s(V) \subset U = s(W)$ ,  $\sigma$  nın bir civarıdır ve  $\varphi^*(s(V)) = V \subset W$  dir. Dolayısıyla,  $\varphi^*$  süreklidir.

3.  $\varphi^{*-1} = (\varphi|_U)^{-1} = s:W \rightarrow U = s(W)$  süreklidir. Zira;  $y \in W$  herhangi bir noktada,  $s(y) = \sigma \in U$  ve  $U' = U'(\sigma) \subset U$  de  $\sigma$  nın bir civarı ise, bu taktirde  $(\varphi|_U)(U') \subset W$ ,  $y$  nin  $W$  de bir civarıdır ve  $s((\varphi|_U)(U')) = U'$ . O halde  $s$  süreklidir.

O halde , aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

**Teorem 3.1.1.**  $Q$   $H$  ko-grupları,  $H(Q) = \bigvee_{q \in Q} [(Q, q); X]$  ve  $\varphi: H(Q) \rightarrow Q \ni$  her  $\sigma = [f]_q \in [(Q, q); X]$ ,  $q \in Q$  için  $\varphi(\sigma) = \varphi([f]_q) = q$ , tabii tasviri olsun. Bu taktirde  $H(Q)$  üzerinde tabii bir topoloji vardır  $\ni$  bu topolojiye nazaran  $\varphi$  lokal topolojik bir tasvirdir ve  $(H(Q), \varphi)$  ikilisi bir demettir.

**Tarif 3.1.1.** Teorem 3.1.1 ile elde edilen  $(H(Q), \varphi)$  demetine  $Q$ ,  $H$  ko-gruplarının intaç ettiği grupların demeti denir.

**Tarif 3.1.2.** Herbir  $q \in Q$  için  $[(Q, q); X] = \varphi^{-1}(q)$  grubuna demetin  $q$  üzerindeki sapı denir.

Biliyoruz ki,  $q \in Q$  herhangi bir nokta ise,  $(Q, q)$  noktalı topolojik uzayında,  $q$  yu ihtiva eden bir  $W = W(q)$  açık civarı ve bu civar üzerinde  $\varphi \circ s = 1_W$  şartını sağlayan bir  $s:W \rightarrow H(Q)$  sürekli tasviri vardır. Bu  $s$  tasvirine  $H(Q)$  nun  $W$  üzerindeki kesiti diyelim ve  $H(Q)$  nun  $W$  üzerindeki bütün kesitlerinin

cümlesini de  $\Gamma(W, H(Q))$  ile gösterelim.

**Teorem 3.1.2.**  $(Q, q_1), i \in I$  aynı homotopi tipinden noktalı topolojik uzayların  $H$  ko-grupları,  $(H(Q), \varphi)$ ,  $Q$  nun intaç ettiği grupların demeti ve  $\Gamma(W, H(Q))$ ,  $W$  üzerindeki bütün kesitlerin cümlesi olsun. Bu taktirde  $\Gamma(W, H(Q))$  aşağıda tarifi verilen  $(\cdot)$  operasyonuna nazaran bir gruptur.

**İspat.** Herhangi  $s_1, s_2 \in \Gamma(W, H(Q))$  ve  $y \in W$  için  $\Gamma(W, H(Q))$  daki çarpmayı  $(s_1 \cdot s_2)(y) = s_1(y) \cdot s_2(y)$  şeklinde tarif edelim.  $s_1 \cdot s_2 \in \Gamma(W, H(Q))$  dır. Zira;  $s_1, s_2 \in \Gamma(W, H(Q))$  için  $y \in W$  de  $s_1(y) = [fo\Phi]_y = [h]_y$ ,  $s_2(y) = [fo\Phi']_y = [k]_y$  olsun. O halde  $s_1(y) \cdot s_2(y) = [h]_y \cdot [k]_y = [(h, k)ov]_y \in [(Q, y); X]$ . Dolayısıyla  $s_1 \cdot s_2 \in \Gamma(W, H(Q))$ .

1. Asosyatiflik. Her  $s_1, s_2, s_3 \in \Gamma(W, H(Q))$  için,

$$((s_1 \cdot s_2) \cdot s_3)(y) = (s_1 \cdot s_2)(y) \cdot s_3(y) = (s_1(y) \cdot s_2(y)) \cdot s_3(y) \in [(Q, y); X].$$

$[(Q, y); X]$  bir gurup olduğundan,  $(s_1(y) \cdot s_2(y)) \cdot s_3(y) = s_1(y) \cdot (s_2(y) \cdot s_3(y))$ .

