

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BİLGİSAYARLI TOMOGRAFİ İLE ELDE EDİLEN VOLUMETRİK
VERİNİN İŞLENEREK ÜÇ BOYUTLU GÖRÜNTÜYE
DÖNÜŞTÜRÜLMESİ**

FURKAN NUR DENİZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

MALATYA
Haziran 2011

Tez Başlığı : “ **Bilgisayarlı Tomografi ile Elde Edilen Volumetrik Verinin İşlenerek Üç Boyutlu Görüntüye Dönüştürülmesi**”

Tezi Hazırlayan : **Furkan Nur DENİZ**

Sınav Tarihi : **4 Temmuz 2011**

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jürisi Üyeleri

Doç. Dr. Serdar Ethem HAMAMCI
(Jüri Başkanı)

İnönü Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Celaleddin YEROĞLU
(Üye)

İnönü Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Emin TAĞLUK
(Danışman)

İnönü Üniversitesi

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Asım KÜNKÜL

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “**Bilgisayarlı Tomografi ile Elde Edilen Volumetrik Verinin İşlenerek Üç Boyutlu Görüntüye Dönüştürülmesi**” başlıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Furkan Nur DENİZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİLGİSAYARLI TOMOGRAFİ İLE ELDE EDİLEN VOLUMETRİK VERİNİN İŞLENEREK ÜÇ BOYUTLU GÖRÜNTÜYE DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

Furkan Nur DENİZ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

95+IX sayfa

2011

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mehmet Emin TAĞLUK

Medikal görüntüleme teknikleri tıp biliminin tanı ve tedavi süreçlerinde, oldukça yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Bu nedenle bu tekniklerin araştırılıp geliştirilmesi tıp ve mühendislik bilimleri alanında çok önemlidir.

Bu çalışmada medikal görüntüleme tekniklerinden biri olan bilgisayarlı tomografi ile görüntü elde etme yöntemleri üzerine bazı araştırmalar ve uygulamalar yapılmıştır. İlk aşamada Radon Dönüşümü kullanılarak tomografik görüntülerden sinogram verisi (tomografik veri) Matlab ortamında elde edilmiştir. Çalışmanın esas amacını teşkil eden ikinci aşamada, bu sinogram verilerinden yeniden görüntü elde etmek amacıyla Matlab ortamında dört farklı rekonstrüksiyon yöntemi modellenmiş ve bu modeller kullanılarak görüntüler yeniden oluşturulmuştur. Çalışmada kullanılan yöntemler şu şekildedir: i) filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması (FBP), ii) yelpaze hüzme algortması (FBBP), iii) cebirsel rekonstrüksiyon algoritması (ART), iv) eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon algoritması (SART).

Matlab ortamında modellenen rekonstrüksiyon algoritmaları kullanılarak elde edilen görüntüler, görüntü kalitesi ve rekonstrüksiyon süreleri bakımından karşılaştırılmış ve değerlendirilmiştir. Görüntü kalitesi bakımından iteratif yöntemlerin direkt yöntemlere kıyasla daha kaliteli sonuçlar verdiği, fakat rekonstrüksiyon süresi ve büyük boyutlara sahip matrislerin kullanımı bakımından bazı problemler olduğu görülmüştür.

Daha sonra, rekonstrüksiyon algoritmaları modifiye edilmiş ve 34 tomografi kesitine uygulanmıştır. Matlab ortamında bulunan “Volume Visualization” algoritması kullanılarak üç boyutlu görüntüler elde edilmiş ve elde edilen görüntüler görüntü kalitesi bakımından karşılaştırılmıştır. SART ve FBP algoritması sonucu elde edilen üç boyutlu görüntülerin diğer görüntülere göre daha kaliteli olduğu gözlemlenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Bilgisayarlı Tomografi, Sinogram, Rekonstrüksiyon, Volume Visualization

ABSTRACT

Master of Science Thesis

TRANSFORMATION OF THE VOLUMETRIC DATA ACQUIRED THROUGH COMPUTERIZED TOMOGRAPHY TO THREE DIMENSIONAL IMAGE BY PROCESSING

Furkan Nur DENİZ

Inonu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Electrical-Electronics Engineering

95+IX pages

2011

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Mehmet Emin TAĞLUK

Medical imaging techniques are widely used in the diagnosis and treatment processes in medicine. Hence, investigation and improvement of these techniques are very important in medicine and engineering fields.

In this study, medical image reconstruction methods have been investigated, and some applications have been performed on the data acquired with computerized tomography as one of the medical imaging techniques. In the first stage, sinogram data (tomographic data) of tomographic images were obtained by using Radon Transform. In the second stage which is the main purpose of the study, for reconstructing these images, four different methods have been modeled in Matlab environment and using these models the images were reconstructed. The methods used in this study are as follows: i) filtered backprojection algorithm (FBP), ii) fan beam backprojection (FBBP) algorithm, iii) algebraic reconstruction techniques (ART), iv) simultaneous algebraic reconstruction technique (SART).

The images acquired through these reconstruction algorithms have been compared and evaluated from the image quality and reconstruction time point of view. It was observed that the quality of images obtained via iterative methods are superior compared to direct methods, but deserve some problems due to reconstruction time and large scale image matrices.

Then, the reconstruction algorithms have been modified, and applied to 34 tomographic sparse images. Using “Volume Visualization” algorithm three dimensional images have been obtained and are qualitatively compared. The three dimensional images obtained via SART and FBP algorithms were better compared to other images.

KEYWORDS: Computerized Tomography, Sinogram, Reconstruction, Volume Visualization

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada önerilerini ve desteklerini esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet Emin TAĞLUK'a ve bu çalışma boyunca hep yanımda olan ve beni destekleyen sevgili eşim Serdar DENİZ'e teşekkürlerimi sunarım.

Furkan Nur DENİZ

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	vi
TABLolar LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER	4
2.1. Radon Dönüşümü	5
2.2. Medikal Görüntülemeye Rekonstrüksiyon Teknikleri	10
2.2.1. Fourier Kesit Teoremi.....	10
2.2.2. Filtrelenmiş Geri İzdüşüm Metodu.....	14
2.2.3. Filtreleme.....	17
2.2.4. Yelpeze Hüzme Geri İzdüşüm Metodu.....	21
2.2.5. İteratif Yöntemler.....	26
2.2.5.1. İteratif Yöntemlerde Kullanılan Görüntü ve İzdüşüm İfadeleri.....	26
2.2.5.2. Kaczmarz Metodu.....	28
2.2.6. Cebirsel Rekonstrüksiyon Tekniği (Algebraic Reconstruction Technique)..	30
2.2.7. Eşzamanlı Cebirsel Rekonstrüksiyon Tekniği (Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique).....	31
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	32
3.1. Çalışmada Kullanılan Materyaller.....	32
3.2. DICOM Dosya Formatı.....	33
3.3. Çalışmada Kullanılan Algoritmalar	34
3.3.1. Radon Dönüşümü Algoritması ve Sinogram.....	34
3.3.2. Filtrelenmiş Geri İzdüşüm Algoritması.....	37
3.3.2.1. Geri İzdüşüm Filtrelerinin Tasarımı.....	41
3.3.3. Yelpeze Hüzme Algoritması.....	45
3.3.4. Cebirsel Rekonstrüksiyon Algoritması.....	48

3.3.4.1.	Cebirsel Rekonstrüksiyonda Kullanılmak Üzere Ağırlık Matrisi Tasarımı...	50
3.3.5.	Eşzamanlı Cebirsel Rekonstrüksiyon Algoritması.....	52
3.4.	Rekonstrüksiyon Algoritmaları İle Elde Edilen Görüntülerin Gerçek Görüntüler İle Kıyaslanması.....	54
3.5.	Matlab Volume Visualization Fonksiyonlarının Kullanılması İle 3 Boyutlu Görüntülerin Elde Edilmesi.....	55
4.	ARAŞTIRMA BULGULARI	56
4.1.	Radon Dönüşümü ile Sinogram Elde Edilmesi	56
4.2.	Filtrelenmiş Geri İzdüşüm Algoritması Kullanılarak Görüntü Elde Edilmesi.....	59
4.3.	Radon.m fonksiyonu ile Filtrelenmiş Geri İzdüşüm Algoritması Kullanılarak Görüntü Elde Edilmesi.....	62
4.4.	Yelpaze Hüzme Algoritması Kullanılarak Görüntü Elde Edilmesi.....	66
4.5.	Cebirsel Rekonstrüksiyon Tekniği Kullanılarak Görüntü Elde Edilmesi.....	70
4.6.	Eşzamanlı Cebirsel Rekonstrüksiyon Tekniği Kullanılarak Görüntü Elde Edilmesi.....	73
4.7.	Rekonstrüksiyon Algoritmaları Sonucu Elde Edilen Görüntülerin Piksel Pozisyonu ile Kıyaslanması	75
4.8.	2 Boyutlu 34 Beyin Tomografi Kesitlerinin Kullanılmasıyla 3 Boyutlu Görüntü Oluşumu.....	79
5.	TARTIŞMA VE SONUÇ.....	84
6.	KAYNAKLAR.....	88
	EKLER.....	91
	Ek 1. Çalışmada Kullanılmak İçin Yazılan Matlab Fonksiyonları.....	91
	ÖZGEÇMİŞ.....	95

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.	Bilgisayarlı tomografi görüntüleme cihazı.....	4
Şekil 2.2.	a) Gerçek görüntü, b) 45°'de sinogram verisi (izdüşüm), c) 1°'den 180°'ye kadar olan toplam veri (sinogram), d) Rekonstrüksiyon edilmiş görüntü (MATLAB ortamında elde edilmiştir.).....	6
Şekil 2.3.	Bir nesnenin $f(x,y)$ fonksiyonu olarak ifadesi ve onun herhangi bir θ açısındaki $P_{\theta}(t_1)$ izdüşümü [22].....	8
Şekil 2.4.	Farklı açılar altında paralel ışınlar uygulanarak elde edilen izdüşümler [22].....	9
Şekil 2.5.	Fourier Kesit Teoremi.....	12
Şekil 2.6.	İzdüşümlerin Fourier Dönüşümü alınarak frekans domainindeki toplamı [22].....	14
Şekil 2.7.	Filtreleme etkileri (MATLAB ortamında elde edilmiştir.) a)1 açıda filtresiz izdüşüm,b)2 farklı açıda filtresiz izdüşüm,c)4 farklı açıda filtresiz izdüşüm,d) 6 farklı açıda filtresiz izdüşüm,e) 180 farklı açıda filtresiz izdüşüm,f)180 farklı açıda filtreli izdüşüm	18
Şekil 2.8.	İdeal izdüşüm filtresinin impuls cevabının yaklaşık ifadesi [22].....	19
Şekil 2.9.	İdeal izdüşüm filtresinin transfer fonksiyonu [22].....	19
Şekil 2.10.	Eş açılı yelpaze izdüşüm örneği [22].....	21
Şekil 2.11.	Eş açılı durumda matematiksel ifadeleri gösteren örnek Şekil [22].....	23
Şekil 2.12.	Cebirsel yöntemlerde kullanılan görüntü ve izdüşüm gösterimi [22].....	27
Şekil 2.13.	İki bilinmeyen için Kacmarz Yöntemi ile çözüm gösterimi.....	29
Şekil 3.1.	a) Shepp and Logan Phantom , b) 512x512x34 boyutunda 34 kesitten oluşan beyin tomografi görüntüleri (DICOM formatında)	32
Şekil 3.2.	MVE programı kullanılarak elde edilen Beyin tomografisi kesiti ve DICOM dosya içeriği	33
Şekil 3.3.	Zero padding örnek uygulama.....	35
Şekil 3.4.	Sinogram matrisinin θ açısı sütunları ve t ışın satırları ile ifadesi.....	36
Şekil 3.5.	Akış diyagramları ile Sinogram matrisinin elde etme yönteminin ifadesi.....	37
Şekil 3.6.	İki noktası bilinen doğrunun denklemi için örnek bir doğru gösterimi.....	40
Şekil 3.7.	Geri izdüşüm filtrelerinin genlik cevapları (Matlab'ta elde edilmiştir.).....	43
Şekil 3.8.	Filtrelenmiş geri izdüşüm algoritmasını anlatan akış diyagramı.....	44
Şekil 3.9.	a)Yelpaze Hüzme geometrisi, b) Paralel Hüzme geometrisi.....	45
Şekil 3.10.	Yelpaze hüzme paralel hüzme dönüşümü akış diyagramı.....	47
Şekil 3.11.	Art algoritması akış diyagramı.....	49
Şekil 3.12.	Ağırlık matrisi tasarımı: ışın pozisyonuna göre ağırlık matrisi elemanlarını hesaplama yöntemi.....	51
Şekil 3.13.	Ağırlık matrisi	52
Şekil 3.14.	SART akış diyagramı.....	53
Şekil 4.1.	Farklı boyutlarda sentetik görüntüler ve sinogramları.....	57
Şekil 4.2.	Farklı boyutlarda Head Phantom görüntüleri ve sinogramları.....	57
Şekil 4.3.	Farklı açılarda elde edilen sinogramlar ve bu sinogramlardan elde edilen head phantom görüntüleri	58
Şekil 4.4.	İz fonksiyonu kullanılarak, filtrelenmiş geri izdüşüm tekniği ile elde edilen head phantom görüntüleri. Kullanılan Filtreler: a) Filtresiz, b) Ram-Lak, c) Shepp-Logan, d) Cosine, e) Hamming, f) Hann.....	60
Şekil 4.5.	İz fonksiyonu kullanılarak, filtrelenmiş geri izdüşüm tekniği ile elde edilen tomografi görüntüleri. Kullanılan Filtreler: a) Filtresiz, b) Ram-Lak, c) Shepp-Logan, d) Cosine, e) Hamming, f) Hann.....	61

Şekil 4.6.	Radon fonksiyonu kullanılarak, filtrelenmiş geri izdüşüm tekniği ile elde edilen head phantom görüntüleri. Kullanılan Filtreler: a) Filtresiz, b) Ram-Lak, c) Shepp-Logan, d) Cosine, e) Hamming, f) Hann.....	63
Şekil 4.7.	Radon fonksiyonu kullanılarak, filtrelenmiş geri izdüşüm tekniği ile elde edilen tomografi görüntüleri. Kullanılan Filtreler: a) Filtresiz, b) Ram-Lak, c) Shepp-Logan, d) Cosine, e) Hamming, f) Hann.....	64
Şekil 4.8.	a) fanbeam fonksiyonu ile elde edilen sinogram, b) yelpazehüzme fonksiyonu elde edilen sinogram.....	66
Şekil 4.9.	Yelpaze hüzme geri izdüşüm tekniği ile elde edilen head phantom görüntüleri. Kullanılan Filtreler: a) Filtresiz, b) Ram-Lak, c) Shepp-Logan, d) Cosine, e) Hamming, f) Hann.....	67
Şekil 4.10.	Yelpaze hüzme geri izdüşüm tekniği ile elde edilen tomografi görüntüleri. Kullanılan Filtreler: a) Filtresiz, b) Ram-Lak, c) Shepp-Logan, d) Cosine, e) Hamming, f) Hann.....	68
Şekil 4.11.	Cebirsel rekonstrüksiyon tekniği ile elde edilen head phantom görüntüleri. İterasyon sayıları: a) 12, b) 25, c) 50, d)100.....	71
Şekil 4.12.	Cebirsel rekonstrüksiyon tekniği ile elde edilen tomografi görüntüleri. İterasyon sayıları:a)12, b) 25, c) 50, d)100.....	72
Şekil 4.13.	Eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon tekniği ile elde edilen head phantom görüntüleri. İterasyon sayıları: a)12, b) 25, c) 50, d)100.....	74
Şekil 4.14.	Eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon tekniği ile elde edilen tomografi görüntüleri. İterasyon sayıları: a)12, b) 25, c) 50, d)100.....	75
Şekil 4.15.	16x16 head phantom için rekonstrüksiyon sonuçlarının piksel grilik renk seviyeleri.....	76
Şekil 4.16.	64x64 head phantom için rekonstrüksiyon sonuçlarının piksel grilik renk seviyeleri	77
Şekil 4.17.	128x128 head phantom için rekonstrüksiyon sonuçlarının piksel grilik renk seviyeleri	77
Şekil 4.18.	16x16 tomografi için rekonstrüksiyon sonuçlarının piksel grilik renk seviyeleri ...	78
Şekil 4.19.	64x64 tomografi için rekonstrüksiyon sonuçlarının piksel grilik renk seviyeleri ...	78
Şekil 4.20.	128x128 tomografi için rekonstrüksiyon sonuçlarının piksel grilik renk seviyeleri	79
Şekil 4.21.	34 adet beyin tomografi kesitine ait görüntüler: a) orijinal görüntüler, b)sinogram görüntüleri, c)filtrelenmiş geri izdüşüm görüntüleri.....	80
Şekil 4.22.	34 adet beyin tomografi kesitine ait görüntüler: a)yelpaze hüzme görüntüleri, b) ART görüntüleri, f) SART görüntüleri.....	81
Şekil 4.23.	3 boyutlu görüntü modelleri: a)orijinal model, b)filtrelenmiş geri izdüşüm ile elde edilen model, c)yelpaze hüzme ile elde edilen model, d) ART ile elde edilen model, e) SART ile elde edilen model.....	82

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 3.1.	Geri izdüşüm filtrelerin elde edilmesi.....	43
Tablo 4.1.	‘iz.m’ fonksiyonu ile filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması filtre uygulaması....	62
Tablo 4.2.	‘iz.m’ fonksiyonu ile filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması filtre uygulaması....	64
Tablo 4.3.	Yelpaze hüzme algoritması ile filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması filtre uygulaması.....	69
Tablo 4.4.	Farklı iterasyon sayılarında cebirsel rekonstrüksiyon tekniği uygulaması.....	70
Tablo 4.5.	Farklı iterasyon sayılarında eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon tekniği uygulaması.....	73
Tablo 5.1.	Direkt yöntemlerde eni iyi PSNR değerlerinin hesaplandığı filtreler.....	85
Tablo 5.2.	İteratif yöntemlerde eni iyi PSNR değerlerinin hesaplandığı iterasyon sayıları.....	86

SİMGELER VE KISALTMALAR

I	Bir ortamdan geçen ışının akısı
I_0	Işının başlangıç akısı
μ	Işının ilerlediği ortamın yoğunluk sabiti
p	Işının sönümlenme katsayısı
$ w $	Filtre frekans cevabı
W	İzdüşümdeki en yüksek frekanstan büyük frekans değeri
θ	Paralel hüzmeye kaynağın dönme açısı
P_θ	Uzamsal domainde belli bir açı altında izdüşüm
Q_θ	Uzamsal domainde belli bir açı altında filtrelanmış geri izdüşüm
t	x ışınının orjine olan uzaklığı
S_θ	Frekans domaininde belli bir açı altında izdüşüm ifadesi
β	Yelpaze hüzmeye kaynağın kaynağın referans eksenini ile yaptığı açı
γ	Yelpaze hüzmeye içerisindeki herhangi bir ışının yerini gösteren açı
$R_\beta(\gamma)$	Uzamsal domainde yelpaze izdüşüm
D	Yelpaze hüzmeye kaynak ile orjin arasındaki mesafe
Q_β	Uzamsal domainde belli bir açı altında filtrelanmış yelpaze izdüşüm
p_i	i. ışın ile elde edilen izdüşüm
f_j	j. hücrenin ızgarada denk gelen sabit değeri
w_{ij}	Ağırlık faktörü
M	Toplam ışın sayısı
N	Toplam piksel sayısı
δ	İzgarada bulunan karenin kenar uzunluğu (piksel boyu)
τ	Işın genişliği
q_i	(i-1) sonucuna bağlı olarak hesaplanmış p_i değeri
$\Delta f_j^{(i)}$	Hata farkı
N_i	i. ışının, merkezinden geçtiği piksel sayısı
L_i	i. ışının görüntü bölgesine düşen uzunluğu
α	Yumuşatma katsayısı
m	Görüntü matrisi satır sayısı
n	Görüntü matrisi sütun sayısı
r	Nokta kaynağın nesneden olan uzaklığı
d	Kesim frekansı
I_1	Orijinal görüntü
I_2	Rekonstrüksiyon sonucu elde edilen görüntüyü
R	Orijinal görüntüdeki en büyük piksel değeri
MSE	Mean Square Error
$RMSE$	Root Mean Square Error
$PSNR$	Peak Signal-to-Noise Ratio
$SPECT$	Tek Foton Emisyon Bilgisayarlı Tomografi
PET	Pozitron Emisyon Tomografisi
ART	Algebraic Reconstruction Techniques
$SART$	Simultaneous Algebraic Reconstruction Techniques
FBP	Filtered Back Projection
$FBBP$	Fan Beam Back Projection
$DICOM$	Digital Imaging and Communications in Medicine
$TIFF$	Tagged Image File Format

1. GİRİŞ

Medikal görüntüleme ve bu görüntüleri işleme teknikleri tıp biliminin tanı ve tedavi süreçlerinde önemli bir yer tutmaktadır. Medikal görüntüleme, hastanın vücudunda gerekli görülen dokunun veya bölgenin dokuya zarar vermeden ve cerrahi müdahale olmadan teşhis amaçlı içeriğinin görüntülenmesi olarak tanımlanabilir. Bu amaçla tasarlanan çeşitli işaret ve sayısal görüntü işleme tekniklerinin [1-5] de içinde yer aldığı medikal görüntüleme cihazları; x-ışınlarının kullanıldığı röntgen ve bilgisayarlı tomografi, ses dalgalarının kullanıldığı ultrason, manyetik alanın kullanıldığı manyetik rezonans görüntüleme, dönen gama kamerasının kullanıldığı tek foton emisyon bilgisayarlı tomografi (SPECT) ve pozitron yayıcı elementlerin kullanıldığı pozitron emisyon tomografisi (PET) olarak sıralanabilir [6-9]. Her bir görüntüleme cihazının birbirlerine göre avantaj ve dezavantajları mevcuttur. Bu görüntüleme cihazları farklı yöntemler kullanılarak görüntü elde edilmesini sağlamaktadır. Her bir görüntüleme tekniğinin kullanım alanları hastanın vücudunda incelenmesi gereken bölgenin yapısal özelliklerine ve teşhis edilmeye çalışılan hastalığın türüne göre değişmektedir. Örneğin, kemik, damar ve akciğerler gibi birçok doku tipinin detaylı olarak incelenmesinde bilgisayarlı tomografi tercih edilirken, diz ve boyun bölgesindeki yumuşak dokuların detaylı görüntülerinin elde edilebilmesi için manyetik rezonans görüntüleme tercih edilmektedir [10]. Kanseri hücrelerinin teşhisinde ve zararlı tümörlerin yayılma süreçlerinin izlenmesinde SPECT ve PET görüntüleme teknikleri tercih edilmektedir [11].

Medikal görüntüleme sürecinde cerrahi müdahalenin olmayışı, hızlı ve erken teşhisin yapılabilmesi önemli bir avantaj iken bilgisayarlı tomografi ve röntgen cihazları kullanımında aşırı dozda radyasyona maruz kalma, görüntülerin kontrastını arttırabilmek için hastaya ağız ya da kan yoluyla verilen iyot içeren maddenin az da olsa alerjik reaksiyon yapma olasılığı, manyetik görüntüleme alan etkisi ve SPECT görüntüleme hastaya verilen kısa yarılanma ömürlü izotopların etkisi gibi dezavantajları mevcuttur [12]. Medikal görüntüleme tekniklerinin çok geniş bir alan kapsadığından bu çalışma sadece bilgisayarlı tomografi (Computerized tomography) tekniği ile sınırlandırılmıştır. Bu çalışmada tıbbi görüntüleme kullanılan görüntü elde

etme teknikleri ile ilgili araştırmalar ve bilgisayarlı tomografi görüntü çıktıları üzerinde uygulamalar yapılmıştır.

Eski yunanca kelimeler olan tomo (kesit) ve graphy (görüntü) kelimelerinden ismini alan bilgisayarlı tomografinin teorisi 1963 yılında Cormak tarafından ortaya atılmış ve radyolojide yeni bir çağır açmıştır. Bilgisayarlı tomografi ile ilgili ilk başarılı klinik uygulamalar 1967 yılında G.Hounsfield tarafından gerçekleştirilmiş ve 1971 yılında hastanelerde uygulanmaya başlanmıştır. Bilgisayarlı tomografinin temeli röntgen cihazlarında kullanılan x-ışını tüpü teknolojisine benzer bir yapıya dayanır. Bilgisayarlı tomografi cihazı kesit görüntülerini manyetik rezonans görüntüleme tekniğinde kullanılan manyetik dalgalar yerine x-ışınları kullanılmakta ve bu nedenle özel bir yalıtım tekniğine gerek duyulmuştur.

Bilgisayarlı tomografi cihazı ile elde edilen tek boyutlu veriler (sinyaller) işlenerek iki boyutlu kesit görüntüleri haline getirilir. Ayrıca hacimsellik oluşturan yazılım programları (Volume rendering [13-15]) ile bu kesitsel görüntüler üç boyutlu görüntülere dönüştürölür.

Bu çalışmada bilgisayarlı tomografi ile elde edilen radyolojik sinyaller işlenerek kesit görüntü elde etme tekniklerinin araştırılması, bu tekniklerin programlarını yazma ve sentetik ve reel verilere uygulama, elde edilen sonuçları karşılaştırma ve sonuçta tomografik kesit görüntülerin kalitesini iyileştirmeye yönelik bir altyapı oluşturma amaçlanmıştır. Ayrıca, elde edilen kesit görüntülerinin kullanılarak MATLAB ortamında üç boyutlu görüntüye dönüştirme teknikleri araştırılması ve her tekniğin performansının karşılaştırılması hedeflenmiştir.

Tezin yapısal tasarımı: Tez giriş, kuramsal temeller, materyal ve yöntemler, araştırma bulguları, tartışma ve sonuç olmak üzere beş bölümden oluşmuştur.

Kuramsal temeller bölümünde, tomografi geometrisinin temel özellikleri anlatılmış, Radon dönüşümü ile x-ışını ve dedektörler arasındaki geometrinin matematiksel tanımı ve ispatı yapılmıştır. Radon dönüşümü ile elde edilen verilerin kullanılması ile filtrelenmiş geri izdüşüm metodu, yelpaze hüzmeye metodu, cebirsel rekonstrüksiyon tekniğı ve eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon ile yeniden görüntünün elde edilmesi teknikleri hakkında teorik bilgiler verilmiştir.

Materyal ve yöntemler bölümünde kuramsal temellerde anlatılan tekniklerin bilgisayar ortamında MATLAB kullanılarak programlanması için yazılan ve tasarlanan programların algoritmaları anlatılmıştır.

Araştırma bulguları bölümünde ise MATLAB kullanılarak yazılan Radon dönüşümü programı ile ‘sinogram’ adı verilen veriler elde edilmiştir. MATLAB kullanılarak yazılan filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması, yelpaze hüzme geri izdüşüm algoritması, cebirsel rekonstrüksiyon ve eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon algoritmaları ile Radon dönüşümü sonucu elde edilen sinogram verilerinden görüntü kesitleri elde edilmiştir. Farklı boyutlarda elde edilen kesit görüntüleri birbirleri arasında kıyaslanıp, yorumlanmıştır. Daha sonraki aşamada elde edilen kesit görüntüler MATLAB “Volume Visualization” fonksiyonları kullanılarak aynı eksen üzerinde bir araya getirilerek interpolasyon işlemi uygulanmış ve hacimsellik kazandırılarak üç boyutlu görüntüler elde edilmiştir.

Tartışma ve sonuç bölümünde ise elde edilen kesit görüntüler ve üç boyutlu görüntüler hakkında yorumlar yapılmış, literatürde bulunan sonuçlar ile kıyaslanarak eksiklikler ve çözümler hakkında fikirler öne sürülmüş, gelecek çalışmalar için yol gösterici nitelikte önerilerde bulunulmuştur.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bilgisayarlı tomografi temelde x-ışını kullanılarak vücudun incelenen bölgesinin kesitsel görüntüsünü oluşturmaya yönelik bir medikal görüntüleme yöntemidir. İnceleme sırasında hasta bilgisayarlı tomografi cihazının masasında hareket etmeyecek şekilde yatırılır. İstenilen görüntüyü elde etmek için ihtiyaç duyulan kesitlere uygun gelecek şekilde masa manuel ya da uzaktan kumanda ile cihazın "gantry" adı verilen açıklığına sokulur (Şekil 2.1). Bir bilgisayara bağlı olan bu cihaz x-ışını tüpünü masa uygun kesit pozisyonuna geldiği anda aktifleştirerek gantryde bulunan dedektörleriyle hastadan geçen ve görüntü bilgilerini taşıyan x-ışını demetlerini absorbe eder. Dedektörden gelen veriler analog dijital çevirici kullanılarak sayısal verilere dönüştürülür ve bu veriler tomografi cihazının bilgisayarlarında işlenerek tomografi görüntüleri oluşturulur. Sonuçta dokuların birbiri ardına kesitsel görüntüleri elde edilmiş olur. Oluşturulan görüntüler bilgisayar ekranından izlenir. Aynı zamanda bu görüntüler optik disk gibi yüksek kapasiteli belleklerde de depolana bilir.



Şekil 2.1. Bilgisayarlı tomografi görüntüleme cihazı

Bilgisayarlı tomografi cihazları, geliştirilme ve kullanılma aşamalarında bir dizi evrim geçirmiş ve bazı dezavantajlarından arındırılmıştır. Geçirdikleri evrime göre bilgisayarlı tomografi cihazları 5 jenerasyonda tanımlanmaktadır [16]. Birinci jenerasyon cihazlar, pencil-beam (kalem-ışması) x-ışını olarak tanımlanan paralel ışınların kullanıldığı ve tek bir detektörün bulunduğu cihazlardır. İlk jenerasyon cihazlarda kesit alım süresi oldukça uzundur. İkinci jenerasyon cihazlarda tek detektör yerine lineer dizilmiş birden fazla detektör kullanılmış ve x-ışını huzmesi de paralel ışın yerine yelpaze hüzme biçiminde kullanılmıştır. Üçüncü jenerasyon cihazlar, x-ışını kaynağı ve bu kaynağın karşısına yerleştirilmiş, konveks dedektörlerden oluşturulmuştur. X-ışını tüpü ve dedektörler, incelenecek olan nesne etrafında birbirleri ile koordineli biçimde hareket eder. Üçüncü jenerasyon cihazlarındaki bir diğer yenilik ise, gantrynin tek bir dönüşünde birden fazla kesit görüntüsünün alınabilmesidir. Dördüncü jenerasyon cihazlarda sadece x-ışını kaynağı hareketlidir. Bu cihazlarda kesit alım süresi 1-2 saniye düzeylerine indirgenmiştir. Beşinci jenerasyon cihazlar son derece hızlı bilgisayarlı tomografi olarak tanımlanmaktadır. Dönüş hareketi yapan x-ışını tüpü ve gantry, yerini yüksek güçlü 4 tungsten hedef anotlu elektron ışınına bırakmıştır. Cihazda hareketli bölümler bulunmadığından ve x-ışını çok odaklı elektron demeti şeklinde uygulandığından kesit alım süresi saniyenin altına indirgenmiş ve aynı sürede birkaç kesit elde etme imkânı yaratılmıştır. Bu çalışma daha çok kesitsel görüntülerin nasıl elde edildiğine yönelik olduğu için bilgisayarlı tomografi cihazlarının birinci ve ikinci jenerasyonları temel alınarak ele alınmış ve yazılımsal uygulamalar yapılmıştır.

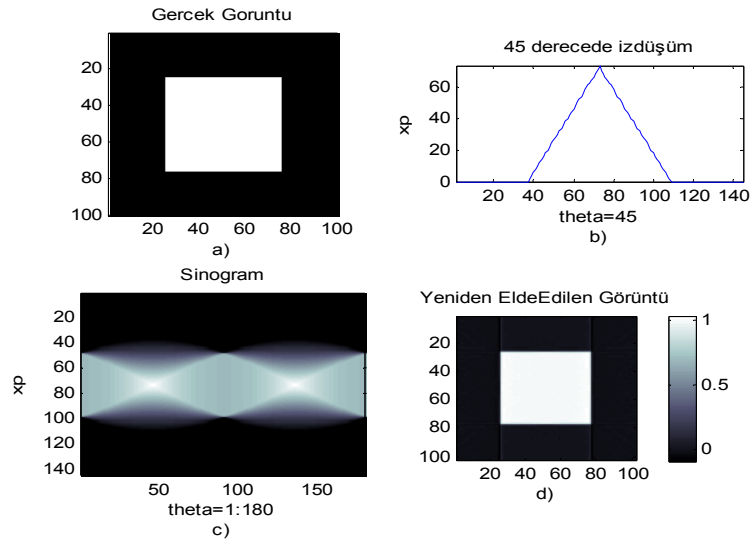
Kesitsel görüntü elde etme sürecinde hesaplamalara yönelik temel kavram ve algoritmaların anlatılması hususunda literatörde en çok kullanılan kaynaklardan biri olan A.C. Kak and M. Slaney'in "Principles of Computerized Tomographic Imaging" [22] kitabından yararlanılmıştır. Dolayısıyla bu kitap ve diğer kaynaklardan derlenen bu konudaki temel kavramların bir özeti aşağıda sunulmuştur.

2.1. Radon Dönüşümü

Avusturyalı matematikçi Johann Radon 1917 yılında bir düzlemde bulunan 2 değişkenli $f(x,y)$ fonksiyonunun düz bir çizgi boyunca integralinin (line integral) tersinir olduğunu ispatlayarak Radon Dönüşümünü bulmuştur [17]. Radon Dönüşümü tersinir

olma özelliğinden dolayı tomografi alanında çok önemli bir yere sahiptir. Radon Dönüşümü tıptaki bilgisayarlı tomografinin dışında barkot tarayıcı, elektron mikroskobu ve yer hareketlerini ifade eden sismik dalgaların yansımalarının çözülmesinde de önemli bir yer tutmaktadır [18].

Tomografik görüntü, incelediğimiz nesnenin izdüşümlerinin¹ toplamından oluşmaktadır. Bu tomografik görüntüye **sinogram** adı verilir. Elde edilen verinin içeriğinin değiştirilmeden daha anlamlı olan nesnenin görüntülerine dönüştürülmesi gerekmektedir. İzdüşümlerinden görüntünün elde edilme işlemine **rekonstrüksiyon** denir. Şekil 2.2’de Matlab’da elde edilmiş bir görüntünün sinogramı, izdüşümü ve rekonstrüksiyonu örnek olarak verilmiştir.



Şekil 2.2. a) Gerçek görüntü, b) 45°’de sinogram verisi (izdüşüm), c) 1°’den 180°’ye kadar olan toplam veri (sinogram), d) Rekonstrüksiyon edilmiş görüntü (MATLAB ortamında elde edilmiştir.)

Bilgisayarlı tomografi sürecinde iki temel işlem söz konusudur: Birincisi görüntülenecek nesneden x-ışını geçirilip detektörler yardımıyla nesnenin bölgesel kesitlerin izdüşümlerini elde etmektir. İkincisi ise bu izdüşüm verilerinden nesnenin kesitsel görüntüsünün çeşitli rekonstrüksiyon tekniklerini kullanarak elde etmektir.

X-ışınları herhangi bir ortamdan geçerken saçılma ve emilimden dolayı güç kaybına uğrar ve sönümlenir. Bu sönümlemeye neden olan ortamın durumu rekonstrüksiyon için bir model oluşturur. Homojen yoğunluğa sahip bir ortamdan geçen ışının akısı, I , aşağıdaki gibi ifade edilmiştir [19-21].

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (2.1)$$

¹ İzdüşüm, herhangi bir açıdaki sinogram verisidir.

Denklem 2.1’de ışının başlangıç akısı I_0 , ışının ilerlediği yol x , ışının ilerlediği ortamın yoğunluk sabiti μ olarak ifade edilmiştir.

Ortamın, kendi içerisinde homojen yoğunluğa sahip n tane tabakadan oluştuğu varsayılırsa ışının akısı;

$$I = I_0 \exp \left(- \sum_{i=1}^n \mu_i \Delta x_i \right) \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilebilir. Yoğunluk fonksiyonu $\mu(x)$ ile ifade edilirse

$$I = I_0 \exp \left(- \int_L \mu(x) dx \right) \quad (2.3)$$

Denklem 2.3 elde edilir. Burada, ışının hareketi boyunca izlediği yol L ile gösterilmiştir.

