T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NULL KONİ ÜZERİNDE EĞRİLER VE YÜZEYLERİN GEOMETRİSİ

Fatih SEVİNÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Haziran 2014

Tezin Başlığı : Null Koni Üzerinde Eğriler ve Yüzeylerin Geometrisi

Tezi Hazırlayan : Fatih Sevinç

Sınav Tarihi : 11.06.2014

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Ali İhsan SİVRİDAĞ (İnönü Üniversitesi) ____________

Prof. Dr. Recep ASLANER (Danışman) (İnönü Üniversitesi) ____________

Doç. Dr. Ahmet YILDIZ (İnönü Üniversitesi) ____________

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Mehmet ALPASLAN
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum " *Null Koni Üzerindeki Eğriler ve Yüzeylerin Geometrisi*" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Fatih Sevinç

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NULL KONİ ÜZERİNDEKİ EĞRİLER VE YÜZEYLERİN GEOMETRİSİ

Fatih SEVİNÇ

Inönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

iv+36 sayfa

2014

Danışman: Prof. Dr.Recep ASLANER

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde sonraki bölümlerde kullanabileceğimiz bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde yüzey ve bir yüzey üzerinde yatan eğriler hakkında temel bilgiler ışığında helisler ve slant helisler ele alınmıştır. Üçüncü bölümde ise E_1^3 de yatan null koni Q^2 üzerindeki eğriler ve 4-boyutlu Minkowski uzayı E_1^4 de yatan null koni Q^3 üzerindeki eğriler ve yüzeyler incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Null koni, koni üzerinde eğri, yapı fonksiyonu, koni eğriliği, koni torsiyonu.

ABSTRACT

MSc Thesis

Fatih SEVİNÇ

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

iv+36 pages

2014

Supervisor: Prof. Dr. Recep ASLANER

This thesis is consist of three chapters. In the first chapter of this work, some fundamental definitions and theorems which will be used in the later chapters are given. In the second chapter, helices and slant helices handled with the aid of basic notions about surfaces and curves in the surfaces. In the third chapter, firstly curves on the light cone Q^2 in E_1^3 investigated. Then the curves and the surfaces on the lightlike cone Q^3 in Minkowski-4 space E_1^4 have been investigated.

KEY WORDS: Lightlike cone, curves on cone, structure function, cone curvature, cone torsion.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında bana güvenerek; sabır ve özveri ile destek olup yol gösteren saygıdeğer Danışman Hocam Prof. Dr. Recep ASLANER'e, Hayatım boyunca desteğe ihtiyaç duyduğum her zaman en kuvvetli şekilde varlığını hissettiren; Aileme, özellikle Eşim'e ve kızım Serra'ya teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Öklid uzayında ve Riemann manifoldları üzerinde uzun süredir çalışılan eğriler ve yüzeylerin geometrisini, bir indefinite metrik olan

$$g(x,y) = -\sum_{i=1}^{v} x_i y_i + \sum_{i=v+1}^{n} x_i y_i \tag{0.0.1}$$

metriği yardımıyla tanımlanan yarı-Riemann manifoldlar üzerine aktarırken bazı yeni durumlarla karşılaşılmıştır. Eğrinin spacelike veya timelike olması durumunda Frenet çatıları ve eğrilikleri kolayca elde edilirken, null eğri olması durumunda, eğri yay parametresi cinsinden ifade edilemediğinden bazı problemlerle karşılaşılmıştır. Bu problemi 1969 yılında W.B. Bonnor [**14**] *'Null Curves in Minkowski Space-time'* isimli çalışmasında eğrinin ivme vektörünü birim hızlı yapan pseudo-yay parametresi kavramını ve buna bağlı olarak oluşturulan Cartan çatısını kullanarak Minkowski Spacetime'da null eğrilerin geometrisini incelemiştir.

Genel olarak Öklid uzayında bir eğrinin

$$S^{n-1} = \left\{P \in E^n : < p, p >= r^2\right\}$$

ile tanımlana küre yüzeyi üzerinde kalması (küresel bir eğri olması) için gerek ve yeter koşullar [**4**] de verilmiştir. 4-boyutlu Öklid uzay'da S^3 ile gösterilen birim kürenin Minkowski Spacetime R_1^4 de tek bir denkliği olmayıp S_1^3 ve $H_0^3 = H_+^3 \cup H_-^3$ gibi iki hiperquatratik ile tanımlıdır. Bunlar

$$S_1^3 = \left\{v \in R_1^4 : g(v,v) = 1\right\} \quad ve \quad H_0^3 = \left\{v \in R_1^4 : g(v,v) = -1\right\} \tag{0.0.2}$$

eşitlikleri ile tanımlı olup bunlardan S_1^3 in teğet vektörleri timelike vektörler olduğundan buna *pseudo-Riemann küre* veya *Lorentz küresi,* H_0^3' a *pseudo-Riemann hiperbolik uzay* adı verilmiştir.

R_1^4 de verilen bir eğrinin pseudo-Riemann hiperbolik uzay H_0^3 üzerinde kalması için gerekli şartlar [**17**] araştırılmış ve timelike ve null eğrilerin H_0^3 üzerinde kalamayacağı gösterilmiştir. 3-boyutlu Öklid uzay E^3 de, teğeti sabit bir doğrultu ile sabit açı yapan eğriler olarak tanımlanan genel helis eğrileri ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır. Son yıllarda helis eğrisinin tanımında teğet yerine asli normal kullanılarak yeni tip eğriler tarif edildi. Örneğin, S.Izumiya and N.Takeuchi [**8**] uzayda sabit bir doğrultu ile her noktasındaki asli normali arasındaki açı sabit olan eğrilere *slant (yatık) helis* adını verdiler ve bu yeni tanımlanan eğriler için bazı karakterizasyonlar ifade ettiler. M.Önder, H.Kocayiğit ve M.Kazaz da E^4 ve E_1^4 uzaylarında slant helisler ile ilgili yeni bir kavram olan B_2-slant helisler üzerinde çalıştılar [**11, 28**].

Bu çalışmada H.L. Liu'nun [**5, 12, 15**] de yapmış olduğu çalışmalar temel alınarak 4-boyutlu Minkowski Uzayı R_1^4 de verilen bir eğrinin veya yüzeyin

$$Q^3 = \left\{ v \in R_1^4 : g(v, v) = 0 \right\} \tag{0.0.3}$$

eşitliği ile tanımlanan null (lightlike) koni üzerinde kalması için gerekli ve yeterli olan koşullar araştırılmıştır.

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanacağımız bazı geometrik ve cebirsel kavramların tanımları ve bu kavramlarla ilgili özellikler verilecektir.

1.1. Pseudo Riemannian Manifoldlar

Tanım 1.1.1 (Simetrik Bilineer Form). V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

tanımlanan g dönüşümü, $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall\ u, v, w \in V$ için

i) $g(u, v) = g(v, u)$ simetri özeliği,

ii) $g(au + bv, w) = a\ g(u, w) + b\ g(v, w)$ 1.yere göre lineer ve

$g(u, av + bw) = a\ g(u, v) + b\ g(u, w)$ 2.yere göre lineer

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V uzayı üzerinde *simetrik bilineer form* denir [**1, 2, 3**].

Tanım 1.1.2. V reel vektör uzayı üzerinde tanımlı bir simetrik bilineer form g olsun. Bu durumda,

i) $\forall\ v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v, v) > 0$ ise g'ye *pozitif tanımlı*,

ii) $\forall\ v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v, v) < 0$ ise g'ye *negatif tanımlı*,

iii) $g(v, v) > 0$ ve $g(w, w) < 0$ olacak şekilde $v, w \in V$ vektörleri mevcut ise g'ye *indefinit* denir [**3**].

Tanım 1.1.3. V reel vektör uzayı üzerinde tanımlı bir simetrik bilineer form g olsun. $0 \neq \xi \in V$ olmak üzere $\forall v \in V$ için $g(\xi, v) = 0$ ise g'ye V üzerinde *dejenere bilineer form*, aksi halde g'ye *nondejeneredir* denir.

Bu tanıma göre, g'nin nondejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall\ v \in V$ için $g(u, v) = 0$ iken $u = 0$ olmasıdır [**1**].

Tanım 1.1.4. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun. V'nin

$$RadV = \{\xi \in V : g(\xi, v) = 0,\ \forall\ v \in V\}$$

şeklinde tanımlı alt uzayına, g'ye göre V uzayının *radikal (veya null) uzayı* denir. $RadV$'nin boyutuna g'nin *nulluk derecesi* denir ve *null* V ile gösterilir.

Eğer *null* $V > 0$ ise g dejenere, *null* $V = 0$ ise g non-dejeneredir [**1**].

Tanım 1.1.5 (İndeks). V reel vektör uzayı üzerinde tanımlı bir simetrik bilineer form g olsun. Bir $W \subseteq V$ alt uzayı için g'nin W üzerine kısıtlanmışı

$$g|_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g'nin *indeksi* denir ve q ile gösterilir [**2**].

Teorem 1.1.1. *V reel vektör uzayı üzerinde tanımlı bir simetrik bilineer form g olsun. Bu durumda,*

i) $g(\alpha_i, \alpha_j) = 0, \quad i \neq j$

ii) $g(\alpha_i, \alpha_i) = 1, \quad 1 \leq i \leq \gamma$

iii) $g(\alpha_i, \alpha_i) = -1, \quad \gamma + 1 \leq i \leq \gamma + q$

iv) $g(\alpha_i, \alpha_i) = 0, \quad \gamma + q + 1 \leq i \leq \gamma + q + \mu = n$

olacak şekilde V'nin bir $\{\alpha_1, \ ... \ , \alpha_n\}$ bazı mevcuttur [**1**].

Tanım 1.1.6. Bir V reel vektör uzayı üzerinde tanımlı nondejenere simetrik bilineer g formuna V üzerinde bir *skalar çarpım* denir ve $<, >$ sembolü ile gösterilir. (V, g) ikilisine de *skalar çarpım uzayı* (pseudo-Öklid uzayı) adı verilir [**1**].

Tanım 1.1.7. Bir V pseudo-Öklid uzayı üzerinde tanımlı g skalar çarpımı için,

i) g pozitif tanımlı ise g'ye *Öklid metriği*, (V, g)'ye de *Öklid uzayı*,

ii) g'nin indeksi $q = 1$ ise g'ye *Lorentz (Minkowski) metriği*, (V, g)'ye de *Lorentz (Minkowski) uzayı*,

iii) g dejenere ise V vektör uzayına g'ye göre *lightlike (dejenere) vektör uzayı* denir [**1**].

Tanım 1.1.8. V pseudo-Öklid uzayı üzerinde tanımlı bir g skalar çarpımı için,

i) $g(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise v vektörüne *spacelike vektör*,

ii) $v \neq 0$ iken $g(v, v) < 0$ ise v'ye *timelike vektör*,

iii) $v \neq 0$ iken $g(v, v) = 0$ ise v'ye de l*ightlike (null veya isotropik) vektör* denir.

Bir V Minkowski uzayında alınan bir $v \in V$ vektörü bu üç tipten birine sahip olup bu özelliğe v vektörünün *causal karakteri* denir [**3, 23**].

V pseudo-Öklid uzayı üzerinde tanımlı bir g skalar çarpımı için; $\|v\| = |g(v, v)|^{\frac{1}{2}}$ sayısına v vektörünün *uzunluğu (boyu)*, uzunluğu bir birim olan (yani $g(v, v) = \pm 1$) vektöre *birim vektör* denir. $v, w \in V$ vektörleri için $g(v, w) = 0$ ise bu iki vektör bir birine *diktir (ortogonaldir)*. Buna göre $\vec{0}$ vektörü tüm vektörlere ortogonaldir. Eğer g bir indefinit bilineer form ise herhangi bir null vektör kendisine ortogonaldir [**16**]. Bir V uzayındaki lineer bağımsız vektörlerin sayısına V'nin *boyutu* adı verilir. Bu vektörlerin kümesi V için bir baz oluşturur. Sonlu boyutlu her vektör uzayı için bir baz mevcuttur ve bu baz ortonormal hale getirilebilir [**2, 3**].

Tanım 1.1.9. V bir reel vektör uzayı ve $W \subset V$ de bir alt uzay olsun. V üzerinde tanımlı bir simetrik bilineer g formunun W alt uzayı üzerine kısıtlanmışı $g|_W$ bir dejenere bilineer form ise W alt uzayına *lightlike (dejenere) alt uzay* denir.