Dolayısıyla,  $((s_1 \cdot s_2) \cdot s_3)(y) = (s_1 \cdot (s_2 \cdot s_3))(y)$ . Bu ise,  $(s_1 \cdot s_2) \cdot s_3 = s_1 \cdot (s_2 \cdot s_3)$  demektir. Yani çarpma asosyatiftir.

2. Özdeş Eleman. Her  $s \in \Gamma(W, H(Q))$  ve  $y \in W$  için  $[(Q, y); X]$  de özdeş eleman,  $[q]$  olmak üzere  $I(y) = [qol_q]_y = [q]_y$  şeklinde tarifli  $I \in \Gamma(W, H(Q))$  kesitini gözönüne alalım. Bu taktirde

$$(I \cdot s)(y) = I(y) \cdot s(y) = [q]_y \cdot [fo\Phi]_y = [q]_y \cdot [h]_y = [(q, h)ov]_y = [ho(c, l)ov]_y.$$

Halbuki  $(c, l)ov \sim 1_Q$  olduğundan  $ho(c, l)ov \sim hol_Q = h$ . O halde  $[ho(c, l)ov]_y = [h]_y = s(y)$ . Aynı şekilde

$$(s \cdot I)(y) = s(y) \cdot I(y) = [fo\Phi]_y \cdot [q]_y = [h]_y \cdot [q]_y = [(h, q)ov]_y =$$

$[ho(l, c)ov]_y$ . Halbuki  $(l, c)ov \sim 1_Q$  olduğundan  $ho(l, c)ov \sim hol_Q = h$ . O halde

$$[ho(l, c)ov]_y = [h]_y = s(y).$$

Dolayısıyla,  $I \in \Gamma(W, H(Q))$  özdeş elemandır.

3. Ters Eleman.  $s \in \Gamma(W, H(Q))$  herhangi bir kesit ve  $\forall y \in W$  için  $s(y) =$

$[fo\phi]_y = [h]_y$  olsun.  $\psi$ ,  $Q$   $H$  ko-grubunun homotopi inversi olmak üzere her  $y \in W$  için  $s^{-1}(y) = [fo\phi\psi]_y = [ho\psi]_y$  şeklinde tarifli  $s^{-1}: W \rightarrow H(Q)$  tasvirini gözönüne alalım.  $s^{-1} \in \Gamma(W, H(Q))$  ve,

$(s \cdot s^{-1})(y) = s(y) s^{-1}(y) = [fo\phi]_y [fo\phi\psi]_y = [h]_y [ho\psi]_y = [(h, ho\psi)ov]_y = [ho(1, \psi)ov]_y$ . Halbuki  $(1, \psi)ov \sim c$  olduğundan  $ho(1, \psi)ov \sim hoc = q$ . Binaenaleyh,

$$(s \cdot s^{-1})(y) = [h]_y [ho\psi]_y = [ho(1, \psi)ov]_y = [q]_y = I(y).$$

Ayrıca,

$$(s^{-1} \cdot s)(y) = s^{-1}(y) s(y) = [ho\psi]_y [h]_y = [(ho\psi, h)ov]_y = [ho(\psi, 1)ov]_y.$$

Halbuki  $(\psi, 1)ov \sim c$  olduğundan  $ho(\psi, 1)ov \sim hoc = q$ . Dolayısıyla,

$$(s^{-1} \cdot s)(y) = s^{-1}(y) s(y) = [ho\psi]_y [h]_y = [ho(\psi, 1)ov]_y = [q]_y = I(y).$$

0 halde,  $s \cdot s^{-1} = s^{-1} \cdot s$ . Dolayısıyla  $s^{-1} \in \Gamma(W, H(Q))$ ,  $s$  nin tersidir.

Binaenaleyh, verilen çarpma ile birlikte,  $\Gamma(W, H(Q))$  bir gruptur.

### 3.2. Karakterizasyonlar.

$Q_1, Q_2$  herhangi  $H$  ko-grupları ve  $H(Q_1)$ ,  $H(Q_2)$  sırasıyla mütetekabil demetler olsun. Notasyon olarak bunu  $(Q_1, H(Q_1))$  ve  $(Q_2, H(Q_2))$  ile gösterelim.