Denklem 2.3’ün her iki tarafının doğal logaritması alınarak sönümlenme katsayısı p hesaplanabilir [19-21].

$$p = \int_L \mu(x) dx = - \ln \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (2.4)$$

Uzaydaki herhangi bir nesnenin bir kesiti, iki boyutlu düzlemde $f(x,y)$ ’nin bir fonksiyonu olarak ifade edilebilir. İki boyutlu bir ortamı, ortamdan geçen ışının sönümlenme değerleri ile modelleyebilmek için öncelikle ışının iki boyutlu bir düzlemde geçerkenki davranışı incelenmelidir. Örneğin kesitsel görüntü alan bir sistemde, x-ışınlarının geçeceği iki boyutlu ve değişken yoğunluğa sahip bir ortamın yoğunluğu $\mu(x,y)$ fonksiyonu olarak tanımlanabilir. Burada x ve y , s_0 ’dan s_1 ’e kadar olan bir yay uzunluğu ile ifade edilen (yay uzunluğu çizgi boyunca birim hızdaki hareketi ifade eder.) s ’in bir fonksiyonu olarak yazılırsa, x - y düzleminde geçen ışının düzlemsel akısı;

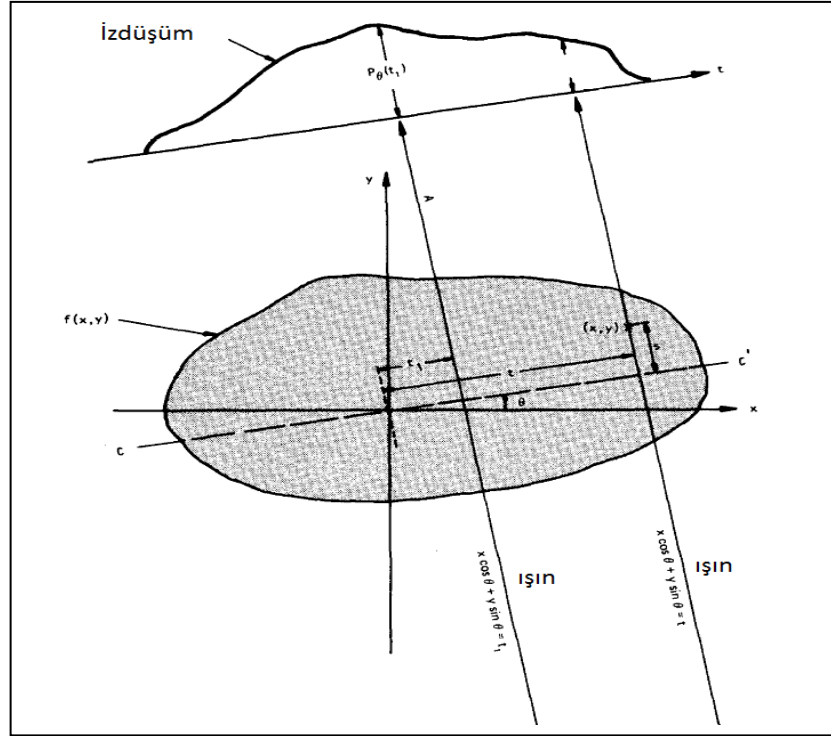
$$I(x,y) = I_0 \exp \left(- \int_{s_0}^{s_1} \mu(x(s), y(s)) ds \right) \quad (2.5)$$

elde edilir. Sönümleme katsayısı ise x - y düzleminde L boyunca μ ’nün çizgi integrali alınarak aşağıdaki gibi elde edilir [18-21].

$$p(x,y) = \int_L \mu(x,y) ds \quad (2.6)$$

Denklem 2.6’da verilen sönümlenme katsayısı, x-ışınının bir kaynaktan çıkıp nesnenin içinden geçtikten sonra detektöre ulaştığı andaki veriyi dolaylı olarak ifade eder. Dolayısıyla, $f(x,y)$ fonksiyonu ile ifade edilen herhangi bir nesnenin belli bir açı ile (x - y düzleminde) elde edilen izdüşümü, $P(x,y)$, global olarak Denklem 2.7’deki gibi ifade edilir;

$$P(x,y) = \int_{kaynak}^{dedektör} f(x,y) ds \quad (2.7)$$



Şekil 2.3. Bir nesnenin $f(x,y)$ fonksiyonu olarak ifadesi ve onun herhangi bir θ açısındaki $P_\theta(t)$ izdüşümü [22]

İki boyutlu $f(x,y)$ fonksiyonuna ait her çizgi integrali (θ, t) parametreleri ile ifade edilirse, Şekil 2.3’de görüldüğü gibi $f(x,y)$ fonksiyonuna ait herhangi bir θ açısındaki izdüşümü $P_\theta(t)$ olarak ifade edilirse, bu işlem sonucunda $f(x,y)$ fonksiyonu (θ, t) parametreleri ile ifade edilebilir. Şekil üzerinde geometrik işlemler göz önüne alındığında

$$x \cos \theta + y \sin \theta = t \quad (2.8)$$

olduğu görülmektedir. Denklem 2.8’de verilen ilişki kullanılarak $P_\theta(t)$ çizgi integrali,

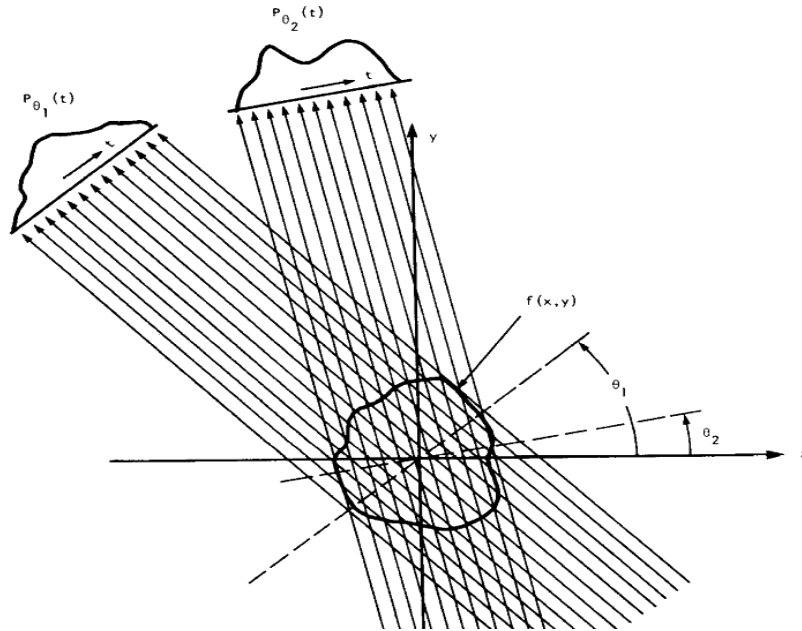
$$P_{\theta}(t) = \int_{(\theta,t)} f(x,y) ds \quad (2.9)$$

elde edilir. Elde edilen ifade delta fonksiyonu kullanılarak daha açık bir biçimde yeniden yazılırsa:

$$P_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy \quad (2.10)$$

elde edilir. Buradaki $P_{\theta}(t)$ fonksiyonuna $f(x,y)$ 'nin **Radon Dönüşümü** denir [21-23].

Farklı θ açıları altında alınan izdüşümler Şekil 2.4'te görüldüğü gibi birden fazla paralel ışın uygulanarak toplandığında sinogram verisi elde edilmiş olur. Sinogram verisi doğrultusunda rekonstrüksiyon işlemleri gerçekleşir.



Şekil 2.4. Farklı açılarda paralel ışınlar uygulanarak elde edilen izdüşümler [22]

Radon dönüşümünün tersi [17,23] aşağıda verilen denklem ile ifade edilir:

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial P(t,\theta)}{\partial t} \frac{1}{(x \cos \theta + y \sin \theta - t)} dt d\theta \quad (2.11)$$

denklem 2.11'de görüldüğü üzere $P(t,\theta)$ 'nin kısmi türevi söz konusudur.

Bu denklem devamlılık, sınırlılık gibi bazı fiziksel şartların sağlanması gereğini taşıdığından çözümü oldukça karmaşıktır. Dolayısıyla bu denklemin çözümünü tahmin eden bazı sayısal rekonstrüksiyon yöntemleri geliştirilmiştir. Bu sayısal yöntemler

medikal görüntü elde etme tekniklerinin temellerini oluşturmakla beraber uygulamaya yönelik birçok algoritmanın da geliştirmesinde önemli yer tutar.

2.2. Medikal Görüntülemeye Rekonstrüksiyon Teknikleri

Medikal görüntülemeye rekonstrüksiyon teknikleri direkt yöntemler ve iteratif yöntemler olarak sınıflandırılmıştır [22,24]. Direkt yöntemler bir döngü olmaksızın Fourier Dönüşümü uygulanarak elde edilen rekonstrüksiyon yöntemleridir. İteratif yöntemler ise n sayıda pikselin çözümlenebilmesi için n tane bağımsız denklemin belli bir döngü içerisinde çözümlenmesini gerektiren yöntemlerdir. Her iki sınıfa ait yöntemleri kullanarak nesnenin kesitlerinin rekonstrüksiyonu iki boyutlu olarak elde edilebilir.

Üç boyutlu rekonstrüksiyonda ise bu sınıflandırmanın dışında direkt üç boyutlu veri olarak voksel² bazında ya da her bir kesit için interpolasyon teknikleri uygulanarak yeniden elde etme teknikleri söz konusudur [22]. Bu sınıflandırmanın dışında belli segmentasyon (bölütleme) yöntemlerinin kullanılmasıyla elde edilen kesitlere interpolasyon teknikleri uygulanarak lokal üç boyutlu görüntülerin rekonstrüksiyonu da mümkündür [25,26]. Bölütleme tekniğinde amaç, bir nesne ya da kesit içerisinde istenilen herhangi bir bölgenin lokalize edilmesi sonucu, o bölgeyi, görüntünün geri kalanından izole ederek çıkartıp, uygun şekilde işlenip kullanıcıya sunulmasıdır [27]. Lokalize edilen kesitlerin üst üste interpolasyonları sağlanarak rekonstrüksiyonunun oluşturulması mümkündür. Bu tez çalışmasında direkt yöntemlerden filtrelenmiş geri izdüşüm metodu ve yelpaze hüzme rekonstrüksiyonu incelenmiştir. İteratif yöntemlerde ise cebirsel rekonstrüksiyon teknikleri (ART, SART) ele alınmıştır.

2.2.1. Fourier Kesit Teoremi

Fourier Kesit Teoremi'ne [28] göre izdüşümün 1 boyutlu Fourier Dönüşümü orijinal nesnenin 2 boyutlu Fourier Dönüşümünün bir kesitine eşittir. Bu teoreme göre izdüşüm verilerinin Fourier Dönüşümlerini topladığımız takdirde orijinal nesnenin Fourier Dönüşümünü çizgiler demeti halinde bulmamız gerekmektedir. Daha sonra elde edilen çizgiler demetinden, belli interpolasyon teknikleri kullanılarak nesnenin

² Bir voksel bir pikselin hacimsel olarak 3 boyutlu karşılığıdır.

tamamının Fourier Dönüşümünü elde edebiliriz. Nesnenin 2 boyutlu Fourier Dönüşümü aşağıdaki gibi ifade edilir [22].

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (2.12)$$

Herhangi bir θ açısında, $P_{\theta}(t)$ izdüşümünün 1 boyutlu Fourier Dönüşümü şu şekilde olur:

$$S_{\theta}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta}(t) e^{-j2\pi wt} dt \quad (2.13)$$

$\theta = 0$ durumuna göre ifade edilirse;

$$F(u, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi ux} dx dy \quad (2.14)$$

olur. Bu iki katlı integrali iki parçaya ayrılarak tekrar ifade edilirse;

$$F(u, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right] e^{-j2\pi ux} dx \quad (2.15)$$

elde edilmiş olur. Burada y boyunca $f(x, y)$ 'nin çizgi integrali

$$P_{\theta=0}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad (2.16)$$

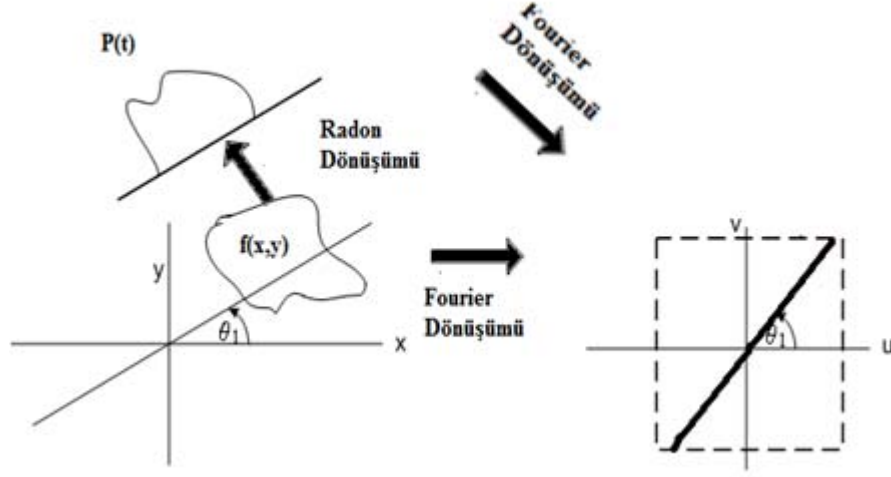
şeklinde ifade edilirse Denklem 2.16'nın paralel izdüşümün x 'e bağlı değerini verdiği görülür. Diğer bir değişle,

$$F(u, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta=0}(x) e^{-j2\pi ux} dx \quad (2.17)$$

Şeklinde kısaca ifade edilebilir. Elde edilen sonuçlara göre nesnenin dikey izdüşümü ile nesnenin 2 boyutlu izdüşümü arasındaki ilişki, Fourier Kesit Teoremi'nin açık bir tanımıdır [21-23,28].

$$F(u, 0) = S_{\theta=0}(u) \quad (2.18)$$

Elde edilen bu sonuca dikkat edilirse denklemin nesne ve koordinat sisteminin arasındaki açıdan bağımsız olduğu görülür.



Şekil 2.5. Fourier Kesit Teoremi

Şekil 2.5’de görüldüğü üzere x - y koordinatlarında θ açısı kadar dönen $f(x,y)$ fonksiyonunun Fourier Dönüşümü $F(u,v)$, $P(t)$ izdüşümünün Fourier Dönüşümü olan $S(w)$ ’nin, u - v koordinat sisteminde θ açısı kadar dönen değerine eşit olur. Bu dönen değer içerisinde $F(u,v)$ ’nin verileri saklıdır.

(x,y) koordinat sistemi, geometrik özellikler göz önüne alınarak aşağıdaki matris işlemiyle (t,s) koordinat sistemine dönüştürülür.

$$\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

t boyunca elde edilen izdüşümün ifadesi (t,s) koordinat sisteminde yeniden ifade edilecek olursa;

$$P_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,s) ds \quad (2.20)$$

elde edilir. Bu denklemin Fourier Dönüşümü

$$S_{\theta}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta}(t) e^{-j2\pi wt} dt \quad (2.21)$$

şeklinde ifade edilir. $P_{\theta}(t)$ bu eşitlikte yerine konulacak olursa;

$$S_{\theta}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f(t,s) ds] e^{-j2\pi wt} dt \quad (2.22)$$

denklemini elde edilir. (t,s) koordinat sistemi (x,y) koordinat sistemine dönüştürülürse;

$$S_{\theta}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2\pi w(x\cos\theta + y\sin\theta)} dx dy \quad (2.23)$$

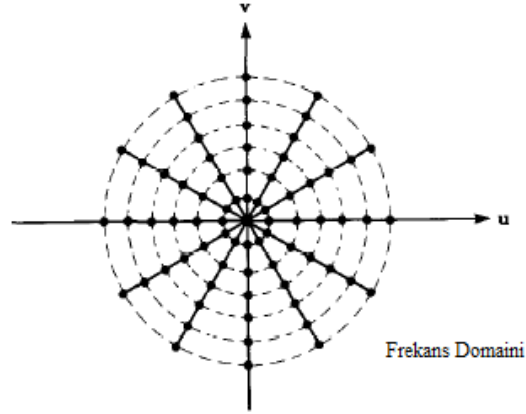
Denklem 2.23 elde edilmiş olur. Bu denklem, izdüşümün Fourier Dönüşümü'dür ve aynı zamanda uzamsal frekansta $f(x,y)$ 'nin 2 boyutlu Fourier Dönüşümü'nü verir.

$u-v$ koordinatlarında uzamsal frekanslar arasındaki ilişki hesaplandığı takdirde, $u = w\cos\theta$ ve $v = w\sin\theta$ olduğu görülür. Bu ifadelerden yola çıkarak

$$S_{\theta}(w) = F(w, \theta) = F(w\cos\theta, w\sin\theta) \quad (2.24)$$

elde edilir ki bu sonuç **Fourier Kesit Teoremi**'nin ispatıdır [22,28].

Bu teorem $\theta_1, \theta, \dots, \theta_k$ açıları için uygulanıp ve gereken tüm hesaplamalar yapıldığında, Şekil 2.6'da gösterildiği gibi toplamda izdüşümlerin Fourier Dönüşümlerinin tamamı elde edilmiş olur. Şekil 2.6'daki izdüşümler için en yakın komşuluk veya lineer interpolasyon yöntemleri gibi yöntemler kullanılarak bilinmeyen koordinat değerleri belirlenebilir ve elde edilen $F(u,v)$ 'nin ters Fourier Dönüşümü alınarak orijinal nesne görüntüsü olan $f(x,y)$ fonksiyonu elde edilebilir. Burada temel problemlerden biri interpolasyon hata oranının yüksek frekanslara gidildikçe artmasıdır. Bu hatalar elde edilmesi gereken orijinal görüntünün kalitesini bozma yönünde etki yapar. Bu hataları minimize etmek için pratikte Filtrelenmiş geri izdüşüm metodu kullanılır.



Şekil 2.6. İzdüşümlerin Fourier Dönüşümü alınarak frekans domainindeki toplamı [22]

2.2.2. Filtrelenmiş Geri İzdüşüm Metodu

Rekonstrüksiyon teknikleri arasında direkt yöntemlerden olan filtrelenmiş geri izdüşüm metodu uygulamada diğer algoritmalara göre daha kolay ve anlaşılır bir yapıya sahiptir [22]. Filtrelenmiş geri izdüşüm metodu filtreleme kısmı ve integral kısmı olmak üzere iki kısımdan oluşur. Geri izdüşüm metodunun ispatından sonra filtreleme kısmı hakkında da bilgi vermekte yarar vardır.

Ters Fourier Dönüşümü için frekans domaininde kartezyen koordinat sisteminden kutupsal koordinat sistemine geçilecek olursa $(u,v) \rightarrow (w,\theta)$;

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (2.25)$$

$u = w \cos \theta$ ve $v = w \sin \theta$ şeklinde ifade edilir. Ve dolayısıyla diferansiyelin kutupsal koordinat sistemindeki değişimi aşağıdaki gibi olur.

$$du dv = w dw d\theta \quad (2.26)$$

Ters Fourier Dönüşümü kutupsal koordinat sisteminde ifade edilecek olursa Denklem 2.27'deki gibi bir eşitlik elde edilmiş olur.

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(w, \theta) e^{j2\pi w(x \cos \theta + y \sin \theta)} w dw d\theta \quad (2.27)$$

Denklem 2.27'deki integral 0° 'den 180° 'ye ve 180° 'den 360° 'ye kadar bölünerek tekrardan yazılacak olursa;

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_0^\infty F(w, \theta) e^{j2\pi w(x\cos\theta + y\sin\theta)} w dw d\theta + \int_0^\pi \int_0^\infty F(w, \theta + 180^\circ) e^{j2\pi w(x\cos\theta + y\sin\theta)} w dw d\theta \quad (2.28)$$

denklemini elde edilmiş olur. $F(w, \theta + 180^\circ) = F(-w, \theta)$ olduğundan bu özellik integral içerisinde kullanılırsa;

$$f(x, y) = \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^\infty F(w, \theta) |w| e^{j2\pi w t} dw \right] d\theta \quad (2.29)$$

denklemini elde edilir. Burada $t = x\cos\theta + y\sin\theta$ ifadesi kullanılırsa ve $F(w, \theta)$ 'nin yerine izdüşümün Fourier Dönüşümü yazılırsa aşağıda belirtilen 2.31'deki denklem elde edilmiş olur.

$$f(x, y) = \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^\infty S_\theta(w) |w| e^{j2\pi w t} dw \right] d\theta \quad (2.30)$$

$$f(x, y) = \int_0^\pi Q_\theta(x\cos\theta + y\sin\theta) d\theta \quad (2.31)$$

Denklemden de görüldüğü gibi, Filtrelenmiş izdüşümün uzamsal domaindeki ifadesi

$$Q_\theta(t) = \int_{-\infty}^\infty S_\theta(w) |w| e^{j2\pi w t} dw \quad (2.32)$$

Şeklinde elde edilir. Denklem 2.32'de frekans cevabı $|w|$ olan filtredir [22,23] ve “w” parametresi uzamsal frekanstır. Elde edilen $Q_\theta(t)$ ifadesi filtrelenmiş izdüşümü ifade eder. Bu filtrelenmiş izdüşümün her θ açısı için geri izdüşümü alındığında yaklaşık $f(x, y)$ orijinal nesne görüntüsünü elde etmek mümkündür.

Elde edilen sonuçların dijital ortamda işlenmesi için sürekli zaman ortamından ayrık zaman ortamına geçilmesi gerekir. . Bu geçiş için örnekleme işlemi yapıldığında Nyquist kriterine uyulması gerekir. Yani $T = \frac{1}{2W}$ olarak seçilmesi gerekir. Burada w izdüşüm fonksiyonunun maximum frekansı veya bant genişliğidir. Bu durumda iz

düşümün örneklenmiş durumu $P_\theta(mT)$ olarak ifade edilir; $m = -\frac{N}{2} \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$. İzdüşümün Fourier dönüşümü yeniden ifade edilecek olursa

$$S_\theta(w) \approx S\left(m \frac{2W}{N}\right) = \frac{1}{2W} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} P_\theta\left(\frac{k}{2W}\right) e^{-j2\pi\left(\frac{mk}{N}\right)} \quad (2.33)$$

elde edilir. İzdüşüm örneklenip Fourier dönüşümü alındıktan sonra ikinci aşamada filtreleme uygulanarak $Q_\theta(t)$ 'nin dijitalleştirilmesi gerekmektedir.

$$Q_\theta(t) \approx Q\left(\frac{k}{2W}\right) = \frac{2W}{N} \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} S\left(m \frac{2W}{N}\right) \left|m \frac{2W}{N}\right| e^{j2\pi m\left(\frac{2W}{N}\right)t} \quad (2.34)$$

Burada $k = -\frac{N}{2} \dots, 0, \dots, \frac{N}{2}$ olarak tanımlanır. Elde edilen dijitalleştirilmiş bu modifiye izdüşüm denklemi yeniden elde etme algoritmasının temelini oluşturur [22].

Yeniden elde edilen görüntüde oluşabilecek yüksek frekanstan kaynaklanan gürültüleri azaltabilmek için elde edilen dijitalleştirilmiş $Q_\theta(t)$ fonksiyonuna Hamming penceresi³ [1-5] gibi bir fonksiyon eklenirse filtrelenmiş izdüşüm daha iyi sonuçlar verecektir [22,23,28] .

$$Q_\theta(t) \approx Q\left(\frac{k}{2W}\right) = \frac{2W}{N} \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} S\left(m \frac{2W}{N}\right) \left|m \frac{2W}{N}\right| H\left(m \frac{2W}{N}\right) e^{j2\pi m\left(\frac{2W}{N}\right)t} \quad (2.35)$$

Konvolüsyon teoreminden yola çıkarak elde edilen Denklem 2.35'in daha basit bir düzeyde ifadesi mümkündür:

$$Q\left(\frac{k}{2W}\right) = \frac{2W}{N} P\left(\frac{k}{2W}\right) * \varphi\left(\frac{k}{2W}\right) \quad (2.36)$$

Denklem 2.36'daki $\varphi\left(\frac{k}{2W}\right)$ fonksiyonu hamming pencere fonksiyonu ile tasarlanmış filtreleme fonksiyonunu ifade eder.

³ Pencere fonksiyonu sayısal sonlu impuls cevaplı sayısal filtre tasarımında istenilmeyen salınımları ortadan kaldırmak için kullanılan yapılardır [1-5].

$$\varphi\left(\frac{k}{2W}\right) = \left|m\frac{2W}{N}\right| H\left(m\frac{2W}{N}\right) \quad (2.37)$$

$f(x, y) = \int_0^\pi Q_\theta(x\cos\theta + y\sin\theta)d\theta$ denklemi ayrık düzlemde ifade edilecek olursa:

$$f(x, y) = \frac{\pi}{K} \sum_{i=1}^K Q_{\theta_i}(x\cos\theta_i + y\sin\theta_i) \quad (2.38)$$

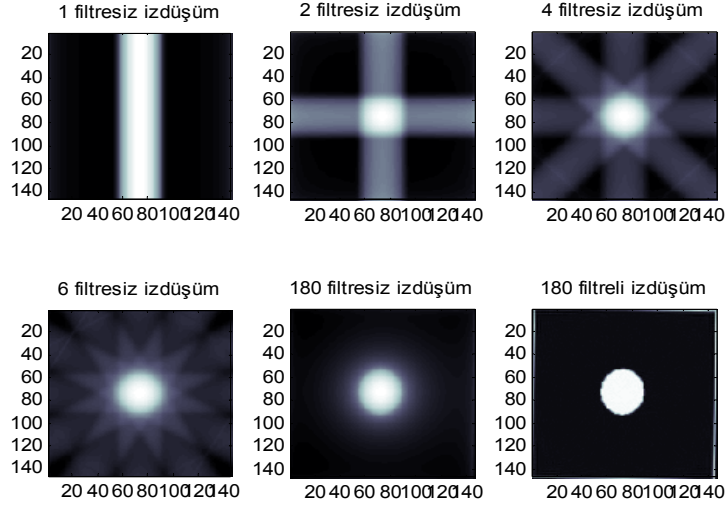
Denklemleri elde edilir. $t_i = x\cos\theta_i + y\sin\theta_i$ olarak ifade edilmiştir.

Bu sonuç elde edilmesi gereken görüntünün kendisini verir. Denklemlerde K , izdüşümlerin açılarını ifade eder. $x\cos\theta_i + y\sin\theta_i$ ifadesi t 'nin değerlerinden herhangi birine denk düşmeyebilir. Bu durumda lineer interpolasyon gibi uygun bir interpolasyon yöntemi kullanılarak elde edilecek $f(x, y)$ gerçek görüntü arasındaki hata oranı azaltılabilir [22,23].

2.2.3. Filtreleme

Geri izdüşüm metodu uygulanırken her farklı θ açısında, o nesnenin görüntü kesitine ait her pikselinden geçen ışınlar o piksellere bir etki bırakır. Böylece her piksel her izdüşüm alındığında kendi üzerinden geçen ışıktan katkılanır. Rekonstrüksiyon yapılan görüntüler incelendiğinde filtrelendiği takdirde Şekil 2.6e'de görüldüğü gibi özellikle görüntünün merkezine gidildikçe artan bir parlaklık ve bulanıklık söz konusudur. Bunun nedeni merkeze yakın yerlerde bulunan piksellerin her izdüşümde ışın toplamına daha çok maruz kalmasıdır. Bulanıklığın giderilip daha net bir görüntüye ulaşılabilmesi için filtreleme yapılması gerekmektedir [22-24,30-32]. Filtrelemede amaç, geri izdüşümlerin hem pozitif hem de negatif değerleri içerecek şekilde toplanan ışın verilerinin modifiyesini sağlamak ve böylece toplanan bazı ışın verilerinin etkinliğini azaltarak gerçek değere yakınsamasını sağlamak ve böylece bulanıklığın giderilmesidir. Filtre fonksiyonu x ışın tüpü geometrisi veya dedektörler gibi bir çok parametreye bağlıdır. Örneğin yelpaze hüzmeye geri izdüşümünde ışınların paralel değil de tek bir kaynaktan çıkarak yayılması görüntüde daha çok bozukluklara sebep olur ve ayrıca detektörün verileri eşit aralıklarla ya da eşit açılarla yerleştirildiği takdirde elde edilen verilerde de sapmalar veya bozukluklar meydana gelebilir.

Yüksek frekanslı filtreler görüntü keskinliğini ve kenar detayını artırırken, alçak geçiren filtreler Şekil 2.7’de görüldüğü üzere yumuşatıcı etki yaparak kontrast çözünürlüğünü artırır [4-5].



Şekil 2.7. Filtreleme etkileri (MATLAB ortamında elde edilmiştir.) a)1 açıda filtresiz izdüşüm,b)2 farklı açıda filtresiz izdüşüm,c)4 farklı açıda filtresiz izdüşüm,d) 6 farklı açıda filtresiz izdüşüm,e) 180 farklı açıda filtresiz izdüşüm,f)180 farklı açıda filtreli izdüşüm

Geri izdüşümde kullanılan filtreleme operasyonunun (rampa filtre) matematiksel ifadelerini elde etmek için literatürde farklı yorumlara rastlanır [22].

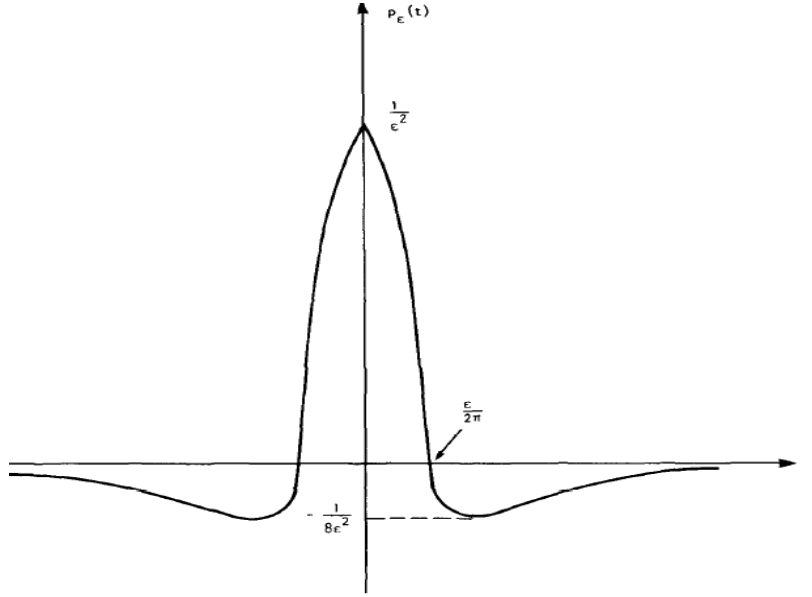
Denklem 2.32’nin t domainindeki ifadesi şu şekildedir;

$$Q_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta}(w)p(t - \alpha)d\alpha \quad (2.39)$$

burada $p(t)$ fonksiyonu frekans domainindeki $|w|$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümüdür. Fakat frekans cevabı $|w|$ olan fonksiyonu integrallenebilir bir fonksiyon olmadığından ters Fourier Dönüşümü mevcut değildir. Ancak bu fonksiyon yeniden farklı bir şekilde ifade edilebilirse yaklaşık olarak tersi bulunabilir. Şöyle ki $\varepsilon \rightarrow 0$ için $|w|e^{-\varepsilon|w|}$ olduğu kabul edilirse bu fonksiyonun ters Fourier Dönüşümü $p_{\varepsilon}(t)$, Denklem 2.40’daki gibi olur;

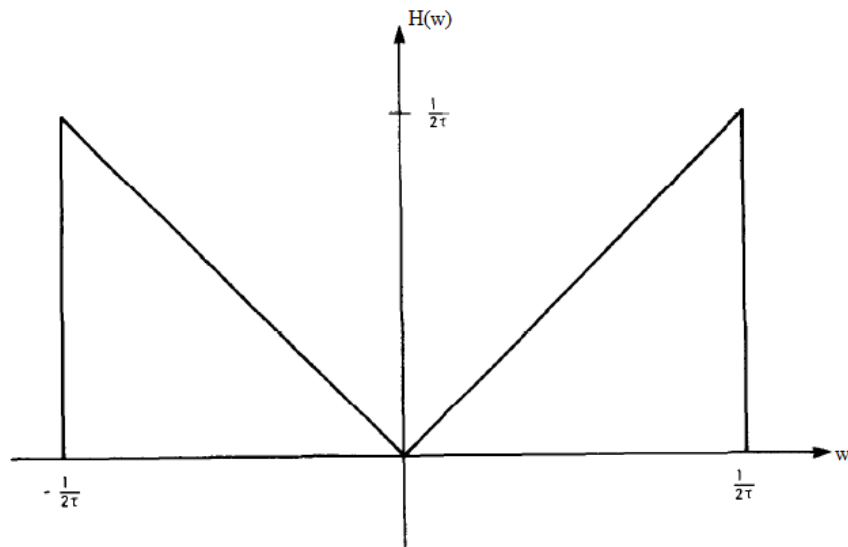
$$p_{\varepsilon}(t) = \frac{\varepsilon^2 - (2\pi t)^2}{(\varepsilon^2 + (2\pi t)^2)^2} \quad (2.40)$$

Büyük t değerlerinde $p_{\varepsilon}(t) \approx -(\frac{1}{(2\pi t)^2})$ olarak alınabilir. Denklem 2.40'da elde edilen filtrenin yapısı Şekil 2.8'de gösterilmiştir.



Şekil 2.8. İdeal izdüşüm filtresinin impuls cevabının yaklaşık ifadesi [22]

Denklem 2.32'de verilen ifade Nyquist Kriterine uyularak ($W = \frac{1}{2T}$) yeniden düzenlenirse, frekans cevabı $|w|$ olan filtreyi transfer fonksiyonu $H|w|$ ile ifade etmek mümkündür. $H|w|$ Şekil 2.9'de gösterilmiştir.



Şekil 2.9. İdeal izdüşüm filtresinin transfer fonksiyonu [22]

$$Q_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta}(w)H(w)e^{j2\pi wt} dw \quad (2.41)$$

Transfer fonksiyonunu

$$H|w| = |w|b_w(w) \quad (2.42)$$

Şeklinde yazmak mümkündür. Burada

$$b_w(w) = \begin{cases} 1 & |w| < W \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (2.43)$$

olarak tanımlanır. İmpuls cevabı $h(t)$ olan filtre fonksiyonunu bulmak için $H|w|$ ' nin ters Fourier dönüşümü alınacak olursa;

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(w)e^{j2\pi wt} dw \quad (2.44)$$

denklemini elde edilmiş olur. Bu denklemin değerini bulmak için çözüm yapıldığında;

$$h(t) = \left(\frac{1}{2T^2} \frac{\sin(\frac{2\pi t}{2T})}{\frac{2\pi t}{2T}} - \frac{1}{4T^2} \left(\frac{\sin(\frac{2\pi t}{2T})}{\frac{2\pi t}{2T}} \right)^2 \right) \quad (2.45)$$

sonucu bulunmuş olur. T örnekleme aralığı ile örneklenmiş $h(t)$ fonksiyonu ayrık zamanda yazılırsa;

$$h(nT) = \begin{cases} \frac{1}{4T^2} & n = 0 \\ 0 & n = \text{çift} \\ n^2 \pi^2 T^2 & n = \text{tek} \end{cases} \quad (2.46)$$

elde edilir. $P_{\theta}(t)$ ve $h(t)$ fonksiyonlarının ikisi de bant sınırlı fonksiyonlar olduğundan aşağıdaki denklemlerle ifade edilebilir;

$$P_{\theta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{\theta}(kT) \frac{\sin(2\pi W(t-kT))}{2\pi W(t-kT)} \quad (2.47)$$

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT) \frac{\sin(2\pi W(t-kT))}{2\pi W(t-kT)} \quad (2.48)$$

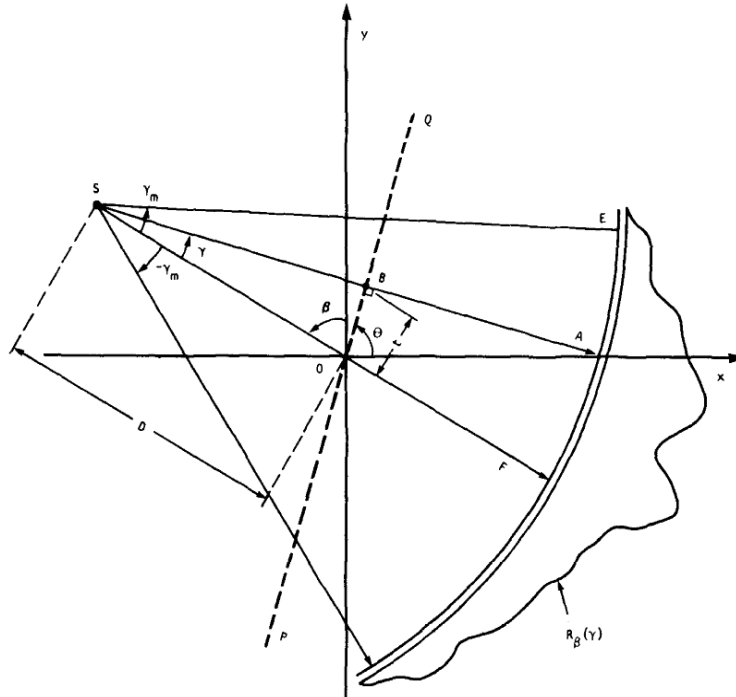
Böylece eğer $k=0,1,\dots,N-1$ ve $n=0,1,\dots,N-1$ olarak alınırsa, Denklem 2.41'in ayrık zamandaki ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Q_{\theta}(nt) = T \sum_{k=0}^{N-1} h(nT - kT) P_{\theta}(kt) \quad (2.49)$$

Böylece geri izdüşüm metodundaki filtre operasyonunun nasıl gerçekleştiği matematiksel ifadelerle anlatılmıştır. İncelenen denklemlerde, rampa filtre kullanılarak bir geri izdüşüm filtresi olan Ram-Lak filtrenin teorik değerleri elde edilmiştir [22,23,33]. Ram-Lak filtresi pencereleme fonksiyonları ile çarpılarak çeşitli şekilde geri izdüşüm filtreleri elde edilmektedir [30,34].