Genel olarak bir alt uzay $W \subset V$'nin tamamlayıcısı (ortognal complemanı)

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid g(v,w) = 0, \ \forall w \in W\}$$

olmak üzere, Öklid uzayında

$$W \cap W^{\perp} = \{0\}$$

Lorentz (Minkowski) uzayında ise,

$$W \cap W^{\perp} \neq \{0\}$$

dır [**1**].

Tanım 1.1.10 (Pseudo-Öklid uzay). $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde tanımlı $n-$ boyutlu standart vektör uzayı $\mathbb{R}^n$'de, $0 \leq q \leq n$ bir tamsayı olmak üzere $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\bar{G}(x,y) =< x, y >= \sum_{i=1}^{n-q} x_i y_i - \sum_{j=n-q+1}^{n} x_j y_j$$

eşitliği ile tanımlanan metrik tensör (pseudo-Riemannian Metrik) göz önüne alınarak elde edilen uzaya *q indeksli, n-boyutlu pseudo-Öklid uzay* denir ve E_q^n ile gösterilir. E_q^n uzayı, q indeksli n-boyutlu bir flat pseudo-Riemannian manifoldtur [**2, 5**].

1.2. Hiperyüzeyler

$M \subset E^n_q$ bir alt manifold olsun. Eğer E^n_q nun pseudo-Riemannian metriği $\bar{G}$, M üzerinde bir pseudo-Riemannian G metriğine (sırasıyla bir Riemannian metriğe, bir dejenere kuadratik forma) indirgenirse, M manifolduna E^n_q nun *timelike* (sırasıyla spacelike, dejenere) *alt manifoldu* denir. M manifoldunun boyutunun $n-1$ olması durumunda M ye *hiperyüzey* adı verilir.

C, E^m_q uzayında şeçilmiş bir nokta ve $r > 0$ bir sabit sayı olmak üzere,

$$S^n_q(C,r) = \left\{x \in E^{n+1}_q : \bar{G}(x-c, x-c) = r^2\right\}$$

kümesine *pseudo-Riemannian küre*,

$$H^n_q(C,r) = \left\{x \in E^{n+1}_{q+1} : \bar{G}(x-c, x-c) = -r^2\right\}$$

kümesine *pseudo-Riemannian hiperbolik uzay* ve

$$Q^n_q(C) = \left\{x \in E^{n+1}_q : \bar{G}(x-c, x-c) = 0\right\}$$

kümesine de *pseudo-Riemannian lightlike koni* (kuadrik koni veya *null koni*) adı verilir. Biz bu çalışmamızda bu küme için *null koni* ifadesini kullanacağız.

$S^n_q(C,r)$ kümesi $q \geq 1$ için E^{n+1}_q uzayında sabit kesit eğriliği r^{-2} olan, q indeksli n boyutlu bir tam pseudo-Riemannian hiperyüzey,

$H^n_q(C,r)$ kümesi $q \geq 1$ için E^{n+1}_{q+1} uzayında sabit kesit eğriliği r^{-2} olan, q indeksli n boyutlu bir tam pseudo-Riemannian hiperyüzey ve

$Q^n_q(C)$ kümesi de E^{n+1}_q uzayında bir dejenere hiperyüzeydir.

E^n_q, $S^n_q(C,r)$ ve $H^n_q(C,r)$ uzayları birer pseudo-Riemannian uzay formları, yani birer sabit eğrilikli, tam ve irtibatlı pseudo-Riemannian manifoldlardır [**5**].

C noktasına bu hiperyüzeylerin *merkezi* denir. $C = O$ orijin noktası ve $q = 1$ olduğunda elde edilen $Q^n_1(O)$ hiperyüzeye *null koni* denir ve kısaca Q^n ile gösterilir.

E^{n+2}_1 uzayındaki bir $\{e_1, \ \ldots \ , e_n, e_{n+1}, e_{n+2}\}$ çatı alanı için;

$< e_i, e_j >= \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ \ldots \ , n$

$< e_i, e_{n+1} >=< e_i, e_{n+2} >= 0$

$< e_{n+1}, e_{n+1} >=< e_{n+2}, e_{n+2} >= 0 \quad$ ve $\quad < e_{n+1}, e_{n+2} >= 1$

ise bu çatı alanına *asimtotik ortonormal çatı alanı*,

$< e_{n+1}, e_{n+1} >= -< e_{n+2}, e_{n+2} >= 1 \quad$ ve $\quad < e_{n+1}, e_{n+2} >= 0$

ise *pseudo ortonormal çatı alanı* denir.

1.3. Hiperyüzey Üzerinde Eğriler

$$x : I \longrightarrow Q^{n+1} \subset E_1^{n+2}, \quad t \to x(t) \in Q^{n+1}, \quad t \in I \subset R$$

eğrisinin bir regüler eğri olduğunu, yani $\forall t \in I$ için $x'(t) = \dfrac{dx}{dt}(t) \neq \vec{0}$ ve $x(t) \nparallel x'(t)$ olduğunu kabul edelim.

Tanım 1.3.1. E_1^{n+2} de $\forall t \in I$ için $x^{(n)}(t) = \dfrac{d^n x}{dx^n}(t)$ olmak üzere;

$x(t),\ x'(t),\ x''(t),\ ...\ , x^{(n)}(t), x^{(n+1)}(t)$ vektörleri lineer bağımsız ve

$x(t),\ x'(t),\ x''(t),\ ...\ , x^{(n)}(t), x^{(n+1)}(t), x^{(n+2)}(t)$ lineer bağımlı ise $x(t)$ eğrisine *Frenet eğrisi* denir.

$\forall\ t \in I$ için $x(t) \in Q^{n+1}$ olup $< x(t), x(t) >= 0$ ve $< x(t), dx(t) >= 0$ olduğundan $dx(t)$ bir spacelike vektör olup $x(t)$ eğrisinin yay uzunluğu s;

$$ds^2 =< dx(t), dx(t) >$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $x(t)$ eğrisinin s yay uzunluğunu parametre olarak alır ve $x(s) = x\big(t(s)\big)$ olarak gösterirsek; $x'(s) = \dfrac{dx}{ds}(s)$, $x(s)$ eğrisinin bir spacelike birim tanjant vektör alanı olur.

Şimdi

$$< x(s), y(s) >= 1, \quad < x'(s), y(s) >=< y(s), y(s) >= 0$$

şartlarını sağlayan bir $y(s)$ vektör alanını ve $x(s)$ eğrisinin

$$V^{n-1} = Span_R\{x, y, x'\}^{\perp}$$

spacelike normal uzayını göz önüne alalım. Buna göre

$$Span_R\{x, y, x', V^{n-1}\} = E_1^{n+2}$$

olacaktır.

Böylece V^{n-1} alt uzayından $< \alpha_i, \alpha_j >= \delta_{ij},\ \ i,j = 1,2,\ ...\ ,n$ olacak şekilde aşağıdaki şartları sağlayan $\alpha_2(s), \alpha_3(s),\ ...\ ,\alpha_n(s)$ vektör alanları seçilebilir.

$$\begin{cases} x'(s) = \alpha_1(s) \\ \alpha_1'(s) = \kappa_1(s)x(s) - y(s) + \tau_1(s)\alpha_2(s) \\ \alpha_2'(s) = \kappa_2(s)x(s) - \tau_1(s)\alpha_1(s) + \tau_2(s)\alpha_3(s) \\ \alpha_3'(s) = \kappa_3(s)x(s) - \tau_2(s)\alpha_2(s) + \tau_3(s)\alpha_4(s) \\ .... \\ \alpha_i'(s) = \kappa_i(s)x(s) - \tau_{i-1}(s)\alpha_{i-1}(s) + \tau_i(s)\alpha_{i+1}(s) \\ .... \\ \alpha_{n-1}'(s) = \kappa_{n-1}(s)x(s) - \tau_{n-2}(s)\alpha_{n-2}(s) + \tau_{n-1}(s)\alpha_n(s) \\ \alpha_n'(s) = \kappa_n(s)x(s) - \tau_{n-1}(s)\alpha_{n-1}(s) \\ y'(s) = -\sum\limits_i^n \kappa_i(s)\alpha_i(s), \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Bu denklemlere *Frenet denklemleri* denir. Burada $\kappa_1(s),\ ...\ ,\kappa_n(s), \tau_1(s), ...\ ,\tau_{n-1}(s)$ fonksiyonları $x(s)$ eğrisinin *koni eğrilik fonksiyonları*dır.

$$\{x(s), y(s), \alpha_1(s), \alpha_2(s),\ ...\ ,\alpha_n(s)\}$$

vektör kümesi E_1^{n+2} uzayı için $x(s) \subset Q^{n+1}$ eğrisi boyunca bir asimtotik ortonormal çatıdır [**5, 30**].

2. YÜZEYLER VE YÜZEYSEL EĞRİLER

2.1. Yüzeysel Eğriler

Bu bölümde yüzey ve bir yüzey üzerinde yatan eğrilerin geometrisi ile ilgili temel kavramlar ele alıncakatır. 3- boyutlu Öklid uzay E^3 ün noktaları $R^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$ kümesinin elemanlarıdır. R^3 de değişken bir $P(x, y, z)$ noktasının koordinatları arasında $F(x, y, z) := 0$ biçiminde bir bağıntı varsa, bu noktanın geometrik yeri genellikle bir yüzey dir ve bu yüzey S ile gösterilir.

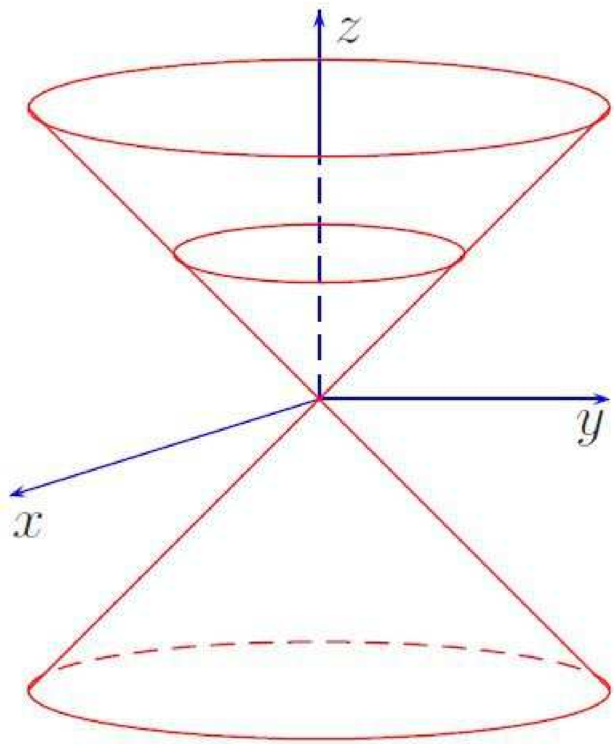
Buna göre E^3 de bir S yüzeyi

$$S = \{P(x, y, z) \in E^3 : F(x, y, z) := 0\} \tag{2.1.1}$$

kümesidir. Örneğin E^3 de

$$F(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

eşitliğini sağlayan $P(x, y, z)$ noktalarının kümesi, tepe noktası orijin noktası ve ekseni z ekseni olan dik dairesel koni yüzeyini gösterir.



Diğer bir ifadeyle bir yüzey, $I, J \subset R$ birer açık aralık olmak üzere $I \times J \subset R^2$ bölgesinin

$$\begin{aligned} \phi : I \times J &\longrightarrow E^3 \\ (t,s) &\longrightarrow \phi(t,s) = \Big(\phi_1(t,s), \phi_2(t,s), \phi_3(t,s)\Big) \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

eşitliği ile tanımlanan sürekli bir ϕ fonksiyonu altındaki görüntü kümesidir. (2.1.2) eşitliğine S yüzeyinin parametrik ifadesi denir.

Tepe noktası orijin noktası ve ekseni z ekseni olan bir dik dairesel koni yüzeyini $z = mx$ doğrusunun z ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzey olarak ele alırsak, bu yüzeyin parametrik ifadesi $I \subset R$ ve $J = [0, 2\pi)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi : I \times J &\longrightarrow E^3 \\ (s,t) &\longrightarrow \phi(s,t) = (s \cos t, s \sin t, ms) \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

dir.