Tarif 3.2.1.  $(Q_1, H(Q_1))$  ve  $(Q_2, H(Q_2))$  çiftleri verilmiş olsun. Bu çiftler arasında bir ko-homomorfizm vardır denir, ve  $F = (\beta^*, \beta): (Q_1, H(Q_1)) \rightleftarrows (Q_2, H(Q_2))$  yazılır, şayet bir  $F = (\beta^*, \beta)$  çifti varsa öyleki:

1.  $\beta: Q_1 \rightarrow Q_2$  üzerine tasviri açık ve homomorfizmdir.
2.  $\beta^*: H(Q_2) \rightarrow H(Q_1)$  açık ve süreklidir.
3.  $\beta^*, \beta$  ya nazaran sapları muhafaza eder. Yani  $H(Q_1)_{q_1}$ ,  $H(Q_1)$  de ve  $H(Q_2)_{q_2}$ ,  $H(Q_2)$  de saplar ise,  $\beta^*(H(Q_2)_{q_2}) \subset H(Q_1)_{q_1} \ni \beta(q_1) = q_2$ .
4. Her  $\beta(q_1) = q_2 \in Q_2$  için  $\beta^*|_{H(Q_2)_{q_2}}: H(Q_2)_{q_2} \rightarrow H(Q_1)_{q_1}$  bir homomorfizmdir.

Tarif 3.2.2.  $(Q_1, H(Q_1))$  ve  $(Q_2, H(Q_2))$  çiftleri verilmiş olsun, öyleki  $F = (\beta^*, \beta) : (Q_1, H(Q_1)) \xrightarrow{\leftarrow} (Q_2, H(Q_2))$  bir ko-homomorfizmdir.  $F = (\beta^*, \beta)$  ya bir ko-izomorfizm denir, ve  $(Q_1, H(Q_1)) \xrightarrow{F} (Q_2, H(Q_2))$  yazılır, şayet  $\beta^*$  ve  $\beta$  topolojik iseler.

Bu taktirde  $(Q_1, H(Q_1))$  ve  $(Q_2, H(Q_2))$  çiftlerine ko-izomorfiktirler denir.

Teorem 3.2.1.  $(Q_1, H(Q_1))$  ve  $(Q_2, H(Q_2))$  çiftleri verilmiş olsun. Şayet  $f : Q_1 \rightarrow Q_2$  üzerine tasviri açık ve bir homomorfizm olarak verilmiş ise, bu taktirde  $(Q_1, H(Q_1))$  ve  $(Q_2, H(Q_2))$  çiftleri arasında bir ko-homomorfizm vardır.

İspat.  $q_1 \in Q_1$  keyfi sabit bir nokta olsun. Bu taktirde  $\beta(q_1) \in Q_2$  ve  $[ (Q_1, q_1); X ] = H(Q_1)_{q_1} \subset H(Q_1)$ ,  $[ (Q_2, \beta(q_1)); X ] = H(Q_2)_{\beta(q_1)} \subset H(Q_2)$  müteabıl saptalardır.

Şimdi  $X$  herhangi bir noktalı topolojik uzay olmak üzere taban noktaları sırasıyla  $q_1$  ve  $\beta(q_1)$  olan  $(Q_1, q_1)$ ,  $(Q_2, \beta(q_1))$   $H$  ko-gruplarını gözönüne alalım. Şayet  $f_2, g_2 : (Q_2, \beta(q_1)) \rightarrow (X, x_0)$  taban noktalarını muhafaza eden sürekli tasvirler olarak alınırsa, bu taktirde  $f_1, g_1 : (Q_1, q_1) \rightarrow (X, x_0)$  taban noktalarını muhafaza eden sürekli tasvirleri  $f_1 = f_2 \circ \beta$ ,  $g_1 = g_2 \circ \beta$  şeklinde tarif edebiliriz. Yine  $f_2 \sim g_2 \text{ rel. } \beta(q_1)$  ise, kolaylıkla gösterilebilir ki  $f_1 \sim g_1 \text{ rel. } q_1$ . Dolayısıyla,  $[ f ]_{\beta(q_1)} \rightarrow [ f \circ \beta ]_{q_1}$  tek anlamlıdır, ve  $(Q_2, \beta(q_1))$  den  $(X, x_0)$  a taban noktalarını muhafaza eden sürekli tasvirlerin homotopi sınıflarını  $(Q_1, q_1)$  den  $(X, x_0)$  a taban noktalarını muhafaza eden sürekli tasvirlerin homotopi sınıflarına tasvir eder. Yani bu tekabüller  $[ f ]_{\beta(q_1)}$  elemanına bir tek  $[ f \circ \beta ]_{q_1}$  elemanını karşılık tutar.