2.2.4. Yelpaze Hüzme Geri İzdüşüm Metodu

Yelpaze hüzme geri izdüşüm metodu paralel hüzme tekniğinden farklı olarak bir x-ray kaynağından çıkan ve yelpaze şeklinde uzayda yol alan ışınların elde edilmesi tekniğine dayanır. Şekil 2.10'da görüldüğü üzere $R_{\beta}(\gamma)$ yelpaze izdüşümünü, β açısı kaynağın referans eksenini ile yaptığı açığı, γ açısı ise hüzme içerisindeki her hangi bir ışının yerini ifade eder.



Şekil 2.10. Eş açılı yelpaze izdüşüm örneği [22]

Şekil 2.10'da SA ışını dikkate alınır, bu ışına ait izdüşüm verisi belli bir açıyla paralel ışın kümesinden elde edildiği düşünülebilir. Diğer bir deyişle, SA ışını $P_\theta(t)$ gibi bir paralel izdüşüme ait olur. Şekil 2.10'da gereken geometrik hesaplar yapıldığında iki önemli ilişki elde edilir. Bu ilişkiler;

$$\theta = \beta + \delta \text{ ve } t = D \sin \gamma \quad (2.50)$$

olacak şekilde tanımlanır [22]. D , S kaynağı ile O merkezi arasındaki mesafeyi belirlemektedir. θ açısındaki paralel izdüşümdeki tüm ışınların PQ 'ya dik olduğu düşünülerek geometrik işlemler yapılmıştır [22].

Görüldüğü üzere bu iki eşitlik paralel izdüşüm ile yelpaze izdüşüm geometrileri arasında geçiş sağlayacak özellikleri içinde barındırır. Nitekim bu iki eşitlikten yola çıkarak yelpaze izdüşüm ortamından paralel izdüşüm ortamına geçiş konusunda çeşitli çalışmalar literatürde mevcuttur [35,36]. Bu tür çalışmalar özellikle bilgisayar programı uygulamalarında kolaylık sağlamak için yapılmıştır. Örneğin, paralel izdüşüm yöntemi ile görüntü fonksiyonu $f(x,y)$;

$$f(x,y) = \int_0^\pi \int_{-t_m}^{t_m} P_\theta(t) h(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dt d\theta \quad (2.51)$$

görüntü fonksiyonu kullanarak hesaplanabilir. Eğer 360 derece üzerinden hesaplama yapılması gerekiyorsa bu denklem aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$f(x,y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-t_m}^{t_m} P_\theta(t) h(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dt d\theta \quad (2.52)$$

Eğer Şekil 2.11'de $C(x,y)$ olarak gösterilen noktanın kutupsal koordinatlardaki ifadesini elde etmek istenirse $x=r \cos \theta$ ve $y=r \sin \theta$ eşitliklerini kullanarak

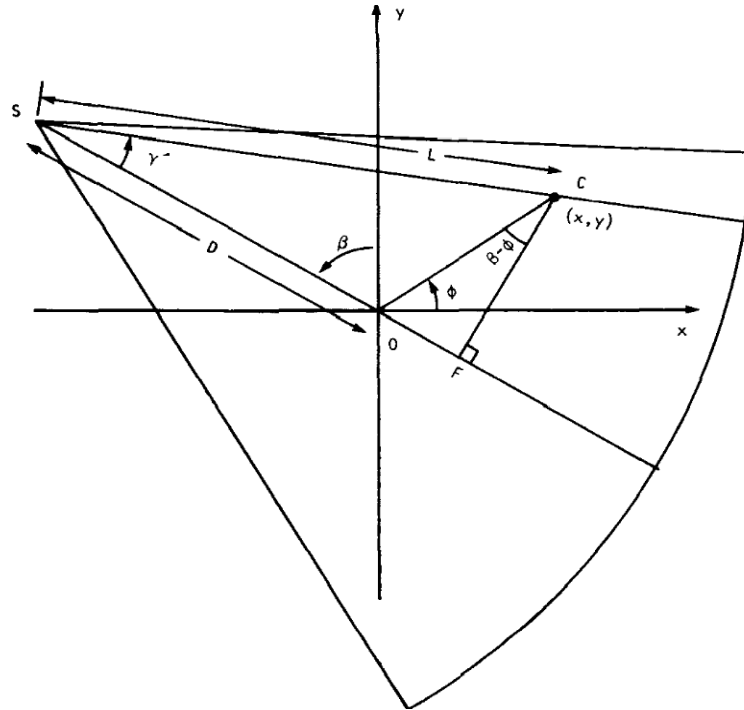
$$f(r,\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-t_m}^{t_m} P_\theta(t) h(r \cos(\theta - \varphi) - t) dt d\theta \quad (2.53)$$

şeklinde yazılabilir. Bu sonucu kullanarak bilgisayarda algoritma oluşturulmanın kolaylaşmış olduğu görülmektedir.

Denklemler 2.50'de ifade edilen ilişkiler kullanılarak Denklem 2.53 γ ve β 'ya bağımlı olarak tekrar yazılırsa;

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{-\gamma}^{2\pi-\gamma} \int_{-\sin^{-1}(t_m/D)}^{\sin^{-1}(t_m/D)} P_{(\beta+\gamma)}(D\sin\gamma) h(r\cos(\beta + \gamma - \varphi) - D\sin\gamma) D\cos\gamma d\gamma d\beta \quad (2.54)$$

denklemleri elde edilir. Burada ifade edilen $D\cos\gamma d\gamma d\beta$ diferansiyel eşitliği $dt d\theta$ 'ye eşittir. β üzerinden $-\gamma$ 'dan $(2\pi-\gamma)$ 'ya olan integral 360° lik bir aralığı taramaktadır. β 'nın tüm fonksiyonları 2π ile periyodik olduğundan bu limitler sırasıyla 0 ve 2π olarak değiştirilebilir.



Şekil 2.11. Eş açılı durumda matematiksel ifadeleri gösteren örnek Şekil [22]

Şekil 2.10'daki SE ışını için $\sin-I(tm/D)$ γ' ya eşittir. O zaman γ değişkeni için alt ve üst integral limitleri sırasıyla $-\gamma m$ ve $+\gamma m$ ile değiştirilir. $P_{\gamma+\beta}(D \sin \gamma)$ SA ışını boyunca $P_{\theta}(t)$ izdüşüm verilerinin integralini göstermektedir. Yelpaze izdüşümünde bu ifade $R_{\beta}(\gamma)$ ile gösterilir. Denklem 2.54 üzerinde bu değişiklikler yapıldığında denklem aşağıdaki şekilde yeniden ifade edilir;

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} R_\beta(\gamma) h(r \cos(\beta + \gamma - \varphi) - D \sin \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta \quad (2.55)$$

Denklem 2.55'deki h fonksiyonunu daha anlaşılır şekilde ifade etmek gerekirse;

$$r\cos(\beta + \gamma - \varphi) - D\sin\gamma = r\cos(\beta - \varphi)\cos\gamma - [r\sin(\beta - \varphi) + D]\sin\gamma \quad (2.56)$$

eşitliği yazılabilir. L , S kaynağı ile $C(x,y)$ (kutupsal koordinatlarda (r,φ)) noktası arasındaki uzaklık olarak tanımlandığında, L ; r , φ ve β 'nin bir fonksiyonu olur.

$$L\cos\gamma' = D + r\sin(\beta - \varphi) \quad \text{ve} \quad L\sin\gamma' = r\cos(\beta - \varphi) \quad (2.57)$$

Bir başka deyişle, (r,φ) piksel konumu ve β projeksiyon açısı ile beraber, L ve γ' nü ifade edebilmek için yeterlidir.

$$L(r,\varphi,\beta) = \sqrt{[D + r\sin(\beta - \varphi)]^2 + [r\cos(\beta - \varphi)]^2} \quad (2.58)$$

$$\gamma' = \tan^{-1} \frac{r\cos(\beta - \varphi)}{D + r\sin(\beta - \varphi)} \quad (2.59)$$

Denklem 2.56'dan ve 2.57'den yola çıkarak h fonksiyonunu ifade etmek için;

$$r\cos(\beta + \gamma - \varphi) - D\sin\gamma = L\sin(\gamma' - \gamma) \quad (2.60)$$

denklemini yazılabilir. Elde edilen bu ifadeyi Denklem 2.55'de yerine koyarsak;

$$f(r,\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} R_\beta(\gamma) h(L\sin(\gamma' - \gamma)) D\cos\gamma d\gamma d\beta \quad (2.61)$$

ifadesine ulaşılır [22,23]. $h(L\sin(\gamma' - \gamma))$ fonksiyonu $h(t)$ cinsinden ifade edilecek olursa, burada $h(t)$ frekans domainindeki $|w|$ 'nin ters Fourier Dönüşümü'dür, aşağıdaki denklemin sağlanması gerekmektedir.

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |w| e^{j2\pi w t} dw \quad (2.62)$$

Denklem 2.62'deki ifade edilen $h(t)$ filtrelenmiş geri izdüşüm algoritmasında kullanılan ideal filtredir. Bu durumda;

$$h(L\sin\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} |w| e^{j2\pi w L\sin\gamma} dw \quad (2.63)$$

olarak yazılabilir. $w' = \frac{wL\sin\gamma}{\gamma}$ eşitliği kullanılarak 2.63'deki denklem yeniden yazılırsa;

$$h(L\sin\gamma) = \left(\frac{\gamma}{L\sin\gamma}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |w'| e^{j2\pi w' \gamma} dw' \quad (2.64)$$

$$h(L\sin\gamma) = \left(\frac{\gamma}{L\sin\gamma}\right)^2 h(\gamma) \quad (2.65)$$

elde edilir. Bu değer Denklem 2.61'de yerine yazılırsa;

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{L^2} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} R_\beta(\gamma) g(\gamma' - \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta \quad (2.66)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde $g(\gamma) = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{L\sin\gamma}\right)^2 h(\gamma)$ olarak ifade edilmiştir. 2.66 denkleminde elde edilen ifade bilgisayar uygulamaları için ağırlıklı filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması olarak tanımlanabilir [22]. Bunu gösterebilmek için Denklem 2.66 yeniden düzenlenerek yazılırsa;

$$f(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{L^2} Q_\beta(\gamma) d\beta \quad (2.67)$$

denklemini elde edilmiş olur. Burada;

$$Q_\beta(\gamma) = R'_\beta(\gamma) g(\gamma) \quad (2.68)$$

$$R'_\beta(\gamma) = R_\beta(\gamma) D \cos \gamma \quad (2.69)$$

olarak ifade edilmiştir.

2.2.5. İteratif Yöntemler

Cebirsel teknikler, detektör ve kaynak pozisyonlarının cevabına bağlı olarak ışın yollarını belirleme amacı üzerine kurulmuştur. İteratif yöntemler ise, bir dizi bilinmeyenlerden oluşan denklemlerin çözülmesi sonucunda tomografik verilerden kesit görüntülerin elde etme tekniğine dayanır [22,23,37]. Bu yaklaşım dönüşüm tabanlı metotlara oranla daha kolay olmasına rağmen, medikal uygulamalarda doğruluktan sapma ve uygulama hızının fazla olması gibi bazı dezavantajlara sahiptir. Çok sayıda izdüşüm verisi işlenmesi gerektiği durumlarda direkt yöntemlere kıyasla daha yavaş fakat daha doğru bilgi veren bir yaklaşımdır [22].

İteratif yöntemlerde amaç; verilen gerçek cisme ait sinogram bilgilerinden yola çıkarak cisme ait görüntüyü bulmaktır. Bu doğrultuda iteratif yöntemlerde temel düşünce ölçülen veri ile bağlantılı olarak bir tahmini görüntü yaratma, tahmini görüntüden yola çıkarak sinogram hesaplama, gerçek sinogram ile hesaplanan sinogram verisi arasındaki farkı hesaplayarak farka göre tahmini cisim görüntülerinin düzeltilmesi ve sonuç tatmin edene kadar ölçümü tekrarlama esaslarına dayanır.

2.2.5.1. İteratif Yöntemlerde Kullanılan Görüntü ve İz düşüm İfadeleri

Şekil 2.12’de gösterildiği üzere $f(x,y)$ fonksiyonu ile ifade edilen görüntünün üzerine kare bir ızgara (grid) koyarak bu ızgaranın her bir hücreğine denk gelen f_j değeri bu hücrenin cebirsel değeri kabul edilir. Dolayısıyla, N tane hücreden meydana gelen ızgaradaki değerlerin tümü $f(x,y)$ görüntü fonksiyonuna denk gelen görüntüyü temsil edecektir. Şekil 2.12’de görüldüğü üzere cebirsel yöntemlerde, görüntünün her hücresi üzerinden geçen τ genişliğindeki (τ , aynı zamanda hücrenin bir boyutu kadar olduğu kabul edilir) ışının her birinin hücre değerine farklı bir katkısı vardır. Bu katkı miktarı hücreden geçen ışının hücreye denk gelen ışın genişliği τ nun bir oranı olarak düşünülür. Radon Dönüşümüne göre izdüşümleri elde etmek için uygulanan çizgi integralleri yerine ‘Ray-Sum’ kullanılır. Ray-Sum’ın yani her hücreye katkı yapan ışın toplamının matematiksel olarak ifade edilmesi gerekirse;

$$p_i = \sum_{j=1}^N w_{ij} f_j \quad (2.70)$$

Kaczmarz Metodu [22] kullanılır. Polonya’lı matematikçi Stefan Kaczmarz tarafından bulunan Kaczmarz metodu 1970 yılında Richard Gordon, Robert Bender ve Gabor Herman tarafından izdüşümler ile görüntü rekonstrüksiyonu alanında kullanılarak yeniden keşfedilmiş ve Cebirsel Rekonstrüksiyon Tekniği (Algebraic Reconstruction Techniques, ART) adını almıştır [37-42].

2.2.5.2. Kaczmarz Metodu

N hücreli ızgara ifadesi dikkate alındığında N . dereceden bağımsız görüntü denklemler sistemini verir. N boyutlu bir uzayda $f_1, f_2, \dots, f_N$ ile verilen görüntü bir nokta gibi düşünülebilir. Bu uzayda 2.72’de verilen her denklem bir hiper düzlem olarak ifade edilebilir. Bu denklem için tek bir çözüm mevcut olduğunda, her hiper düzlemin ara kesiti çözümde tek bir nokta olarak verilir [22,23].

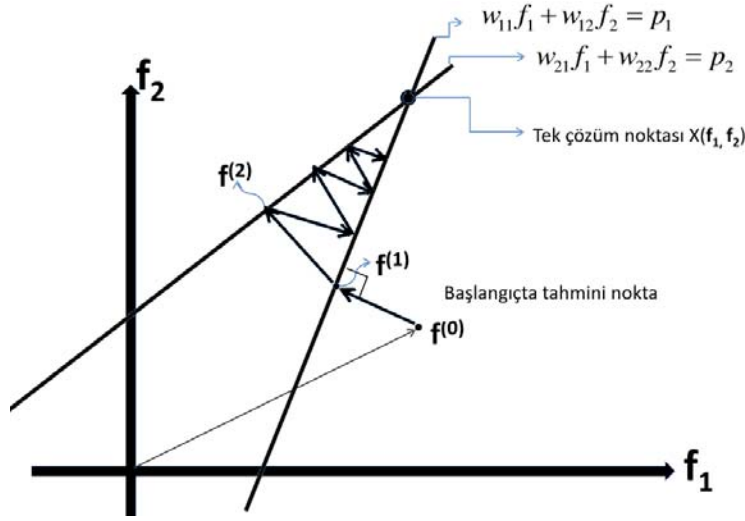
2 değişkenli (f_1, f_2) durum için bu ifade aşağıdaki denklemler ile yazılabilir;

$$\begin{aligned} w_{11}f_1 + w_{12}f_2 &= p_1 \\ w_{21}f_1 + w_{22}f_2 &= p_2 \end{aligned} \quad (2.73)$$

Bu denklem takımını çözmek için Şekil 2.13’ de gösterildiği üzere öncelikle $f^{(0)}$ ile ifade edilen tahmini bir başlangıç noktasının seçilmesi gerekmektedir.

Bu başlangıç noktası seçildikten sonra birinci denkleme karşılık gelen doğru üzerine izdüşümü alınır. Daha sonra birinci denkleme karşılık gelen doğru üzerinde bulunan noktadan, ikinci denkleme karşılık gelen doğru üzerine izdüşüm alınır. Daha sonra bu işlem tek çözüm noktası olan $X(f_1, f_2)$ noktasını bulacak şekilde yakınsanarak tekrarlanır. Bu metodun ispatı literatürde mevcuttur [22]. 2.73’de verilen denklemlerin çözümü dikkate alındığında öncelikle $f^{(1)}$ ’i bulmak için birinci denklemde tahmini olarak seçilen $f^{(0)}$ yerine konulur, $f^{(2)}$ ’yi bulmak için de 2.denklemden $f^{(1)}$ yerine konulur. Aynı şartlar altında $f^{(i)}$ ’yi bulmak için i . denklemde $f^{(i-1)}$ yerine konulursa. 2.74 denkleminde ifade edilen eşitlik elde edilmiş olur [22,23].

$$f^i = f^{i-1} - \frac{(f^{i-1}w^i - p^i)}{w^i w^i} w^i, \quad w^i = w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{iN} \quad (2.74)$$



Şekil 2.13. İki bilinmeyen için Kaczmarz Yöntemi ile çözüm gösterimi

Denklem 2.74'deki çözümünde doğru sonuca ulaşmak için bazı hususlara dikkat etmek gerekmektedir. Şekil 2.13'de gösterilen p_1 ve p_2 doğruları arasındaki açı çözüme yaklaşma aralığını (convergence range) etkiler. Örneğin p_1 ve p_2 arasındaki açı 90 derece olsaydı çözüm 2 adımda gerçekleşmiş olacaktı. M tane p doğrusu birbirlerine dik olsalardı doğru sonuca ulaşılması için M tane denklemin çözümünü bulmak yeterli olacaktı [22]. Denklem 2.74'ün çözümü için doğru denklem sayısı eğer bilinmeyen sayısından fazla ise bir tek çözüm yoktur. Bu durumda Kaczmarz Yönteminin sonucu doğruların birbirine en yaklaştığı yeri gösterir. Eğer bilinmeyen sayısı doğru denklem sayısından fazla ise tek bir sonuç yoktur, sonsuz sayıda sonuç elde edilir [22].

Denklem 2.74'de verilen formülün hesaplanması, sonucun saklanması ve ağırlık katsayılarının düzeltilip yeniden işleme konması gerekli ağırlık katsayısı arttıkça zorlaşır. Kaczmarz denklemini daha uygulanabilir bir hale getirmek için 2.74'deki denklem yeniden düzenlenebilir, şöyle ki [22]

$$f_j^{(i)} = f_j^{(i-1)} + \frac{p_i - q_i}{\sum_{k=1}^N w_{ik}^2} w_{ij} \quad (2.75)$$

$$q_i = f_j^{(i-1)} w_i \quad (2.76)$$

$$= \sum_{k=1}^N f_k^{(i-1)} w_{ik}^2 \quad (2.77)$$

Denklem 2.75'de kullanılan q_i değeri Denklem 2.76'da gösterildiği üzere $(i-1)$ sonucuna bağlı olarak hesaplanmış p_i değeridir. Denklem 2.75'de kullanılan p_i değeri i 'şın boyunca ölçülen ray-sum değeri olduğu düşünüldüğünde q_i değeri de $(i-1)$.çözümü olan

aynı ışın için hesaplanan ray-sum olarak ifade edilebilir. Bu durumda ölçülen ray-sum ve hesaplanan ray-sum arasındaki fark alınıp, $\sum_{k=1}^N w_{ik}^2$ ile normalize edildikten sonra elde edilen değerler w_{ij} değerleri ile ağırlıklandırılmış i . ışının geçtiği bütün görüntü hücrelerine atanırsa $\Delta f_j^{(i)}$ ile ifade edilen hata farkı değeri elde edilir. Bu hata veya fark

$$\Delta f_j^{(i)} = f_j^{(i)} - f_j^{(i-1)} = \frac{p_i - q_i}{\sum_{k=1}^N w_{ik}^2} w_{ij} \quad (2.78)$$

Şeklinde hesaplanabilir [22].

2.2.6. Cebirsel Rekonstrüksiyon Tekniği (Algebraic Reconstruction Technique)

Kaczmarz yöntemindeki iteratif işlemlerin bilgisayar ortamında biraz daha kolay ve hızlı uygulanabilmesi için ağırlık faktörü değerlerine ışının, pikselin tam merkezinden geçip geçmemesine bağlı olarak 0 ya da 1 değerlerinin atanmasıyla uygulanan bir tekniktir. Buna göre Denklem 2.78’de paydada bulunan $\sum_{k=1}^N w_{ik}^2$ değeri N_i değerine eşit olur. Burada kullanılan N_i değeri i . ışının, merkezinden geçtiği piksel sayısı ile ifade edilir. j . görüntü hücresi için i . denklem aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\Delta f_j^{(i)} = \frac{p_i - q_i}{N_i} \quad (2.79)$$

2.79’da ifade edilen denklem i . ışının merkezlerinden geçtiği pikseller için hesaplanır. Bu yaklaşım uygulama açısından kolaydır fakat N_i tahmini bir değer olduğundan dolayı görüntü rekonstrüksiyon işlemlerinde hatalar söz konusu olur. Bu hataları azaltmak için bu yaklaşım aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\Delta f_j^{(i)} = \frac{p_i}{L_i} - \frac{q_i}{N_i} \quad (2.80)$$

Denklem 2.80 ‘de ifade edilen L_i ifadesi i .ışının görüntü bölgesine düşen uzunluğudur.

Daha kaliteli bir görüntü elde etmek için ağırlık faktörü Denklem 2.71 ‘deki gibi hesaplanabilir fakat işlem süresi bakımından dezavantaj oluşturur. Cebirsel teknikte işlem kolaylığı sağlama açısından ağırlık faktöründe piksel başına hesaplanan 1 ve 0 değerleri işlem kolaylığı ve süresi bakımından avantaj sağlar fakat hatalar oluşturur. Bu

hataların düzeltilebilmesi hata farkı, α yumuşatma katsayısı ile çarpılarak $\alpha \Delta f_j^{(i)}$ değerini alır [22,23,37-42]. Tekrar sayısı arttıkça yumuşatma katsayısı küçülür şekilde ayarlanabilir. Denklem 2.81’de uygulamada kullanılmak üzere Kaczmarz metodundan elde edilen formül verilmiştir. Bu denklemde ifade edilen k iterasyon sayısını temsil etmektedir. N ile ifade edilen değer ise ağırlık faktörünün sütun sayısı yani görüntü matrisindeki toplam piksel sayısıdır. Bu denklemde görüldüğü üzere hata farkını toplam ağırlık faktörünün karesinin toplamı ile normalize ettikten sonra tek bir izdüşüm için ağırlıklandırma işlemi yapılmıştır. Daha sonra yumuşatma katsayısı ile çarpılıp yeni piksel değerlerini hesaplamak için güncelleştirilmiştir.

$$f_j^{(k+1)} = f_j^{(k)} + \alpha \frac{p_i - \sum_{n=1}^N w_{in} f_n^k}{\sum_{n=1}^N w_{in}^2} w_{ij} \quad (2.81)$$

2.2.7. Eşzamanlı Cebirsel Rekonstrüksiyon Tekniği (Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique)

Eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon yöntemi cebirsel rekonstrüksiyon yöntemindeki gibi hata farkını hesaplar fakat düzeltme işlemi her izdüşümden sonra değil tüm izdüşümlerden sonra yapılır. Böylece bir defada bütün izdüşümlere uygulamak için hata faktörünün ağırlıklandırılmış ortalaması alınmış olur ki bu da izdüşümdeki hata oranını düşürür. Hata oranı azaldığından dolayı görüntü kalitesi artar. Aşağıdaki denklemde eş zamanlı cebirsel yöntemin ifadesi verilmiştir [22,23,40-43].

$$f_j^{(k+1)} = f_j^{(k)} + \alpha \frac{\sum_i \frac{p_i - \sum_{n=1}^N w_{in} f_n^k}{\sum_{n=1}^N w_{in}^2} w_{ij}}{\sum_i w_{ij}} \quad (2.82)$$

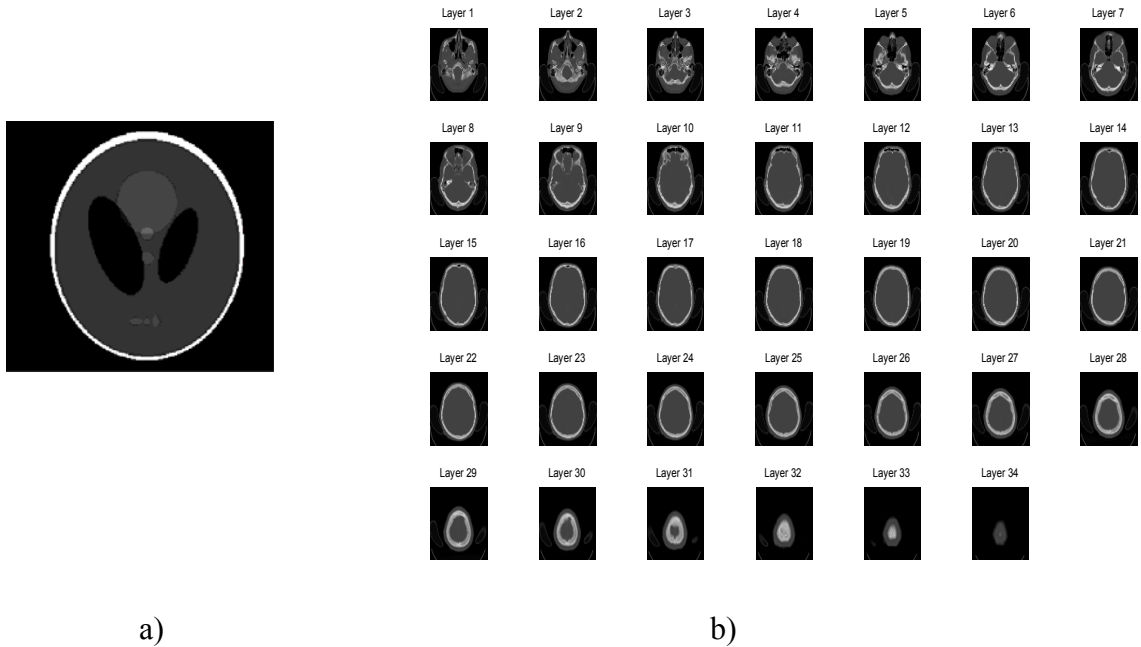
Denklem 2.82’de görüldüğü üzere hata farkı hesaplandıktan sonra ağırlık faktörünün satır sayısı ile normalize edilip tekrar ağırlık faktörü ile çarpılarak toplanmıştır. Böylece her izdüşüm için düzeltme uygulanmıştır. Daha sonra elde edilen değer ağırlık faktörünün sütun sayısı ile normalize edildikten sonra yumuşatma katsayısı ile çarpılarak yeni piksel değerleri için güncelleme yapılmıştır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu çalışmada amaç, edinilen tomografik verilere çeşitli rekonstrüksiyon tekniklerini uygulayarak kesitsel görüntüler elde etmek ve elde edilen kesitsel görüntüleri karşılaştırmalı olarak analiz etmektir. Bunun için de bir takım materyal, algoritma ve programlardan yararlanılmıştır.

3.1. Çalışmada Kullanılan Materyaller

Bu çalışmada oluşturulan algoritmaların yazılımı için MATLAB Versiyon 7.8.0 programı kullanılmıştır. Çalışmada, Shepp- Logan tarafından 1974 yılında literatüre sunulmuş elipsoid şekillerden oluşan “Shepp and Logan Head Phantom” görüntüsü [22] (Şekil 3.1a) ve Uppsala Üniversitesi Hastanesi Radyoloji Ünitesinde bilgisayarlı tomografi ile beyin tomografisi çekilen bir hastanın DICOM formatında veri dosyaları [44] kullanılmıştır (Şekil 3.1b). DICOM formatındaki dosyaların Şekil 3.1b’deki gibi 34 kesitte görüntülenebilmesi için, bu dosyalar MATLAB programında ‘dicomread’ fonksiyonu kullanılarak görüntüye dönüştürülmüştür.



Şekil 3.1. a) Shepp and Logan Phantom , b) 512x512x34 boyutunda 34 kesitten oluşan beyin tomografi görüntüleri (DICOM formatında)

3.2. DICOM Dosya Formatı

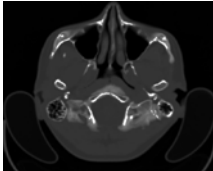
DICOM (Digital Imaging and Communications in Medicine), medikal görüntü elde eden sistem ve cihazların birbirleri arasında iletişimini sağlayan bir yazılım formatıdır. Burada amaç, mesajların belli bir format çerçevesinde oluşturularak kullanılan ağ içerisinde sorunsuz bir şekilde gönderilmesini sağlamak için standart bir format ve ortam oluşturmaktır.

1983 yılında Amerikan Koleji Radyoloji Bölümü ve Ulusal Elektrik Üretici Firmalar Derneği'nin medikal görüntülerin iletimi ve depolanması için bir araya gelmesiyle, format standartlarının temeli atılmış ve düzenlenen standartlar 1985 yılında ACR-NEMA adıyla yayınlanarak görüntülerin radyoloji birimlerinde aynı formatta kullanılması sağlanmıştır. 1993 yılında bu standartlar güncellenerek DICOM adıyla tekrar yayınlanmıştır.

DICOM format standartları olmadan önce medikal görüntüleme sistem ve araçlarını üreten firmalar yazılımlarını ve haberleşme protokollerini kendileri belirlemişlerdir. Her firmanın farklı yazılım ve haberleşme protokolü kullanmasından dolayı elde edilen verilerin farklı firmaların ürettiği cihazlarla iletme geçememesi ve verilerin depolanıp yayınlama kısıtlamalarını beraberinde getirmesi oldukça zor ve karmaşık bir çalışma ortamı yaratmıştır. DICOM standartları bu problemleri ortadan kaldırıp ortak bir çalışma alanı yaratmıştır.

Group	Element	Name	Value
0002	0000	File Meta Elements Group Len	192
0002	0001	File Meta Info Version	256
0002	0002	Media Storage SOP Class UID	1.2.840.10008.5.1.4.1.1.2
0002	0003	Media Storage SOP Inst UID	1.3.12.2.1107.5.1.4.50042.3000000
0002	0010	Transfer Syntax UID	1.2.840.10008.1.2.1
0002	0012	Implementation Class UID	1.2.825.0.1.3690043.2.1208.0.1.0
0002	0013	Implementation Version Name	542329161
0008	0005	Specific Character Set	ISO_IR 100
0008	0008	Image Type	ORIGINALPRIMARYAXIALCT_S
0008	0016	SOP Class UID	1.2.840.10008.5.1.4.1.1.2
0008	0018	SOP Instance UID	1.3.12.2.1107.5.1.4.50042.3000000
0008	0020	Study Date	20070324
0008	0021	Series Date	20070324
0008	0022	Acquisition Date	20070324
0008	0023	Image Date	20070324
0008	0030	Study Time	183330.703000
0008	0031	Series Time	183846.625000
0008	0032	Acquisition Time	184549.463094
0008	0033	Image Time	184549.463094
0008	0050	Accession Number	07234109050
0008	0060	Modality	CT
0008	0070	Manufacturer	SIEMENS
0008	0080	Institution Name	12001731 Akademiska Uppsala
0008	0081	City Name	Uppsala Uppsala/50FB86/ Uppsala
0008	0090	Referring Physician's Name	12001731
0008	1010	Station Name	suastgc2
0008	1030	Study Description	CT-HJARNNA
0008	103E	Series Description	Hjarna Seq 4.5 H31s
0008	1040	Institutional Dept. Name	12001731
0008	1048	Private	
0008	1050	Performing Physician's Name	
0008	1090	Manufacturer's Model Name	Sensation 16
0008	1120	Private	P.U.I.: 1.2.840.10008.3.1.2.1.1
0008	1140	Referenced Image Sequence	b.....P.U.I.: 1.2.840.10008.5.1.4.1.1

Equipment	
Modality	: CT
Manufacturer	: SIEMENS
Manufacturer's Model Name	: Sensation 16
Software Version	: syngo CT 2006B
Institution Name	: 12001731 Akademiska Uppsala
Station Name	: suastgc2
Institutional Dept. Name	: 12001731
Study	
Study Date	: 24.03.2007
Study Time	: 18.33.30
Referring Physician's Name	: 12001731
Study Description	: CT-HJARNNA
Patient	
Patient's Name	: HÄGGSTRÖM/MIKAEL
Patient ID	: 198602194816
Patient Date of Birth	: 19.02.1966
Patient Sex	: M
Image details	
Rows	: 512
Columns	: 512
Bits Allocated	: 16
Bits Stored	: 12
High Bit	: 11
Samples Per Pixel	: 1
Photometric Interpretation	: MONOCHROME2
Pixel Spacing	: 0.458984375 0.458984375
Slice Thickness	: 4.5
Window Center	: 35
Window Width	: 70



Şekil 3.2. MVE programı kullanılarak elde edilen Beyin tomografisi kesiti ve DICOM dosya içeriği

DICOM formatlı mesajlar medikal görüntü, görüntünün içeriği, yapısı, görüntüleme çeşitleri, cihaz çeşidi, görüntü satır-sütun-piksel bilgileri ve hasta verileri gibi detaylardan oluşmaktadır (Şekil 3.2). Dosya içerikleri, DICOM dosyalarını okuyabilmek için yazılmış medikal görüntüleri görüntüleme programı olan MVE (Medical Volume Explorer) programı kullanılarak elde edilmiştir [45].

DICOM dosyaları, içerisinde çok sayıda yüksek çözünürlüklü görüntü olduğundan ve görüntü verisi dışında başka veriler bulunduğundan oldukça büyük boyutlara ulaşmaktadır. Bu yüzden bu verilerin bilgisayar ortamında işlenmesi, depolanması ve transferi oldukça güçleşeceğinden, veriler bu süreçlere tabi tutulmadan önce sıkıştırılırlar. Bu sıkıştırma işlemi, görüntü format dönüşümleri yapan görüntü konverter programları aracılığıyla gerçekleştirilir. DICOM verilerinin kayıpsız bir biçimde sıkıştırılması için genellikle TIFF (Tagged Image File Format) formatına dönüştürülmeleri tercih edilir. Çalışmada kullanılan 34 kesitten oluşan beyin tomografi görüntüleri DICOM formatından TIFF formatına dönüştürülürken Image Converter Plus adlı program kullanılmıştır. Dönüşüm yapılmadan önce DICOM dosyası 17.1 MB büyüklüğe sahipken, TIFF formatında sıkıştırılıp yeniden düzenlendiğinde 4.6 MB büyüklüğünde yer kaplamıştır. Bu işlem neticesinde DICOM formatında bulunan veri dosyasından sadece işleme sokulacak görüntü verileri elde edilmiştir.