(2.1.2) eşitliğinde verilen s ve t parametreleri arasında $s = f(t)$ $\Big($veya $t = g(s)\Big)$ biçiminde bir fonksiyon tanımlı ise bu fonksiyon yüzey üzerinde bir eğri tanımlar. Böylece elde edilen

$$\begin{aligned} \alpha : I &\longrightarrow E^3 \\ t &\longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

eğrisine *yüzeysel eğri* denir. Burada $t \in I$ ya eğrinin *parametresi*, I aralığına eğrinin *parametre aralığı* ve $\alpha_i : I \longrightarrow R, \quad t \longrightarrow \alpha_i(t)$ fonksiyonellerine de eğrinin *koordinat fonksiyonları* denir [**6**].

Uzayda verilen bir $\alpha(t)$ eğrisi için α fonksiyonunun t değişkenine göre türevi alınarak elde edilen $\dfrac{d\alpha}{dt}(t)$ vektörüne eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki *hız vektörü* denir ve $\alpha'(t)$ ile gösterilir. Her $t \in I$ için $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ ise α eğrisine *regüler eğri* denir. Her $t \in I$ için $\|\alpha'(t)\| = 1$ ise t parametresine α eğrisinin *yay parametresi* adı verilir ve yay parametresi genellikle s ile gösterilir [**29**]. $I = (a, b)$ olmak üzere I üzerinde tanımlanan bir $\alpha \subset E^3$ eğrisi için $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki uzunluğa karşılık gelen $\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt, \quad t \in I$ reel sayısına α eğrisinin *yay uzunluğu* denir. Regüler her eğri yay parametresi cinsinden ifade edilebilir [**7**].

Eğer uzayda verilen bir α eğrisi için $\alpha_i,\ i = 1, 2, 3$ koordinat fonksiyonları C^k- sınıfından diferansiyellenebilir ise α eğrisi de C^k- sınıfından diferansiyellenebilir denir. $\forall k \in N$ için $\alpha,\ C^k-$ sınıfından ise α eğrisi $C^\propto-$ sınıfındandır denir.

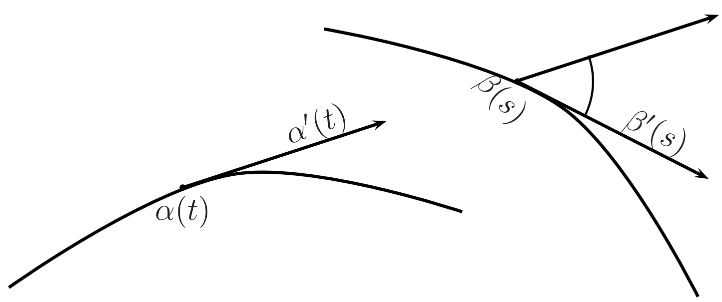
Biz bu çalışma boyunca aksi belirtilmedikçe seçilen eğrileri $C^\propto-$ sınıfından birer eğri olarak alacağız.

2.2. Eğilim Çizgileri := Helisler

İki doğru arasındaki açı tanımına benzer şekilde iki eğri arasındaki açıdan da bahsedebiliriz. Bunun için

$$\begin{array}{rcl} \alpha : I \longrightarrow E^3 & & \beta : J \longrightarrow E^3 \\ & ve & \\ t \longrightarrow \alpha(t) & & s \longrightarrow \beta(s) \end{array}$$

herhangi iki regüler eğri olmak üzere,



bu iki eğri arasında tanımlanan bir $\varphi : \alpha(I) \longrightarrow \beta(J)$ fonksiyonu *bire bir* ve *örten* ise φ fonksiyonuna *bu iki eğri arasında bir eşleme* denir. φ fonksiyonunun sürekli olması durumunda bu iki eğri bir yüzeye ait iki eğridir. $\alpha(t) \in \alpha(I)$ için $\varphi\big(\alpha(t)\big) = \beta(s)$ ise $\alpha(t)$ ve $\beta(s)$ noktalarına *karşılık gelen noktalar* veya φ *ile eşlenen noktalar* denir.

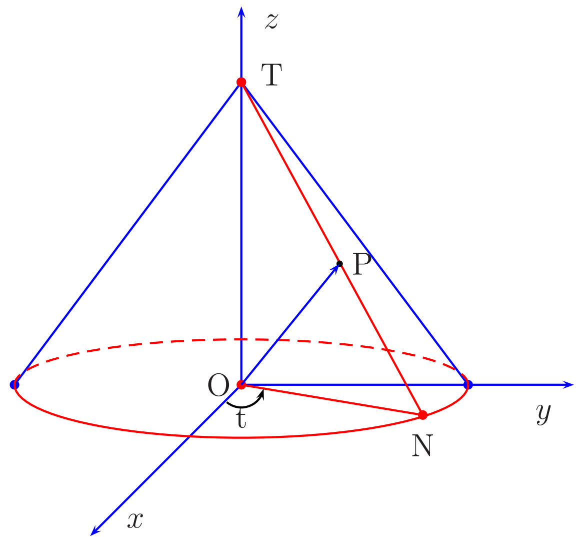
Tanım 2.2.1. (İki Eğri Arasındaki Açı): E^3 de α ve β gibi iki regüler eğri verildiğinde bu eğrilerin eşlenen noktalarındaki teğetler arasındaki açı bu iki eğri arasındaki açı olarak tanımlanır.

$t \in I$ değiştikçe $\alpha(t)$ noktası buna bağlı olarak ta $\beta(s)$ noktası ve bu noktalardaki teğetler değiştiğinden iki eğri arasındaki açı ilk eğrinin parametresinin bir fonksiyonudur $\theta = \theta(t)$ dir.

Tanım 2.2.2. (Eğilim Çizgisi): E^3 de verilen bir α eğrisinin sabit bir doğrultu ile her noktada yaptığı açı sabit ise bu eğriye *eğilim çizgisi* bu sabit doğrultuya da *eğilim ekseni* denir.

Örnek 2.2.1. Dik dairesel silindir yüzeyi üzerine çizilen helis eğrisi eğilim ekseni silindirin ekseni olan bir eğilim çizgisidir [**6**].

Örnek 2.2.2. : Tepe noktası $T(0,0,b)$ noktası ve dayanak eğrisi Oxy düzleminde orijin merkezli, r yarıçaplı çember eğrisi olan dik dairesel koni yüzeyinin parametrik denklemi $P(x,y,z)$ yüzey üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere,



$$\vec{OP} = \vec{ON} + \vec{NP} = \vec{ON} + \lambda\vec{NT}$$
$$= (r\cos t, r\sin t, 0) + \lambda(-r\cos t, -r\sin t, b)$$
$$= \Big((1-\lambda)r\cos t, (1-\lambda)r\sin t, \lambda b\Big), \quad 1-\lambda = s$$

alınırsa

$$\phi(t,s) = \Big(sr\cos t, sr\sin t, (1-s)b\Big) \tag{2.2.1}$$

olarak elde edilir.

(2.2.1) eşitliğinde $s = f(t)$ alınırsa koni yüzeyi üzerinde

$$\alpha(t) = \Big(f(t)r\cos t, f(t)r\sin t, (1-f(t))b\Big) \tag{2.2.2}$$

eşiliği ile bir eğri tanımlanmış olur. Bu eğrinin eğilim ekseni konin ekseni olan bir eğilim çizgisi olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\alpha'(t) = \Big(f'(t)r\cos t - f(t)r\sin t, f'(t)r\sin t + f(t)r\cos t, -bf'(t)\Big)$$

ve $||\alpha'(t)|| = \sqrt{(r^2+b^2)f'^2(t) + r^2f^2(t)}$ olup $\forall t \in I$ için $\exists\, r \neq 0 \wedge b \neq 0$ olduğundan $||\alpha'(t)|| \neq 0$ olup α eğrisi bir regüler eğridir.

Koninin ekseni (z ekseni) nin doğrultu vektörü $e_3 = (0,0,1)$ olup bu iki vektör arasındaki açı θ : *sabit* olmak üzere,

$$<\alpha', e_3>= \sqrt{(r^2+b^2)f'^2(t) + r^2f^2(t)}\cos\theta = -bf'(t)$$

eşitliğinde her iki tarafın karesi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{f'^2(t)}{f^2(t)} = \frac{r^2\cos^2\theta}{b^2\sin^2\theta - r^2\cos^2\theta} = c^2 : \; sabit$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{f'^2(t)}{f^2(t)} = c^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{f'(t)}{f(t)} = |c|$$

her iki tarafın belirsiz integrali alınarak

$$lnf(t) = ct + k \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = e^{ct+k}$$

elde edilir, burada k integral sabitidir. Başlangıç noktası $(r, 0, 0) \Leftrightarrow k = 0$ olmalıdır. Buna göre α eğrisinin denklemi,

$$\alpha(t) = \Big(e^{ct} r \cos t, e^{ct} r \sin t, (1 - e^{ct})b\Big)$$

olarak elde edilir.

Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 2.2.1. *Tepe noktası $T(0, 0, b)$ noktası olan r yarıçaplı dik dairesel koni yüzeyi üzerine çizilen bir eğri, eğilim ekseni koninin ekseni olan bir eğilim çizgisi ise, bu eğri*

$$\alpha(t) = \Big(e^{ct} r \cos t, e^{ct} r \sin t, (1 - e^{ct})b\Big) \tag{2.2.3}$$

eşitliği ile tanımlanan helis eğrisidir [**6**].

Tanım 2.2.3. Tepe noktası verilen bir dik dairesel koni tanımında $r = b = 1$ alınarak elde edilen koniye birim koni denir.

Buna göre aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 2.2.1. *Birim koni üzerine çizilen helis eğrisinin parametrik denklemi,*

$$\alpha(t) = \Big(e^{ct} \cos t, e^{ct} \sin t, 1 - e^{ct}\Big) \tag{2.2.4}$$

eşitliği ile verilir.

Eğriler günlük hayatta sık sık karşımıza çıkan geometrik nesnelerdir. Örneğin kalp grafisi çektirdiğimizde eğrimizin nasıl davrandığı bizim için önemlidir. Ekonomide verilerin değerlendirilmesinde, derslerimizde öğrencilerimizin notlarını sıralarken (çan eğrisi) eğrileri sık sık kullanırız. Fizikte bir parçacığın hareketini de yine eğrilerle veririz. Görüldüğü gibi, eğriler günlük hayatımızın vazgeçilmez bir parçasıdır. Eğriler içerisinde helis adı verilen eğriler, günlük hayatta karşımıza çok sık çıkmaktadır. Örneğin, bir fasülyenin çubuğa sarılırken izlediği yol, DNA nın yapısında moleküllerin dizilişi helis eğrisi şeklindedir. Bir vidanın ilerleyişinde yörüngesi yine bir helis eğrisidir [**10**].

3-boyutlu Öklid uzay E^3'de *teğeti sabit bir doğrultu ile sabit açı yapan eğri*ler olarak tanımlanan genel helis eğrileri ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır. İlk defa

1802 de M.A.Lancret tarafından ifade edilen ve 1845 de B. de Saint Venant tarafından ispatlanan klasik bir sonuç aşağıda verilmiştir [**21**].

Sonuç 2.2.2. *Bir eğrinin helis olması için gerek ve yeter şart eğri boyunca* κ/τ *oranının sabit olmasıdır, burada* κ *ve* τ *sırasıyla eğrinin 1. ve 2.eğrilik fonksiyonlarıdır.*

2.3. Slant Helisler

Son yıllarda helis eğrisinin tanımında teğet yerine asli normal kullanılarak yeni tip eğriler tarif edildi. Örneğin, S.Izumiya ve N.Takeuchi (2004) uzayda sabit bir doğrultu ile her noktasındaki asli normali arasındaki açı sabit olan eğrilere slant (yatık) helis adını verdiler ve bu yeni tanımlanan eğriler için bir karakterizasyon olarak aşağıdaki sonucu ifade ettiler.

Sonuç 2.3.1. *Birim hızlı bir* α *eğrisi için 1.eğrlik fonksiyonu* $\kappa(s) \neq 0$ *olsun. Bu durumda* α *eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart*

$$\sigma(s) = \Big(\frac{\kappa^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}(\frac{\kappa}{\tau})'\Big)(s)$$

eşitliği ile tanımlanan σ *fonksiyonunun bir sabit fonksiyon olmasıdır* [**8**].