Şimdi  $q_1 \in Q_1$  i serbest bırakırsak bu taktirde bize bir  $\beta^* : H(Q_2) \rightarrow H(Q_1)$  tasviri verir  $\exists$  her  $[ f ] \in H(Q_2)$  için  $\beta^*([ f ]) = [ f \circ \beta ] \in H(Q_1)$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & \beta^* & \\
 H(Q_1) & \longleftarrow & H(Q_2) \\
 \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\
 Q_1 & \xrightarrow{\beta} & Q_2
 \end{array}$$

1.  $\beta^*$  süreklidir. Zira;  $U_1 \subset H(Q_1)$  herhangi bir açık cümle ise, gösterilebilir ki  $\beta^{*-1}(U_1) = U_2 \subset H(Q_2)$  bir açık cümledir. Gerçekten,  $U_1 \subset H(Q_1)$  bir açık cümle ise,  $W_i \subset Q_1$ ,  $i \in I$  açık civarlar ve  $s_i^1: W_i \rightarrow H(Q_1)$  e kesitler olmak üzere  $U_1 = \bigcup_{i \in I} s_i^1(W_i)$  ve  $\varphi_1(U_1) = \bigcup_{i \in I} W_i$  dır. Dolayısıyla,  $\bigcup_{i \in I} W_i \subset Q_1$  açıktır ve  $\beta$  açık tasvir olduğundan  $\beta(\bigcup_{i \in I} W_i) = \bigcup_{i \in I} \beta(W_i) \subset Q_2$  açıktır. Ayrıca, yine  $\beta$  açık tasvir olduğundan  $\beta(W_i)$ ,  $i \in I$ ,  $Q_2$  de açık civarlardır ve  $\exists s_i^2$ ,  $i \in I$  kesitleri vardır öyleki  $\bigcup_{i \in I} s_i^2(\beta(W_i)) \subset H(Q_2)$  bir açık cümledir. Gösterelim ki,  $U_2 = \bigcup_{i \in I} s_i^2(\beta(W_i))$  dır.

Şimdi  $\sigma_2 = [f]_{\beta(q_1)} \in U_2$  ise  $\exists \sigma_1 = [h]_{q_1} \in U_1$  öyleki  $\beta^*(\sigma_2) = \sigma_1$ .  $\varphi_1(\sigma_1) = \varphi_1([h]_{q_1}) = q_1$ . Dolayısıyla  $\exists i \in I$  için  $q_1 \in W_i$  ise,  $\beta(q_1) = q_2 \in \beta(W_i)$  ve  $\sigma_2 = [f]_{q_2} \in \bigcup_{i \in I} s_i^2(\beta(W_i))$ . O halde  $U_2 \subset \bigcup_{i \in I} s_i^2(\beta(W_i))$ .

Diğer taraftan  $\sigma_2 \in \bigcup_{i \in I} s_i^2(\beta(W_i)) \Rightarrow \exists i \in I$  için  $\sigma_2 \in s_i^2(\beta(W_i))$ .

Burada  $\sigma_2 = [f]_{q_2}$  ise  $\varphi_2(\sigma_2) = q_2$  ve  $f \circ \beta$ ,  $q_1 \in W_i$ ,  $\beta(q_1) = q_2$  olmak üzere  $(Q_1, q_1) \rightarrow (X, x_0)$  e taban noktasını muhafaza eden sürekli bir tasvirdir. Dolayısıyla  $[f \circ \beta]_{q_1} = \sigma_1 \in U_1$ . Buradan  $\sigma_2 \in U_2$ . O halde  $\bigcup_{i \in I} s_i^2(\beta(W_i)) \subset U_2$ . Binaenaleyh,  $U_2 = \bigcup_{i \in I} s_i^2(\beta(W_i))$  dır. Demek ki  $\beta^*$  süreklidir.

2.  $\beta^*$  açık tasvirdir. Zira;  $U_2 \subset H(Q_2)$  herhangi bir açık cümle ise gösterilebilir ki,  $\beta^*(U_2) = U_1 \subset H(Q_1)$  bir açık cümledir. Gerçekten  $U_2 \subset H(Q_2)$  bir açık cümle ise,  $W_i \subset Q_2$ ,  $i \in I$  açık civarlar ve  $s_i^2: W_i \rightarrow H(Q_2)$  ye kesitler olmak üzere  $U_2 = \bigcup_{i \in I} s_i^2(W_i)$  ve  $\varphi_2(U_2) = \bigcup_{i \in I} W_i$  dır. Dolayısıyla,  $\bigcup_{i \in I} W_i \subset Q_2$  açıktır ve  $\beta$  sürekli olduğundan  $\beta^{-1}(\bigcup_{i \in I} W_i) = \bigcup_{i \in I} \beta^{-1}(W_i) \subset Q_1$  açıktır.

Ayrıca, yine  $\beta$  sürekli olduğundan  $\beta^{-1}(W_i)$ ,  $i \in I$ ,  $Q_1$  de açık civarlardır ve  $\exists s_i^1$ ,  $i \in I$  kesitleri vardır, öyleki  $\bigcup_{i \in I} s_i^1(\beta^{-1}(W_i)) \subset H(Q_1)$  bir açık cümledir. Gösterelim ki,  $U_1 = \bigcup_{i \in I} s_i^1(\beta^{-1}(W_i))$  dir.