3.3. Çalışmada Kullanılan Algoritmalar

Sinogram elde etme ve rekonstrüksiyon işlemleri MATLAB’da programlanarak, her bir algoritmanın sonucu gerçek görüntü ile kıyaslanıp analiz edilmiştir. Matematiksel yöntemlerin bilgisayar ortamında programlanması, akış diyagramları kullanılarak anlatılmıştır. Her adımda gerçekleşen işlemlerden sırasıyla bahsedilmiş ve uygulamaya yönelik açıklamalar yapılmıştır.

3.3.1. Radon Dönüşümü Algoritması ve Sinogram

Bilgisayarlı tomografinin çalışma prensibi gereği, hasta etrafında 360 derece döndürülen x-ışını kaynağından yayılan x ışınlarının, karşıt tarafa yerleştirilen detektörler tarafından algılanarak bilgisayara aktarılmasıyla sinogram verisi elde edilir. Bu sinogram verisi, herhangi bir (x,y) düzleminde bulunan bir görüntünün Radon

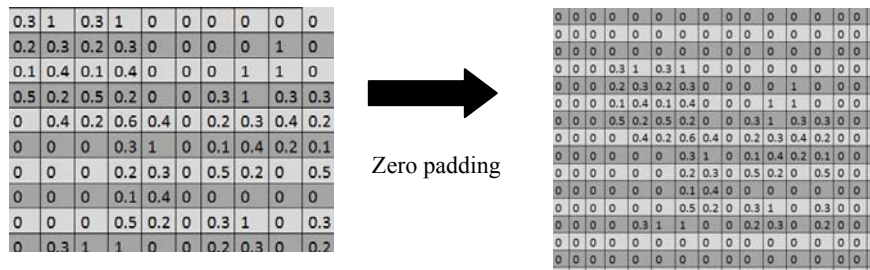
dönüşümü alınması ile elde edilen verinin aynısıdır. Daha önce de belirtildiği gibi Radon dönüşümü

$$P_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy \quad (3.1)$$

olarak tanımlanmıştır. Bu denklemin ayrık zamandaki formu ise

$$P_{\theta}(t) = \sum_x \sum_y f(x,y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) \quad (3.2)$$

şeklinde ifade edilmiştir [22-23]. Burada $f(x,y)$ ile ifade edilen görüntü fonksiyonu, dijital ortamda satır ve sütunlardan oluşan bir matristir. Bu matris görüntü matrisi olarak ifade edilir ve matrisin her elemanı da görüntünün o noktadaki piksel değerini ifade eder. Denklemden kullanılan Dirac Delta fonksiyonu, δ , ise x-ışınının $f(x,y)$ görüntüsünden geçerken hangi piksellere uğradığını ifade etmek amacıyla kullanılmıştır. Belirtilen koordinatlarda eğer Dirac Delta fonksiyonu bir piksel üzerinden geçmiş ise 1, geçmediyse 0 değerini alır. Pratikte veri alınacak hastanın pozisyonu sabit olup X ışın demeti hasta etrafında döner. Bu durumun tersi düşünüldüğünde yani ışın demetinin sabit olduğu ve hastanın 360 derece döndüğü varsayılırsa, elde edilecek sinogram verisinde hiçbir fark oluşmayacaktır. Çünkü prensip olarak farklı açılardan hastadan kesit alındığı düşünülürse aynı işlem gerçekleşmiş olur. Program yazılırken ışın demeti sabit düşünülmüş ve görüntü döndürülerek hesaplamalar yapılmıştır. Görüntü döndürülürken veri kaybını engellemek için görüntüye zero padding işlemi uygulanmıştır [22]. Yani görüntü matrisinin köşegeni bir ışının geçeceği en uzun yol olarak düşünüldüğünde, köşegen ile kenar arasındaki fark hesaplanarak görüntü matrisini çevreleyecek şekilde etrafına 0 değerli pikseller yerleştirilmiştir (Şekil 3.3).



Şekil 3.3. Zero padding örnek uygulama

Görüntü matrisi boyutları $m \times n$ olarak ifade edilirse, bu görüntüye uygulanacak zero padding işlemi için deneysel olarak yapılan uygulamalarda elde edilen sonuçlar arasındaki hatanın en aza indirilmesi için aşağıda verilen denklemlerden yararlanılmıştır.

$$X_{diagonal} = \sqrt{m^2 + n^2} \quad (3.3)$$

$$n_{pad} = x - m + 3 \quad (3.4)$$

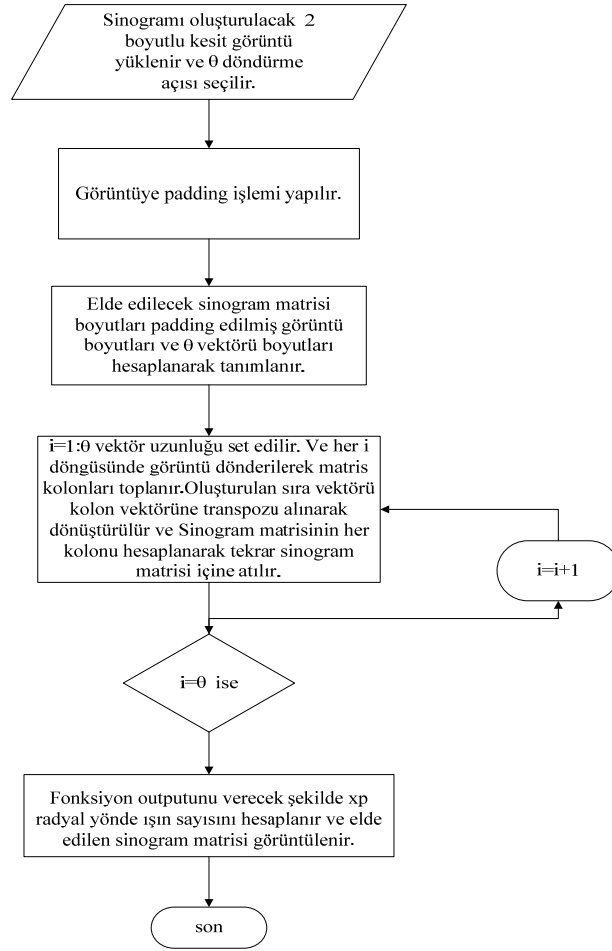
$$m_{pad} = x - m + 3 \quad (3.5)$$

Yukarıda ifade edilen Denklem 3.3, 3.4 ve 3.5, $m=20$ ve $n=20$ boyutlarına sahip bir görüntü matrisine uygulandığında, matrisin her bir kenarına 6 satır ve sütunda padding işlemi uygulayarak yeni görüntünün $n=32$, $m=32$ boyutlarında bir matris formatına dönüştürüldüğü ve görüntünün dönüştürülmesi sırasında herhangi bir bozulmanın olmadığı gözlemlenmiştir.

Padding işlemi gerçekleştikten sonra, görüntü tanımlanan θ açısı aralıkları ile döndürülür ve her döndürülmeye ışınlar denk gelen matris elemanları toplanarak bir satır matrisi oluşturulur. Sinogram matrisi $P_\theta(t)$ ile ifade edildiğine göre θ ve t ışınına bağımlı bir matris elde etmek gerekmektedir. Sinogram matrisinin satırları t , sütunları ise θ dönme açıları ile temsil edilecek olursa, her θ açısında elde edilen sütun bir izdüşümünü ifade eder. İzdüşümünün satırları ise ışın demetindeki her ışının elde ettiği veriyi gösterir (Şekil 3.4). Sinogram matrisini elde etmek için yazılan programın akış diyagramı Şekil 3.5’de verilmiştir.

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8	θ_9	θ_{10}
t1	0.3	1	0.3	1	0	0	0	0	0	0
t2	0.2	0.3	0.2	0.3	0	0	0	0	1	1
t3	0.1	0.4	0.1	0.4	0	0	0	1	0.3	1
t4	0.5	0.2	0.5	0.2	0	0	0.3	1	0.2	0.3
t5	0	0.4	0.2	0.6	0.4	0	0.2	0.3	0.1	0.4
t6	0	0	0	0.3	1	0	0.1	0.4	0.5	0.2
t7	0	0	0	0.2	0.3	0	0.5	0.2	0	0
t8	0	0	0	0.1	0.4	0	0	0	0	0
t9	0	0	0	0.5	0.2	0	0.3	1	0	0
t10	0	0.3	1	1	0	0	0.2	0.3	0	0

Şekil 3.4. Sinogram matrisinin θ açısı sütunları ve t ışın satırları ile ifadesi



Şekil 3.5. Akış diyagramları ile Sinogram matrisinin elde etme yönteminin ifadesi

3.3.2. Filtrelenmiş Geri İzdüşüm Algoritması

Bu çalışmada, tomografinin en temel modeli olan paralel ışın kaynakları kullanılarak hastadan veri alınması yöntemi esas alınmıştır [6-9,22,23]. Ancak, elimizde tomografi cihazından doğrudan elde edilmiş sinogram verisi olmadığından, sinogram verisi literatürde bulunan kesitsel görüntülerin Radon transformu alınarak elde edilmiştir. Sinogram elde edilmesinde kullanılan tomografik görüntünün paralel ışın temelli olduğu varsayılarak hesaplamalar yapılmıştır. Yeniden kesit görüntüsü elde etmek için de filtrelenmiş geri izdüşüm metodu kullanılmıştır.

Sinogram fonksiyonu $P_{\theta}(t)$ 'nin uzamsal frekans domainindeki ifadesinin Denklem 3.6'de gösterildiği gibi ve ' t ' ışının geometrik ifadesinin de Denklem 3.7'de gösterildiği gibi olduğu önceki bölümlerde ifade edilmiştir.

$$S_{\theta}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta}(t) e^{-j2\pi wt} dt \quad (3.6)$$

$$x \cos \theta + y \sin \theta = t \quad (3.7)$$

$$S_{\theta}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi w(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \quad (3.8)$$

Denklem 3.8'deki ifadenin ters Fourier Dönüşümü'nün, Denklem 3.9'da ifade edildiği gibi, frekans domaininde bir filtreleme fonksiyonu ile izdüşüm fonksiyonun çarpılarak elde edilen ifadenin ters Fourier Dönüşümü olan $Q_{\theta}(t)$ filtrelenmiş izdüşüm fonksiyonunun θ açısı kadar döndürülerek elde edilen sonuçların toplamına eşit olduğu da (Denklem 3.10) daha önce kuramsal temeller bölümünde ifade edilmiştir.

$$Q_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta}(w) |w| e^{j2\pi wt} dw \quad (3.9)$$

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} Q_{\theta}(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta \quad (3.10)$$

Dijital ortamda Denklem 3.10'da verilen ifadenin hesaplanabilmesi için ayrık zamanda ifade edilmesi gerekmektedir. Bu ifadenin ayrık zamandaki ifadesi Denklem 3.11'de gösterilmiştir.

$$f(x, y) = \frac{\pi}{K} \sum_{i=1}^K Q_{\theta_i}(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i) \quad (3.11)$$

Denklem 3.11'deki ifadeyi yazılımsal olarak gerçekleştirebilmek için öncelikle sinogram matrisinin Fourier Dönüşümü'nün alınması gerekmektedir.

Sinogram matrisinin satır sayıları ışın sayısı olarak, sütun sayısı ise döndürülecek θ açısı sayısı olarak tanımlanmış olup, sinogram için hesaplama bu doğrultuda yapılmıştır. Bu matris yapısı göz önüne alınarak geri izdüşüm algoritmasında kullanılacak olan parametrelerin tanımlanması esastır.

Elde edilen sinogram matris boyutları programda kullanılmak üzere $N=\text{ışın sayısı}$, $K=\theta \text{ açısı sayısı}$ olarak atanmıştır. θ açısının 180 dereceden farklı olma olasılığı düşünülmüş olup, θ açısını ifade eden vektörün kullanıcı tarafından verilecek olan açıya duyarlı bir şekilde modifiye olabilmesi için yeniden tanımlama yapılmıştır. Sinogram

elde edilirken kullanılan zero padding uygulaması göz önüne alınarak çıkış görüntü matrisinin boyutları yeniden hesaplanarak tanımlanmıştır. Burada dikkati çeken husus yeniden elde edilecek görüntü boyutlarının, sinogramı alınan gerçek görüntüden daha büyük bir boyuta sahip olmasıdır. Bunun sebebi ise daha öncede belirtildiği gibi görüntüye sinogramın bozulmasını engellemek için padding yapılmasından kaynaklanmaktadır.

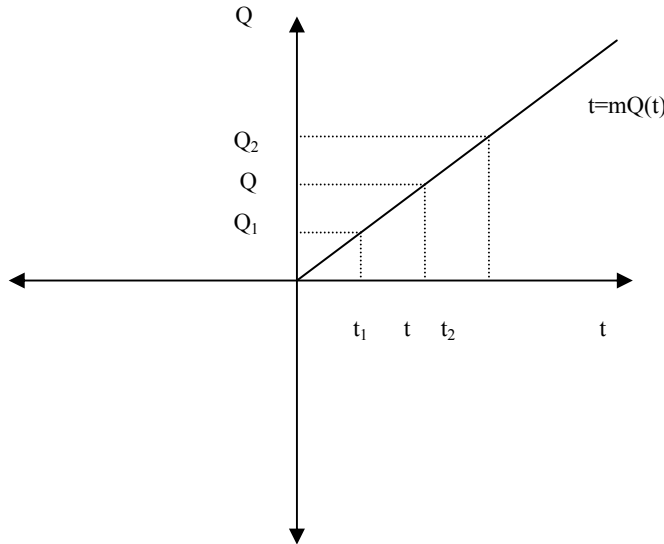
Rekonstrüksiyon işlemleri birer döngü içinde gerçekleştirilecek şekilde tasarlanmış olup sinogram matrisinin her bir sütunu için işlemlerin gerçekleştirilebileceği şekilde programlanmıştır.

Sinogram matrisinin her bir sütununa uygulanacak olan FFT işlemini gerçekleştirmek için öncelikle kaç tane örnekte dönüşümün yapılması gerektiği bulunmalıdır. Bunun için Matlab'ta 'nextpow2' fonksiyonu kullanılarak N tane ışının mutlak değerine eşit ya da N 'den büyük 2'nin en küçük kuvveti olan sayının bulunması ile FFT'nin kaç noktada DFT olarak optimum bir örnek sayısı belirlemesi gerektiği hesaba katılmıştır. $n=2^{\text{nextpow2}(N)}$ olarak tanımlanırsa, n noktada alınan DFT, Matlab ortamında FFT hesaplanmasına olanak sağlar. Örneğin, 128x128 boyutlarındaki bir görüntünün sinogram boyutlarının 185x180 olduğu göz önüne alındığında, $n=2^8$ örnekte FFT alma olanağı sağlar. Sinogram matrisinin satır sayısı 256'dan küçük olduğundan, sinogram matrisinin bir sütunundaki değerlerinin sayısı zero padding ile 256 değerine çıkartılır. Bu işlem otomatik olarak FFT fonksiyonu tarafından yapılır. Hesaplanan n değeri, sinogram matrisinin bundan sonraki filtrelenmiş izdüşüm ve ters izdüşüm olarak elde edilecek verilerin de boyutlarını oluşturur. Rekonstrüksiyonda kullanılmak üzere tasarlanan filtrelerin uzunluğunun yani örnek sayısının da n olarak hesaba katılması gerekmektedir.

Sinogram matrisinin her bir sütununun n noktada FFT'si alındıktan sonra bir filtre fonksiyonu tasarımının yapılması, tasarlanan fonksiyonun kullanıcı tarafından tanımlanan filtrenin seçilmesinin opsiyonel olarak sağlanması ve seçilen filtrenin FFT'sinin alınarak frekans domaininde çarpma işleminin yapılması gerekmektedir. Bu işlem uzamsal domainde konvolusyon işlemi olarak uygulanmakta olup Fourier Dönüşümü alındığında uzamsal frekansta çarpma işlemine dönüşerek uygulanmaktadır. Filtreleme işleminin gerçekleştirilebilmesi için Matlab ortamında "backfiltre.m" fonksiyonu yazılmıştır. Bu fonksiyonu yazarken kullanılan yöntem bölüm 3.3.2.1'de anlatılacaktır.

FFT'si alınan sinogram matrisi ve frekans domaininde tasarlanan filtre fonksiyonu çarpılıp elde edilen filtrelenmiş izdüşüm matrisinin IFFT'si alınarak Denklem 3.9'daki $Q_\theta(t)$ elde edilir.

$Q_\theta(t)$ değeri hesaplandıktan sonra Denklem 3.11'deki ifadenin kullanılarak $f(x,y)$ görüntü fonksiyonunun elde edilmesi gerekmektedir. Denklem 3.11'de ifade edilen t değeri $x\cos\theta + y\sin\theta$ denklemi ile hesaplanmaktadır. Programda bu hesaplama bir döngü içerisinde her t değeri için tek tek yapılmıştır. Buradaki en büyük problem hesaplanan t değerinin $Q_\theta(t)$ matrisindeki yerini tam olarak bulamamasıdır. Bu durum interpolasyon uygulanarak çözümlenebilir. Literatürde filtrelenmiş izdüşüm algoritmalarında en yaygın olarak kullanılması tavsiye edilen yöntem lineer interpolasyon yöntemidir [21-23].



Şekil 3.6. İki noktası bilinen doğrunun denklemi için örnek bir doğru gösterimi

Şekil 3.6'da gösterildiği gibi $(t_1, Q_1(t))$ ve $(t_2, Q_2(t))$ noktaları bilinen bir doğrunun denklemini bulmak için öncelikle doğrunun m ile gösterilen eğimini bulmak gerekir. İki noktası bilinen doğrunun eğimi eşitlikleri kullanılarak bulunan doğrunun denklemi aynı zamanda $(t, Q(t))$ noktalarının da üzerinde bulunduğu doğru olduğundan t noktasına denk gelen $Q(t)$ değeri hesaplanabilir.

İki noktası bilinen doğrunun eğim eşitlikleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

$$\frac{Q_2(t)-Q(t)}{t_2-t} = \frac{Q(t)-Q_1(t)}{t-t_1} = \frac{Q(t)}{t} = m \quad (3.12)$$

Bu eşitliklerdeki ilk iki denklem yeniden düzenlenirse aşağıdaki eşitlik elde edilir;

$$tQ_2(t) - tQ(t) - t_1Q_2(t) + t_1Q(t) = t_2Q(t) - t_2Q_1(t) - tQ(t) + tQ_1(t) \quad (3.13)$$

Denklem 3.13’de gerekli sadeleştirmeler yapılırsa aşağıda verilen Denklem 3.14 elde edilmiş olur.

$$\frac{Q_2(t)(t-t_1)+Q_1(t)(t_2-t)}{t_2-t_1} = Q(t) \quad (3.14)$$

Elde edilen Denklem 3.14 hesaplanan t değeri için programlanabilirse $Q(t)$ değeri bulunmuş olur. $t = x\cos\theta + y\sin\theta$ ifadesi hesaplandığında elde edilen t değeri eğer tam sayı değilse, bu t değeri programlama yapılırken bir alt ve bir üst değere yuvarlanarak tam sayı değerleri elde edilmiş olur. Bu değerler t_1 ve t_2 değerlerini ifade edecek şekilde atanmıştır.

Her K açısı için döngü içerisinde hesaplanan $Q(t)$ matrisi döngü bitiminde $\frac{\pi}{K}$ ile çarpılarak görüntü matrisi elde edilmiş olur.

3.3.2.1. Geri İzdüşüm Filtrelerinin Tasarımı

Normalde dijital görüntü filtreleri yumuşatma, keskinleştirme gibi çeşitli amaçlara yönelik kullanılmaktadır.

Sinogramdan geri izdüşüm algoritması ile elde edilen görüntü, $1/r$ ile konvolve edilmiştir (burada “ r ” nokta kaynağın nesneden olan uzaklığıdır). Dolayısıyla bu görüntü gerçek görüntüden farklı olup, “yıldız artefaktı” denilen bir bozulma içermektedir [22,24,30]. İşte bu yıldız artefaktını ortadan kaldırmak için filtreleme işlemine gereksinim vardır. Filtreleme işlemi her ışının merkezi piksellerinin dışındaki kenar piksellere negatif ağırlık verilerek gerçekleştirilir. Sonuçta kesit görüntüsünde merkezi piksellerin dışındaki pikseller negatif olacak ve bu negatif değerler ikinci ışıdan gelen ve yıldız etkisini oluşturacak pozitif piksel içerikler ile çarpıldığında nötrleşerek dengeli bir hal alacaktır [22]. Bunun için ters Fourier Dönüşümü alınan sinogram matrisi, frekans uzayında rampa filtre ile çarpılır.

Uzaysal ortamda dijital bir filtre $n \times m$ şeklinde bir kernel olup, bu filtrenin görüntü ile konvolusyonu sonucunda filtreleme gerçekleşir [4-5]. Rekonstrüksiyon ve

filtreleme işlemleri için işlem kolaylığı sağladığından daha çok frekans domaini tercih edilir. Frekans domaininde tasarlanan filtrenin, FFT'si alınan sinogram matrisi ile çarpılması istenilen sonucun elde edilmesine olanak sağlar.

Rekonstrüksiyon işlemlerinde kullanılmak üzere tasarlanan rampa fonksiyonu aslında yüksek geçiren bir filtredir. Yıldız artefaktını gidermek için kullanılan rampa fonksiyonun yüksek geçiren filtre olmasından dolayı, görüntüdeki gürültü önemli miktarda artmaktadır. Yani yüksek geçiren filtrenin kullanılması görüntüdeki yüksek frekans genliklerini arttırarak istenilmeyen sonuçlara neden olmaktadır. Bu gürültünün azaltılması için pencere fonksiyonu olarak ifade edilen alçak geçiren yani yumuşatıcı filtrelerin kullanılması gerekmektedir. Bu çalışmada cosinüs, sinc, hann ve hamming pencere fonksiyonları kullanılmıştır [30-34].

Cosinüs Penceresi,

$$w(n) = \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) \quad 0 \leq n \leq M \quad (3.15)$$

Sinc Penceresi

$$w(n) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{M}\right)}{\frac{2\pi n}{M}} \quad 0 \leq n \leq M \quad (3.16)$$

Hamming Penceresi

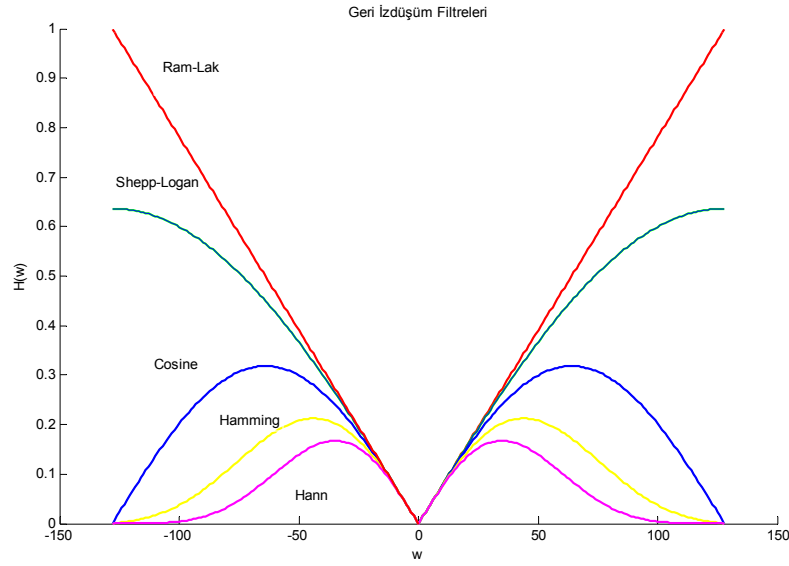
$$w(n) = \left(0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right)\right) \quad 0 \leq n \leq M \quad (3.17)$$

Hann Penceresi

$$w(n) = \left(0.5 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right)\right) \quad 0 \leq n \leq M \quad (3.18)$$

şeklinde ifade edilmiştir [30-34].

Çalışmada filtreleme işlemi için Ram-Lak filtresi kullanılmıştır. Rampa filtrenin, y eksenine göre simetrisi alınarak Ram-Lak filtre elde edilir. Tablo 3.1'de gösterildiği gibi Ram-Lak filtre bahsi geçen pencere fonksiyonları ile çarpılarak, Cosinüs, Shepp-Logan, Hann ve Hamming filtreleri elde edilir.



Şekil 3.7. Geri izdüşüm filtrelerinin genlik cevapları (Matlab'ta elde edilmiştir.)

Tablo 3.1. Geri izdüşüm filtrelerin elde edilmesi

Shepp-Logan Filtre	Ram-Lak*Sinc pencere fonksiyonu
Cosinüs Filtre	Ram-Lak*Cosinüs pencere fonksiyonu
Hamming Filtre	Ram-Lak*Hamming pencere fonksiyonu
Hann Filtre	Ram-Lak*Hann Pencere Fonksiyonu

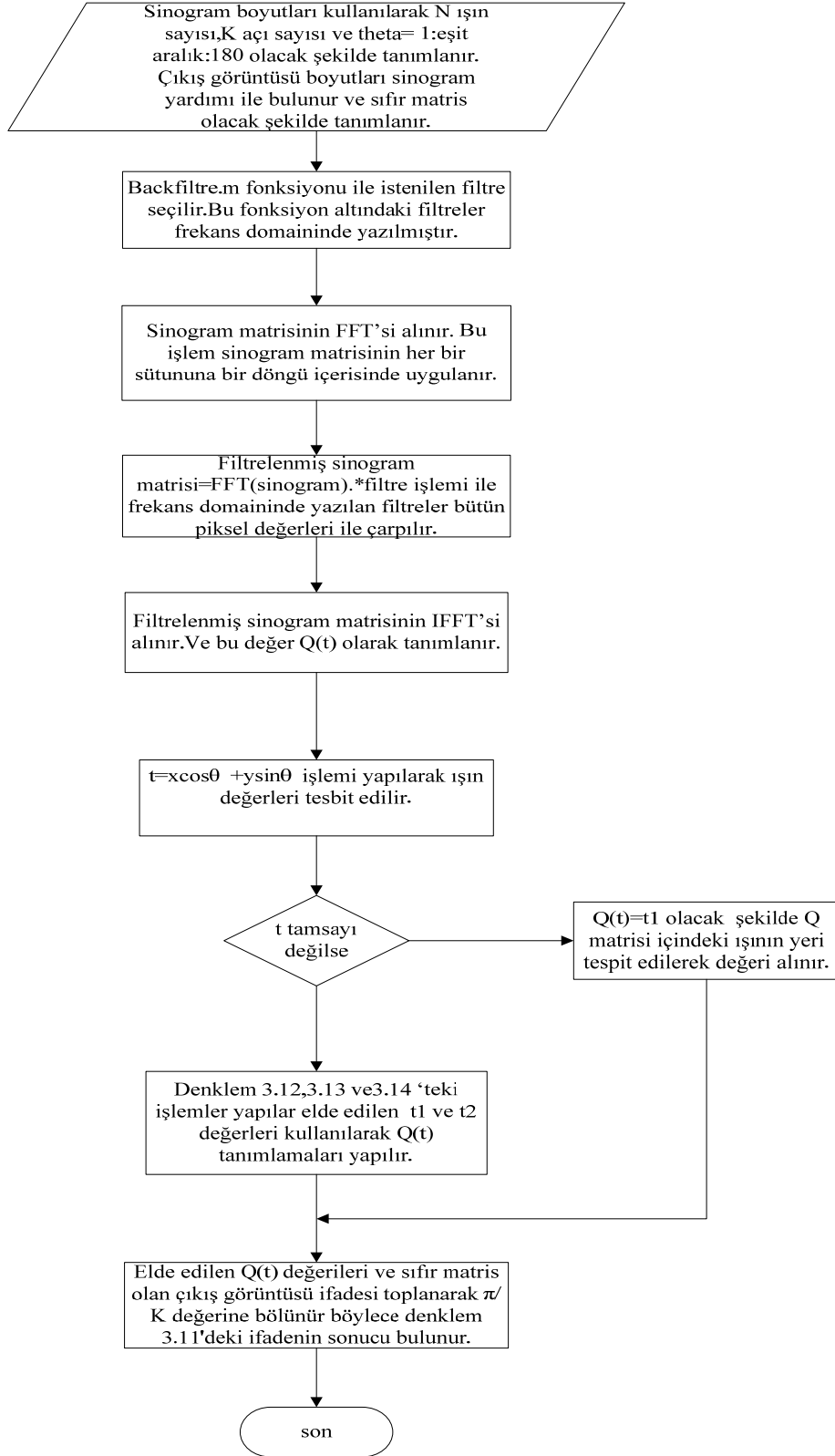
Geri izdüşümde kullanılmak üzere elde edilen filtrelerin genlik-frekans cevapları Şekil 3.7'de gösterilmiştir. Şekil 3.7'de görüldüğü gibi yüksek geçiren Ram-Lak filtre, pencere fonksiyonları ile yumuşatılarak bant geçiren filtreler olarak tasarlanmıştır.

Tasarlanan filtrede tanımlanan “ d ” parametresi, kullanıcının kesim frekansı olarak dışarıdan istediği değeri verebilmesini sağlar. Burada kesim frekansını etkileyecek olan parametre d , 1 olarak alınmış, $w > \pi * d = 0$ durumunda ise filtrenin kesime gitmesi için koşul konulmuştur. İstenildiğinde kesim frekansı değiştirilerek daha alçak ya da daha yüksek frekansa sahip sinyallerin geçişine izin vermek mümkündür. “ d ” parametresinin seçimi filtrenin kesim frekansını etkilediği için görüntü kalitesini önemli ölçüde etkilemektedir. Filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması 5 adımda şu şekilde özetlenebilir;

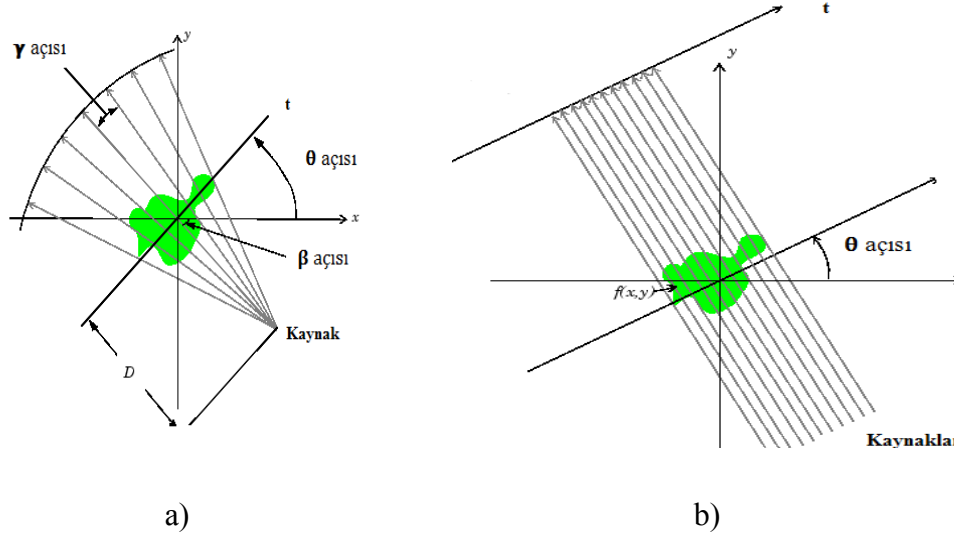
1. Elde edilen sinogram matrisinin satır sayıları $N = \text{ışın sayısı}$, sütun sayıları $K = \theta$ açısı olarak tanımlanır.
2. Sinogram matrisinin FFT'si her θ açısı için alınır.
3. FFT'si alınan sinogram matrisi frekans domaininde filtre operasyonu ile çarpılır.
4. Filtre operasyonu ile çarpılmış sinogram matrisinin IFFT'si alınır.

5. Denklem 3.11'deki ifadeyi bulmak için interpolasyon uygulanarak t değeri hesaplanır ve her t değerine denk gelen $Q_\theta(t)$ elde edilir. Bu işlem her θ açısı için tekrarlanır.

Bu algoritma Şekil 3.8'de akış diyagramları kullanılarak adım adım anlatılmıştır.



Şekil 3.8. Filtrelenmiş geri izdüşüm algoritmasını anlatan akış diyagramı



Şekil 3.9. a)Yelpaze Hüzme geometrisi, b) Paralel Hüzme geometrisi

3.3.3. Yelpaze Hüzme Algoritması

Yelpaze hüzme algoritmasında amaç filtrelenmiş geri izdüşüm algoritmasında kullanılan paralel ışın modelinden ziyade bir yelpaze gibi yayılan ışın kaynağının kullanılmasıdır.

Paralel hüzme algoritmalarında Şekil 3.9b’de gösterildiği gibi her ışın için bir kaynak söz konusu iken, Şekil 3.9a’da gösterilen yelpaze hüzmede bütün ışınlar için bir kaynak söz konusudur. Bu algoritmadaki amaç, X ışını üreten kaynakların azaltılması ile tomografi uygulanan hastanın daha düşük dozda radyasyona maruz kalması olarak özetlenebilir. Işınlardan pikseller üzerinde eşit miktarlarda etki bırakmadığı da göz önüne alındığında, uygulanacak olan rekonstrüksiyon yöntemi sonucunda paralel ışın algoritmaları kadar kaliteli görüntü elde edilmemektedir. Hastanın maruz kalacağı radyasyon dozunun azaltılmasına bağlı olarak paralel görüntü kalitesi de düşecektir.

Daha önce kuramsal temeller bölümünde ispatlandığı gibi yelpaze hüzme ve paralel hüzme arasında matematiksel bir bağlantı söz konusudur. Buna göre $\theta = \beta + \gamma$ ve $t = D \sin \gamma$ eşitlikleri bu iki farklı geometrik ifade için birbirleri arasında bir dönüşüm imkanı sağlamaktadır [22,35].

Bu çalışmada kullanılmak üzere Matlab’ta yazılan sinogram matrisi paralel ışınlar baz alınarak tasarlanmıştır. Oysaki yelpaze hüzme algoritmasında paralel sinogram matrisi anlamlı değildir. Bunun yerine yelpaze hüzme sinogram matrisi olması gerekmektedir. Bu çalışmada sinogram tasarımlarından çok rekonstrüksiyon üzerindeki çalışmalara ağırlık verildiğinden, bahsi geçen kesit görüntülerin sinogramları Matlab’da

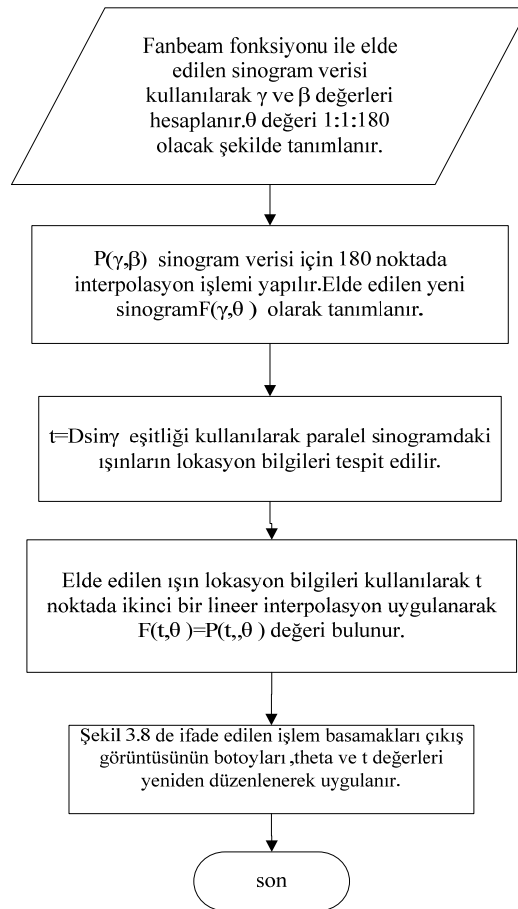
bulunan Image Processing Toolbox kullanılarak elde edilmiştir. Daha sonra çalışmada kullanılmak üzere yelpaze hüzme sinogram matrisini paralel hüzme sinogram matrisine dönüştüren bir dönüşüm programı yazılmıştır. Bu çalışmada kullanılan dönüşüm algoritmasının dışında daha kaliteli ve daha hızlı görüntü elde eden başka algoritmalar da literatürde mevcuttur [35-36]. Yelpaze hüzme matrisinin paralel hüzme matrisine dönüştürülmesi, işlem karmaşıklığından ve tasarım zorluklarından kurtulmak amacıyla tercih edilmiştir.