L.kula ve Y.Yaylı (2005) bir slant helisin teğet ve binormal vektör alanlarının küresel göstergelerini araştırdılar ve bu küresel göstergelerin küresel helisler olduğunu gösterdiler [**25**]. A. Mağden (1993) 4-boyutlu Öklid uzay E^4 de helislerin bir integral karakterizasyonunu elde etti. Bu sonuç aşağıda verilmiştir.

Sonuç 2.3.2. *Birim hızlı bir* $\alpha \subset E^4$ *eğrisinin sıfır olmayan eğrilik fonksiyonları* $k_1 = k_1(s)$, $k_2 = k_2(s)$ *ve* $k_3 = k_3(s)$ *olmak üzere,* $\alpha(s)$ *eğrisinin bir genel helis veya dairesel helis olması için gerek ve yeter şart*

$$\Big(\frac{k_1}{k_2}\Big)^2 + \Big[\frac{1}{k_3}\frac{d}{ds}(\frac{k_1}{k_2})\Big]^2 = \tan^2\theta = sabit$$

olmasıdır [**9**].

H.Kocayiğit ve M.Önder (2007) 4-boyutlu Minkowski uzayı E_1^4 de benzer bir karakterizasyonu aşağıdaki şekilde ifade ettiler.

Sonuç 2.3.3. *$\alpha \subset E_1^4$ Spacelike eğrisinin sıfır olmayan eğrilik fonksiyonları $k_1 = k_1(s)$, $k_2 = k_2(s), k_3 = k_3(s)$ ve $\varepsilon_1 = \mp 1$ olmak üzere, $\alpha(s)$ spacelike eğrisinin 4-boyutlu Minkowski uzayı E_1^4 de bir spacelike helis olması için gerek ve yeter şart*

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 - \varepsilon_1\left[\frac{1}{k_3}\frac{d}{ds}(\frac{k_1}{k_2})\right]^2 = sabit$$

olmasıdır [**10**].

Aynı yazarlar (2008) E^4 de slant helis kavramının bir yeni çeşiti olan B_2- slant helis kavramını tanımlayarak bu tür eğrileri aşağıdaki şekilde karakterize etmişlerdir.

Tanım 2.3.1. Birim hızlı bir $\alpha \subset IR \to E^4$ eğrisinin sıfır olmayan eğrilik fonksiyonları $k_1 = k_1(s), k_2 = k_2(s), k_3 = k_3(s)$ ve Frenet Çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ olmak üzere; eğri boyunca İkinci Binormal birim vektör, belirli doğrultudaki bir U birim vektörü ile $< B_2, U >= \cos\theta = sabit$ olacak şekilde sabit bir açı oluşturuyorsa bu eğriye B_2- slant helis adı verilir.

Sonuç 2.3.4. *Birim hızlı bir $\alpha \subset E^4$ eğrisinin sıfır olmayan eğrilik fonksiyonları $k_1 = k_1(s), k_2 = k_2(s), k_3 = k_3(s)$ ve İkinci Binormal birim vektör ile sabit U birim vektörü arasındaki sabit açı θ_3 olmak üzere, $\alpha(s)$ eğrisinin E^4 de bir B_2- slant helis olması için gerek ve yeter şart*

$$\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 + \left[\frac{1}{k_1}\frac{d}{ds}(\frac{k_3}{k_2})\right]^2 = \tan^2\theta_3 = sabit$$

olmasıdır [**11**].

3. NULL KONİ ÜZERİNDEKİ EĞRİLER ve YÜZEYLER

Bu bölümde 3-boyutlu Minkowski uzayı E_1^3 de yatan 2-boyutlu null koni

$$Q^2 = \left\{ v \in R_1^3 : g(v,v) = 0 \right\} \tag{3.0.1}$$

üzerindeki eğriler ile 4-boyutlu Minkowski uzayı E_1^4 de yatan 3-boyutlu null koni

$$Q^3 = \left\{ v \in R_1^4 : g(v,v) = 0 \right\} \tag{3.0.2}$$

üzerindeki eğriler ve yüzeyler ele alınacaktır. Bu kavramlar ilk olarak H.Liu (2004) tarafından ele alınıp incelenmiştir. Bu çalışmada da burada kullanılan kavram ve notasyonlara bağlı kalınacaktır.

3.1. Null Koni Q^2 Üzerindeki Eğriler

Bu bölümde 3 boyutlu Minkowski uzayı E_1^3 de tanımlı 2-boyutlu null koni Q^2 üzerinde yatan eğrileri ele alacağız. $x : I \longrightarrow Q^2$, s yay parametresiyle verilen bir spacelike eğri olsun. Bu durumda $\forall s \in I$ için $< x(s), x(s) >= 0$ dır. Buna göre

$$x = x(s) = (x_1, x_2, x_3) \;\Leftrightarrow\; x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \tag{3.1.1}$$

yazılabilir. Bu eşitlikten, $x_1^2 - x_3^2 = -x_2^2$ olup eşitliğin sol tarafı iki kare farkı olduğundan bu ifade çarpanlarına ayrılarak her iki taraf $x_2(x_1 - x_3)$'e bölünürse

$$\frac{x_1 + x_3}{x_2} = -\frac{x_2}{x_1 - x_3} \qquad \text{veya} \qquad -\frac{x_1 + x_3}{x_2} = \frac{x_2}{x_1 - x_3}$$

elde edilir. Genelliği bozmaksızın verilen $x : I \longrightarrow Q^2$ eğrisi için
$x = x(s) = (x_1, x_2, x_3)$ ve

$$\frac{x_1 + x_3}{x_2} = -\frac{x_2}{x_1 - x_3} = f(s) \;\text{ ve }\; x_2 = 2\rho(s) \tag{3.1.2}$$

alınırsa (3.1.2) eşitliğinden

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2\rho f \\ x_1 - x_3 = -2\rho f^{-1} \end{cases} \tag{3.1.3}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu iki eşitliğin taraf tarafa toplanıp ve çıkarılmasıyla

$$\begin{cases} x_1 = \rho(f - f^{-1}) \\ x_2 = 2\rho \\ x_3 = \rho(f + f^{-1}) \end{cases} \tag{3.1.4}$$

elde edilir. Buna göre $x : I \longrightarrow Q^2$ eğrisi

$$x = x(s) = (x_1, x_2, x_3) = \rho(f - f^{-1},\ 2\ ,\ f + f^{-1}) \tag{3.1.5}$$

eşitliği ile tanımlanabilir. Burada ρ ve f fonksiyonları arasındaki bağıntı, verilen eğrinin s yay parametresi ile verilen bir spacelike eğri olması, yani

$$\dot{x} = x_s = \frac{dx}{ds},\quad \ddot{x} = x_{ss} = \frac{d^2x}{ds^2},\ ...$$

olmak üzere $< \dot{x}, \dot{x} >= 1$ eşitliğinden $4\rho^2 f_s^2 f^{-2} = 1$ elde edilir. Dolaysıyla ρ ve f fonksiyonları arasındaki bağıntı,

$$\rho(s) = \frac{f(s)}{2f_s(s)} \tag{3.1.6}$$

olarak bulunur. ρ nun bu değeri (3.1.5) eşitliğinde yerine yazılırsa $x : I \longrightarrow Q^2$ eğrisinin $f(s)$ fonksiyonu cinsinden ifadesi elde edilir.

Böylece aşağıdaki Teorem ifade edilebilir.

Teorem 3.1.1. *$x : I \longrightarrow Q^2$, s yay parametresiyle verilen bir spacelike eğri olsun. Bu durumda $f(s)$ sabit olmayan bir fonksiyon ve $f_s = \dfrac{df}{ds}$ olmak üzere $x = x(s) = (x_1, x_2, x_3)$ eğrisi*

$$x(s) = \frac{1}{2} f_s^{-1}(f^2 - 1,\ 2f,\ f^2 + 1) \tag{3.1.7}$$

eşitliği ile verilir [**12**].

Bu teoremde verilen $f(s)$ fonksiyonuna $Q^2 \subset E_1^3$ null koni üzerinde s yay parametresiyle verilen $x : I \longrightarrow Q^2$ eğrisinin *yapı fonksiyonu* adı verilir.

(3.1.7) eşitliğinde s'ye göre türev alınarak,

$$2\dot{x} = 2x_s = -f_s^{-2} f_{ss}(f^2 - 1, 2f, f^2 + 1) + 2(f, 1, f)$$

$$2\ddot{x} = 2x_{ss} = (2f_s^{-2} f_{ss}^2 - f_s^{-2} f_{sss})(f^2 - 1,\ 2f,\ f^2 + 1)$$
$$-2f_s^{-1} f_{ss}(f,\ 1,\ f) + 2f_s(1, 0, 1)$$

elde edilir. Buradan

$$< \ddot{x}, \ddot{x} >= -3f_s^{-2} f_{ss}^2 + 2f_s^{-1} f_{sss} \tag{3.1.8}$$

olmak üzere null koni $Q^2 \subset E_1^3$ üzerinde tanımlı yeni bir vektör alanı $y(s)$

$$y(s) = -\ddot{x}(s) - \frac{1}{2} < \ddot{x}(s), \ddot{x}(s) > x(s) \tag{3.1.9}$$

eşitliği ile tanımlanırsa (3.1.9) dan

$$y(s) = -\frac{1}{2} f_s^{-2} f_{ss}^2 x + f_s^{-1} f_{ss}(f, 1, f) - f_s(1, 0, 1) \tag{3.1.10}$$

elde edilir. Buradan

$$< y, y >=< y, \dot{x} >= 0 \quad ve \quad < x, y >= 1 \tag{3.1.11}$$

olduğu görülebilir.

Tanım 3.1.1. $x : I \longrightarrow Q^2 \subset E_1^3$, s yay parametresiyle verilen bir spacelike eğri olsun. Bu durumda (3.1.9) eşitliği ile tanımlana $y(s)$ fonksiyonu da Q^2 üzerinde bir eğridir. Bu eğriye $x(s)$ eğrisinin *dual eğrisi* (associated curve) adı verilir.

$\dot{x}(s) = \alpha(s)$ olmak üzere $\{x(s), \alpha(s), y(s)\}$ kümesinin $x(s)$ eğrisi boyunca bir asimptotik ortonormal çatı alanı olduğunu ve (1.3.1) eşitliklerinden

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \alpha(s) \\ \dot{\alpha}(s) = \kappa(s)x(s) - y(s) \\ \dot{y}(s) = -\kappa(s)\alpha(s) \end{cases} \tag{3.1.12}$$

olduğunu biliyoruz [**19**].

$x(s)$ eğrisinin $\kappa(s)$ koni eğrilik fonksiyonu için (3.1.9) ve (3.1.10) eşitliklerinden $\kappa(s) = -\dfrac{1}{2} < \ddot{x}(s), \ddot{x}(s) >= \dfrac{3}{2} f_s^{-2} f_{ss}^2 - f_s^{-1} f_{sss}$

$$= \frac{1}{2} f_s^{-2} f_{ss}^2 + f_s^{-2} f_{ss}^2 - f_s^{-1} f_{sss}$$

olup buradan

$$\kappa(s) = \frac{1}{2}[(log f_s)_s]^2 - [(log f_s)_s]_s \tag{3.1.13}$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 3.1.2. Bir $y(x)$ fonksiyonu için

$$y' = f(x) + g(x)y + h(x)y^2$$

denklemine *Riccati Denklemi* denir. Burada $h(x) \equiv 0$ olduğunda lineer, $f(x) \equiv 0$ olduğunda ise Bernoulli denklemi elde edilir.

$x : I \longrightarrow Q^2$, s yay parametresiyle verilen bir spacelike $x(s)$ eğrisinin $\kappa(s)$ koni eğrilik fonksiyonu için verilen (3.1.13) eşitliğide $(log f_s)_s = \xi(s)$ alınırsa,

$$\xi'(s) = \frac{1}{2}\xi^2(s) - \kappa(s) \tag{3.1.14}$$

bir Riccati denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü olan

$$\eta(s) = exp\Big(- \int \frac{1}{2}\xi(s)ds \Big) \tag{3.1.15}$$

değeri (3.1.14) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\eta''(s) - \frac{1}{2}\kappa(s)\eta(s) = 0 \tag{3.1.16}$$

$\eta(s)$ fonksiyonu için ikinci dereceden bir lineer denklem elde edilir.