Şimdi  $\sigma_1 = [h]_{q_1} \in U_1$  ise  $\exists \sigma_2 = [f]_{\beta(q_1)} \in U_2 \ni \beta^*(\sigma_2) = \sigma_1$ .  
 $\varphi_2(\sigma_2) = \varphi_2([f]_{\beta(q_1)}) = \beta(q_1) = q_2$ . Dolayısıyla,  $\exists i \in I$  için  $\beta(q_1) = q_2 \in W_i$  ise,  $q_1 \in \beta^{-1}(W_i)$  ve  $\sigma_1 = [fo\beta]_{q_1} \in \bigcup_{i \in I} s_i^1(\beta^{-1}(W_i))$ . O halde  $U_1 \subset \bigcup_{i \in I} s_i^1(\beta^{-1}(W_i))$ .

Diğer taraftan  $\sigma_1 \in \bigcup_{i \in I} s_i^1(\beta^{-1}(W_i)) \Rightarrow \exists i \in I$  için  $\sigma_1 \in s_i^1(\beta^{-1}(W_i))$ .

Burada  $\sigma_1 = [fo\beta]_{q_1}$  ise  $\varphi_1(\sigma_1) = q_1$  ve  $f, \beta(q_1) = q_2 \in W_i$  olmak üzere

$(Q_2, \beta(q_1)) \rightarrow (X, x_0)$  e taban noktasını muhafaza eden sürekli bir tasviridir.

Dolayısıyla  $[f]_{\beta(q_1)} = \sigma_2 \in U_2$ . Buradan  $\sigma_1 \in U_1$ . O halde  $\bigcup_{i \in I} s_i^1(\beta^{-1}(W_i)) \subset U_1$ . Binaenaleyh,  $U_1 = \bigcup_{i \in I} s_i^1(\beta^{-1}(W_i))$  dir. Demek ki  $\beta^*$  bir açık tasvir-dir.

3.  $\beta^*$  sapları muhafaza eder. Zira; her  $[f]_{q_2} \in H(Q_2)_{q_2}$  sapı için

$\beta^*([f]_{q_2}) = [fo\beta]_{q_1} \in H(Q_1)_{q_1}$  ve  $\beta(q_1) = q_2$ . O halde  $\beta^*(H(Q_2)_{q_2}) \subset H(Q_1)_{q_1} \ni$

$\beta(q_1) = q_2$  dir. Dolayısıyla,  $\beta^*$  sapları muhafaza eder.

4. Her  $\beta(q_1) = q_2 \in Q_2$  için  $\beta^*|_{H(Q_2)_{q_2}} : H(Q_2)_{q_2} \rightarrow H(Q_1)_{q_1}$  bir homomor-fizmdir. Gerçekten,  $\beta(q_1) = q_2 \in Q_2$  için  $f_2, g_2 : (Q_2, q_2) \rightarrow (X, x_0)$  taban noktala-rını muhafaza eden sürekli tasvirler ve  $f_1 = f_2 \circ \beta$ ,  $g_1 = g_2 \circ \beta : (Q_1, q_1) \rightarrow (X, x_0)$  mütেকabil tasvirler ise, bu taktirde  $[f]_{q_2}, [g]_{q_2} \in H(Q_2)_{q_2}$ ,  $[fo\beta]_{q_1}, [go\beta]_{q_1} \in H(Q_1)_{q_1}$  dir.

Şimdi  $\beta^*([f]_{q_2} [g]_{q_2}) = \beta^*([(f, g) \circ \nu]_{q_2}) = [(f, g) \circ \nu \circ \beta]_{q_1}$ .

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\beta^*(\lfloor f \rfloor_{q_2}) \beta^*(\lfloor g \rfloor_{q_2}) &= \lfloor fo\beta \rfloor_{q_1} \lfloor go\beta \rfloor_{q_1} = \lfloor (fo\beta, go\beta)ov' \rfloor_{q_1} \\ &= \lfloor (f,g)o\beta v\beta ov' \rfloor_{q_1}.\end{aligned}$$

Halbuki  $\beta$  homomorfizm olduğundan  $\beta v\beta ov' \sim v\beta$ . Dolayısıyla

$\beta^*(\lfloor f \rfloor_{q_2} \lfloor g \rfloor_{q_2}) = \beta^*(\lfloor f \rfloor_{q_2}) \beta^*(\lfloor g \rfloor_{q_2})$  dir. Binaenaleyh,  $F = (\beta^*, \beta)$  ikilisi bir ko-homomorfizmdir.