Matlab’da “fanbeam” fonksiyonu kullanılarak elde edilen sinogram matrisinin satırları, γ açısını yani ışınların yelpaze içerisindeki eşit açılarla dağılımını, sinogram matrisinin sütunları ise β açısını yani kaynağın nesne etrafında eşit aralıklarla 360 derece dönüşünü temsil eder. Yelpaze hüzme matris elemanları ise mevcut β açısı altında mevcut γ açılarındaki geçen ışınların, geçtikleri pikseller üzerindeki çizgi integral bilgilerini saklar. Bu matris bilgileri kullanılarak daha önce tasarlanmış olan paralel hüzme sinogramı formatına dönüşüm yapıldıktan sonra, filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması yeni sinogram formatına uygun şekle getirilip uygulandığında görüntü rekonstrüksiyonu gerçekleştirilmiş olur. Bu algoritmada esas olan lineer interpolasyon kullanarak dönüşümü gerçekleştirmektedir. Filtrelenmiş geri izdüşüm algoritmasında ışın huzmesinin 180 derece dönmesi, $f(x,y)$ görüntüsü üzerindeki verilerin toplanması için yeterlidir. Yelpaze hüzmede ise kaynak tek olduğundan ışınlar arası simetri söz konusu olmayıp, 360 derecede veri toplanması gerekmektedir. İki sinogram arasındaki dönüşümü gerçekleştirmek için öncelikle yelpaze hüzme sinogramının 180 derece dönme açısı altındaki bilgilerini hesaplamak gerekir.

Şekil 3.9a’da gösterilen yelpaze hüzme geometrisine göre, herhangi bir γ açısındaki bir ışın ele alınıp bu ışının β açısının 360 derece kadar döndüğü düşünülürse elde edilmiş olan veri, her β açısında ışının nesne üzerinden geçerken oluşturmuş olduğu çizgi integral bilgileri yani izdüşüm bilgileri olacaktır. 360 derece boyunca elde edilen veriye 180 noktada lineer interpolasyon uygulandığında, paralel hüzmeden elde edilen sinogram verilerinin hesaplanabilmesi için gerekli olan dönme açısı arasındaki bu fark ortadan kalkmış olur. 1’den 180’e kadar sinogram açısının değiştiği gerçeğinden yola çıkılırsa 180 noktada hesaplanan interpolasyon, paralel hüzme sinogram verilerinin yaklaşık olarak elde edilmesine zemin hazırlar. Uygulanan interpolasyon işlemi daha önceden hesaplanmış olan paralel hüzme sinogramındaki ışın sayısı kadar bir döngü içerisinde uygulanmıştır. Paralel hüzme sinogram verisindeki ışın sayısı ise γ açısı baz alınarak hesaplanmıştır. Işın sayısı hesaplanırken γ açısının orijine göre saat yönüne ve

saat yönünün tersine doğru ilerlediği hesaba katarak ve ışın sayısının tek sayı olduğu durumlarda eşit bölünme gerçekleşmeyeceğini de dikkate alarak zero-padding yapmak gerekir.

Elde edilen interpolasyon verileri γ ve β 'nın birer fonksiyonu olarak ifade edilirse $P(\gamma, \beta)$ yazılabilir. Paralel hüzme sinogram verisini elde etmek için $t = D \sin \gamma$ denklemi kullanılarak daha önce sayısı belirlenmiş olan ışınların lokasyonları da belirlenmiş olur. Lokasyonları belirlenmiş olan $P(\gamma, \beta)$ sinogram verilerine ikinci bir lineer interpolasyon uygulanarak hesaplanmış olan ışın sayısı kadar noktada fonksiyon değerleri hesaplanır. Bu hesaplama işlemi 180 derece açı sayısı kadar bir döngü içerisinde gerçekleştirilir. Elde edilen veri, $P(t, \theta)$ sinogram fonksiyonu, yaklaşık olarak paralel hüzme sinogram verisi olarak kabul edilebilir. Bu çalışmada, yelpaze hüzme sinogramı paralel hüzme sinogramına dönüştürülüp geri izdüşüm algoritması uygulanarak rekonstrüksiyon işlemi gerçekleştirilmiştir. Bu dönüşümün akış diyagramı Şekil 3.10 'da verilmiştir.



Şekil.3.10. Yelpaze hüzme paralel hüzme dönüşümü akış diyagramı

3.3.4. Cebirsel Rekonstrüksiyon Algoritması

İteratif yöntemlerden olan cebirsel rekonstrüksiyon yöntemi, nesneden elde edilen kesit görüntüsüne ait sinogram matrisi ile bu sinograma ait rekonstrüksiyon işlemi sonucu elde edilen görüntü matrisi arasındaki lineer denklem takımını cebirsel yolla çözebilme işlemine dayanır. Kuramsal Temeller bölümünde daha önce anlatıldığı üzere izdüşümler ve görüntü arasında şu şekilde bir bağlantı söz konusudur;

$$p_i = \sum_{j=1}^N w_{ij} f_j, \quad i=1,2,\dots,M \quad (3.19)$$

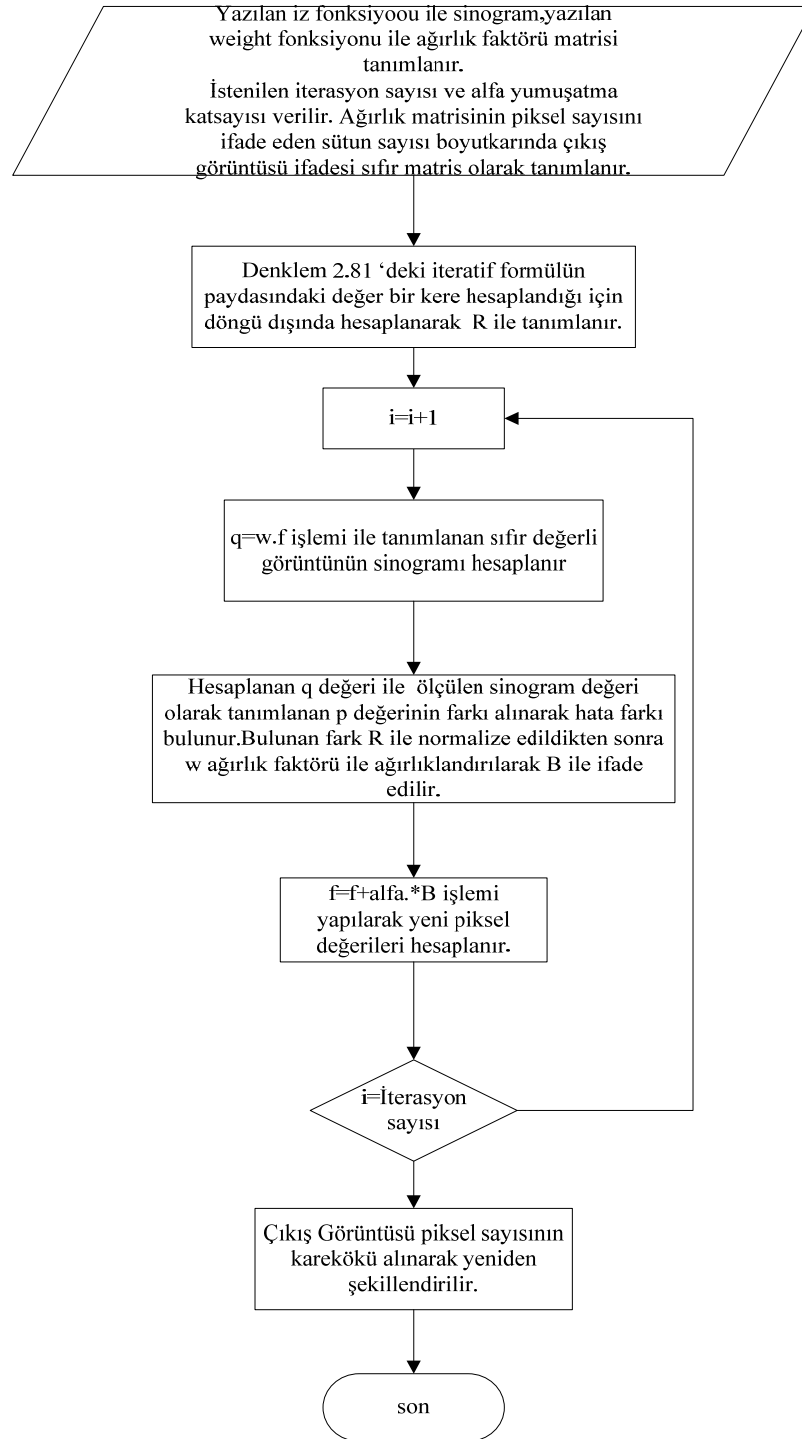
Burada p_i , i .ışına ait izdüşüm verisini, f_j , görüntü matrisindeki j .matris elemanı olan piksel değerini, w_{ij} ise j .hücrelerinden geçen i .ışının ağırlık faktörünü ifade eder. Daha önce de ifade edildiği üzere bu ağırlık faktörü j . hücresinin kesirsel alanına eşit olacak şekilde seçilir.

Eğer M ve N küçük değerler olsaydı Denklem 3.19'un klasik matris teoremlerine göre tersini almak oldukça kolay olurdu. Fakat pratikte görüntü matrislerinin 256x256, 512x512 gibi büyük boyutlara sahip matrisler olduğu düşünüldüğünde, 256x256 boyutundaki görüntünün her pikselinden geçen ağırlık matrisinin hesaplanması için $N=65536$ değerine eşit olacak ve doğal olarak matrisin her pikselinden geçecek olan ışın sayısı M de oldukça büyük bir değer alacaktır.

Bu şekilde büyük değerlere sahip denklemlerin çözümleri için iteratif metotlar geliştirilmiştir. Bu iteratif metotlardan biri Kaczmarz metodudur. Bu metot Kuramsal Temeller bölümünde ayrıntılarıyla anlatılmıştır. Çalışmada kullanmak üzere bu metot Matlab'da programlanmış ve bunun için denklem 2.81 de ifade edilen sinogram ve ağırlık matrisleri hesaplanmıştır. Burada kullanılan cebirsel rekonstrüksiyon tekniği Şekil 3.11'de akış diyagramı ile gösterilmiştir.

Denklem 2.81'de ifade edilen ART algoritması kullanılmış ve hata oranını azaltmak için kullanılan yumuşatma katsayısı 1'den küçük olacak şekilde seçilmiştir [22,23,37-41]. Daha önce, bahsedilen yöntemle elde edilen sinogram matrisi bir satır matrisine dönüştürüldükten sonra hesaplanan ağırlık matrisi büyük bir sparse matris olduğundan, matris içerisinde işlem yükünü arttıracak değer olmayan satırlar bulunarak matris içerisinden çıkarılmıştır. Matris boyutlarının kısmen de olsa küçülmesi işlem süresini olumlu yönde etkilemiştir. Denklem 2.81'deki ifadenin paydasındaki ağırlık

matris elemanlarının kareleri alınarak toplanmış ve sabit bir değer olduğu için döngü dışında hesaplanarak döngüye dahil edilmiştir. İterasyon işleminin gerçekleşmesi için gereken matrissel düzenlemeler yapılmış ve denklem bilgisayar ortamında gerçekleştirilmiştir. İterasyon sayıları deneysel olarak tanımlanmış ve elde edilen sonuçlar bu doğrultuda incelenmiştir. İterasyon sayısının yanında, yumuşatma katsayısı da bununla ilintili olarak seçilmiş ve aralarındaki ilişki deneysel olarak gözlemlenmiştir.



Şekil 3.11. Art algoritması akış diyagramı

3.3.4.1. Cebirsel Rekonstrüksiyonda Kullanılmak Üzere Ağırlık Matrisi Tasarımı

Ağırlık matrisi, Denklem 3.19’da da ifade edildiği gibi bir ışının her pikselden geçtiği durum için hesaplanmıştır. Işınlardan doğrusal bir şekilde bir nesne kesitinden geçtiği düşünülürse, ışın, geçtiği doğru boyunca uğradığı piksellerin kesirsel alanıyla ifade edilerek ağırlık matrisinde yerini alır. Işın, piksellerin büyük bir çoğunluğuna uğramadan geçtiği için ağırlık matrisi aslında seyrek (sparse) bir matristir. Yani ışının uğramadığı pikseller için ağırlık faktörü sıfır değerini alacaktır.

Ağırlık matrisini oluşturmak için öncelikle görüntü ve sinogram matrislerinin boyutlarını hesaplamak gerekir. Bu çalışmada kullanılan 128x128 boyutlarına sahip bir görüntü matrisinin 1’den 180 dereceye kadar alınan izdüşümlerinden oluşan sinogram matrisinin boyutları 185x180’dir. Cebirsel yöntemde işlem yükünü azaltmak için, 180 tane açı değeri yerine 6 tane açı değeri göz önüne alınarak sinogram hesabı yapılmıştır. Bu şekilde dahi, matris boyutları oldukça büyük olduğundan, işlem yükü büyüktür. Bu boyutlara sahip görüntü ve sinogram matrislerinden yola çıkarak piksel sayısı $N=16384$, sinogram matris elemanları yani izdüşüm sayısı $M=1110$ olur. Elde edilmesi beklenen ağırlık matrisinin boyutları 16384x1110’dur. Eğer açı sayısı 6 değil de 180 olarak hesaba katılmış olsaydı, matris boyutları 16384x33300 olacaktı. Bu durumda boyutların işlem yükünü arttıracak ve dolayısı ile işlem süresini oldukça uzatacağı açıkça görülmektedir.

Çalışmada kullanılacak görüntünün boyutları tanımlandıktan sonra, bu boyut değerlerini kullanarak ızgara (grid) şeklinde bir koordinat sistemi tasarlanmıştır. Cebirsel yöntem uygulamalarında bir piksel küçük bir kare şeklinde düşünüldüğünde, eni ve boyu 1’e eşit olacak şekilde tanımlanmış, bunun sonucu piksel alanı da hesaplamalarda 1 olarak kullanılmıştır. Cebirsel yöntemlerde ışın tek bir çizgi olarak değil, bir piksel boyutundaki bir aralığa denk bir kalınlığa eşit olan bir ışın olarak düşünülmüştür. Bu ışının kalınlığı piksel boyutuna eşit (=1) olarak alınmıştır. $t = x \cos \theta + y \sin \theta$ ifadesinden yola çıkılarak, ışınların değeri, ışınlar ızgara üzerinden geçtiği zaman eğer piksel koordinatlarına tam denk geliyorsa 1’e eşit olacak şekilde hesaplanmıştır [40,42]. Eğer ızgaradan geçen ışınlar piksel koordinatlarına tam olarak denk gelmiyor ise, piksel içerisinde arada kalan bir değere denk gelen t , bir alt değerine yuvarlanır. t ’nin yuvarlandığı miktar 1’den çıkarıldığında, yuvarlanarak bulunan değerin bulunduğu yerin hemen solundaki piksel değerine ait ağırlık faktörü elde edilir. t ’nin yuvarlandığı miktar ise bulunan değerin hemen sağındaki piksel değerine ait ağırlık faktörünü verir.

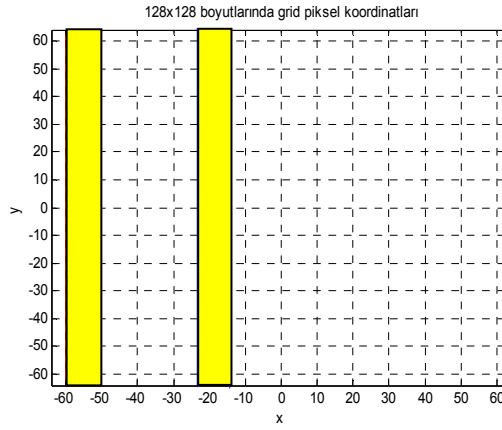
Bu durum matematiksel olarak aşağıdaki 3.20 ve 3.21 denklemleri ile ifade edilebilir. $\text{floor}(t)$, t değerinin bir alt değerine yuvarlandığı sayıyı ifade eder.

$$W_{sol} = I - (t - \text{floor}(t)) \quad (3.20)$$

$$W_{sağ} = I - W_{sol} \quad (3.21)$$

$$W = W_{sol} + W_{sağ} \quad (3.22)$$

W_{sol} , sol tarafta bulunan piksele ait ağırlık faktörünü $W_{sağ}$ sağ tarafta bulunan piksele ait ağırlık faktörünü ifade eder. W ise ağırlık matrisinde konumlanan ağırlık faktörünün tam değerini verir.



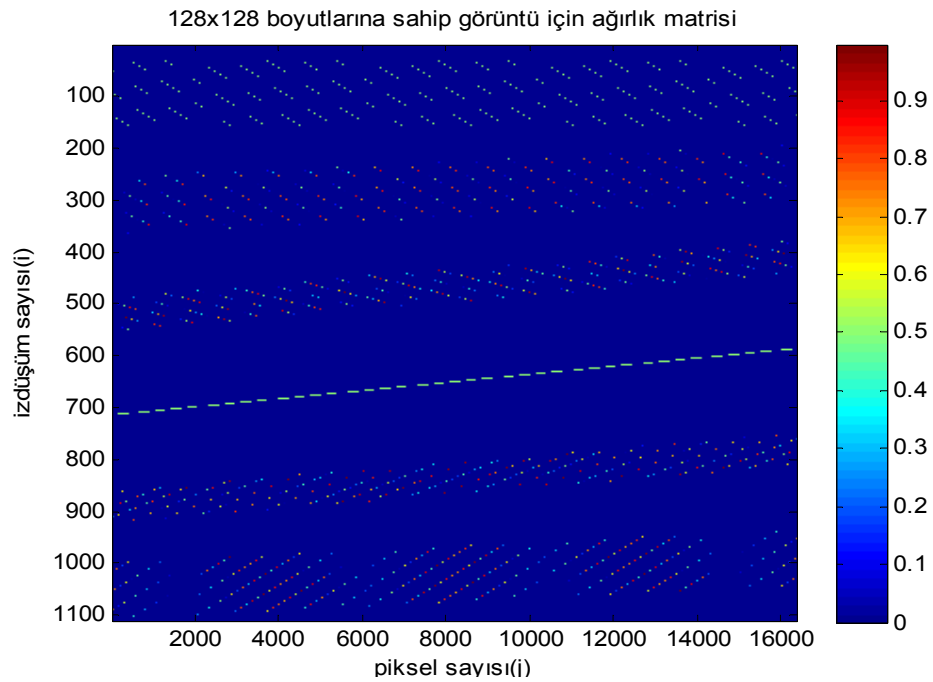
Şekil 3.12. Ağırlık matrisi tasarımı: ışın pozisyonuna göre ağırlık matrisi elemanlarını hesaplama yöntemi

Şekil 3.12’de görüldüğü üzere birinci ışın piksel koordinatlarına tam denk geldiği için işlem yaparken ışının geçtiği piksel değerleri 1, diğerleri ise 0 olarak atanmıştır. İkinci ışın ise piksel koordinatlarına tam olarak denk gelmediğinden Denklem 3.20, 3.21 ve 3.22’de ifade edilen işlemler yapılarak ışının piksel değerine katkısı hesaplanmıştır.

Ağırlık faktörü değerleri bulunduktan sonra ağırlık matrisindeki satırların ve sütunların indis değerlerinin hesaplanması gerekmektedir. Ağırlık matrisinin satır sayıları sinogram matris boyutları ile ilişkilidir. Ağırlık matrisinin sütun sayıları ise piksel sayısı ile ilişkilidir. İndisleri belirlenmiş olan ağırlık matrisi elemanları, daha önce hesaplanan W_{sol} ve $W_{sağ}$ ağırlık faktörleri kullanılarak $1 < \text{floor}(t) < 185$ (sinogram matrisin satır sayısı) şartının sağlanması koşulu ile sparse matris olarak tasarlanmıştır.

Şekil 3.13’de 128x128 boyutlarına sahip bir görüntü için oluşturulan ağırlık matrisi gösterilmiştir.

Bu çalışmada kullanılmak üzere tasarlanan ağırlık matrisinin, işlemlerin uygulanacağı görüntü ve o görüntüye ait sinogram matrisi boyutları değişmediği için tekrar tekrar hesaplanmasına gerek kalmamıştır. Bir kere hesaplanan ağırlık matrisi eş zamanlı cebirsel rekonstrüksiyon işlemlerinde de kullanılmıştır. Görüntü boyutları ve sinogram matrisi boyutları değiştiği takdirde ağırlık matrisi tekrar kullanılabilir. Şekilde bir fonksiyon olarak yazıldığından, kullanıcının tercihinine göre güncellenerek kullanılabilir.

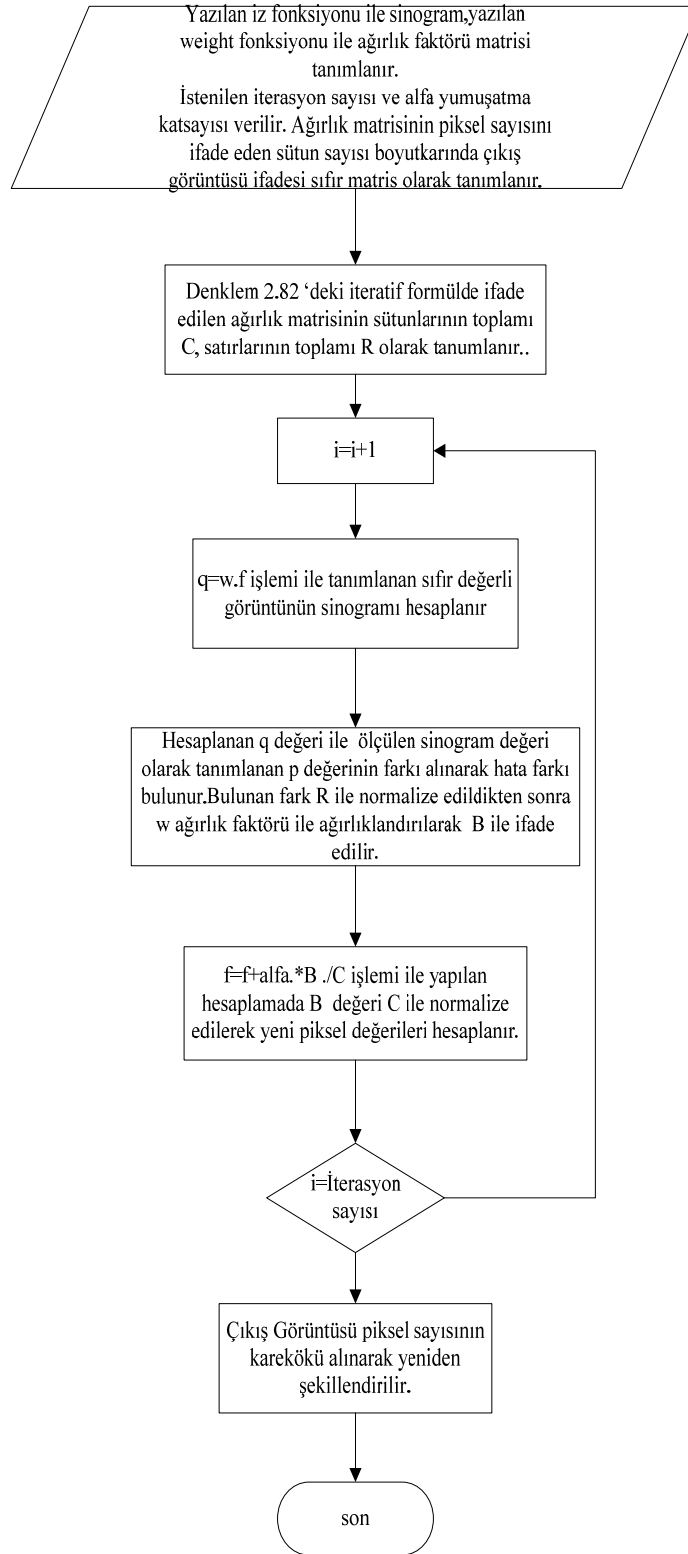


Şekil 3.13. Ağırlık matrisi

3.3.5. Eşzamanlı Cebirsel Rekonstrüksiyon Algoritması

Eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon algoritmasını gerçekleştirmek için kuramsal temellerde anlatılan Denklem 2.82 yazılım ortamında gerçekleştirilmiştir. Bu denkleme göre hata farkı $\Delta f_j^{(i)}$ cebirsel rekonstrüksiyondaki gibi hesaplanmıştır. Eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon tekniğinin akış diyagramı Şekil 3.14’de gösterilmiştir. Ağırlık matrisinin sütunlarının toplamı tanımlanarak hesaplanan hata faktörüne bölünmüş ve elde edilen değer, ağırlık matrisi elemanları ile çarpılarak toplanmıştır. Bu ifade, ortalaması alınmış ağırlık matrisi ile hata farkının ağırlıklandırılması olarak tanımlanır. Daha sonra elde edilen bu değer, ağırlık matrisinin sütunlarının toplamı olarak bulunan

değere bölünerek normalize edilmiştir. Deneysel olarak atanan iterasyon sayısı ve yumuşatma katsayısına göre sonuç olarak elde edilen görüntü matrisleri incelenmiştir.



Şekil 3.14. SART akış diyagramı

3.4. Rekonstrüksiyon Algoritmaları ile Elde Edilen Görüntülerin Gerçek Görüntüler ile Kıyaslanması

Rekonstrüksiyon algoritmaları sonucu elde edilen görüntü çıktılarının orijinal görüntü ile kıyaslanması için bazı ölçme teknikleri literatürde mevcuttur [46-50].

Bu çalışmada elde edilen görüntülerdeki hata ve bozulma oranlarını belirlemek için, en çok kullanılan ölçme tekniklerinden *RMSE* (Root Mean Square Error) ve *PSNR* (Peak Signal-to-Noise Ratio) tercih edilmiştir.

MSE (Mean Square Error), hataların karelerinin toplamının ortalaması olarak tanımlanır. Görüntü dijital ortamda bir matris olduğuna göre bu matrise ait elemanların her biri görüntü pikseli olarak ifade edilir. Orijinal görüntü ile rekonstrüksiyon işlemleri sonucu elde edilen görüntü matrisi arasındaki fark piksel piksel alındıktan sonra, kareleri alınıp toplanırsa ve elde edilen bu değer piksel sayısına bölünür ise bu görüntüye ait *MSE* hata değeri bulunmuş olur. *MSE* hata değeri aşağıdaki denklem ile ifade edilir [48,51];

$$MSE = \sum_{M,N} \frac{[I_1(m,n) - I_2(m,n)]^2}{M*N} \quad (3.23)$$

Denklem 3.23’de ifade edilen $I_1(m,n)$, orijinal görüntüyü, $I_2(m,n)$, rekonstrüksiyon sonucu elde edilen görüntüyü, M , görüntü matrisinin satır sayısını ve N , görüntü matrisinin sütun sayısını ifade eder. $M*N$ ifadesi ise görüntü matrisindeki piksel sayısını ifade eder.

RMSE hata oranı ise *MSE* hata oranının karekökü olarak aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$RMSE = \sqrt{\sum_{M,N} \frac{[I_1(m,n) - I_2(m,n)]^2}{M*N}} \quad (3.24)$$

MSE ve *RMSE* hata ölçme yöntemlerinin yanında, hatanın büyüklüğünün orijinal görüntüdeki piksel değerinin en büyüğü (peak-tepe) ile olan ilişkisini ifade eden *PSNR* hata değerlendirme tekniği de literatürde kullanılmıştır [46-51]. *PSNR* değeri aşağıdaki denklem kullanılarak hesaplanabilir.

$$PSNR = 10\log_{10}\left(\frac{R^2}{MSE}\right) \quad (3.25)$$

Burada R değeri orijinal görüntüdeki en büyük piksel değerini ifade eder. Eğer karşılaştırılan görüntüler birebir eşit ise *MSE* değeri sıfır, *PSNR* değeri sonsuz çıkacaktır. Bu durum göz önüne alındığında yüksek *PSNR* değerine karşılık küçük *MSE* ve *RMSE* değerlerinin elde edilmesi, rekonstrüksiyon işlemleri sonucu elde edilen görüntünün çok fazla bozulmadığını göstermektedir.

3.5. Matlab Volume Visualization Fonksiyonlarının Kullanılması ile 3 Boyutlu Görüntülerin Elde Edilmesi

34 kesitten meydana gelen 128x128 boyutlarındaki beyin tomografi görüntülerinden elde edilen 34 adet sinograma rekonstrüksiyon algoritması uygulanması sonucu 34'er tane görüntü çıktısı elde edilmiştir. Daha sonra Matlab Volume Visualization yardımıyla bu görüntü kesitleri kullanılarak 3 boyutlu hacimsellik kazanmış nesne görüntüsü elde edilmiştir. Öncelikle “*counturslice.m*” fonksiyonu kullanılarak, (x,y,z) koordinat sisteminde, rekonstrüksiyon sonucu elde edilen 34 tane tomografi kesit görüntüsü (x,y) düzlemine paralel olacak şekilde z koordinatı boyunca eşit aralıklar ile üst üste kontur şeklinde oluşturulur. “*smooth3.m*” fonksiyonu kullanılarak 34 kesitten oluşan tomografik veriler gaussian filtre ile filtrelenerek yumuşatılır. Daha sonra “*isosurface.m*” fonksiyonuyla, 34 kesitten oluşan volumetrik veri içinden eş yüzeyler çıkarılarak, üst üste olan bu yüzeyler her bir yüzeydeki kontur hatlarını belirleyen çizgilerdeki noktalar ile birbirine bağlanır. ‘*isocaps.m*’ komutu ile elde elden ifadelere interpolasyon uygulanır ve renk, doku aydınlık gibi yüzey parametreleri eklenerek hacimsel bir görüntü kazandırılır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde materyal ve yöntemlerde anlatılan algoritmalar, Matlab ortamında gerçekleştirildikten sonra elde edilen sonuçlar görsel olarak sunulmuş ve her yöntemin sonunda elde edilen veriler doğruluk ve zaman kriterleri bakımından kıyaslanıp yorumlanmıştır. İlk aşamada 8x8, 16x16, 32x32, 64x64 ve 128x128 boyutlarına sahip sentetik head phantom görüntüsü ve tomografi görüntüsü kullanılarak Bölüm 3.4.1’de anlatıldığı gibi Radon dönüşümü fonksiyonu (iz.m) yazılmış ve bu fonksiyon kullanılarak sinogramlar elde edilmiştir.

İkinci aşamada ise Bölüm 3.4.2’de anlatılan filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması ‘iz.m’ fonksiyonu ile elde edilen sinogram verisi kullanılarak uygulanmıştır. Farklı filtreler kullanılarak değişik boyutlarda görüntüler elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen sonuçlar kıyaslanmıştır.

Üçüncü aşamada Matlab fonksiyonu olan ‘radon.m’ fonksiyonu ile elde edilen sinogram verisi kullanılarak filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması uygulanmıştır. Farklı filtreler ile bu algoritma uygulaması gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Dördüncü aşamada, Bölüm 3.4.3’de anlatıldığı gibi yelpaze hüzme geri izdüşüm algoritması için yeni sinogram tasarlanmıştır. Daha sonra farklı filtreler kullanılarak rekonstrüksiyon işlemi uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

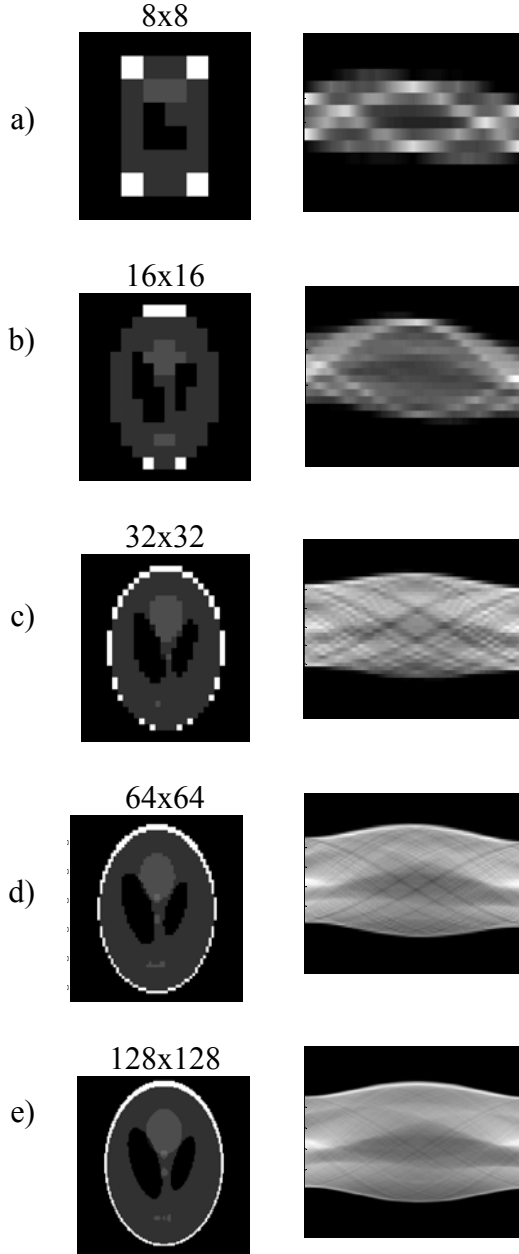
Beşinci aşamada, Bölüm 3.4.4’de ve Bölüm 3.4.5’de anlatılan cebirsel ve eş zamanlı cebirsel rekonstrüksiyon algoritmaları, farklı iterasyon sayıları ve farklı yumuşatma katsayıları kullanılarak, çeşitli görüntüler üzerinde test edilmiş ve elde edilen sonuçlar kıyaslanmıştır.

Altıncı aşamada ise sözü geçen algoritmalar 128x128 boyutlarına sahip 34 kesitten oluşan beyin tomografi görüntülerinin her bir kesitine uygulanmıştır. Daha sonra elde edilen görüntüler, Matlab Volume Visualization fonksiyonlarının kullanılması ile volumetrik görüntüye dönüştürülmüştür. Elde edilen 3 boyutlu görüntüler birbirleri ile kıyaslanarak yorumlanmıştır.

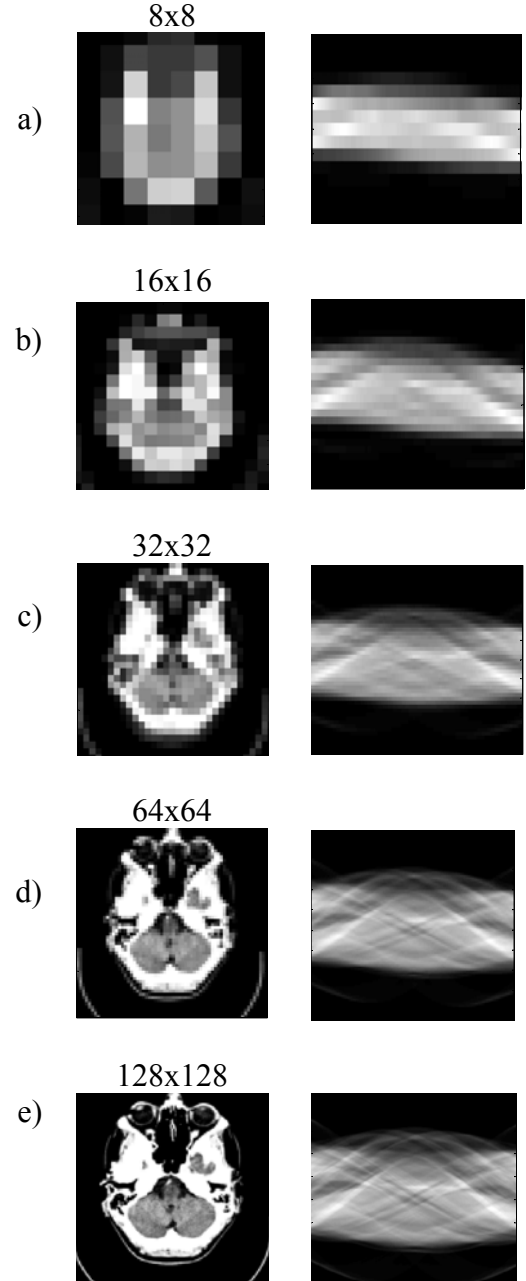
4.1. Radon Dönüşümü ile Sinogram Elde Edilmesi

Bu çalışma yapılırken elimizde sinogram verileri olmadığı için, sentetik ve tomografik görüntülerin Radon dönüşümü alınarak (birer derece aralıklarla artan bir θ

açısı ile ($1 \leq \theta \leq 180^\circ$)) 8x8, 16x16, 32x32, 64x64 ve 128x128 boyutlarında sinogram verileri elde edilmiştir. Burada farklı boyutlarda head phantom görüntüsü (Şekil 4.1) ve beyin tomografi kesit görüntülerinden 5. kesit görüntüsü (Şekil 4.2) kullanılmıştır. 5. kesit görüntüsü, diğer kesit görüntülerine göre daha detaylı olduğu için tercih edilmiştir. Bu çalışmada farklı görüntüler kullanılmasının sebebi her bir görüntü için farklı bir sinogram görüntüsü elde edildiğini göstermektir.