Eğer $\kappa(s) < 0$ ise bu denklemin çözümü

$$\eta(s) = a_1 exp\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\int \sqrt{-\kappa}\ \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\ ds\Big) \tag{3.1.17}$$

olup burada a_1 sabit ve θ,

$$\theta' = \sqrt{-\frac{\kappa}{2}} + \frac{\kappa'}{2\kappa}\sin\theta\cos\theta \tag{3.1.18}$$

eşitliğini sağlayan bir açıdır.

$\kappa(s) > 0$ olması durumunnda ise (3.1.16) denkleminin çözümü

$$\eta(s) = a_1 exp\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\int \sqrt{-\kappa}\ \frac{\cosh\theta}{\sinh\theta}\ ds\Big) \tag{3.1.19}$$

olup burada θ,

$$\theta' = \sqrt{\frac{\kappa}{2}} + \frac{\kappa'}{2\kappa}\sinh\theta\cosh\theta \tag{3.1.20}$$

eşitliğini sağlayan bir açıdır [**12**].

(3.1.14) denkleminin bazı özel çözümleri için elde edilen null koni $Q^2 \subset E_1^3$ üzerindeki özel eğriler bir sonuç olarak aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 3.1.2. *$x : I \longrightarrow Q^2 \subset E_1^3$, s yay parametresiyle verilen ve yapı fonksiyonu $f(s)$ olan bir spacelike eğri olsun. Eğer x eğrisi düzlemsel bir eğri ise, bu durumda $f(s)$ yapı fonksiyonu*

$$[(logf_s)_s]^2 - [(logf_s)_s]_s = 2\kappa(s) = c := sabit \tag{3.1.21}$$

eşitliğini sağlayan bir fonksiyon ve x bir quadric eğri olup,

$c = -a^2 < 0$ *olduğunda x eğrisi bir elips,* $f(s) = \dfrac{2}{a}\tan\dfrac{as}{2}$,

$c = 0$ *olduğunda x eğrisi bir parabol,* $f(s) = \dfrac{-a}{s}$ *ve*

$c = a^2 > 0$ *olduğunda x eğrisi bir hiperbol olup* $f(s) = \dfrac{2}{a}\tanh\dfrac{as}{2}$ *dir* [**12**].

Uyarı 3.1.1. Çalışmanın bundan sonraki bölümlerinde s_o bir sabit olmak üzere $s \rightarrow s + s_o$ parametre dönüşümü kullanılarak verilen integral çözümlerinde integrasyon sabiti gözardı edilecektir. (3.1.14) ve eğrilerin temel teoreminden bilinmektedirki bir eğri, bir birine denk olan (congrent) iki fonksiyon $f(s)$ ve $f(s) + f_o$ ile tanımlanmaktadır, burada f_o bir sabittir.

Bu uyarı ve Teorem 3.1.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.1. *$x : I \longrightarrow Q^2 \subset E_1^3$, s yay parametresiyle verilen bir spacelike eğri olsun. Bu durumda,*

1. Eğer x eğrisi bir elips ise,

$$x(s) = \Big(\frac{2}{a^2}\sin^2\frac{as}{2} - \frac{1}{2}\cos^2\frac{as}{2},\ \frac{1}{a}\sin as,\ \frac{2}{a^2}\sin^2\frac{as}{2} + \frac{1}{2}\cos^2\frac{as}{2}\Big). \tag{3.1.22}$$

2. Eğer x eğrisi bir parabol ise,

$$x(s) = \Big(\frac{a}{2} - \frac{s^2}{2a},\ -s,\ \frac{a}{2} + \frac{s^2}{2a}\Big). \tag{3.1.23}$$

3. Eğer x eğrisi bir hiperbol ise,

$$x(s) = \Big(\frac{2}{a^2}\sinh^2\frac{as}{2} - \frac{1}{2}\cosh^2\frac{as}{2},\ \frac{1}{a}\sinh as,\ \frac{2}{a^2}\sinh^2\frac{as}{2} + \frac{1}{2}\cosh^2\frac{as}{2}\Big) \tag{3.1.24}$$

yazılabilir.

Teorem 3.1.3. *$x : I \longrightarrow Q^2 \subset E_1^3$, s yay parametresiyle verilen ve yapı fonksiyonu $f(s)$ olan bir spacelike eğri olsun. Eğer x eğrisi düzlemsel olmayan bir helis eğrisi ise, bu durumda $f(s)$ yapı fonksiyonu*

$$[(log f_s)_s]^2 - [(log f_s)_s]_s = 2\kappa(s) = a(s+b)^{-2} \tag{3.1.25}$$

eşitliğini sağlar ve (uygun bir parametre dönüşümüyle) aşağıdaki durumlardan birisine uygun olarak yazılabilir.

1.durum $c \neq 0,\ \mp 1$ *ve* $a = c^2 - 1$ *için* $f(s) = s^c$ *veya* $f(s) = s^{-c}$,

2.durum $c \neq 0$ *ve* $a = -1$ *için* $f(s) = \dfrac{c}{log\ s}$ *veya* $f(s) = \dfrac{log\ s}{c}$, *3.durum* $c \neq 0$ *ve* $a+1=-c^2$ *için*

$$f(s)=\frac{2}{c}\tan\left(\frac{c}{2}log\ s\right) \quad veya \quad f(s)=-\frac{2}{c}\tan^{-1}\left(\frac{c}{2}log\ s\right).$$

ISPAT 3.1.1. *Bu teoremin ispatı Huili Lui ve Qingxian Meng tarafından* [**12, 27**] *de üç farklı metotla verilmiştir.*

3.2. Null Koni Q^3 üzerindeki Eğriler

Bu bölümde 4 boyutlu Minkowski uzayı E_1^4 de tanımlı 3-boyutlu null koni Q^3 üzerinde yatan eğrileri ele alacağız. $x: I \longrightarrow Q^3$, s yay parametresiyle verilen bir spacelike eğri olsun. Buna göre

$$x=x(s)=(x_1,x_2,x_3,x_4) \;\Leftrightarrow\; x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$$

yazılabilir. Bu eşitlikten,

$$x_1^2-(ix_2)^2=-(x_3^2-x_4^2)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı iki kare farkı olduğundan

$$\frac{x_1+ix_2}{x_3+x_4}=-\frac{x_3-x_4}{x_1-ix_2} \qquad \text{veya} \qquad \frac{x_1+ix_2}{x_3-x_4}=-\frac{x_3+x_4}{x_1-ix_2}$$

elde edilir. Genelliği bozmaksızın verilen $x: I \longrightarrow Q^3$ eğrisi için $x=x(s)=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ve

$$\frac{x_1+ix_2}{x_3+x_4}=-\frac{x_3-x_4}{x_1-ix_2}=f(s)+ig(s) \tag{3.2.1}$$

ve $x_3+x_4=2\rho(s)$ alınırsa,

$$\frac{x_1+ix_2}{x_3-x_4}=-\frac{x_3+x_4}{x_1-ix_2}=-\frac{1}{f(s)-ig(s)} \tag{3.2.2}$$

olup (3.2.1) ve (3.2.2) den;

$$\begin{cases} x_1+ix_2=2\rho(f+ig) \\ x_1-ix_2=2\rho(f-ig) \\ x_3+x_4=2\rho \\ -x_3+x_4=2\rho(f^2+g^2) \end{cases} \tag{3.2.3}$$

bulunur. Buradan;

$$\begin{cases} x_1 = 2\rho f \\ x_2 = 2\rho g \\ x_3 = \rho(1 - f^2 - g^2) \\ x_4 = \rho(1 + f^2 + g^2) \end{cases} \tag{3.2.4}$$

yazılabilir.

Buna göre $x : I \longrightarrow Q^3$ eğrisi

$$x = x(s) = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \rho(2f, 2g, 1 - f^2 - g^2, 1 + f^2 + g^2) \tag{3.2.5}$$

eşitliği ile tanımlanabilir. (3.2.5) den s ye göre türev alınırsa,

$$x_s = \rho_s(2f, 2g, 1 - f^2 - g^2, 1 + f^2 + g^2) + 2\rho(f_s, g_s, -ff_s - gg_s, ff_s + gg_s) \tag{3.2.6}$$

elde edilir.

$x : I \longrightarrow Q^3$ eğrisi s yay parametresi ile verilen bir spacelike eğri olduğundan $< \dot{x}, \dot{x} >= 1$ eşitliğinden yukarıdaki ρ ve f fonksiyonları arasındaki bağıntı,

$$4\rho^2(f_s^2 + g_s^2) = 1 \tag{3.2.7}$$

olarak bulunur.

Böylece aşağıdaki Teorem ifade edilebilir.

Teorem 3.2.1. *$x : I \longrightarrow Q^3$, s yay parametresi ile verilen bir spacelike eğri olsun. Bu durumda $f(s)$ ve $g(s)$ sabit olmayan fonksiyonlar, $f_s = \dfrac{df}{ds}$ ve $g_s = \dfrac{dg}{ds}$ için $4\rho^2(s)[f_s^2(s) + g_s^2(s)] = 1$ olmak üzere $x = x(s) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ eğrisi*

$$x = x(s) = \rho(\ 2f,\ 2g,\ 1 - f^2 - g^2,\ 1 + f^2 + g^2) \tag{3.2.8}$$

eşitliği ile verilir [**12**].

Bu teoremde verilen $f(s)$ ve $g(s)$ fonksiyonlarına $Q^3 \subset E_1^4$ null koni üzerinde s yay parametresiyle verilen $x(s)$ eğrisinin *yapı fonksiyonları* adı verilir.

(3.2.7) eşitliğnden

$$\rho(s) = \frac{1}{2\sqrt{f_s^2(s) + g_s^2(s)}} \tag{3.2.9}$$

veya

$$\begin{cases} 2f_s(s) = \rho(s)^{-1} \sin\theta(s) \\ 2g_s(s) = \rho(s)^{-1} \cos\theta(s) \end{cases} \tag{3.2.10}$$

yazılabilir.

$$y(s) = -\ddot{x}(s) - \frac{1}{2} < \ddot{x}(s), \ddot{x}(s) > x(s) \tag{3.2.11}$$

olmak üzere;

$$< y, y > = < x, x > = < y, \dot{x} > = 0, \quad < x, y > = 1 \tag{3.2.12}$$

olduğu görülür. Aynı zamanda (3.2.10) den

$$\begin{cases} 2f_{ss} = -\rho^{-2}\rho_s \sin\theta + \rho^{-1}\theta_s \cos\theta \\ 2g_{ss} = -\rho^{-2}\rho_s \cos\theta - \rho^{-1}\theta_s \sin\theta \end{cases} \tag{3.2.13}$$

ve

$$\begin{cases} 2f_{sss} = (2\rho^{-3}\rho_s^2 - \rho^{-2}\rho_{ss} - \rho^{-1}\theta_s^2)\sin\theta + (\rho^{-1}\theta_{ss} - 2\rho^{-2}\rho_s\theta_s)\cos\theta \\ 2g_{sss} = (2\rho^{-3}\rho_s^2 - \rho^{-2}\rho_{ss} - \rho^{-1}\theta_s^2)\cos\theta - (\rho^{-1}\theta_{ss} - 2\rho^{-2}\rho_s\theta_s)\sin\theta \end{cases} \tag{3.2.14}$$

bulunur. (3.2.6) den

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \rho_{ss}(2f, 2g, 1 - f^2 - g^2, 1 + f^2 + g^2) + 4\rho_s(f_s, g_s, -ff_s - gg_s, ff_s + gg_s) \\ &\quad + 2\rho(f_{ss}, g_{ss}, -f_s^2 - ff_{ss} - g_s^2 - gg_{ss}, f_s^2 + ff_{ss} + g_s^2 + gg_{ss}) \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

ve

$$\begin{aligned} \dddot{x} &= \rho_{sss}(2f, 2g, 1 - f^2 - g^2, 1 + f^2 + g^2) + 6\rho_{ss}(f_s, g_s, -ff_s - gg_s, ff_s + gg_s) \\ &\quad + 6\rho_s(f_{ss}, g_{ss}, -f_s^2 - ff_{ss} - g_s^2 - gg_{ss}, f_s^2 + ff_{ss} + g_s^2 + gg_{ss}) \\ &\quad + 2\rho(f_{sss}, g_{sss}, -3f_sf_{ss} - ff_{sss} - 3g_sg_{ss} - gg_{sss}, 3f_sf_{ss} + ff_{sss} + 3g_sg_{ss} + gg_{sss}) \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

yazılır.

$$\tan\theta = \frac{f_s(s)}{g_s(s)} \tag{3.2.17}$$

olmak üzere (3.2.10), (3.2.13) ve (3.2.14) kullanılarak;

$$\begin{aligned} < \ddot{x}, \ddot{x} > &= 16\rho_s^2(f_s^2 + g_s^2) + 4\rho^2(f_{ss}^2 + g_{ss}^2) - 8\rho\rho_{ss}(f_s^2 + g_s^2) + 16\rho\rho_s(f_sf_{ss} + g_sg_{ss}) \\ &= \rho^{-2}\rho_s^2 + \theta_s^2 - 2\rho^{-1}\rho_{ss} \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$
\begin{aligned}
< \dddot{x}, \dddot{x} > &= 36\rho_{ss}^2(f_s^2+g_s^2)+36\rho_s^2(f_{ss}^2+g_{ss}^2)+4\rho^2(f_{sss}^2+g_{sss}^2) \\
&\quad -24\rho_s\rho_{sss}(f_s^2+g_s^2)-24\rho\rho_{sss}(f_sf_{ss}+g_sg_{ss})+72\rho_s\rho_{ss}(f_sf_{ss}+g_sg_{ss}) \\
&\quad +24\rho\rho_{ss}(f_sf_{sss}+g_sg_{sss})+24\rho\rho_s(f_{ss}f_{sss}+g_{ss}g_{sss}) \\
&= 4\rho^{-2}\rho_{ss}^2+\rho^{-4}\rho_s^4+3\rho^{-2}\rho_s^2\theta_s^2-4\rho^{-3}\rho_s^2\rho_{ss}-4\rho^{-1}\rho_{ss}\theta_s^2 \\
&\quad +\theta_s^4+2\rho^{-1}\rho_s\theta_s\theta_{ss}^2
\end{aligned}
\tag{3.2.19}
$$

bulunur.