Şimdi, aşağıdaki teoremi ispat edebiliriz.

**Teorem 3.2.2.**  $(Q_1, H(Q_1)), (Q_2, H(Q_2)), (Q_3, H(Q_3))$  çiftleri ve  $\beta_1: Q_1 \rightarrow Q_2$   $\beta_2: Q_2 \rightarrow Q_3$  üzerine tasvirleri açık bir homomorfizm olarak verilmiş olsun. Bu taktirde, bir  $F = (\beta^*, \beta): (Q_1, H(Q_1)) \xrightarrow{\leftarrow} (Q_3, H(Q_3))$  ko-homomorfizmi vardır, öyleki  $\beta = \beta_2 \circ \beta_1$ ,  $\beta^* = \beta_1^* \circ \beta_2^*$ .

**İspat.**  $\beta_2 \circ \beta_1: Q_1 \rightarrow Q_3$  üzerine, açık ve homomorfizm olduğundan Teorem 3.2.1 den dolayı  $F = (\beta^*, \beta = \beta_2 \circ \beta_1): (Q_1, H(Q_1)) \xrightarrow{\leftarrow} (Q_3, H(Q_3))$  ko-homomorfizmi vardır.  $\beta^* = \beta_1^* \circ \beta_2^*$  olduğunu gösterebilirsek ispat tamamlanmış olur. Bunun için ise herhangi bir  $\lfloor f \rfloor \in H(Q_3)$  için  $\beta^*(\lfloor f \rfloor) = (\beta_1^* \circ \beta_2^*)(\lfloor f \rfloor)$  olduğunu göstermek kâfidir. Halbuki,

$$\begin{aligned}\beta^*(\lfloor f \rfloor) &= \lfloor fo\beta \rfloor = \lfloor fo(\beta_2 \circ \beta_1) \rfloor = \lfloor (fo\beta_2) \circ \beta_1 \rfloor = \beta_1^*(\lfloor fo\beta_2 \rfloor) \\ &= (\beta_1^* \circ \beta_2^*)(\lfloor f \rfloor).\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \beta^* = \beta_1^* \circ \beta_2^* .$$

Şimdi,

$\mathcal{C}$ :  $H$  ko-grupları ve üzerine-açık tasvirlerin homomorfizmlerinin kategorisi.

$\mathcal{D}$ : Demetler ve demet homomorfizmlerinin kategorisi olsun.

Bir  $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tasvirini, her  $Q$  ve  $Q_1 \xrightarrow{\beta} Q_2$  için  $T(Q) = H(Q)$  ve  $T(Q_1 \xrightarrow{\beta} Q_2) = H(Q_2) \xrightarrow{\beta^*} H(Q_1)$  şeklinde tarif edelim.

Kolaylıkla gösterebiliriz ki,

1.  $Q_1 = Q_2$  ve  $\beta = 1_{Q_1} \implies T(1_{Q_1}) = 1_{H(Q_1)} = T(Q_1)$ . Zira;  $T(1_{Q_1}) = (1_{Q_1})^*$  ve her  $[f] \in H(Q_1)$  için  $(1_{Q_1})^*([f]) = [f \circ 1_{Q_1}] = [f] \implies (1_{Q_1})^* = 1_{H(Q_1)} = T(Q_1)$ .

2.  $\beta_1: Q_1 \rightarrow Q_2$  ve  $\beta_2: Q_2 \rightarrow Q_3 \ni \beta_2 \circ \beta_1: Q_1 \rightarrow Q_3$  ve  $\beta_1, \beta_2$  üzerine tasvirleri açık ve homomorfizm olduğundan  $\beta_2 \circ \beta_1$  tasviri üzerine, açık ve homomorfizmdir. Dolayısıyla,  $T(\beta_2 \circ \beta_1): H(Q_3) \rightarrow H(Q_1)$  bir ko-homomorfizmdir. Halbuki,  $T(\beta_2 \circ \beta_1) = (\beta_2 \circ \beta_1)^*$  ve Teorem 3.2.2 den dolayı  $(\beta_2 \circ \beta_1)^* = \beta_1^* \circ \beta_2^* = T(\beta_1) \circ T(\beta_2)$ .

Binaenaleyh,  $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  bir kontravaryant funktordur.

O halde Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2 birlikte funktoryel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

**Teorem 3.2.3.**  $H$  ko-grupları ve üzerine-açık tasvirlerin homomorfizmleri kategorisinden, demetler ve demet homomorfizmleri kategorisine bir kontravaryant funktor vardır, öyleki bu kontravaryant funktor  $X$  herhangi bir noktalı topolojik uzay olmak üzere,  $H$  ko-grubuna, bu  $H$  ko-grubunun intaç ettiği grupların demetini,  $\beta$  üzerine-açık tasvirlerin homomorfizmine ise  $\beta^*$  demet homomorfizmini tahsis eder.