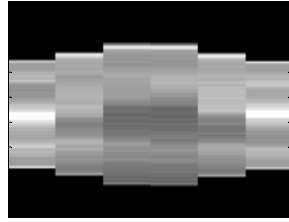
Şekil 4.1. Farklı boyutlarda sentetik görüntüler ve sinogramları



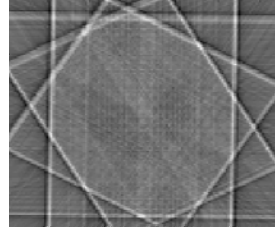
Şekil 4.2. Farklı boyutlarda Head Phantom görüntüleri ve sinogramları

İşleme tabi tutulan görüntülerin çözünürlükleri arttıkça işlem süresi de artmakta fakat elde edilen sinogram görüntüleri daha da netlik kazanmaktadır. Gerçek hayatta yüksek çözünürlüklü sinogram elde etmek için gerekli süreyle orantılı bir şekilde hastanın radyasyona maruz kalması söz konusudur. Sinogram oluşturma işlem süresinin azaltılması hastanın radyasyona maruz kalacağı süreyi de azaltacaktır.

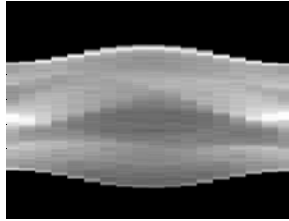
Daha kaliteli sinogram görüntüleri elde etmek için çözünürlüğün yanında eşit aralıklarla alınan θ açısı ($1 \leq \theta \leq 180^\circ$) da görüntü kalitesini etkileyen önemli bir faktördür. Örneğin Şekil 4.3a ve Şekil 4.3c’de gösterildiği üzere θ açısı sırasıyla 30° ’lik ve 10° ’lik aralıklarla alındığında iki farklı sinogram elde edilmiştir. Bu sinogramlardan elde edilen görüntüler, arada kalan açılardaki veriler olmadığından dolayı Şekil 4.3b ve 4.3c’de gösterildiği üzere eksik ve kalitesi düşük olmuştur.



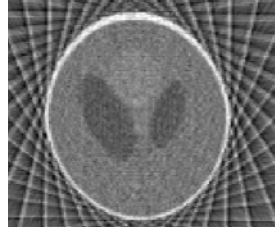
a)



b)



c)



d)

Şekil 4.3. Farklı açılarda elde edilen sinogramlar ve bu sinogramlardan elde edilen head phantom görüntüleri

Bu nedenle çalışmada kullanılan sinogramlar için θ açısı ($1 \leq \theta \leq 180^\circ$) eşit aralıklarla birer derece seçilmiş olup görüntü rekonstrüksiyonunda veri kaybı problemi giderilmiştir.

4.2. Filtrelenmiş Geri İzdüşüm Algoritması Kullanılarak Görüntü Elde Edilmesi

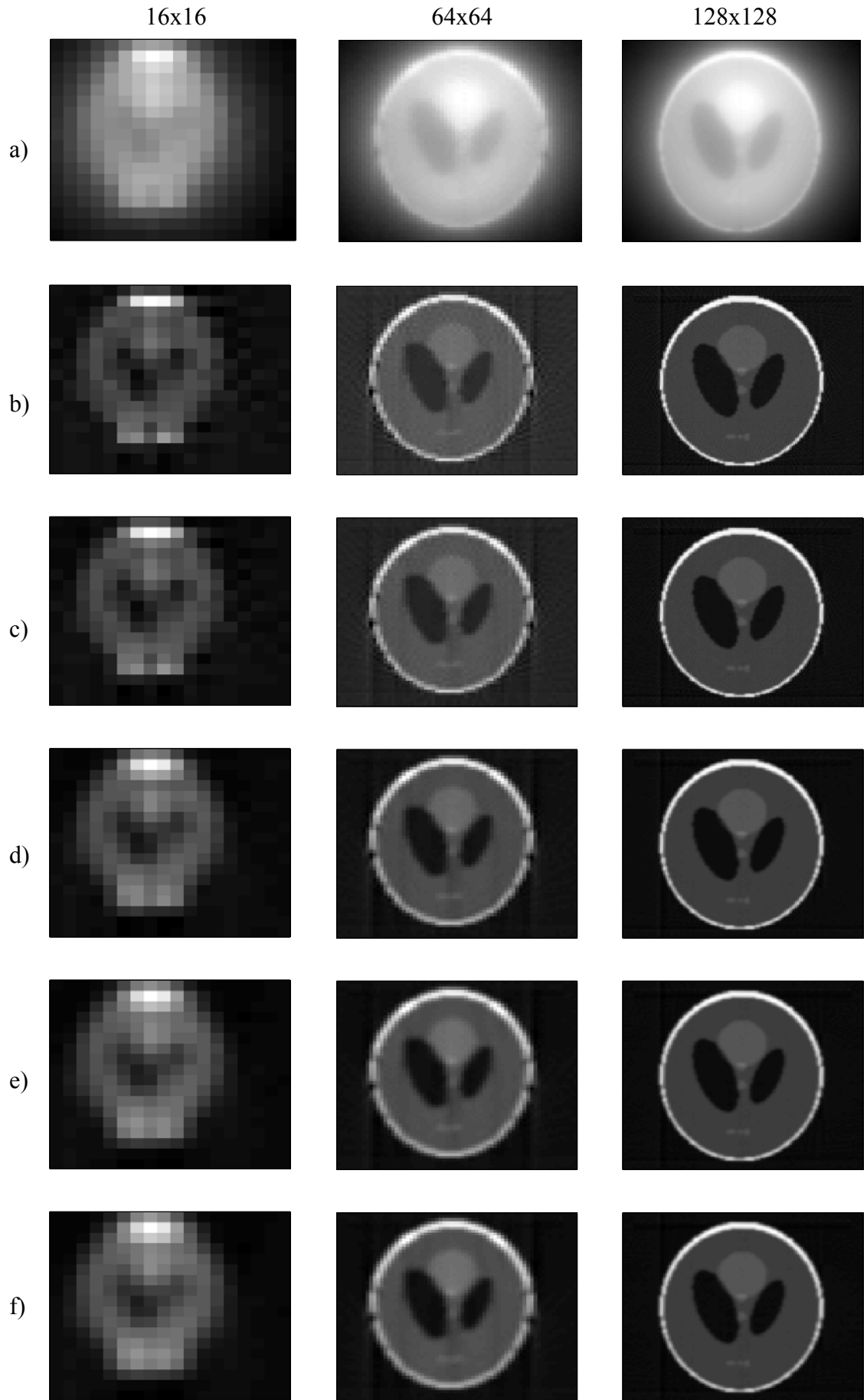
Radon dönüşümü (iz.m) ile elde edilen sinogram verilerinin kullanılmasıyla filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması öncelikle 16x16, 64x64 ve 128x128 boyutlarındaki sentetik head phantom görüntülerine ve daha sonra 16x16, 64x64 ve 128x128 boyutlarındaki 34 kesitten oluşan beyin tomografisi görüntülerinden 5. kesit görüntüsüne uygulanmıştır.

Bu uygulamada Ram-Lak, Shepp-Logan, Cosine, Hamming ve Hann filtreleri sırasıyla kullanılarak elde edilen sonuçlar için RMSE ve PSNR değerleri hesaplanmıştır. Böylece gerçek görüntüler ile sinogramlardan elde edilen görüntüler arasında doğruluk ve hata oranları hesaplanarak algoritmaların başarımları karşılaştırılmıştır.

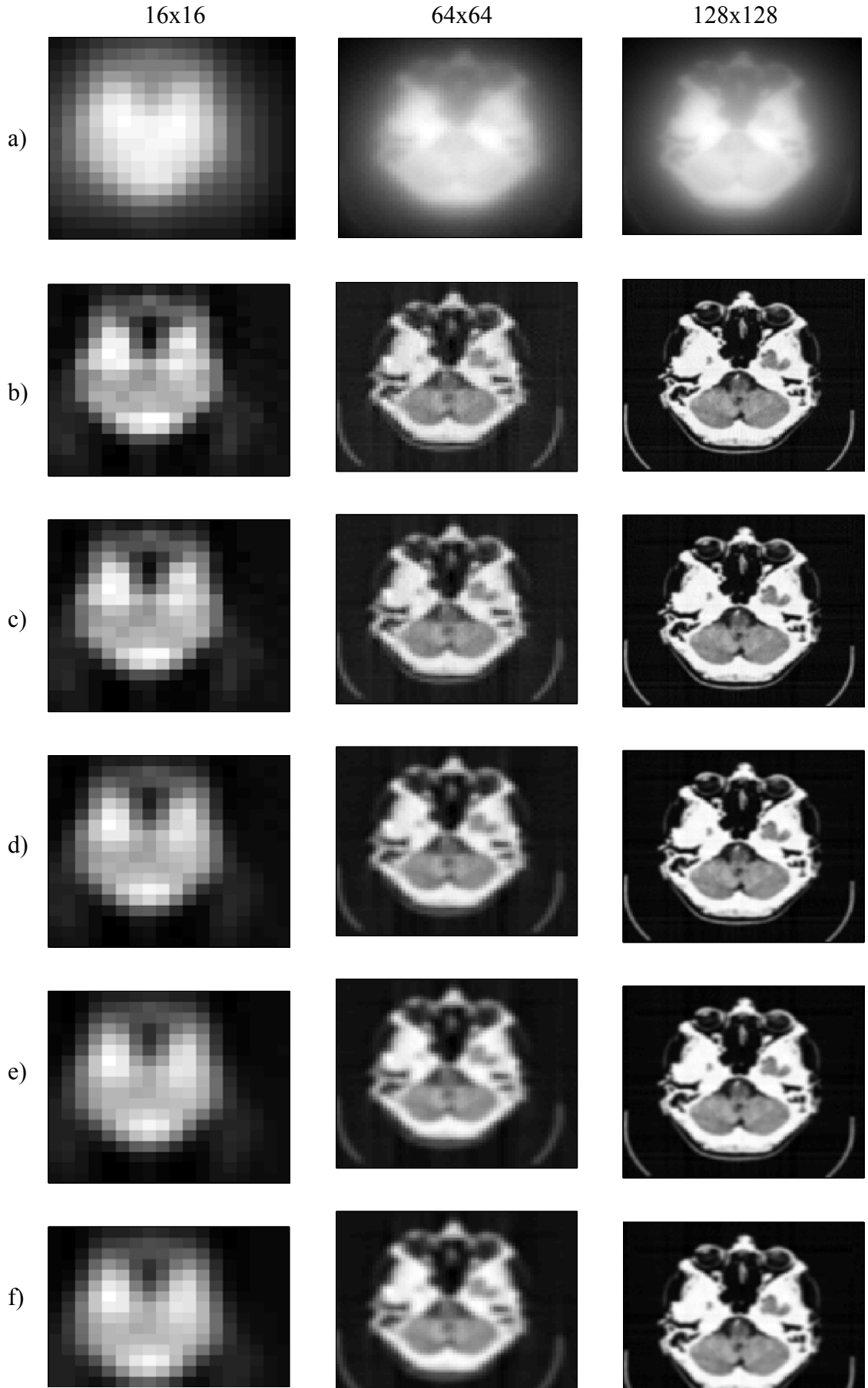
Farklı çözünürlükte filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması sonucu elde edilen head phantom görüntüleri Şekil 4.4'te, tomografi görüntüleri ise Şekil 4.5'te verilmiştir. Şekil 4.4 ve Şekil 4.5 incelendiğinde görüntüye filtre uygulanmadığı takdirde görüntünün merkezinde parlaklık ve bulanıklık oluşmuştur. Bunun sebebi her farklı θ açısında görüntünün merkezinde bulunan piksellerin her izdüşümde ışın toplamına daha çok maruz kalmasıdır. Farklı filtre uygulamaları sonucu görüntüde bulunan gürültüler giderilmiş ve görüntü kalitesi daha yüksek olmuştur.

Görüntü çözünürlükleri arttıkça görsel olarak daha belirgin görüntüler elde edildiği görülmüştür. Fakat farklı çözünürlük boyutuna sahip bu görüntüler kıyaslandığında PSNR oranının yüksek olması yada RMSE hata oranlarının düşük olmasının çözünürlükle direkt bağlantılı olmadığı gözlemlenmiştir. Bu durum piksel değerleri arasındaki benzerlik ile ilintilidir. Görüntüde farklı değerlere sahip pikseller arttıkça algoritmalarda kullanılan interpolasyon işlemlerinden kaynaklanan hataların arttığı düşünülmektedir.

Bu tarz problemlerin çözülmesi için yeni interpolasyon teknikleri ve farklı filtre uygulamaları kullanılabilir [52-54]. Görüntü elde etme süresi programda kullanılan döngülerden etkilenmekte ancak bu döngüler optimize edildiği takdirde daha kısa sürede görüntü elde eden programlar tasarlanabilir.



Şekil 4.4. İz fonksiyonu kullanılarak, filtrelenmiş geri izdüşüm tekniği ile elde edilen head phantom görüntüleri. Kullanılan Filtreler: a) Filtresiz, b) Ram-Lak, c) Shepp-Logan, d) Cosine, e) Hamming, f) Hann



Şekil 4.5. İz fonksiyonu kullanılarak, filtrelenmiş geri izdüşüm tekniği ile elde edilen tomografi görüntüleri. Kullanılan Filtreler: a) Filtresiz, b) Ram-Lak, c) Shepp-Logan, d) Cosine, e) Hamming, f) Hann

Bu görüntülere ait RMSE, PSNR değerleri süre ile birlikte Tablo 4.1’de gösterilmiştir

Tablo 4.1. ‘iz.m’ fonksiyonu ile filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması filtre uygulaması

		Sentetik Görüntü			Gerçek Tomografik görüntü			
		FİLTRE	RMSE	PSNR(dB)	Süre(sn)	RMSE	PSNR(dB)	Süre(sn)
Filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması	16x16	Filtresiz	4.5808	-13.2188	0.1230	3.16×10^3	-21.2642	0.0795
		Ram-Lak	0.2422	12.3147	0.0798	113.68	7.6267	0.0759
		Shepp-Logan	0.2269	12.8829	0.0772	110.6577	7.8611	0.0763
		Cosine	0.2027	13.8612	0.0767	105.333	8.2894	0.0754
		Hamming	0.1911	14.3745	0.0795	100.5578	8.6925	0.0766
		Hann	0.1878	14.5249	0.0810	99.6022	8.7754	0.0782
	64x64	Filtresiz	24.8869	-27.9194	0.7556	1.3826×10^4	-33.6364	0.7640
		Ram-Lak	0.2955	10.5877	0.7703	116.4268	7.8562	0.7506
		Shepp-Logan	0.2845	10.9170	0.7133	114.415	8.0076	0.7070
		Cosine	0.2670	11.4703	0.7209	110.9949	8.2712	0.6988
		Hamming	0.2545	11.8878	0.7224	108.1211	8.4991	0.7008
		Hann	0.2519	11.9762	0.7222	107.5508	8.5450	0.7019
	128x128	Filtresiz	50.189	-34.0123	2.5432	1.3826×10^4	-33.6364	0.7640
		Ram-Lak	0.2470	12.1458	2.5927	116.4268	7.8562	0.7506
		Shepp-Logan	0.2394	12.4177	2.5745	114.415	8.0076	0.7070
		Cosine	0.2272	12.8705	2.5438	110.9949	8.2712	0.6988
		Hammig	0.2185	13.2126	2.5726	108.1211	8.4991	0.7008
		Hann	0.2168	13.2806	2.5425	107.5508	8.5450	0.7019

Tablo 4.1 incelendiğinde hem sentetik görüntü için hem de tomografik görüntü için en yüksek PSNR değerlerinin Hann filtre uygulaması sonucu hesaplandığı gözlemlenmektedir. Görüntü çözünürlüğünün artması ile beraber işlem süresi de artmıştır. Tablo 4.1’de tomografik görüntülerdeki PSNR değerlerinin, sentetik head phantom görüntüsündeki değerlere kıyasla düşük olduğu görülmektedir. Head phantom görüntüsünün grilik renk seviyesi 0-1 aralığında değişirken gerçek tomografik görüntüsünün grilik renk seviyesi 0-255 aralığında değişmektedir. Dolayısıyla tomografik görüntüde piksel çeşitliliğinin fazla olmasının interpolasyon hatalarını arttırdığı ve böylece PSNR değerini etkilediği düşünülmektedir.

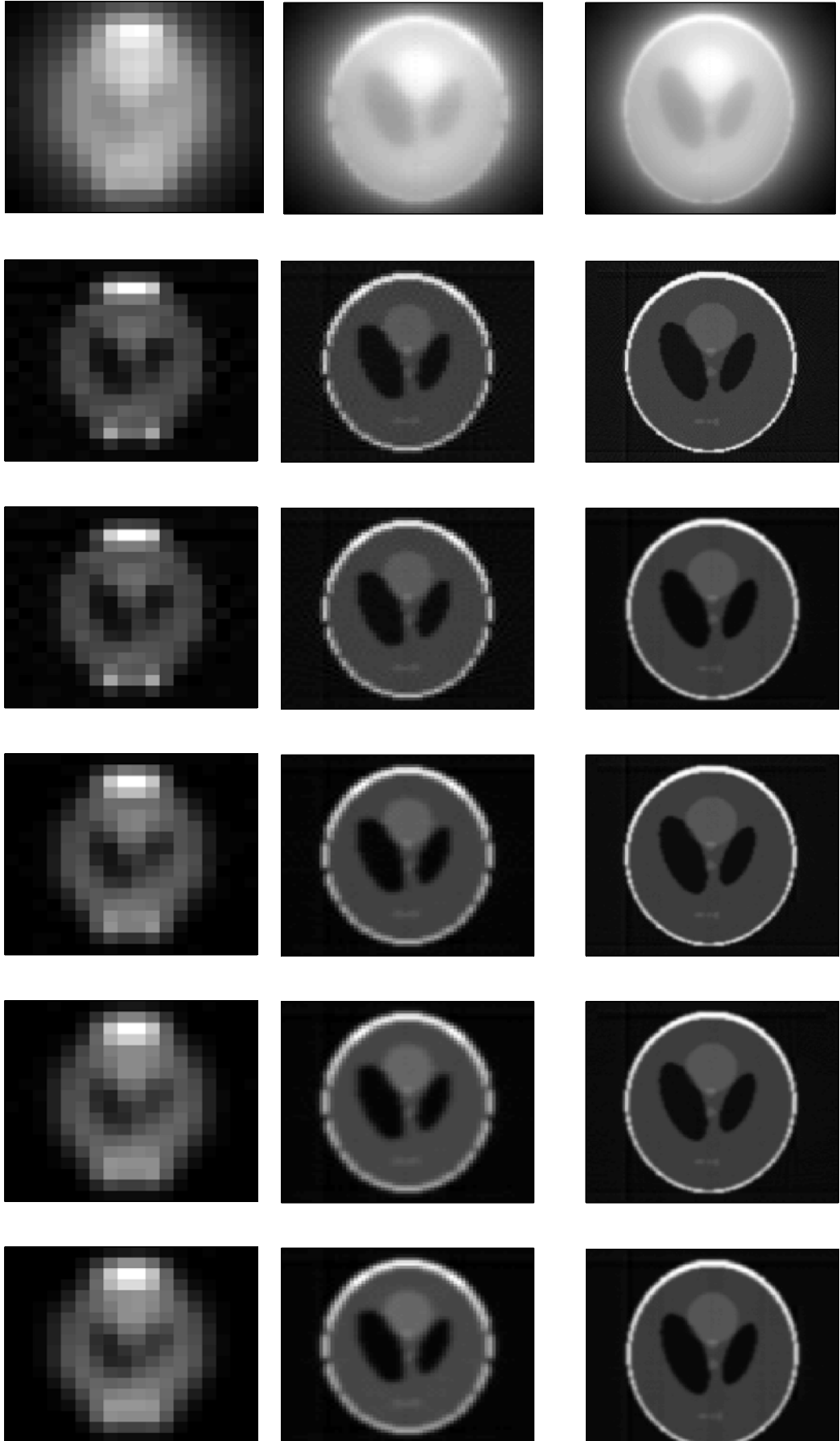
4.3. Radon.m fonksiyonu ile Filtrelenmiş Geri İzdüşüm Algoritması Kullanılarak Görüntü Elde Edilmesi

Bu çalışmada kullanılan ‘iz.m’ fonksiyonundan başka Matlab Image Processing’de bulunan ‘radon.m’ fonksiyonu kullanılarak ta sinogramlar elde edilmiştir. Bu sinogramlar filtrelenmiş geri izdüşüm algoritmasında kullanılarak 16x16, 64x64 ve 128x128 boyutlarında head phantom (Şekil 4.6) ve tomografik görüntüler (Şekil 4.7) yeniden elde edilmiştir.

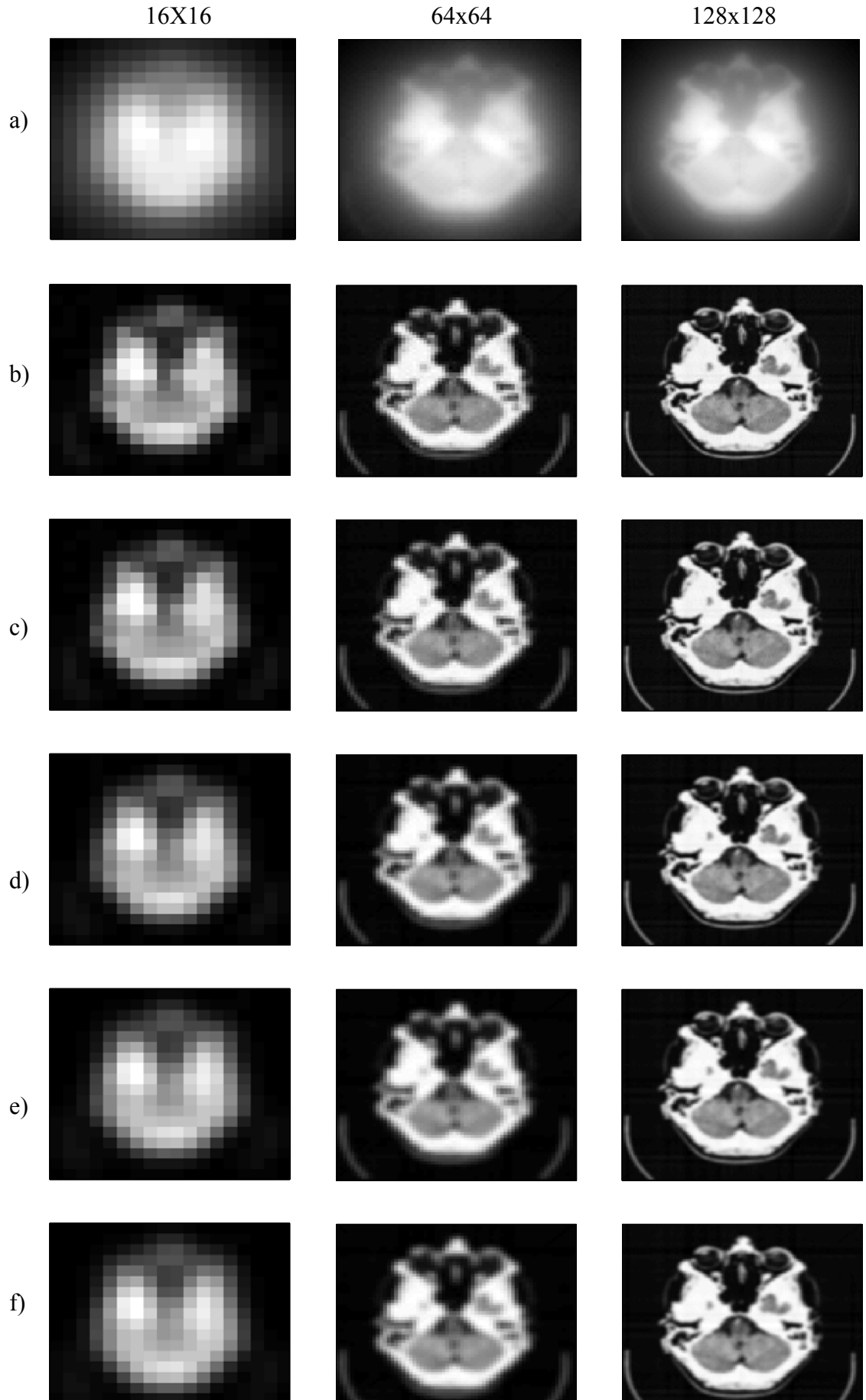
16x16

64x64

128x12



Şekil 4.6. Radon fonksiyonu kullanılarak, filtrelenmiş geri izdüşüm tekniği ile elde edilen head phantom görüntüleri. Kullanılan Filtreler: a) Filtresiz, b) Ram-Lak, c) Shepp-Logan, d) Cosine, e) Hamming, f) Hann



Şekil 4.7. Radon fonksiyonu kullanılarak, filtrelenmiş geri izdüşüm tekniği ile elde edilen tomografi görüntüleri. Kullanılan Filtreler: a) Filtresiz, b) Ram-Lak, c) Shepp-Logan, d) Cosine, e) Hamming, f) Hann

Tablo 4.2. ‘iz.m’ fonksiyonu ile filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması filtre uygulaması

		Sentetik Görüntü				Gerçek Tomografik görüntü		
		FİLTRE	RMSE	PSNR(dB)	Süre(sn)	RMSE	PSNR(dB)	Süre(sn)
Radon ile filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması	16x16	Filtresiz	4.6150	-13.2833	0.09142	3.1684x10 ³	-21.2760	0.09211
		Ram-Lak	0.1131	18.9309	0.09183	69.2672	11.9302	0.0757
		Shepp-Logan	0.1143	18.8354	0.09598	68.1225	12.0750	0.0794
		Cosine	0.1238	18.1437	0.0930	66.8481	12.2390	0.0924
		Hamming	0.1261	17.9843	0.1067	65.3509	12.4357	0.0933
		Hann	0.1289	17.7926	0.0917	64.0127	12.6155	0.4187
	64x64	Filtresiz	24.9134	-27.9286	1.1000	1.3827x10 ⁴	-33.6371	1.0804
		Ram-Lak	0.1747	15.1547	1.1038	91.2952	9.9683	1.0808
		Shepp-Logan	0.1746	15.1591	1.3676	90.7238	10.0229	0.9567
		Cosine	0.1792	14.9333	1.2542	90.1041	10.0824	1.0970
		Hamming	0.1800	14.8923	1.1513	89.3089	10.1594	0.9554
		Hann	0.1819	14.8031	1.0407	89.3107	10.1592	1.08559
	128x128	Filtresiz	50.1882	-34.0120	2.9252	2.8048x10 ⁴	-40.1547	2.9075
		Ram-Lak	0.1904	14.4053	2.9498	97.5803	9.0162	2.9283
		Shepp-Logan	0.1884	14.4989	2.9272	97.1066	9.0585	2.9851
		Cosine	0.1870	14.5626	2.9589	96.5599	9.1075	2.8958
		Hammig	0.1849	14.6608	2.9387	95.9458	9.1629	2.9213
		Hann	0.1853	14.6425	2.9424	95.9380	9.1636	3.0101

Tablo 4.2 incelendiğinde hem sentetik görüntü için hem de tomografik görüntü için PSNR değerlerinin Tablo 4.1’de elde edilen değerlere göre daha yüksek olduğu görülmektedir. ‘radon.m’ fonksiyonu ile yazılan sinogramın, ‘iz.m’ fonksiyonu ile yazılan sinograma kıyasla daha gerçeğe yakın görüntüler oluşturduğu gözlemlenmektedir.

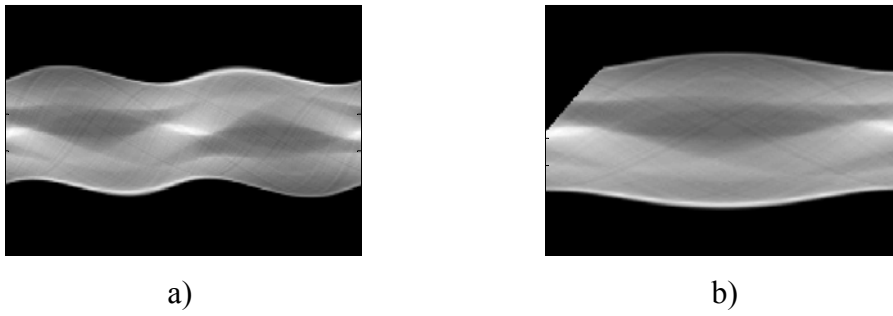
16x16 ve 128x128 tomografik görüntüler için Hann filtrede, 64x64 tomografi görüntü için Hamming filtrede en yüksek PSNR değerleri ölçülürken, 16x16 head phantom için Ram-Lak, 64x64 head phantom için Shepp-Logan ve 128x128 head phantom için Hamming filtrede en yüksek PSNR değerleri ölçülmüştür. Görüntü çözünürlüğü ile beraber görüntüde bulunan yüksek frekanslı gürültülerin de genliğinin değiştiği, bununla beraber farklı çözünürlüklerde farklı filtrelerin daha kaliteli sonuçlar verdiği gözlenmektedir.

Bu çalışmadaki diğer uygulamalarda da olduğu gibi çözünürlük arttıkça işlem süresi artmıştır. Farklı bir fonksiyon ile elde edilen sinogram kullanılarak filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması uygulama sonuçları kıyaslanmıştır. Buna göre sinogram elde etmek için yazılan programın iyileştirilmesi gerekmektedir.

4.4. Yelpaze Hüzme Algoritması Kullanılarak Görüntü Elde Edilmesi

Yelpaze hüzme algoritması 16x16, 64x64 ve 128x128 boyutlarındaki sentetik head phantom görüntüleri üzerinde ve 34 kesitten oluşan beyin tomografi görüntülerinden 5. kesit görüntüsüne uygulanmıştır.

Öncelikle Matlab Image Toolbox'da mevcut olan fanbeam hazır fonksiyonu kullanılarak elde edilen sinogram (Şekil 4.8a) bu çalışmada kullanılan sinogram formatına Şekil 4.8b'de gösterildiği gibi dönüştürülmüştür.

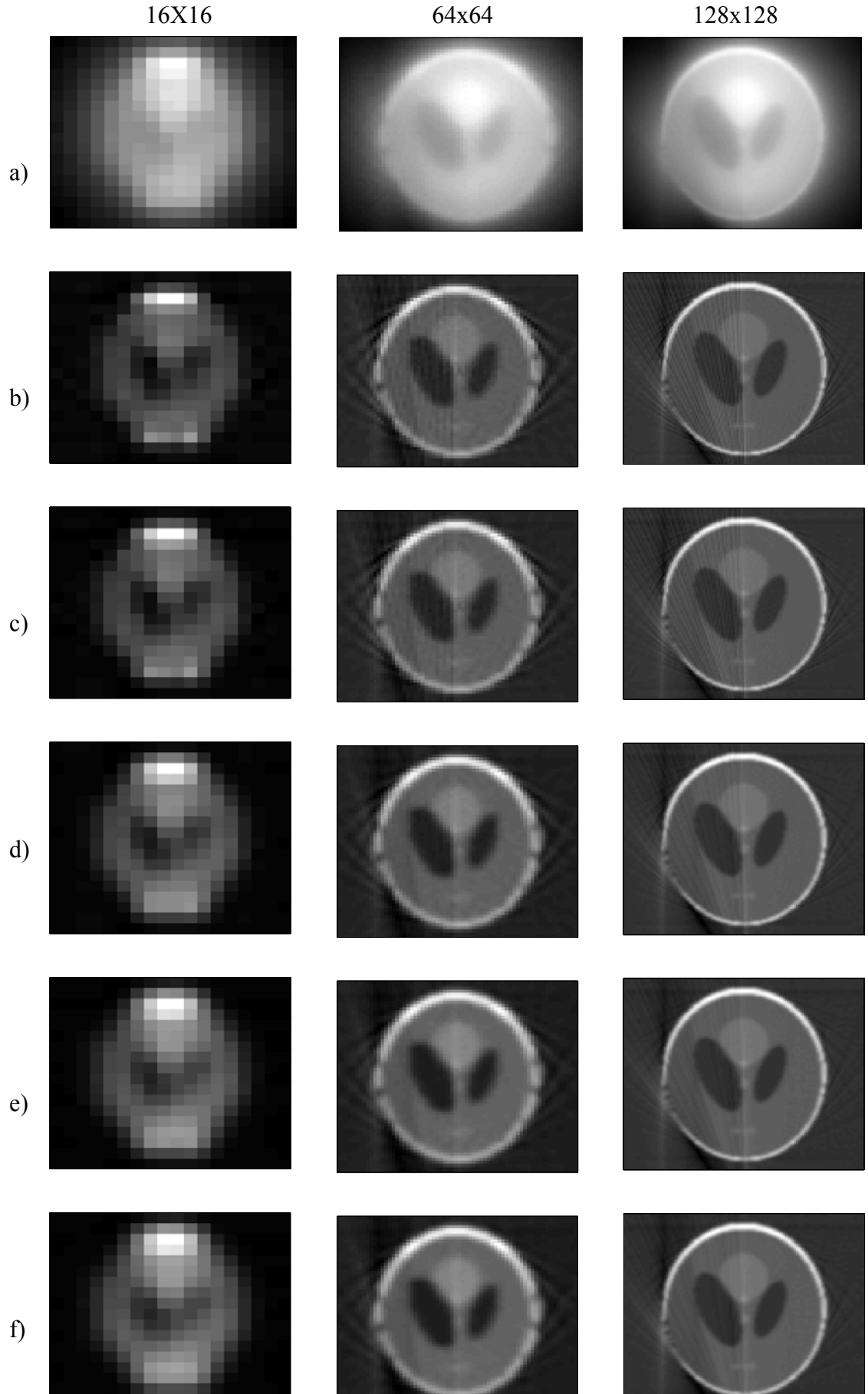


Şekil 4.8. a) fanbeam fonksiyonu ile elde edilen sinogram, b) yelpazehüzme fonksiyonu elde edilen sinogram

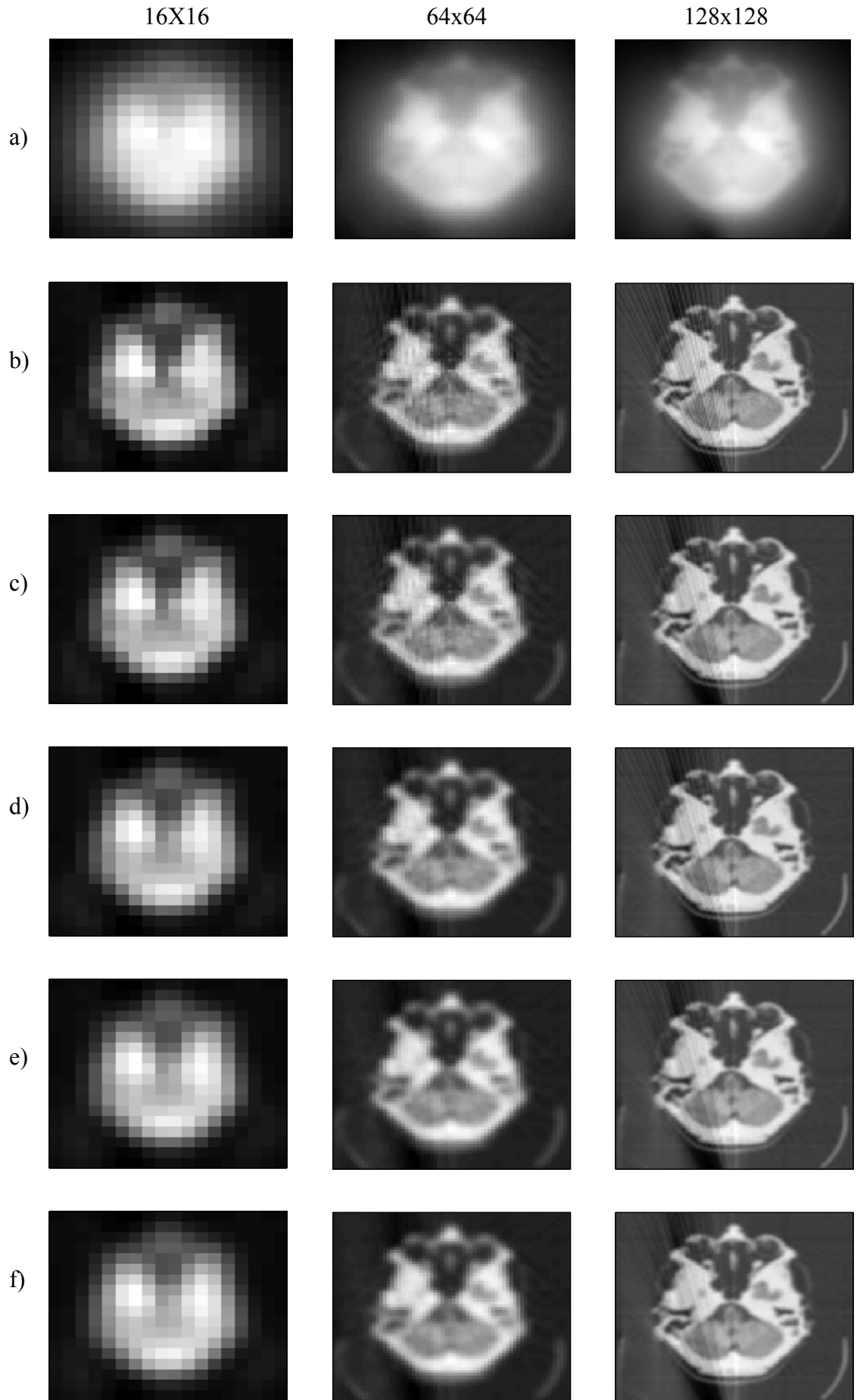
Elde edilen yeni sinograma filtrelenmiş geri iz düşüm algoritması uygulanarak rekonstrüksiyon işlemi yapılmıştır. Bu uygulamada, Ram-Lak, Shepp-Logan, Cosine, Hamming ve Hann filtreleri sırasıyla kullanılarak elde edilen sonuçlar için RMSE ve PSNR değerleri hesaplanmıştır. Böylece gerçek görüntüler ile sinogramlardan elde edilen görüntüler arasında oluşan hata hesaplanarak kıyaslama yapılmıştır.