$\alpha(s) = \dot{x}(s)$ olmak üzere $\beta(s)$, $\det\big(x(s), \alpha(s), \beta(s), y(s)\big) = 1$ olacak şekilde seçilirse (3.2.11) den;

$$
\dot{\alpha}(s) = \ddot{x}(s) = -\frac{1}{2} < \ddot{x}(s), \ddot{x}(s) > x(s) - y(s) = \kappa(s)x(s) - y(s) \tag{3.2.20}
$$

elde edilir.

Böylece $x = x(s) : I \longrightarrow Q^3 \subset E_1^4$ eğrisinin Frenet Formülleri aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{cases}
\dot{x}(s) = \alpha(s) \\
\dot{\alpha}(s) = \kappa(s)x(s) - y(s) \\
\dot{\beta}(s) = \tau(s)x(s) \\
\dot{y}(s) = -\kappa(s)\alpha(s) - \tau(s)\beta(s)
\end{cases}
\tag{3.2.21}
$$

Tanım 3.2.1. (3.2.21) de bulunan $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ fonksiyonlarına; $x = x(s)$ eğrisinin sırasıyla (birinci) koni eğriliği ve koni torsiyonu (ikinci koni eğriliği) denir.

Ayrıca $\{x(s), \alpha(s), \beta(s), y(s)\}$ çatı alanına $x(s)$ eğrisinin *Koni Frenet Çatısı* adı verilir. Buradan

$$
\theta_s = \left(1 + \frac{f_s^2}{g_s^2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{f_s}{g_s}\right)_s \tag{3.2.22}
$$

olmak üzere (3.2.17), (3.2.18) ve (3.2.20) den

$$
\begin{aligned}
\kappa(s) &= -\frac{1}{2} < \ddot{x}, \ddot{x} > = -\frac{1}{2}\rho^{-2}\rho_s^2 - \frac{1}{2}\theta_s^2 + \rho^{-1}\rho_{ss} \\
&= \frac{1}{2}\left[(\log\rho)_s\right]^2 + (\log\rho)_{ss} - \frac{1}{2}\theta_s^2
\end{aligned}
\tag{3.2.23}
$$

elde edilir. (3.2.20) ve (3.2.21) eşitlikleri ile $< x, \dddot{x} >= 0$ ve $< \dot{x}, \dddot{x} >= - < \ddot{x}, \ddot{x} >$ kullanılarak yapılan hesaplamalarla

$$\begin{aligned}
\tau^2 &= < \dddot{x}, \kappa\alpha - \dot{\kappa}x, \dddot{x}, \kappa\alpha - \dot{\kappa}x > -\kappa^2 \\
&= < \dddot{x}, \dddot{x} > -4\kappa^2 =< \dddot{x}, \dddot{x} > - < \ddot{x}, \ddot{x} >^2 \\
&= 4\rho^{-2}\rho_{ss}^2 + \rho^{-4}\rho_s^4 + 3\rho^{-2}\rho_s^2\theta_s^2 - 4\rho^{-3}\rho_s^2\rho_{ss} - 4\rho^{-1}\rho_{ss}\theta_s^2 \\
&\quad +\theta_s^4 + 2\rho^{-1}\rho_s\theta_s\theta_{ss}^2 - \rho^{-4}\rho_s^4 - \theta_s^4 - 4\rho^{-2}\rho_{ss}^2 - 2\rho^{-2}\rho_s^2\theta_s^2 \\
&\quad +4\rho^{-3}\rho_s^2\rho_{ss} + 4\rho^{-1}\rho_{ss}\theta_s^2 \\
&= \rho^{-2}\rho_s^2\theta_s^2 + 2\rho^{-1}\rho_s\theta_s\theta_{ss}^2 + \theta_{ss}^2 \\
&= \left(\rho^{-1}\rho_s\theta_s + \theta_{ss}\right)^2 \\
&= \left(\theta_s \left(\log \rho\right)_s + \theta_{ss}\right)^2
\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

bulunur. Ayrıca basit hesaplamalarla

$$\tau(s)\beta(s) = \dddot{x}(s) + < \ddot{x}(s), \ddot{x}(s) > \dot{x}(s) + < \dddot{x}(s), \ddot{x}(s) > x(s) \tag{3.2.25}$$

bulunur.

Önerme 3.2.1. *s yay parametresi, $f(s)$ ve $g(s)$ yapı fonksiyonları olmak üzere $x = x(s) : I \longrightarrow Q^3 \subset E_1^4$ eğrisi Q^3 de bir spacelike eğri olsun. Buna göre x eğrisinin koni eğriliği ve torsiyonu (3.2.23) ve (3.2.24) de; Koni Frenet Çatı Alanı da (3.2.11) ve (3.2.25) de verilmiştir.*

Uyarı 3.2.1. $x = x(s) : I \longrightarrow Q^3 \subset E_1^4$ eğrisinin $\{x, \alpha, \beta, y\}$ Asimptotik Ortonormal çatısı için

$$< x, x >=< y, y >=< x, \alpha >=< x, \beta >=< y, \alpha >=< y, \beta >=< \alpha, \beta >= 0$$

$$< x, y >=< \alpha, \alpha >=< \beta, \beta >= 1 \tag{3.2.26}$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre bu eğrinin Frenet formülleri;

$$\begin{cases}
\dot{x}(s) = \alpha(s) \\
\dot{\alpha}(s) = \kappa(s)x(s) + \lambda(s)\beta(s) - y(s) \\
\dot{\beta}(s) = \tau(s)x(s) - \lambda(s)\alpha(s) \\
\dot{y}(s) = -\kappa(s)\alpha(s) - \tau(s)\beta(s)
\end{cases} \tag{3.2.27}$$

şeklindedir.

Burada $y(s)$ eğrisinin (3.2.11) şeklinde tanımlandığı durumlarda $\lambda(s) = 0$ olup bu tür çatılar bazı matematikçiler tarafından *Cartan Çatı* olarak isimlendirilmektedir [**22, 26**].

(3.2.11) ve (3.2.12) eşitlikleri daha yüksek boyutlu uzaylar için de geçerli olduğundan $x : I \longrightarrow Q^{n+1} \subset E_1^{n+2}$ eğrisi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

Önerme 3.2.2. *Q^{n+1} de s yay parametresi ile verilen $x = x(s) : I \longrightarrow Q^{n+1} \subset E_1^{n+2}$ eğrisi bir regüler eğri olsun. $\dot{x} = \alpha_1$ ve $< \alpha_i, \alpha_j >= \delta_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$ ile $\alpha_2(s),\ \alpha_3(s),\ \ ...\ \ , \alpha_n(s) \in span\{x, y, \alpha_1\}^{\perp}$ için*

$$y(s) = -\ddot{x}(s) - \frac{1}{2} < \ddot{x}(s), \ddot{x}(s) > x(s)$$

olmak üzere

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \alpha_1(s) \\ \dot{\alpha}_1(s) = \kappa_1(s)x(s) - y(s) \\ \dot{\alpha}_2(s) = \kappa_2(s)x(s) \\ \dot{\alpha}_3(s) = \kappa_3(s)x(s) \\ ... \\ \dot{\alpha}_i(s) = \kappa_i(s)x(s) \\ ... \\ \dot{\alpha}_{n-1}(s) = \kappa_{n-1}(s)x(s) \\ \dot{\alpha}_n(s) = \kappa_n(s)x(s) \\ \dot{y}(s) = -\sum_{i=1}^{n} \kappa_i(s)\alpha_i(s) \end{cases} \tag{3.2.28}$$

dir[**12**].

3.3. Null Koni Q^3 Üzerindeki Yüzeyler

4 boyutlu Minkowski uzayında irtibatlı, yönlendirilmiş 2-boyutlu bir manifold M ve $x : M \longrightarrow R_1^4$, (u, v) isothermal parametreleri ile bir yüzey olsun. Bu durumda $dx = x_u du + x_v dv$ olmak üzere,

$$\tilde{g} =< dx, dx >= 2e^{\omega}(du^2 + dv^2) \tag{3.3.1}$$

fonksiyonu $x(u, v)$ yüzeyi üzerinde bir metrik tanımlar.

$$\tilde{g} =< x_u, x_u > du^2 + 2 < x_u, x_v > dudv+ < x_v, x_v > dv^2 \tag{3.3.2}$$

olduğundan

$$< x_u, x_u >=< x_v, x_v >= 2e^{\omega}, \quad < x_u, x_v >= 0 \tag{3.3.3}$$

olur. Burada $z = u + iv$ dönüşümü yapılırsa,

$$dz = du + idv, \quad d\bar{z} = du - idv \tag{3.3.4}$$

eşitliklerinden

$$dz \otimes d\bar{z} = d\bar{z} \otimes dz = du^2 + dv^2 \tag{3.3.5}$$

elde edilir ve (3.3.1) deki $\tilde{g}$ metriği

$$\tilde{g} =< dx, dx >= e^{\omega}(dz \otimes d\bar{z} + d\bar{z} \otimes dz) \tag{3.3.6}$$

ifadesine dönüşür.

Ayrıca $dx = x_z dz + x_{\bar{z}} d\bar{z}$ olduğundan

$$< dx, dx >=< x_z, x_z > dz^2 + < x_z, x_{\bar{z}} > dz \otimes d\bar{z} + < x_{\bar{z}}, x_z > d\bar{z} \otimes dz + < x_{\bar{z}}, x_{\bar{z}} > d\bar{z}^2 \tag{3.3.7}$$

olarak yazılır ve (3.3.6) den

$$< x_z, x_z >=< x_{\bar{z}}, x_{\bar{z}} >= 0, \quad < x_z, x_{\bar{z}} >=< x_{\bar{z}}, x_z >= e^{\omega} \tag{3.3.8}$$

sonucuna ulaşılır.

$$\partial_z = \frac{\partial}{\partial_z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial_u} - i\frac{\partial}{\partial_v}\right), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial_{\bar{z}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial_u} + i\frac{\partial}{\partial_v}\right) \tag{3.3.9}$$

Cauchy-Riemann operatörleri kullanılarak;

$$x_z = \frac{1}{2}(x_u - ix_v), \quad x_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(x_u + ix_v) \tag{3.3.10}$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi (u, v) isothermal parametreleri ile Q^3 light koni üzerinde $x : M \longrightarrow Q^3$ yüzeyini alalım. $x(u, v)$ yüzeyi üzerine indirgenen metrik (3.3.6) den

$$g =< dx, dx >= e^{\omega}(dz \otimes d\bar{z} + d\bar{z} \otimes dz) \tag{3.3.11}$$

ile verilir. $x(u, v) \in Q^3$ olduğundan $< x, x >= 0$ dır. Bu son eşitlikte z ve $\bar{z}$ ye göre kısmi türevler alınırsa

$$< x, x_z >= 0, \quad < x, x_{\bar{z}} >= 0 \tag{3.3.12}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada

$$g =< dx, dx >= 2e^{\omega}(du^2 + dv^2) = e^{\omega}(dz \otimes d\bar{z} + d\bar{z} \otimes dz) \tag{3.3.13}$$

metriği için

$$< x, x >=< x, x_z >=< x, x_{\bar{z}} >=< x_z, x_z >=< x_{\bar{z}}, x_{\bar{z}} >= 0$$

$$< x_z, x_{\bar{z}} >= e^{\omega} \tag{3.3.14}$$

elde edilir.