**Teorem 3.2.4.**  $(Q_1, H(Q_1))$  ve  $(Q_2, H(Q_2))$  çiftleri verilmiş olsun. Şayet  $\beta: Q_1 \rightarrow Q_2$  bir izomorfizm olarak verilmiş ise, bu taktirde  $(Q_1, H(Q_1))$  ve  $(Q_2, H(Q_2))$  çiftleri arasında bir ko-izomorfizm vardır.

**İspat.** Bir kere, Teorem 3.2.1. de gösterdik ki,  $\beta: Q_1 \rightarrow Q_2$  üzerine tasviri açık ve bir homomorfizm ise, bir  $\beta^*: H(Q_2) \rightarrow H(Q_1)$  açık sürekli tasviri vardır, öyleki,  $F = (\beta^*, \beta)$  çifti  $(Q_1, H(Q_1)), (Q_2, H(Q_2))$  çiftleri arasında bir ko-homomorfizmdir. Tarif 3.2.2 de gözönünde tutulacak olursa,

$(Q_1, H(Q_1))$  ile  $(Q_2, H(Q_2))$  çiftleri arasında bir izomorfizmin varlığını göstermek için  $\beta^*$  in birebir ve  $\beta^{*-1}$  in de sürekli olduğunu göstermek kâfi gelecektir.

$$\begin{array}{ccc} H(Q_1) & \xleftarrow{\beta^*} & H(Q_2) \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ Q_1 & \xrightarrow{\beta} & Q_2 \end{array}$$

$\beta$  izomorfizm olduğundan  $\beta^{-1}$  homomorfizmdir. Zira;  $\beta$  homomorfizm olduğundan

$$\begin{array}{ccc} Q_1 & \xrightarrow{v} & Q_1 v Q_1 \\ \beta \downarrow & & \downarrow \beta v \beta \\ Q_2 & \xrightarrow{v'} & Q_2 v Q_2 \end{array}$$

$v' o \beta \sim (\beta v \beta) o v$  dir.  $(\beta^{-1} v \beta^{-1}) o v' o \beta \sim (\beta^{-1} v \beta^{-1}) o (\beta v \beta) o v = 1_{Q_1 v Q_1} o v = v$

$$(\beta^{-1} v \beta^{-1}) o v' o \beta \sim v \implies$$

$$(\beta^{-1} v \beta^{-1}) o v' o \beta o \beta^{-1} \sim v o \beta^{-1}$$

$$(\beta^{-1} v \beta^{-1}) o v' o 1_{Q_2} \sim v o \beta^{-1}$$

$$(\beta^{-1} v \beta^{-1}) o v' \sim v o \beta^{-1} .$$

O halde Teorem 3.2.1 den dolayı  $\beta$  ve  $\beta^{-1}$  tasvirleri sırası ile,  $F = (\beta^*, \beta)$ ,

$F^{-1} = ((\beta^{-1})^*, \beta^{-1})$  homomorfizmlerini istintaç ederler. Ayrıca  $\beta^{-1} o \beta = 1_{Q_1}$ ,

$\beta o \beta^{-1} = 1_{Q_2}$  olduğundan Teorem 3.2.3 den dolayı

$$(1_{Q_1})^* = 1_{H(Q_1)} , \quad (1_{Q_2})^* = 1_{H(Q_2)} .$$

Herhangi  $[f_2], [g_2] \in H(Q_2)$  için  $\beta^*([f_2]) = \beta^*([g_2]) \implies [f_1] =$

$$[g_1] \implies (\beta^{-1})^*([f_1]) = (\beta^{-1})^*([g_1]) \implies (\beta^{-1})^*(\beta^*([f_2])) =$$

$$(\beta^{-1})^*(\beta^*([g_2])) . \text{ Halbuki, Teorem 3.2.3 den dolayı } (\beta^{-1})^* o \beta^* = (\beta o \beta^{-1})^* .$$

Dolayısıyla,  $\beta o \beta^{-1} = 1_{Q_2}$  olduğundan  $(\beta o \beta^{-1})^* = 1_{H(Q_2)}$  . O halde

$[f_2] = [g_2]$  . Dolayısıyla  $\beta^*$ , birebirdir. Diğer taraftan  $\beta^{*-1} = (\beta^{-1})^*$

olduğundan  $\beta^{*-1}$  süreklidir.