Tek kaynaktan çıkan ışınların detektör üzerine düşürdüğü izdüşüm verilerinde paralel hüzmeyle kıyasla hata oranı fazladır. Bunun sebebi ise ışınların pikseller üzerinden geçerken düzgün bir köşegen gibi bir doğru oluşturmayışından kaynaklanmaktadır. Yelpaze hüzme algoritması sonucu elde edilen head phantom görüntüleri Şekil 4.9'da ve tomografi görüntüleri Şekil 4.10'da gösterilmiştir.

Şekiller incelendiğinde görüntülerde hatalar gözlemlenmektedir. Bu algoritmanın oluşumunda iki interpolasyon işlemi arka arkaya kullanıldığı için de hatalar olduğu düşünülmektedir. Eğer sinogram dönüşümü yapılmayıp direkt yelpaze hüzme algoritması uygulanırsa muhtemelen daha kaliteli görüntüler elde edileceği düşünülmektedir.



Şekil 4.9. Yelpaze hüzmeye geri izdüşüm tekniği ile elde edilen head phantom görüntüleri. Kullanılan Filtreler: a) Filtresiz, b) Ram-Lak, c) Shepp-Logan, d) Cosine, e) Hamming, f) Hann



Şekil 4.10. Yelpaze hüzmeye geri izdüşüm tekniği ile elde edilen tomografi görüntüleri. Kullanılan Filtreler: a) Filtresiz, b) Ram-Lak, c) Shepp-Logan, d) Cosine, e) Hamming, f) Hann

Tablo 4.3.Yelpaze hüzme algoritması ile filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması filtre uygulaması

		Sentetik Görüntü				Gerçek Tomografik görüntü		
		FİLTRE	RMSE	PSNR(dB)	Süre(sn)	RMSE	PSNR(dB)	Süre(sn)
Yelpaze hüzme geri izdüşüm algoritması	16x16	Filtresiz	4.5718	-13.2017	0.2441	3.1281x10 ³	-21.1649	0.4087
		Ram-Lak	0.1150	18.7858	0.2556	66.6217	12.2685	0.4185
		Shepp-Logan	0.1171	18.6283	0.2558	65.8401	12.3710	0.4232
		Cosine	0.1254	18.0344	0.2552	65.0231	12.4794	0.4240
		Hamming	0.1275	17.8884	0.2585	63.9809	12.6198	0.4199
		Hann	0.1297	17.7411	0.2636	64.0127	12.6155	0.4185
	64x64	Filtresiz	24.4951	-27.7816	1.0536	1.359x10 ⁴	-33.4870	1.2014
		Ram-Lak	0.1876	14.5358	0.9578	88.4371	10.2446	1.2255
		Shepp-Logan	0.1865	14.5883	0.9452	87.7869	10.3087	1.2352
		Cosine	0.1857	14.6215	0.9675	86.9471	10.3922	1.2108
		Hamming	0.1858	14.6173	0.9810	86.3301	10.4540	1.2139
		Hann	0.1861	14.6042	0.9767	86.2546	10.4617	1.7744
	128x128	Filtresiz	48.5582	-33.7252	3.0995	2.7126x10 ⁴	-39.8644	3.4403
		Ram-Lak	0.1978	14.0755	3.1050	98.7616	8.9112	3.4015
		Shepp-Logan	0.1952	14.1893	3.2189	97.6464	9.0103	3.6039
		Cosine	0.1922	14.3256	3.3433	96.2588	9.1346	3.5550
		Hammig	0.1905	14.4000	3.3248	95.5512	9.1987	3.7104
		Hann	0.1904	14.4061	3.3850	95.4336	9.2094	3.6536

Tablo 4.3 incelendiğinde 16x16 tomografi görüntü için Hamming filtrede, 64x64 ve 128x128 tomografik görüntüler için Hann filtrede en yüksek PSNR değerleri ölçülürken, 16x16 head phantom için Ram-Lak, 64x64 head phantom için Cosine ve 128x128 head phantom için Hann filtrede en yüksek PSNR değerleri ölçülmüştür.

Tablo 4.3 ve Tablo 4.1 kıyaslandığında ‘iz.m’ fonksiyonu kullanılan filtrelenmiş geri izdüşüm algoritmasında PSNR değerlerinin oldukça düşük olduğu görülmektedir. Normal şartlarda filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması PSNR değerlerinin yelpaze hüzme rekonstrüksiyon uygulamalarına oranla daha yüksek olması gerektiği düşünülmektedir.

Ortaya çıkan bu farklılığın Radon dönüşümü algoritmasından kaynaklandığı düşünüldüğü için, Matlab fonksiyonu kullanılarak yeni sinogram elde edilmiş, nitekim bu sinogramla uygulanan filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması sonucu PSNR değerleri Tablo 4.2’de gösterildiği üzere yüksek çıkmıştır.

4.5. Cebirsel Rekonstrüksiyon Tekniği Kullanılarak Görüntü Elde Edilmesi

Cebirsel rekonstrüksiyon algoritması 16x16, 64x64 ve 128x128 boyutlarındaki sentetik head phantom görüntüleri ve 34 kesitten oluşan beyin tomografisi görüntülerinden 5. kesit görüntüsüne uygulanmıştır.

Öncelikle bu görüntülere ait sinogram matrisleri ‘radon.m’ fonksiyonu kullanılarak elde edilmiştir. Daha sonraki aşamada bu görüntülere ait ağırlık faktörü matrisi hesaplanmıştır. En son aşamada farklı iterasyon sayıları atanarak her bir görüntü için RMSE ve PSNR değerleri ölçülerek tablolar oluşturulmuştur ve her bir görüntü iterasyon sayılarına göre kıyaslanmıştır.

Cebirsel rekonstrüksiyon işlemleri 128x128 boyutlarındaki görüntünün iteratif işlemleri hesaplanırken θ açısı 1° ’den 180° ’ye 5° açıyla eşit bir şekilde arttırılarak uygulama yapılmıştır. 1° açıyla işlem gerçekleştirmeye çalışıldığında oluşan matris boyutları çalışmada kullanılan mevcut yazılımda taşmaya sebep olduğu için hata vermiştir. Bu sorun yazılan programda kullanılan Matlab fonksiyonu olan ‘repmat.m’ fonksiyonunun özelliklerinden kaynaklanmaktadır. Daha farklı algoritmalarla bu problem çözülebilir.

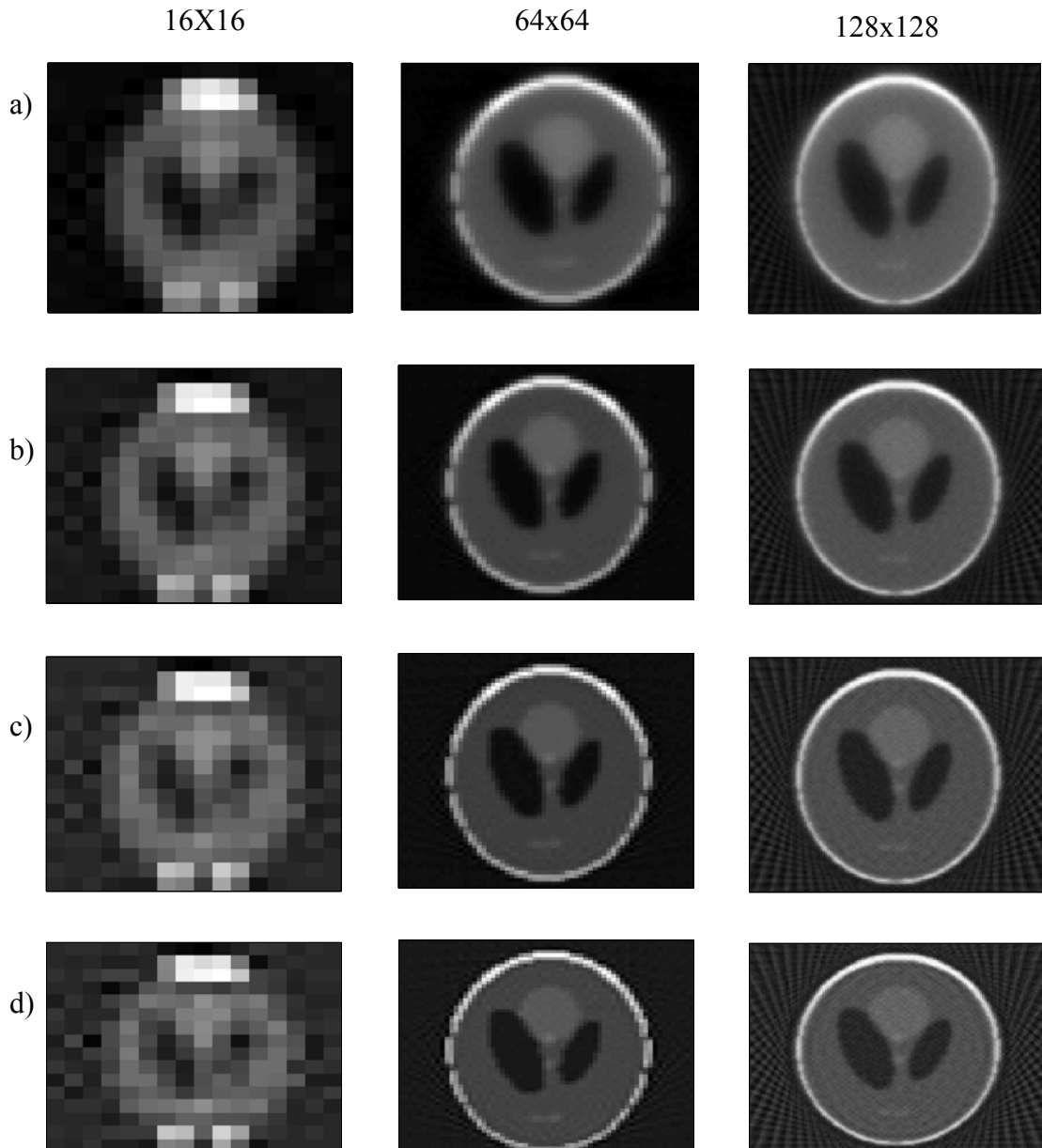
İterasyon işleminde kullanılan yumuşatma katsayısı α değeri deneme yanılma yolu ile hesaplanarak en uygun değerler seçilmiştir [58,59]. 16x16 ve 64x64 boyutlarındaki görüntülerin rekonstrüksiyonunda $\alpha = 0.006$, 128x128 boyutlarındaki görüntülerin rekonstrüksiyonunda ise $\alpha = 0.025$ olarak seçilmiştir. Buradaki önemli hususlardan biri de yumuşatma katsayısını belirlemede optimizasyon programlarını kullanıp en iyi değerin belirlenmesi sağlanabilir.

Tablo 4.4. Farklı iterasyon sayılarında cebirsel rekonstrüksiyon tekniği uygulaması

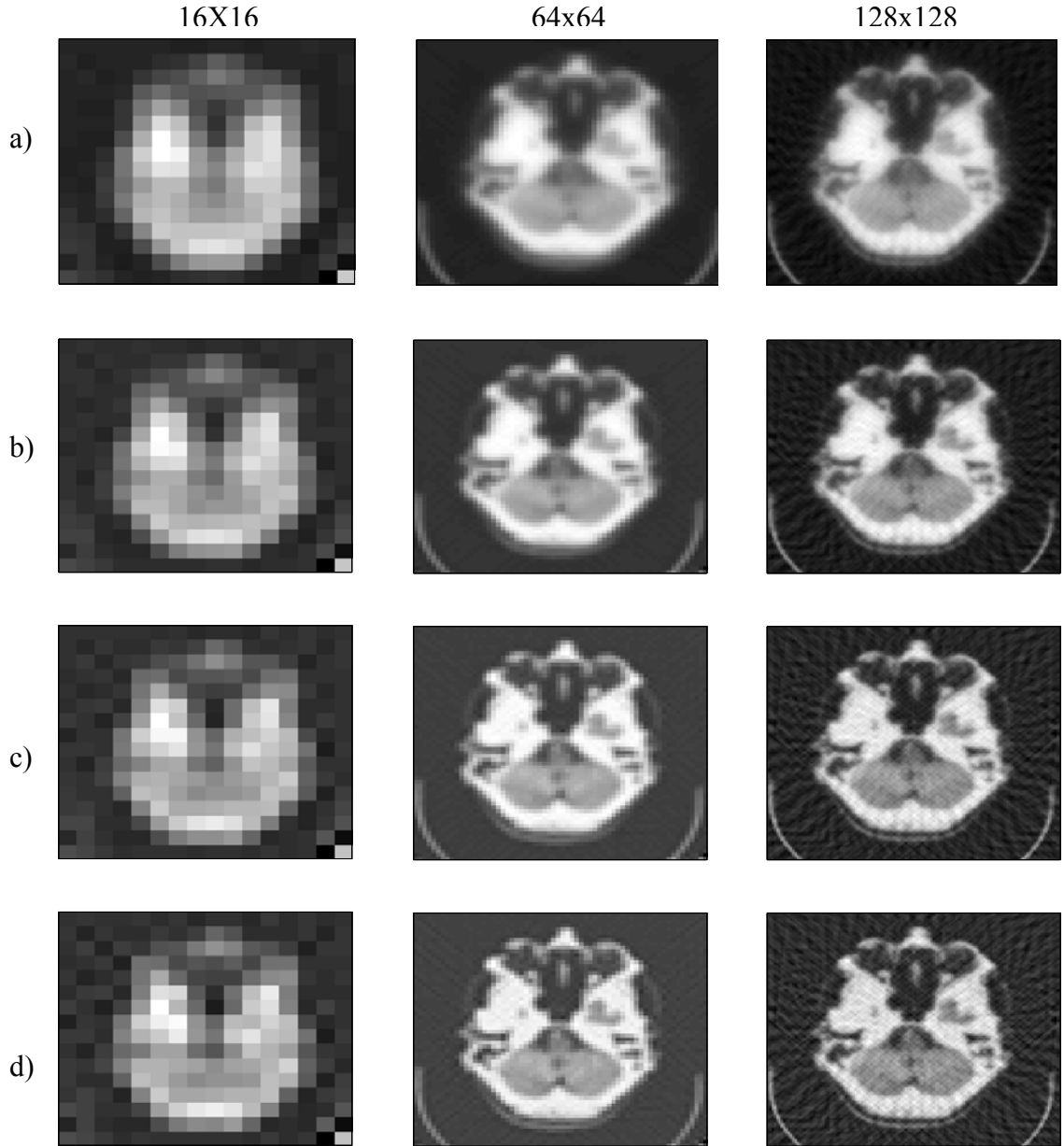
		İterasyon	Sentetik Görüntü			Gerçek Tomografik görüntü		
			RMSE	PSNR(dB)	Süre(sn)	RMSE	PSNR(dB)	Süre(sn)
Cebirsel rekonstrüksiyon tekniği	16x16	12	0.1215	18.3075	2.3340	40.8546	16.5159	1.1247
		25	0.1194	18.4610	2.5101	41.6519	16.3481	2.1672
		50	0.1200	18.4155	4.7743	42.6780	16.1367	4.2960
		100	0.1232	18.1880	9.6038	43.7096	15.9292	8.8063
	64x64	12	0.1423	16.9364	62.0028	37.0404	17.8038	52.4253
		25	0.1336	17.4853	123.9439	32.8548	18.8453	109.0552
		50	0.1312	17.6431	259.2670	31.6998	19.1562	226.7548
		100	0.1332	17.5095	432.8033	32.2005	19.0201	458.8775
	128x128	12	0.1318	17.6032	79.8085	41.9892	16.3407	88.0433
		25	0.1165	18.6698	162.6563	36.1918	17.6313	175.7951
		50	0.1100	19.1693	323.7346	34.3392	18.0876	350.1470
		100	0.1103	19.1521	734.0017	34.8772	17.9526	695.8662

Tablo 4.4'e göre, sentetik head phantom görüntüsü için 16x16 boyutlarında en iyi PSNR değeri 25 iterasyonda, 64x64 boyutlarında en iyi PSNR değeri 50 iterasyonda ve 128x128 boyutlarında en iyi PSNR değeri 50 iterasyonda elde edilmiştir. Tomografik görüntü için 16x16 boyutlarında en iyi PSNR değeri 12 iterasyonda, 64x64 boyutlarında en iyi PSNR değeri 50 iterasyonda ve 128x128 boyutlarında en iyi PSNR değeri 50 iterasyonda elde edilmiştir.

İterasyon sayısı arttıkça görüntüdeki kalite her zaman artmamaktadır. Görüntü piksel değerleri iterasyon sayısı ve yumuşatma katsayısına bağımlı olarak optimum değerlerde en iyi sonucu vermiştir. Şekil 4.11'de farklı boyutlarda elde edilen head phantom görüntüleri ve Şekil 4.12'de ise elde edilen tomografik görüntüler gösterilmiştir.



Şekil 4.11. Cebirsel rekonstrüksiyon tekniği ile elde edilen head phantom görüntüleri. İterasyon sayıları: a) 12, b) 25, c) 50, d) 100



Şekil 4.12. Cebirsel rekonstrüksiyon tekniği ile elde edilen tomografi görüntüleri. İterasyon sayıları: a)12, b) 25, c) 50, d)100

Tablo 4.4 incelendiği zaman görüntü boyutları, ağırlık matrisi ve iterasyon döngüsünü etkilediği için görüntü boyutlarının artması ile işlem süresi oldukça artmıştır.

Direkt yöntemlerdeki geometrik işlemlerden kaynaklanan hatalar (görüntü merkezinde bulanıklık, parlaklık) cebirsel yöntemlerde görülmemektedir. Aksine görüntü kalitesinin, filtrelenmiş geri iz düşüm ve yelpaze hüzme algoritmalarına oranla daha iyi olduğu gözlemlenmiştir.

4.6. Eşzamanlı Cebirsel Rekonstrüksiyon Tekniği Kullanılarak Görüntü Elde Edilmesi

Eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon algoritması 16x16, 64x64 ve 128x128 boyutlarındaki sentetik head phantom görüntülerine ve 34 kesitten oluşan beyin tomografisi görüntülerinden 5. kesit görüntüsüne uygulanmıştır.

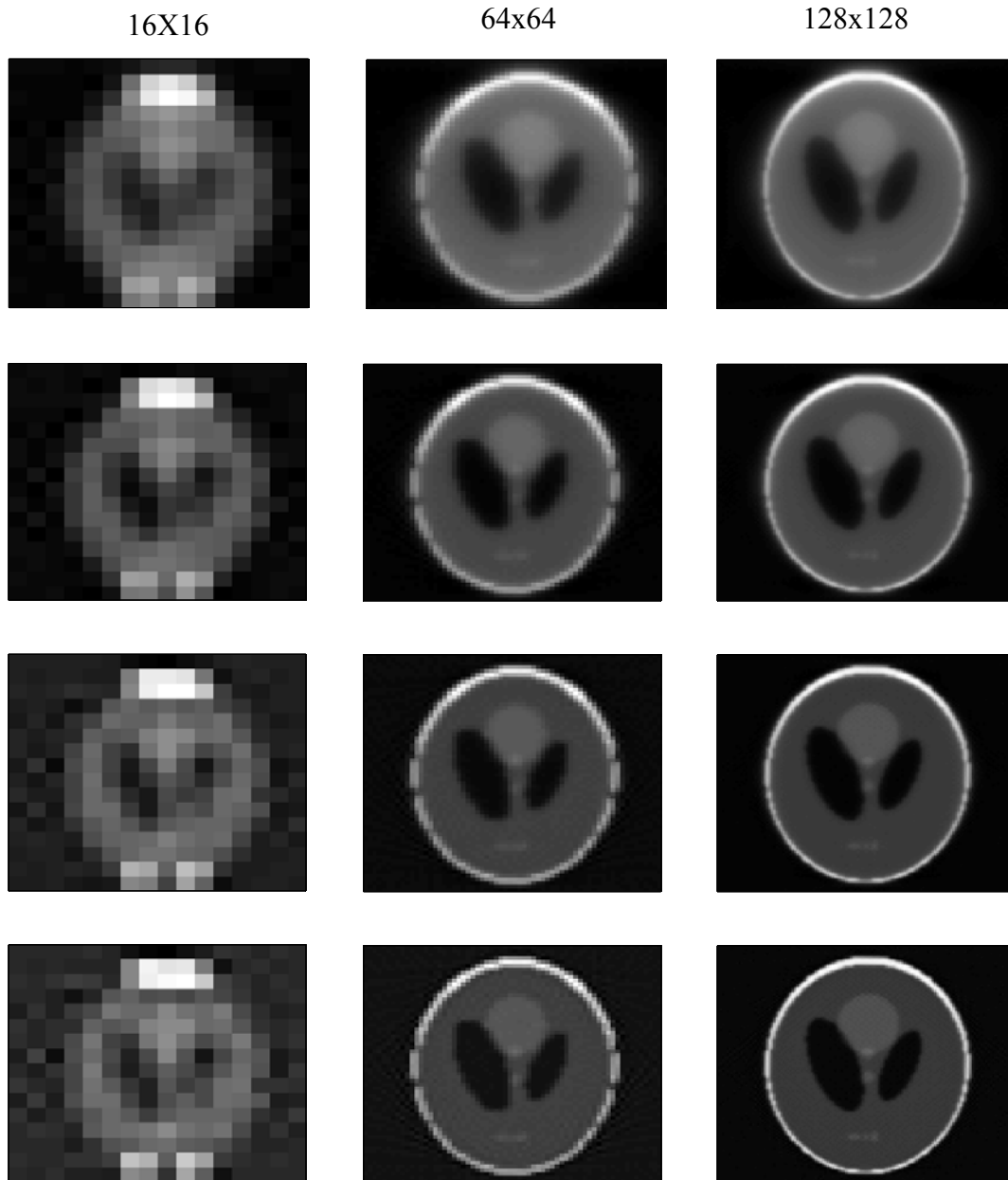
Cebirsel rekonstrüksiyon yönteminde uygulandığı gibi eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon algoritmasında da sinogram ve ağırlık matrisi hesaplandıktan sonra farklı iterasyon sayılarında program çalıştırılmış ve elde edilen görüntüler için RMSE, PSNR değerleri ölçülerek kıyaslamalar yapılmıştır.

Cebirsel rekonstrüksiyon tekniğinde her izdüşümden sonra hata faktörü için düzeltme yapılırken, eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon tekniğinde bütün izdüşümlerden sonra düzeltme yapılmaktadır. Cebirsel rekonstrüksiyon tekniğinde bu işlemi sağlamak için 'repmat.m' fonksiyonu kullanılmıştır. Görüntünün boyutlarının büyük olmasından dolayı da kişisel bilgisayarımızda bu fonksiyona ayrılmış bellek yetersiz gelmiştir. Bunun için θ açısı 1°'den 180°'ye 5° arttırılarak hesaplama yapılmıştır. Cebirsel rekonstrüksiyon işlemlerinden farklı olarak eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon işlemlerinde 128x128 boyutlarındaki görüntünün iteratif işlemleri hesaplanırken θ açısı 1°'den 180°'ye 1° açıyla eşit bir şekilde arttırılarak uygulama yapılabilmiştir.. İşlemler eşzamanlı yapıldığı için matris formatında yazılan program için bilgisayarımızın belleği yeterli gelmiştir.

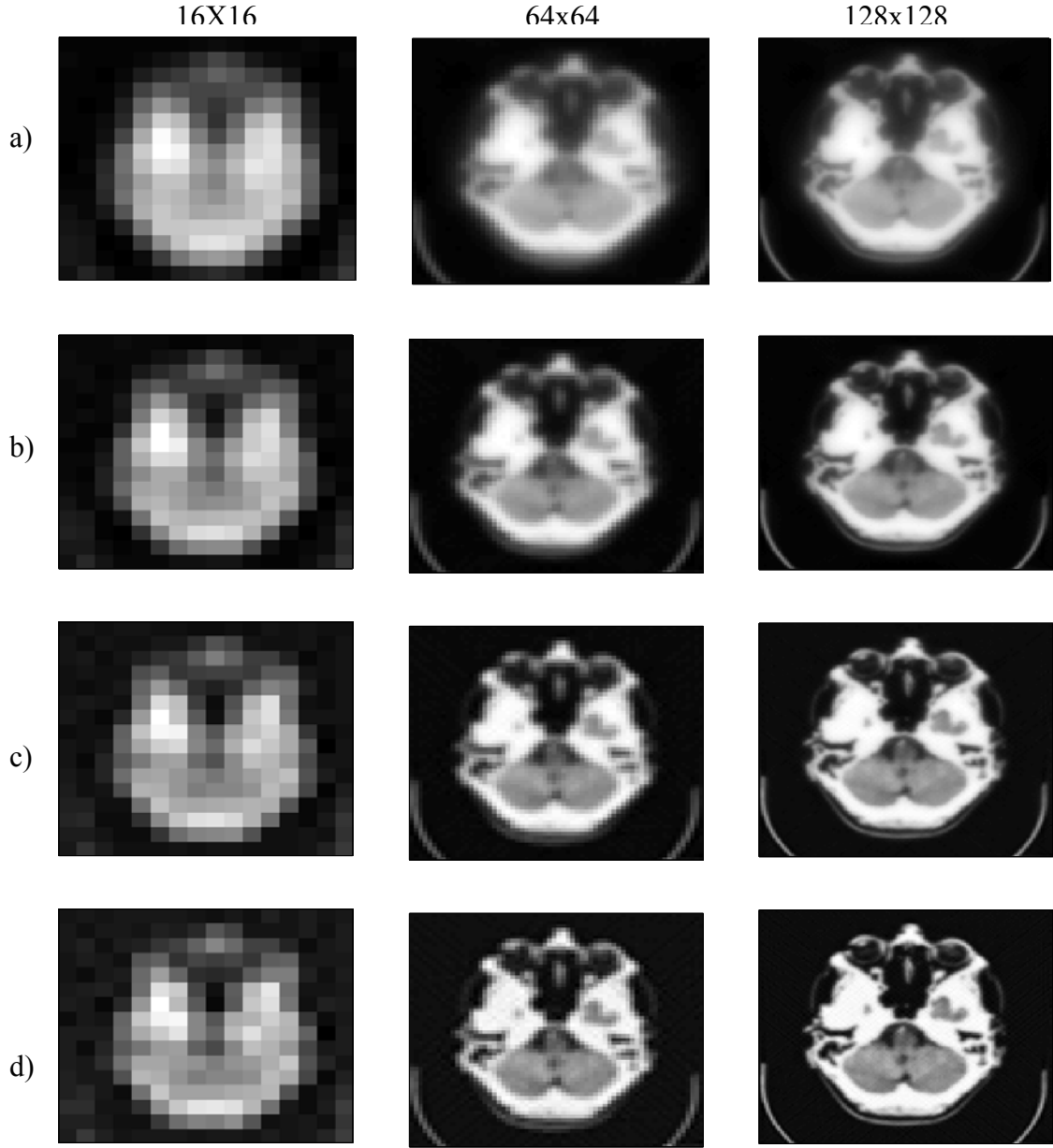
Tablo 4.5. Farklı iterasyon sayılarında eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon tekniği uygulaması

		İterasyon	Sentetik Görüntü			Gerçek Tomografik görüntü		
			RMSE	PSNR(dB)	Süre(sn)	RMSE	PSNR(dB)	Süre(sn)
Eşzamanlı Cebirsel rekonstrüksiyon tekniği	16x16	12	0.1245	18.0976	0.1398	40.0344	16.6921	0.1612
		25	0.1204	18.3870	0.1470	38.8668	16.9492	0.1707
		50	0.1193	18.4698	0.2301	39.5802	16.7912	0.2612
		100	0.1204	18.3874	0.3604	40.5570	16.5795	0.3613
	64x64	12	0.1510	16.4190	1.7542	41.8989	16.7332	2.1357
		25	0.1388	17.1536	2.3296	35.3015	18.2214	2.6758
		50	0.1323	17.5696	3.8471	32.2259	19.0132	3.9921
		100	0.1314	17.6272	6.7484	31.6488	19.1701	7.1494
	128x128	12	0.1396	17.1036	6.9868	45.4870	15.6457	7.6350
		25	0.1207	18.3655	9.5316	37.3933	17.3476	11.8932
		50	0.1070	19.4110	14.2600	32.3550	18.6046	16.5639
		100	0.1003	19.9782	24.9903	30.2293	19.1949	28.7624

Tablo 4.5'e göre, sentetik head phantom görüntüsü için 16x16 boyutlarında en iyi PSNR değeri 50 iterasyonda, 64x64 boyutlarında en iyi PSNR değeri 100 iterasyonda ve 128x128 boyutlarında en iyi PSNR değeri 100 iterasyonda elde edilmiştir. Tomografik görüntü için 16x16 boyutlarında en iyi PSNR değeri 25 iterasyonda, 64x64 boyutlarında en iyi PSNR değeri 100 iterasyonda ve 128x128 boyutlarında en iyi PSNR değeri 100 iterasyonda elde edilmiştir. Bu değerler yumuşatma katsayısı $\alpha=1$ iken elde edilmiştir. Şekil 4.13'de yeniden elde edilen head phantom görüntüleri ve Şekil 4.14'de ise yeniden elde edilen tomografik görüntüler gösterilmiştir.



Şekil 4.13. Eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon tekniği ile elde edilen head phantom görüntüleri. İterasyon sayıları: a)12, b) 25, c) 50, d)100



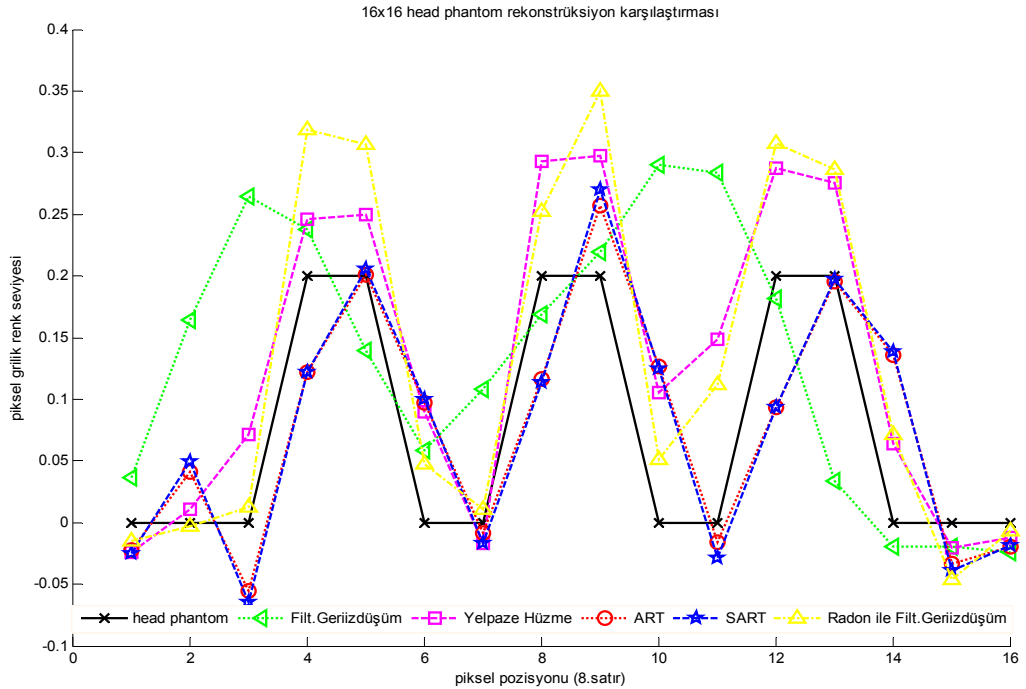
Şekil 4.14. Eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon tekniği ile elde edilen tomografi görüntüleri. İterasyon sayıları: a)12, b) 25, c) 50, d)100

4.7. Rekonstrüksiyon Algoritmaları Sonucu Elde edilen Görüntülerin Piksel Pozisyonu ile Kıyaslanması

Rekonstrüksiyon algoritmaları sonucu elde edilen görüntüler, RMSE ve PSNR değerlerinin yanında birde piksel grilik renk değerleri arasındaki farklar ile orijinal görüntüleri ile kıyaslanmıştır [63]. Kıyaslama yaparken görüntü matrisindeki orta satırında bulunan piksellerin çeşitliliğinin fazla olduğu düşünüldüğü için bu satırlarla mukayese tercih edilmiştir.

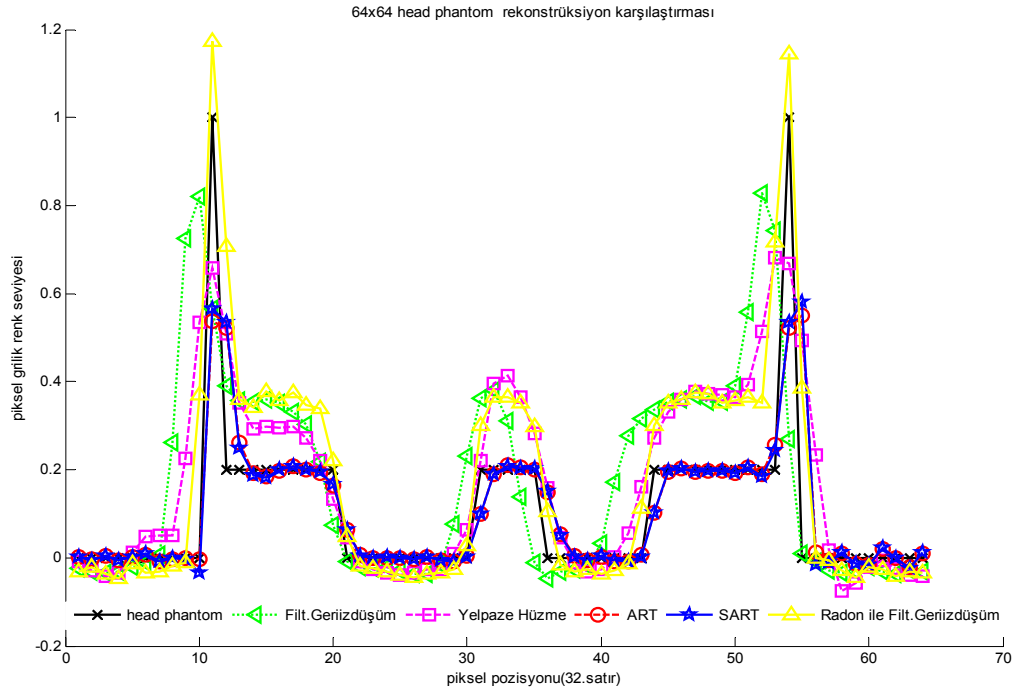
Şekil 4.15’de 16x16 boyutlarındaki head phantom görüntüsüne ait rekonstrüksiyon sonucu elde edilen görüntü matrisinin 8.satırına ait piksellerin değeri çizdirilmiştir. Görüldüğü üzere cebirsel rekonstrüksiyon ve eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon sonuçları orijinal değerlere en yakın değerleri vermiştir. Radon fonksiyonu ile elde edilen filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması ve yelpaze hüzme algoritması cebirsel yöntemlere oranla daha hatalı değerler vermiştir. En hatalı değer ise “iz.m” fonksiyonu ile elde edilen filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması sonuçlarıdır.