Bu eşitliklerde z ve $\bar{z}$ ye göre kısmi türevler alarak;

$$< x_z, x_{zz} >=< x_z, x_{z\bar{z}} >=< x_{\bar{z}}, x_{\bar{z}\bar{z}} >=< x_{\bar{z}}, x_{z\bar{z}} >=< x, x_{zz} >=< x, x_{\bar{z}\bar{z}} >= 0, \tag{3.3.15}$$

$$< x_{\bar{z}}, x_{zz} >= e^{\omega}\omega_z, \quad < x_z, x_{\bar{z}\bar{z}} >= e^{\omega}\omega_{\bar{z}}, \quad < x, x_{z\bar{z}} >= -e^{\omega} \tag{3.3.16}$$

ifadeleri elde edilir [**13**]. (3.3.9) ve (3.3.13) den g metriğinin Laplace operatörü

$$\Delta = \frac{1}{2e^{\omega}}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + i\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) = \frac{1}{2e^{\omega}}4\partial_z\partial_{\bar{z}} = 2e^{-\omega}\partial_z\partial_{\bar{z}} \tag{3.3.17}$$

olur. Bu durumda

$$\Delta x = 2e^{-\omega}x_{z\bar{z}} \tag{3.3.18}$$

olur. (3.3.17) den $x(u, v)$ yüzeyinin K Gauss eğriliği

$$K = -\frac{1}{2}\Delta\omega = -\frac{1}{2}2e^{-\omega}\omega_{z\bar{z}} \tag{3.3.19}$$

olarak elde edilir.

Ayrıca Q^3 light koni üzerinde (u, v) isothermal parametreleri ile verilen $x(u, v)$ yüzeyi için Christoffel Sembolleri

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = -\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}(\omega_z + \omega_{\bar{z}}), \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = -\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}i(\omega_z - \omega_{\bar{z}}) \tag{3.3.20}$$

ile verilir.

Böylece $x(u, v)$ yüzeyinin K Gauss eğriliği, Christoffel sembolleri cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir [**13**].

$$K = -e^{-\omega}\omega_{z\bar{z}} = -e^{-\omega}\big((\Gamma^1_{11})_{\bar{z}} + (i\Gamma^2_{11})_{\bar{z}}\big) \tag{3.3.21}$$

Q^3 light koni üzerinde

$$y = y(u, v) = -\frac{1}{2}\Delta x - \frac{1}{8} < \Delta x, \Delta x > x \tag{3.3.22}$$

eşitliği ile tanımlı bir y yüzeyi için

$$< x, y >= 1, < y, y >=< x_z, y >=< x_{\bar{z}}, y >= 0 \tag{3.3.23}$$

olup burada z ve $\bar{z}$ ye göre kısmi türevler alınırsa;

$$< x, y_z >=< x, y_{\bar{z}} >=< y_z, y >=< y_{\bar{z}}, y >= 0 \tag{3.3.24}$$

ve

$$< x_z, y_z >=_{\varphi}, < x_{\bar{z}}, y_{\bar{z}} >= -\bar{\varphi}, < x_{\bar{z}}, y_z >=< y_{\bar{z}}, x_z >= -\lambda \tag{3.3.25}$$

eşitlikleri elde edilir [**13**].

Bununla birlikte $x(u, v)$ yüzeyi için $u^1 = u$, $u^2 = v$ ve h_{ij} ler yüzeyin ikinci temel formunun bileşenleri olmak üzere

$$< x_{u^i u^j}, y >= 2h_{ij}e^{\omega} \tag{3.3.26}$$

şeklindedir [**18**].

(3.3.3) deki ilk eşitlikten, $\|x_u\| = \|x_v\| = (2e^{\omega})^{\frac{1}{2}}$ olup, $(2e^{\omega})^{-\frac{1}{2}}x_u$ ve $(2e^{\omega})^{-\frac{1}{2}}x_v$ ortonormal (birim dik) vektörlerdir. Ayrıca (3.3.14) ve (3.3.23) deki eşitlikler dikkate alınarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.3.1. *Q^3 light koni üzerindeki $x(u, v)$ yüzeyi boyunca*

$$\left\{x, y, (2e^{\omega})^{-\frac{1}{2}}x_u, (2e^{\omega})^{-\frac{1}{2}}x_v\right\}$$

kümesi E_1^4 üzerinde bir asimtotik ortonormal çatı alanı ve

$$\left\{x, -y, \sqrt{2}(2e^{\omega})^{-\frac{1}{2}}x_z, \sqrt{2}(2e^{\omega})^{-\frac{1}{2}}(1-i)x_{\bar{z}}\right\}$$

kümesi de R_1^4 üzerinde bir lightlike çatı (null tetrat) alanıdır [**13**].

Ali İhsan BORAN (2008) hazırladığı tez çalışmasında; E_1^4 üzerindeki lightlike ortonormal çatılar ile ilgili aşağıdaki tanımları vermiştir;

Tanım 3.3.1. R_1^4' in $B = \{f, f^*, k, l\}$ quasi-ortonormal bazı yardımıyla

$$< f, f^* >=< m, \bar{m} >= 1$$

olacak şekilde ikisi reel null vektör, ikisi kompleks null vektörden oluşan

$$T = \left\{f, f^*, m = \frac{(1+i)}{2}(k + il), \bar{m} = \frac{(1-i)}{2}(k - il)\right\}$$

çatısına R_1^4'de bir lightlike baz adı verilir.

Tanım 3.3.2. Q^3 light koni üzerindeki $x(u,v)$ yüzeyi boyunca

$$\left\{x,\ y,\ (2e^{\omega})^{-\frac{1}{2}}(1+i)x_z,\ (2e^{\omega})^{-\frac{1}{2}}(1-i)x_{\bar{z}}\right\}$$

kümesi R_1^4 üzerinde bir lightlike çatı alanıdır.

BORAN (2008); $x_z,\ x_{\bar{z}}$ ve y nin z ve $\bar{z}$ ye göre kısmi türevleri R_1^4 de yatacağından dolayı $x(u,v)$ yüzeyi boyunca R_1^4 üzerindeki

$$\left\{x, y, (2e^{\omega})^{-\frac{1}{2}}(1+i)x_z, (2e^{\omega})^{-\frac{1}{2}}(1-i)x_{\bar{z}}\right\}$$

lightlike ortonormal çatı alanı cinsinden yazılabileceği için bu yüzeyin yapı denklemlerini aşağıdaki teoremle ifade etmiştir.

Teorem 3.3.1. *$x : M \longrightarrow Q^3$; light koni üzerinde bir yüzey olsun ve $x(u,v)$ yüzeyi boyunca*

$$\left\{x,\ y,\ (2e^{\omega})^{-\frac{1}{2}}(1+i)x_z,\ (2e^{\omega})^{-\frac{1}{2}}(1-i)x_{\bar{z}}\right\}$$

lightlike çatısı için $< x_{z\bar{z}}, y >= \lambda$ ve $< x_{zz}, y >= \varphi$ olmak üzere $x(u,v)$ yüzeyinin yapı denklemleri

$$\begin{aligned}
x_z &= x_z, \quad x_{\bar{z}} = x_{\bar{z}}\\
x_{zz} &= \varphi_x + \omega_z x_z\\
x_{\bar{z}\bar{z}} &= \bar{\varphi}x + \omega_{\bar{z}}x_{\bar{z}}\\
x_{z\bar{z}} &= \lambda x - e^{\omega}y\\
y_z &= -\lambda e^{-\omega}x_z - \varphi e^{-\omega}x_{\bar{z}}\\
y_{\bar{z}} &= -\bar{\varphi}e^{-\omega}x_z - \lambda e^{-\omega}x_{\bar{z}}
\end{aligned}$$

şeklindedir [**13**].

Δx'in (3.3.18) deki değeri $\Delta x = 2e^{-\omega}x_{z\bar{z}}$, x ile iç çarpıma tabi tutulursa $< \Delta x, x >= -2$ elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\lambda =< x_{z\bar{z}}, y >=< \frac{\Delta x}{2e^{-\omega}}, y > &= \tfrac{1}{2}e^{\omega} < \Delta x, y >\\
&= \tfrac{1}{2}e^{\omega} < \Delta x, -\tfrac{1}{2}\Delta x - \tfrac{1}{8} < \Delta x, \Delta x > x >\\
&= \tfrac{1}{2}e^{\omega}\{-\tfrac{1}{2} < \Delta x, \Delta x > -\tfrac{1}{8} < \Delta x, \Delta x >< x, \Delta x >\}\\
&= \tfrac{1}{2}e^{\omega}\{-\tfrac{1}{2} < \Delta x, \Delta x > -\tfrac{1}{8} < \Delta x, \Delta x > (-2)\}\\
&= \tfrac{1}{2}e^{\omega}\{-\tfrac{1}{4} < \Delta x, \Delta x >\}\\
&= -\tfrac{1}{8}e^{\omega} < \Delta x, \Delta x >
\end{aligned}$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 3.3.2. *$x : M \longrightarrow Q^3 \subset E_1^4$ light koni üzerinde bir yüzey olsun ve $x(u,v)$ yüzeyi boyunca*

$$\left\{x, y, (2e^{\omega})^{-\frac{1}{2}}(1+i)x_z, (2e^{\omega})^{-\frac{1}{2}}(1-i)x_{\bar{z}}\right\} \subset E_1^4$$

çatısı için $< x_{z\bar{z}}, y >= \lambda$ ve $< x_{zz}, y >= \varphi$ olmak üzere $x(u,v)$ yüzeyinin yapı denkleminin integrallenme şartlarından

$$\begin{aligned} &2\lambda = \omega_{z\bar{z}} \\ &\bar{\varphi}_z = \lambda_{\bar{z}} - \lambda\omega_{\bar{z}} \\ &\varphi_{\bar{z}} = \lambda_z - \lambda\omega_z \end{aligned}$$

sonuçları elde edilir [**13**].

Buna göre $x(u,v)$ yüzeyinin yapı denklemlerinde kullanılan katsayıların K Gauss eğriliği cinsinden ifadeleri

$$\begin{aligned} &\lambda = -\tfrac{1}{2}e^{\omega}K \\ &\varphi_{\bar{z}} = -\tfrac{1}{2}e^{\omega}K_z \\ &\bar{\varphi}_z = -\tfrac{1}{2}e^{\omega}K_{\bar{z}} \end{aligned}$$

şeklinde verilir [**13**].

Tanım 3.3.3. $x : M \longrightarrow Q^3$ bir yüzey olsun. Q^3 deki $x(u,v)$ yüzeyinin H ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{2} < \Delta x, y >$$

ile tanımlanır. Eğer $H = 0$ ise $x(u,v)$ yüzeyine Q^3 üzerinde sıfır ortalama eğrilikli yüzey denir.

Teorem 3.3.3. *$x : M \longrightarrow Q^3$ light koni üzerinde bir yüzey olsun. $x(u,v)$ yüzeyinin H ortalama eğriliği ile K Gauss eğriliği arasında*

$$K + 2H = 0$$

bağıntısı geçerlidir.

x yüzeyinin ortalama eğriliği ile Gauss eğriliği arasındaki bu bağıntıdan aşağıdaki sonuca ve ortalama eğriliğin Christoffel Sembolleri cinsinden ifadesini veren aşağıdaki lemmaya ulaşılır.