O halde  $F = (\beta^*, \beta)$  izomorfizmdir. Aynı şekilde gösterilebilir ki,  $F^{-1} = ((\beta^{-1})^*, \beta^{-1})$  de bir izomorfizmdir.

Teorem 3.2.5.  $(Q_1, H(Q_1))$ ,  $(Q_2, H(Q_2))$  çiftleri ve  $\beta_1, \beta_2: Q_1 \rightarrow Q_2$  üzerine tasvirleri açık ve homomorfizm olarak verilmiş olsun. Bu taktirde, mütekabil  $F_1 = (\beta_1^*, \beta_1)$  ve  $F_2 = (\beta_2^*, \beta_2)$  ko-homomorfizmlerindeki  $\beta_1^* = \beta_2^*$  dir, yalnız ve yalnız  $\beta_1 = \beta_2$  ise.

İspat. (i)  $\beta_1 = \beta_2$  ise açık olarak  $\beta_1^* = \beta_2^*$ .

(ii)  $\beta_1^* = \beta_2^*$  olsun. Bu taktirde, her  $[f] \in H(Q_2)$  için  $\beta_1^*([f]) = [f\beta_1]$ ,  $\beta_2^*([f]) = [f\beta_2]$  ve  $[f\beta_1] = [f\beta_2]$ . O halde  $f, (Q_2, \beta_1(q_1) = q_2)$  den  $X$  noktalı topolojik uzayına taban noktasını muhafaza eden sürekli bir tasvir olduğundan  $f\beta_1, (Q_1, q_1)$  den  $X$  e ve  $f\beta_2, (Q_1, q_1)$  den  $X$  e taban noktaları muhafaza eden sürekli tasvirlerdir. Halbuki  $[f\beta_1] = [f\beta_2] \Rightarrow \beta_1(Q_1) = \beta_2(Q_1)$  ve  $f\beta_1 \sim f\beta_2$  rel.  $q_1 \in Q_1$  keyfi olduğundan  $\beta_1 = \beta_2$ .

## REFERANSLAR

- [1] C. Uluçay , Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyle, K.T.Ü. Temel Bilimler Fakültesi Yayınları, 2. Baskı (1978)
- [2] E.H.Spanier , Algebraic Topology, Mc Graw-Hill Publishing Company, Ltd. (1966)
- [3] M.J.Greenberg , Lectures on Algebraic Topology, Northeastern University, (1967)
- [4] P.J.Hilton , An Introduction To Homotopy Theory, Cambridge University Press, (1953)
- [5] F.H.Croom , Basic Concepts of Algebraic Topology, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin (1978)
- [6] B.Gray , Homotopy Theory, Academic Press New York San Francisco London (1975)
- [7] R.C.Gunning,H.Rossi, Analytic Functions of Several Complex Variables, Englewood Cliffs:N.J. Prentice-Hall, (1965)
- [8] H.Grauert , K.Fritzsche , Several Complex Variables, Springer-Verlag, (1976)
- [9] L.Hörmander , Introduction to Complex Analysis in Several Variables. Princeton, N.J: Van Nostrand, (1966)
- [10] C. Uluçay , Characterization of n-Dimensional Complex Manifolds, Journal of The Fac.Sc. of The K.T.Ü. Vol. II.,Fasc.1 pp. 1-15.,(1979)

- [11] C. Uluçay , Global Formulation Of Weierstrass Preparation Theorem, Journal of The Fac.Sc. of The K.T.Ü. Vol.III.,Fasc.4, (1980)
- [12] \_\_\_\_\_ , Restricted Sheaf Theory, Journal of The Fac.Sc. of The K.T.Ü. Vol. III.,Fasc.7, (1980)
- [13] \_\_\_\_\_ , On Coherence Theorems And The Related Chomology Groups, Journal of The fac.Sc. of The K.T.Ü. Vol.III., Fasc.8, (1980)
- [14] \_\_\_\_\_ , On The Homology Group of The Complex Analytic Manifold, Communications, De La Faculté Des Sciences De L'Université D'Ankara,Série A<sub>1</sub>: Mathématiques Tome 30 (37-44),(1981)
- [15] S. Balci , The Sheaf of The Fundamental Groups, Communications, De La Faculté Des Sciences De L'Université D'Ankara, Série A<sub>1</sub>: Mathématiques (1982)(Baskıda)
- [16] J.P.Serre , Faisc, Eaux Algebratiques Cohérents, Ann.Math.Vol.61.,pp.197-278, (1955)
- [17] Sze-Tsen Hu , Structure of The Homotopy Groups Of Mapping Spaces, American Journal Of Mathematics, Vol.LXXI, No:3, pp. 574-586, (1949)