Sonuç 3.3.2. *$x : M \longrightarrow Q^3$ light koni üzerinde bir yüzey olsun. Bu yüzey için aşağıdaki ifadeler denktir:*

i) *$x : M \longrightarrow Q^3$ bir flat yüzeydir.*

ii) *$x : M \longrightarrow Q^3$ yüzeyi sıfır ortalama eğrilikli bir yüzeydir.*

Lemma 3.3.1. *Q^3 light koni üzerinde (u, v) isothermal parametreleri ile verilen $x(u, v)$ yüzeyinin H ortalama eğriliğinin Christoffel Sembolleri cinsinden ifadesi*

$$H = \frac{1}{2}e^{-\omega}\left(\left(\Gamma_{11}^1\right)_{\bar{z}} + \left(i\Gamma_{11}^2\right)_{\bar{z}}\right)$$

şeklindedir.

Şimdi x yüzeyinin sıfır ortalama eğrilikli bir yüzey olması durumunda denk olduğu yüzey tipini veren aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.3.4. *$x : M \longrightarrow Q^3$ yüzeyi sıfır ortalama eğrilikli bir yüzey olsun. Bu durumda bu yüzey, aşağıdaki yüzeylerden birine denktir.*

i) *$x : M \longrightarrow Q^3$ yüzeyi total umbilik bir yüzeydir.*

ii) $x(u, v) = a(\sin u, \cos u, \sinh v, \cosh v), 0 \neq a \in R$

Çalışmamının bundan sonraki kısmında x yüzeyine konformal olarak denk olan bir yüzey ile x yüzeyinden türetilen bir yüzeyi ele alıp, x yüzeyinin sıfır ortalama eğriliğe sahip olması durumunda bu yüzeylerin durumları incelenecektir.

Uyarı 3.3.1. $\sigma : M \longrightarrow R$ bir diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere Q^3 deki bir $x(u, v)$ yüzeyine bağlı olarak tanımlanan $\tilde{x}(u, v) = e^{\sigma}x(u, v)$ yüzeyi de Q^3 de bir yüzeydir. Gerçekten

$$<\tilde{x}, \tilde{x}> = <e^{\sigma}x, e^{\sigma}x> = e^{2\sigma} <x, x> = 0$$

dir. Aynı zamanda

$$<d\tilde{x}, d\tilde{x}> = e^{2\sigma} <dx, dx> = 0$$

olduğundan $\tilde{x}(u, v)$ ve $x(u, v)$ yüzeyleri konformal olarak denk yüzeylerdir.

Lemma 3.3.2. *$x(u, v)$, Q^3 üzerinde bir yüzey olsun. $\sigma : M \longrightarrow R$ bir diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere $\tilde{x}(u, v) = e^{\sigma}x(u, v)$ ile tanımlı Q^3 de bulunan diğer bir yüzeyin $\tilde{K}$ Gauss eğriliği ile x yüzeyinin K Gauss eğriliği arasında*

$$\tilde{K} = e^{-2\sigma}(K - 2\sigma_{z\bar{z}}e^{-\omega})$$

bağıntısı geçerlidir.

$\tilde{H}$, $\tilde{x}(u,v)$ yüzeyinin ortalama eğriliğini göstersin. $\tilde{x}(u,v)$ yüzeyi de Q^3 light koni üzerinde bir yüzey olduğu için $\tilde{x}$ yüzeyinin $\tilde{H}$ ortalama eğriliği ile $\tilde{K}$ Gauss eğriliği arasında Teorem 3.3.3 den

$$\tilde{K} + 2\tilde{H} = 0$$

bağıntısı yazılabilir. Böylece x yüzeyi ile $\tilde{x}$ yüzeylerinin ortalama eğrilikleri arasındaki bağıntıyı veren aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 3.3.3. *$x(u,v)$, Q^3 üzerinde bir yüzey olsun. $\sigma : M \longrightarrow R$ bir diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere $\tilde{x}(u,v) = e^{\sigma}x(u,v)$ ile tanımlı Q^3 de bulunan diğer bir yüzeyin $\tilde{H}$ Ortalama eğriliği ile x yüzeyinin H Ortalama eğriliği arasında*

$$\tilde{H} = e^{-2\sigma}(H + 2\sigma_{z\bar{z}}e^{-\omega})$$

bağıntısı geçerlidir.

$\sigma : M \longrightarrow R$ diferansiyellenebilir fonksiyonu,

$$\sigma(u,v) = au + buv + cv + d \qquad a,b,c,d \in R$$

ile tanımlanarak aşağıdaki teorem ve sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 3.3.5. *$x : M \longrightarrow Q^3$ yüzeyinin sıfır ortalama eğrilikli bir yüzey olması için gerek ve yeter şart $\tilde{x} : M \longrightarrow Q^3$ yüzeyinin de sıfır ortalama eğrilikli bir yüzey olmasıdır.*

Teorem 3.3.6. *$x : M \longrightarrow Q^3$ yüzeyinin flat olması için gerek ve yeter şart $\tilde{x} : M \longrightarrow Q^3$ yüzeyinin flat olmasıdır.*

$x : M \longrightarrow Q^3$ yüzeyi için bu yüzeyden türetilen ve

$$y(u,v) = -\frac{1}{2}\Delta x - \frac{1}{8} < \Delta x, \Delta x > x$$

eşitliği ile tanımlanan bir $y(u,v)$ yüzeyi alınarak, bu yüzeyin x yüzeyine konfarmal olarak denk olan $\tilde{x}(u,v) = e^{\sigma}x(u,v)$ yüzeyi ile arasındaki ilişki incelenmiş, y yüzeyi için H_y ortalama eğriliği ile K_y Gauss eğriliği arasında

$$K_y + 2H_y = 0$$

bağıntısı elde edilmiştir.

TEOREM 3.3.7. *$x : M \longrightarrow Q^3$ bir yüzey ve bu yüzeyden türetilen yüzey de $y(u,v)$ olsun. Bu durumda, $x(u,v)$ yüzeyinin sıfır ortalama eğrilikli bir yüzey (veya flat bir yüzey) olması için gerek ve yeter şart $y(u,v)$ yüzeyinin de sıfır ortalama eğrilikli yüzey (veya flat yüzey) olmasıdır.*

Son iki teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.3. *$x : M \longrightarrow Q^3$ light koni üzerinde sıfır ortalama eğrilikli bir yüzey olsun. Bu durumda Q^3 üzerinde alınan herhangi bir yüzeyin, sıfır ortalama eğrilikli bir yüzey olması için gerek ve yeter şart, ya $x(u,v)$ yüzeyine konformal olarak denk bir yüzey olması ya da $x(u,v)$ yüzeyinden türetilen bir yüzey olmasıdır. Yani, $\hat{x} \subset Q^3$ sıfır ortalama eğrilikli bir yüzey ise $\hat{x}$ aşağıdaki eşitliklerden birisi ile tanımlıdır.*

i) $\hat{x}(u,v) = e^{\sigma} x(u,v)$,

ii) $\hat{x}(u,v) = -\frac{1}{2}\Delta x - \frac{1}{8} < \Delta x, \Delta x > x(u,v)$.

KAYNAKLAR

[1] K.L. Duggal and A. Bejancu, *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications*, Kluwer Academic Publisher. Dordrecht/ Boston/ London, (1996), 1-76.

[2] B. O'Neill, *Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, (1983), 54-157.

[3] T.Weinstein, *An Introduction Lorentz Surface*, Walter de Gruyter and Co., New York, (1996), 4-18.

[4] H.H. Hacisalihoglu, *Diferensiyel Geometri*, Gazi Üniversitesi Basın-Yayın Yüksekokulu Basımevi, Ankara, (1983), 139-253.

[5] H.L. Lui, *Curves in the Lightlike Cone*, Contributions to Algebra and Geometry, Volume 45 No.1 (2004) 291-303.

[6] R. Aslaner, *Analitik Geometri*, Nobel, Ankara, (2011).

[7] H.H. Hacisalihoglu and A. Sabuncuoğlu, *Diferensiyel Geometri*, Milli Eğitim Basımevi, Ankara, (1983).

[8] S. Izumiya and N.Takeuchi, *New special curves and developable surfaces*, Turk. J. Math., 28 (2004) 531–537.

[9] A. Mağden, *On the curves of constant slope*, YYÜ Fen Bilimleri Dergisi, 4 (1993) 103-109.

[10] M. Önder, H. Kocayiğit and M. Kazaz, *Spacelike helices in Minkowski 4-space* E_1^4, Ann Univ Ferrara, 56 (2010) 335-343.

[11] M. Önder, H. Kocayiğit, M. Kazaz and O. Kılıç, B_2 *slant helix in Euclidean 4-space* E^4, International Journal of the Contemph. Math. Sciences, Vol.3 No.29 (2008) 1433-1440.

[12] H. Liu and Q. Meng, *Representation Formulas of Curves in a Two- and Three-Dimensional Lightlike Cone*, Results, Math. Volume 59, (2011), 437-451.

[13] A.İ. Boran, *4-Boyutlu Minkowski Uzayında Null Eğriler ve Null Yüzeylerin Geometrisi Üzerine*, Ph.D. Thesis, İnönü Üniv. Fen Bil. Enst., Malatya, (2008).

[14] W.B. Bonnor, *Null curves in a Minkowski space-time*, Tensor, 20,(1969), 229-242.

[15] H.L. Lui, *Surfaces in the lightlike cone*, J.Math.Anal. Appl., 325,(2007), 1171-1181.

[16] G.L. Naber, *The Geometry of Minkowski Spacetime*, California State University, Springer-Verlag, New York, (1992),7-64.

[17] Ç. Camcı, K. İlarslan and E. Sucurovic, *On Pseudohyperbolical Curves in Minkowski Spacetime*, Turk J.Math., 27 (2003) 315-328.

[18] A.İ. Boran, *"Lorentz Yüzeyleri Üzerine"*, Master Thesis, İnönü Üniv. Fen Bil. Enst., Malatya, (2004).

[19] H. B. Öztekin, M. Ergüt, *On Curves in the Lightlike Cone*, TWMS Jour. Pure Appl. Math, V.2, N.2, (2011), 221-227.

[20] W.B. Bonnor, *Null hypersurface in Minkowski spacetime*, Tensor, 24, (1972), 229-245.

[21] A.F. Yalınız and H.H. Hacısalihoğlu, *Null Generalized Helices in L_3 and L_4, 3 and 4-dimensional Lorentzian Space*, Math. And Comp. Appl, Vol.10 No.1, (2005), 105-111.

[22] A. Ferrandez, A. Gimenez and P. Lucas, *Null Helices in Lorentzian Space Forms*, Int J Mod Phys A, 6(30), (2001), 4845-4863.

[23] J.K. Beem and P.E. Ehrlich, *Global Lorentzian Geometri*, Marcel Dekker, New York, (1981).

[24] Y. Matsushima, *Differentiable Manifolds*, Marcel Dekker, New York, (1972).

[25] L. Kula, Y. Yayli, *On slant helix and its spherical indicatrix*, Applied Mathematics and Computation, 169 (2005) 600-607.

[26] A.C. Çöken, Ü. Çiftçi, *On The Cartan Curvatures of a Null Curve in Minkowski Spacetime*, Geometriae Dedicata, 114 (2005) 71-78.

[27] H.L. Lui, *Ruled surfaces with lightlike ruling in 3-Minkowski space*, Journal of Geometry and Physics, 59 (2009) 74-78.

[28] M. Önder, H. Kocayiğit, M. Kazaz, *Spacelike B_2 slant helix in Minkowski 4-space E_1^4*, International Journal of the Physical Sciences, Vol.5(5) (2010) 470-475.

[29] R. Lopez, *Surfaces with Constant Mean Curvature in Euclidean Space*, International Electronic Journal of Geometry, Vol. 3 (2010) 67-101.

[30] H. Balgetir Öztekin, M. Ergüt, *On Curves in The Lightlike Cone*, TWMS Jour. Pure Appl. Math., Vol.2 No.2 (2011) 221-227.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad	:	Fatih SEVİNÇ
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Malatya / 05.01.1980
Adres	:	Başharık Mah. Gönültaş cad. No: 84/24 Battalgazi/Malatya
E-posta	:	fatihsevincli@gmail.com
Lisans	:	Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü
Mesleki Deneyim	:	2001-2003 Darende Cumhuriyet İ.Ö.O. Matematik Öğrt. 2003-2007 Darende Lisesi Matematik Öğrt. 2007-2010 Yeşilyurt Atatürk İ.Ö.O. Matematik Öğrt. 2010-2011 Akçadağ And. Öğrt. Lisesi Matematik Öğrt. 2011-.... Turgut Özal Anadolu Lisesi Matematik Öğrt.