Aynı sonuçlar şekil 4.16’da verilen 64x64 boyutlarındaki head phantom ve şekil 4.17’de verilen 128x128 boyutlarındaki head phantom görüntüleri için de geçerlidir.

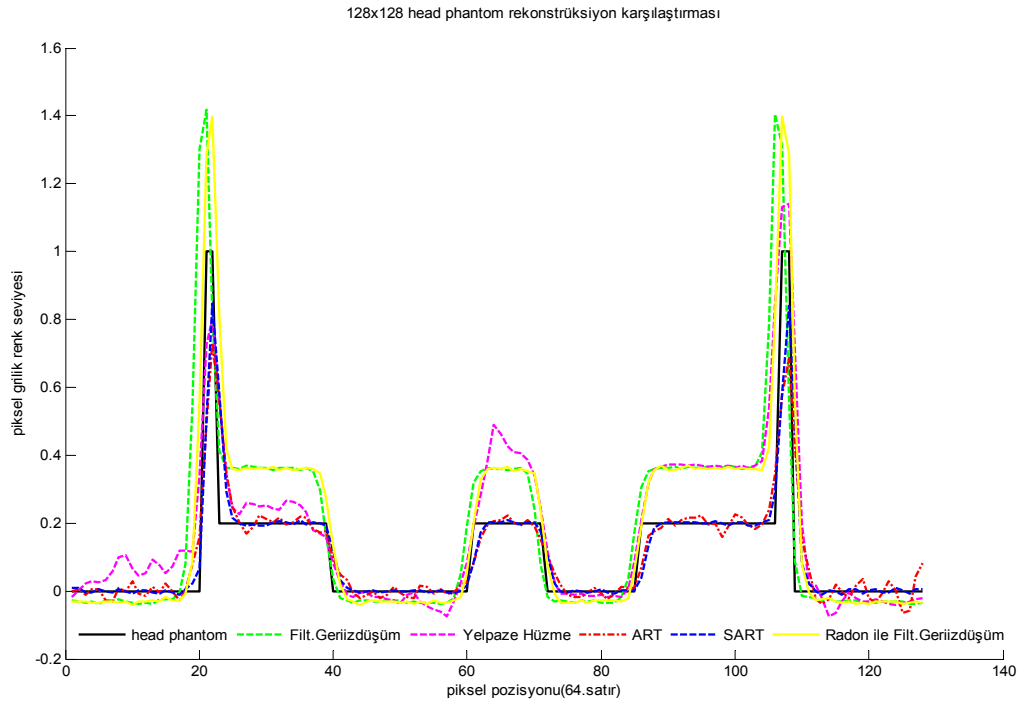


Şekil 4.15. 16x16 head phantom için rekonstrüksiyon sonuçlarının piksel grilik renk seviyeleri

Şekil 4.16’da gösterildiği gibi 64x64 boyutlarındaki head phantom rekonstrüksiyonunda piksel bazında karşılaştırma yapıldığında cebirsel rekonstrüksiyon uygulama sonuçlarının orijinal görüntüye daha çok yakınsadığı, direkt yöntemler ile elde edilen sonuçların cebirsel yöntemler kadar olmasa da orijinal görüntüye yakınsadıkları gözlemlenmiştir. Hesaplanan RMSE ve PSNR değerleri, elde edilen piksel pozisyon sonuçlarını doğrular niteliktedir. Bir satırda 64 piksel olup, grafikte bu pikseller nokta nokta belirtilmiştir. Böylece piksel bazında doğruluk ölçümü yapma olanağı söz konusu olmuştur

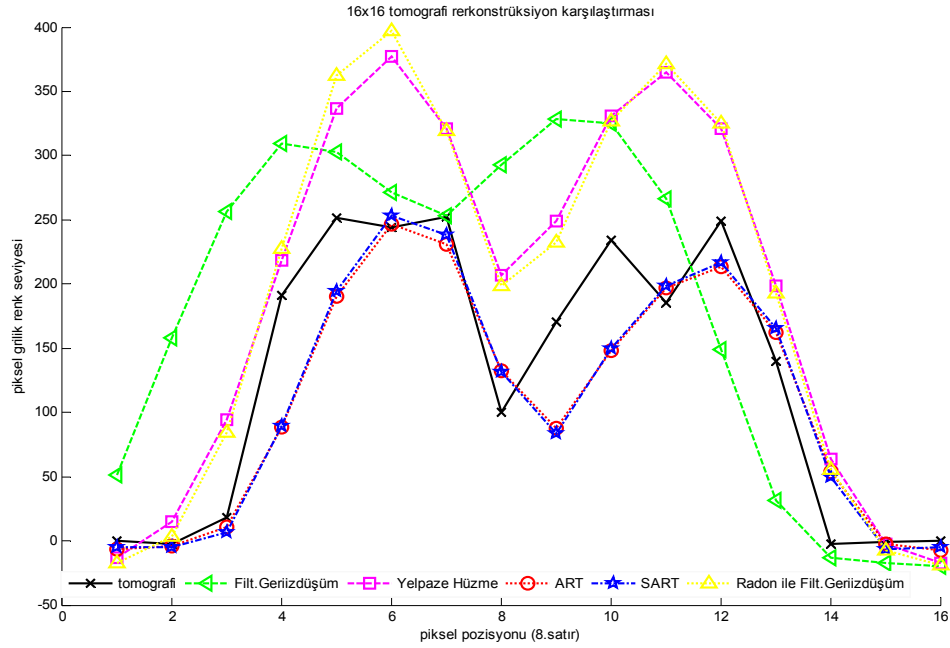


Şekil 4.16. 64x64 head phantom için rekonstrüksiyon sonuçlarının piksel grilik renk seviyeleri

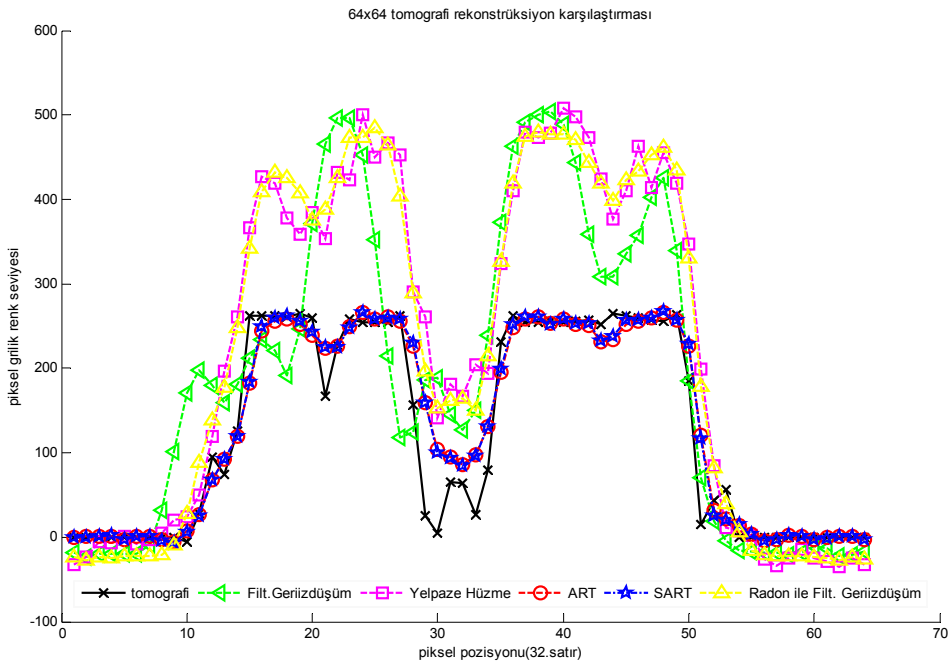


Şekil 4.17. 128x128 head phantom için rekonstrüksiyon sonuçlarının piksel grilik renk seviyeleri

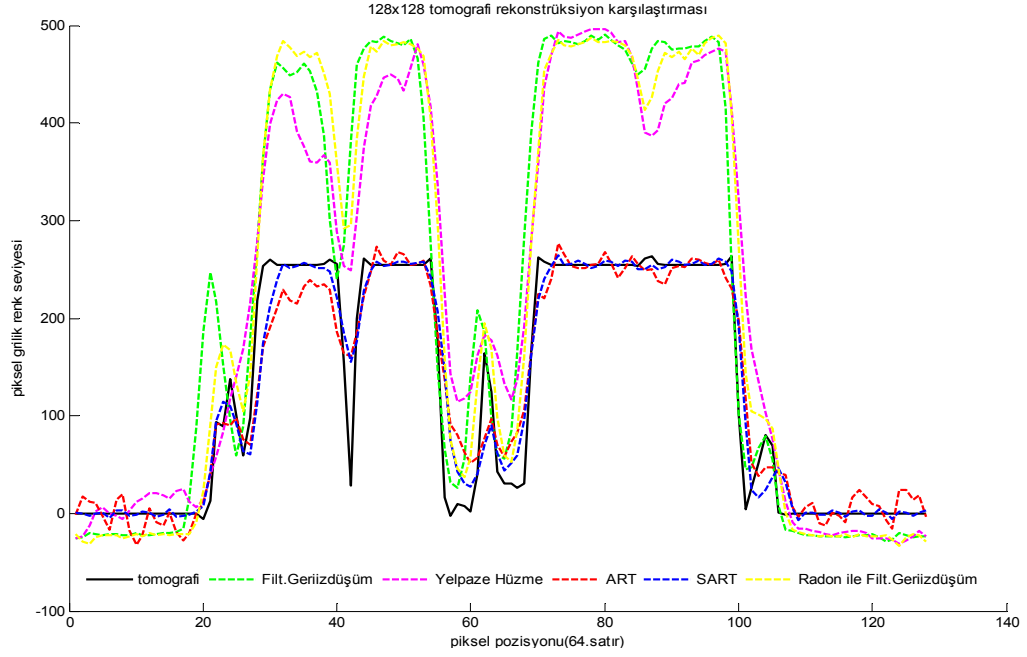
Şekil 4.18’de 16x16 boyutlarında, Şekil 4.19’da 64x64 boyutlarında ve Şekil 4.20’de 128x128 boyutlarında beyin tomografi kesiti görüntüsüne ait rekonstrüksiyon sonuçları verilmiştir. Tomografi görüntüsüne ait şekiller incelenip head phantom görüntüsüne ait şekiller ile kıyaslandığında head phantom piksel renk aralığının 0 ile 1 arasında olduğu ve çeşitliliğin az olduğu, tomografi görüntüsünde ise renk aralığının 0 ile 255 arasında olduğu ve çeşitliliğin çok olduğu görülmektedir. Bu durum da gerçek görüntüye olan yakınsamayı ve RMSE, PSNR oranlarını etkiler.



Şekil 4.18. 16x16 tomografi için rekonstrüksiyon sonuçlarının piksel grilik renk seviyeleri



Şekil 4.19. 64x64 tomografi için rekonstrüksiyon sonuçlarının piksel grilik renk seviyeleri

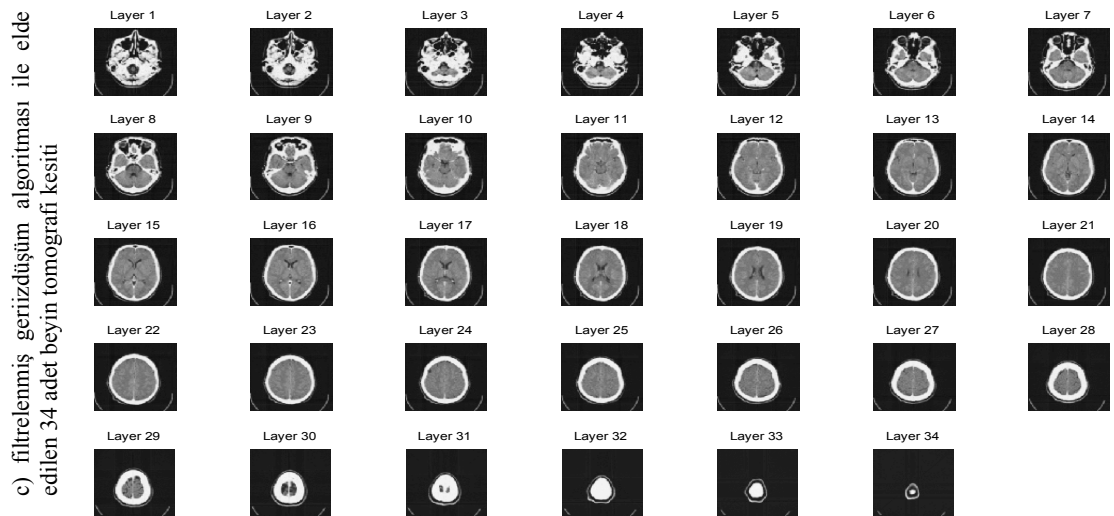
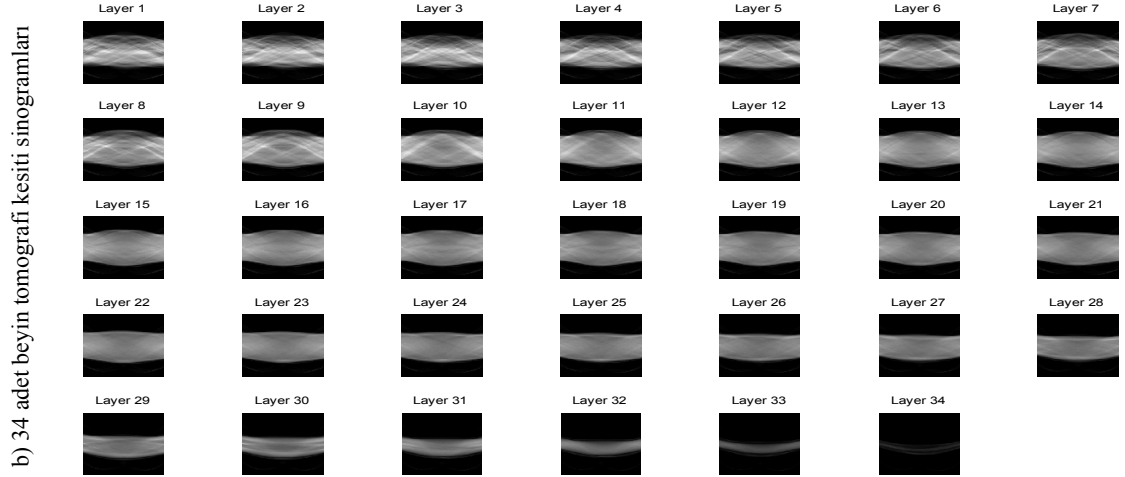
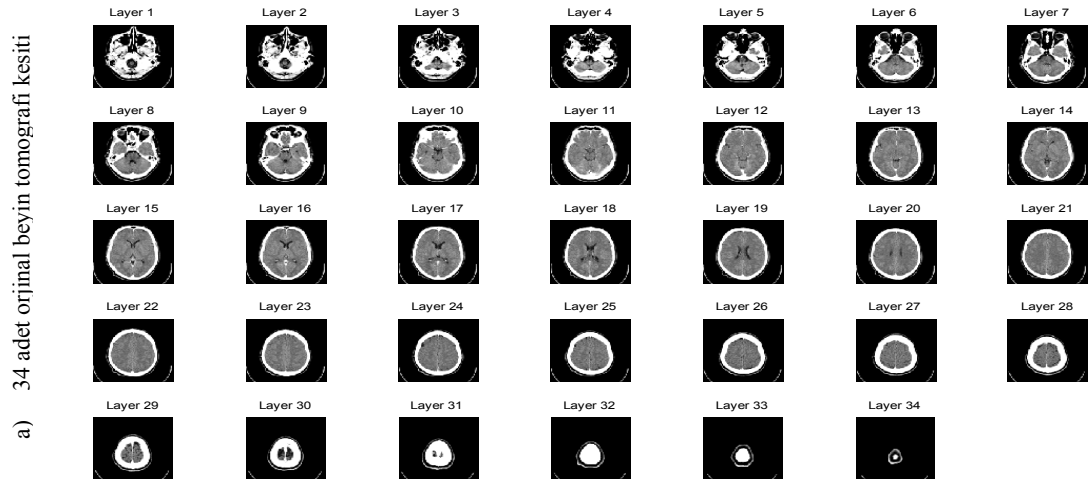


Şekil 4.20. 128x128 tomografi için rekonstrüksiyon sonuçlarının piksel grilik renk seviyeleri

4.8. 2 Boyutlu 34 Beyin Tomografi Görüntülerinden 3 Boyutlu Görüntü Oluşumu

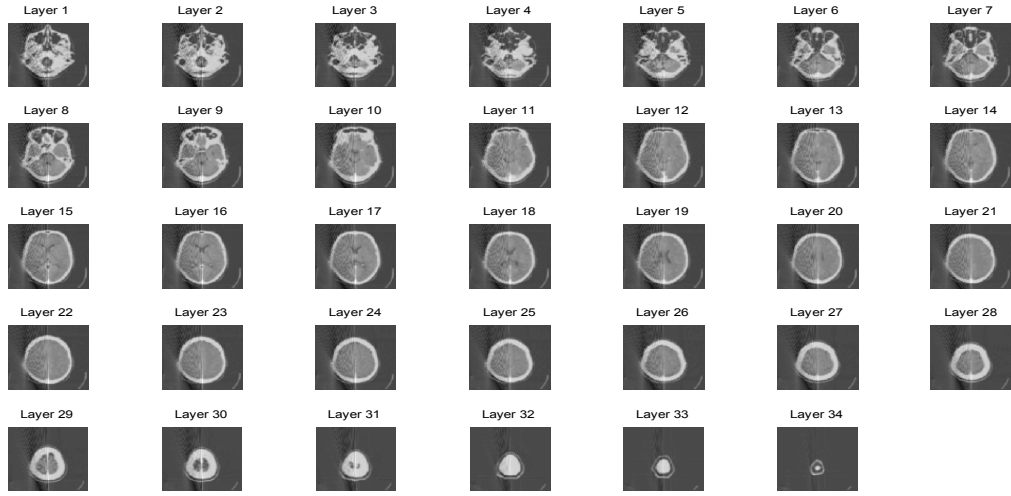
3 Boyutlu görüntü elde etmek için daha önce 5. Beyin tomografi kesitine uygulanan rekonstrüksiyon işlemleri 34 adet tomografi kesitine birden uygulanmış, elde edilen görüntüler Matlab Volume Visualization komutları ile hacimsellik kazandırılmıştır. Şekil 4.21a’da orijinal beyin tomografi kesit görüntüleri verilmiştir. Bu orijinal görüntüler kullanılarak her bir görüntüye ait sinogram matrisleri elde edilmiştir (Şekil 4.21b). Elde edilen sinogram matrisleri kullanılarak filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması uygulaması sonucu elde edilen görüntü çıktıları Şekil 4.21c’de, yelpaze hüzme izdüşüm algoritması uygulaması sonucu elde edilen görüntü çıktıları Şekil 4.22a’da, cebirsel rekonstrüksiyon algoritması uygulaması sonucu elde edilen görüntü çıktıları Şekil 4.22b’de, eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon uygulaması sonucu elde edilen görüntü çıktıları ise Şekil 4.22c’de gösterilmiştir.

34 tomografik kesitine uygulanan rekonstrüksiyon algoritmalarının sonunda elde edilen görüntü çıktıları bir araya getirilerek Şekil 4.23’de gösterildiği gibi 3 boyutlu görüntüler elde edilmiştir. Görüntüler incelendiğinde en iyi 3 boyutlu görüntünün eş zamanlı cebirsel rekonstrüksiyon sonucu elde edildiği (Şekil 4.23d), ondan sonraki en iyi modelin filtrelenmiş geri izdüşüm rekonstrüksiyon sonucu elde edildiği (Şekil 4.23a), yelpaze hüzme (Şekil 4.23b) ve cebirsel rekonstrüksiyon (Şekil 4.23c) sonucu elde edilen 3 boyutlu görüntülerin oldukça bozuk olduğu görülmektedir.

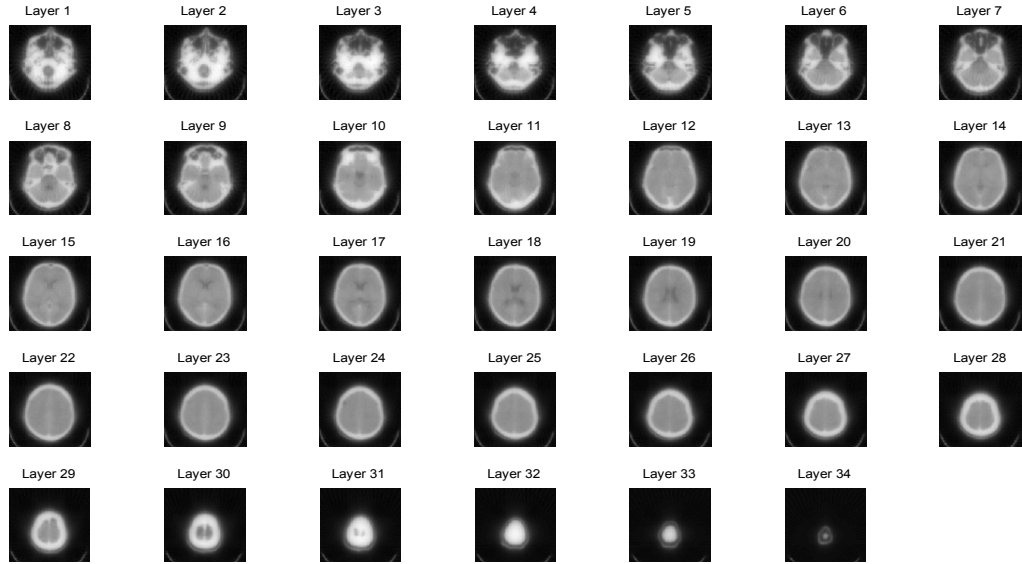


Şekil 4.21. 34 adet beyin tomografi kesitine ait görüntüler: a) orijinal görüntüler, b) sinogram görüntüleri, c) filtrelenmiş geri izdüşüm görüntüleri

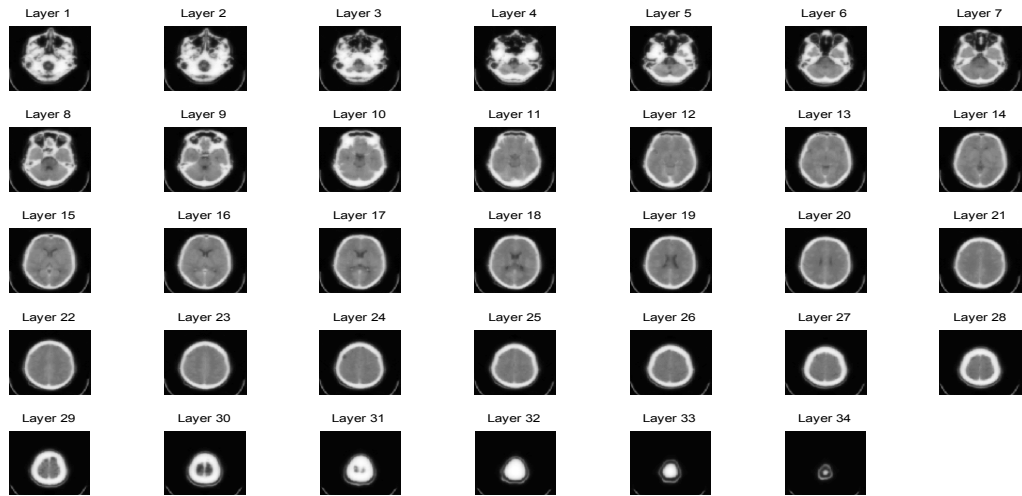
d) yelpaze hüzme algoritması ile elde edilen 34 adet beyin tomografi kesiti



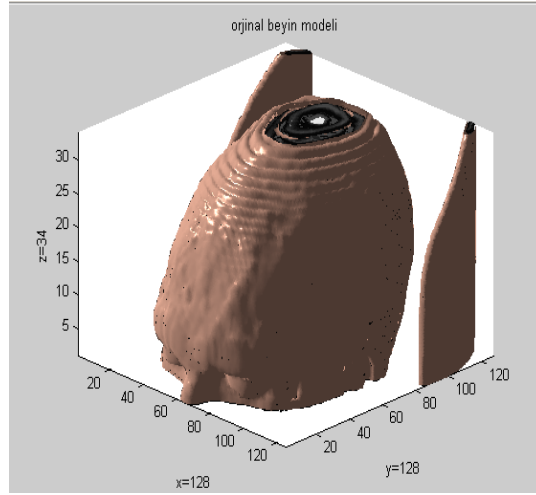
e) ART algoritması ile elde edilen 34 adet beyin tomografi kesiti



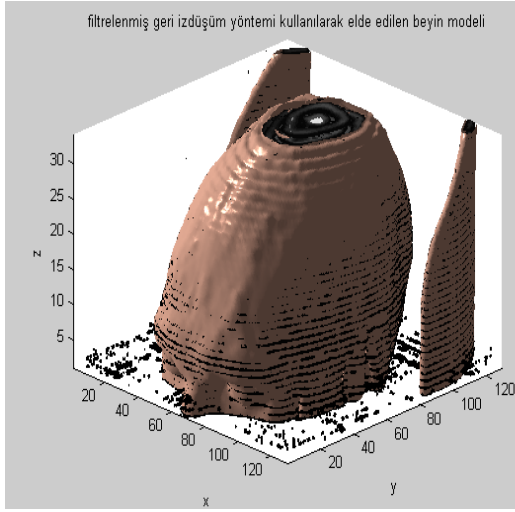
f) SART algoritması ile elde edilen 34 adet beyin tomografi kesiti



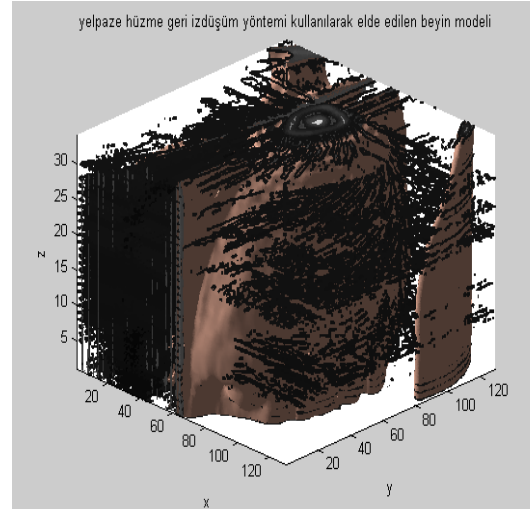
Şekil 4.22. 34 adet beyin tomografi kesitine ait görüntüler: a) yelpaze hüzme görüntüleri, b) ART görüntüleri, f) SART görüntüleri



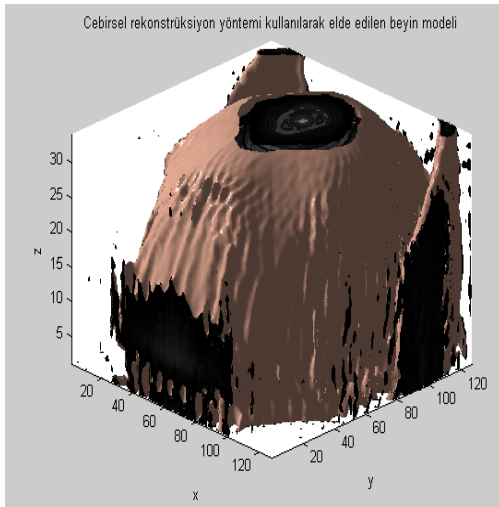
a)



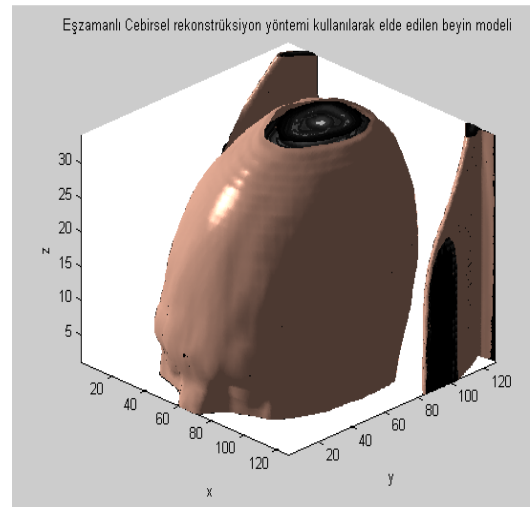
b)



c)



d)



e)

Şekil 4.23. 3 boyutlu görüntü modelleri: a)orijinal model, b)filtrelenmiş geri izdüşüm ile elde edilen model, c)yelpaze hüzme ile elde edilen model, d) ART ile elde edilen model, e) SART ile elde edilen model

Kesit görüntülerin rekonstrüksiyon sonucu elde edilen görüntülerin kalitesi 3 boyutlu görüntü elde etme kalitesini etkilemektedir. Yelpaze hüzmeye (Şekil 4.23b) rekonstrüksiyon sonucu MSE ve PSNR değerleri, filtrelenmiş geri izdüşüm rekonstrüksiyon sonuçlarına yakın olsa da 3 boyutlu görüntü elde etme işleminde her bir kesitin görüntüsünde görülen yelpazeye benzeyen gürültüden dolayı konturların bir birlerine bağlanması konusunda ve interpolasyon işleminde daha hatalı sonuçlar verdiği görülmektedir. Her bir kesitin sol tarafında ortaya çıkan yelpaze görüntüsündeki istenilmeyen gürültü 3 boyutlu nesnede de kendini göstermiş, modelin sol tarafında interpolasyon hesabının hatalı olmasına yol açmıştır. Cebirsel rekonstrüksiyon (Şekil 4.23c) uygulaması sonucu elde edilen 3 boyutlu görüntüdeki bozukluk ise θ açısının 1° 'den 180° 'ye 5° açıyla artmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Eğer bu problem çözülüp, θ açısının 1° 'den 180° 'ye 1° açıyla arttırılma yoluna gidilirse eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon sonucu elde edilen 3 boyutlu görüntüye yakın görüntü elde edilebileceği düşünülmektedir. Şekil 4.23c'deki 3 boyutlu görüntü incelendiğinde modelin burun ve yüz kısmında interpolasyon problemleri görülmektedir. Bu durum tomografi kesitlerindeki ayrıntıların atlandığı ve hassas bir rekonstrüksiyon işlemi yapılmadığı anlamına gelir.

5.TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada medikal görüntü elde etme tekniklerinin temellerini oluşturan direkt yöntemlerden filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması ve fan hüzme algoritması, iteratif yöntemlerden ise cebirsel rekonstrüksiyon tekniği (ART) ve eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon tekniği (SART) incelenmiştir. Bu rekonstrüksiyon tekniklerinin yanında tomografik veri elde etmek için Radon dönüşümü tekniği incelenmiştir. İncelenen tekniklerin teorik alt yapıları oluşturulduktan sonra Matlab ortamında yazılan algoritmalar hem sentetik hem de bilgisayarlı tomografi ile elde edilen beyin kesit görüntülerine uygulanmıştır.

Elde edilen görüntüler MSE, RMSE ve PSNR değerleri ölçülerek kıyaslanmıştır [46-51]. Bu kıyaslamaların yanında bir de piksel pozisyonuna bağlı olarak piksel grilik renk seviyesi ile ilgili grafikler gösterilerek kıyaslama yapılmıştır. Bu algoritmalar ayrıca 34 kesitten oluşan 128x128 boyutlarındaki beyin kesit tomografi görüntülerinden elde edilen sinogramların her birine uygulanarak elde edilen görüntüler Matlab ortamında bulunan Volume Visualization algoritmaları ile 3-boyutlu görüntülere dönüştürülmüş ve elde edilen görüntüler kıyaslanmıştır.

Filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması ve yelpaze hüzme algoritmaları sonucu elde edilen görüntülerin PSNR değerleri kıyaslandığında sinogram elde etmek için yazılan 'iz.m' fonksiyonunun performansının düşük olduğu gözlemlenmiştir. Bu durumdan dolayı Matlab hazır fonksiyonu olan 'radon.m' fonksiyonun kullanılmasına karar verilmiştir. Bu fonksiyon ile elde edilen sinogramlar kullanılarak filtrelenmiş geri izdüşüm algoritmaları yeniden uygulanmış ve bu durumda elde edilen sonuçlar daha yüksek kalitede olmuştur. Böylece çalışmada kullanılmak üzere yazılan sinogram fonksiyonunun performansının iyi olmadığı, iyileştirilmesi gerektiği kanaatine varılmıştır.

Filtrelenmiş geri izdüşüm ve yelpaze hüzme geri izdüşüm algoritmalarında Ram-Lak, Shepp-Logan, Cosine, Hamming ve Hann geri izdüşüm filtreleri kullanılarak elde edilen sonuçlar bu doğrultuda kıyaslanmıştır [30-34,60]. Direkt yöntemlerdeki en iyi PSNR değerlerinin hesaplandığı filtreler Tablo 5.1'de gösterilmiştir.

Tablo 5.1. Direkt yöntemlerde eni iyi PSNR değerlerinin hesaplandığı filtreler

		Head Phantom			Tomografik görüntü		
		16x16	64x64	128x128	16x16	64x64	128x128
Filtrelenmiş Geri İzdüşüm	Filtresiz						
	Ram-Lak						
	Shepp-Logan						
	Cosine						
	Hamming						
	Hann	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Radon ile Filtrelenmiş Geri izdüşüm	Filtresiz						
	Ram-Lak	✓					
	Shepp-Logan		✓				
	Cosine						
	Hamming			✓		✓	
	Hann				✓		✓
Yelpaze Hüzme	Filtresiz						
	Ram-Lak	✓					
	Shepp-Logan						
	Cosine		✓				
	Hamming				✓		
	Hann			✓		✓	✓

Filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması değerlendirilmesinde elde edilen sonuçlar, benzer çalışmalar [48,57,60,61] ile kıyaslandığında PSNR değerleri daha düşük çıkmıştır. S.A. Qureshi et.al.'ın çalışmasıyla [49] kıyaslandığında ise daha yüksek PSNR değerleri elde edilmiştir. Yelpaze hüzme algoritması sonucu elde edilen sonuçlar da diğer çalışmalar [55,56] ile kıyaslandığında biraz daha düşük PSNR değerleri ölçülmüştür. Böyle farklı sonuçların elde edilmesinin sebebi bu çalışmada yazılan programların ve kullanılan görüntülerin diğer çalışmalarda kullanılanlardan farklı olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Nitekim, S.A. Qureshi et.al.'ın çalışmasında [49] elde edilen head phantom görüntüsü PSNR değeri bu çalışmada elde edilen değere oranla düşük çıkmıştır. Yapılan çalışmada ve literatürdeki diğer çalışmalarda [49,55,56,61] kullanılan tomografik verilerin farklı oluşundan dolayı sonuçlarda da farklılık olmasına sebebiyet verdiği düşünülmektedir. Bu çalışma sonucu elde edilen görüntü çıktılarının PSNR değerlerinin yükseltilmesi için Matlab ortamında yazılan programların daha performanslı hale getirilmesi gerekmektedir. Programda kullanılan interpolasyon işlemlerinin iyileştirilmesi ile daha kaliteli sonuçlar ortaya çıkacağı düşünülmektedir.

Görüntüler oluşturulurken kullanılan izdüşüm açısı sayısı yetersiz olduğunda rekonstrüksiyon sonucu elde edilen görüntülerde yıldız artefaktı olduğu görülmüştür [22, 24, 30]. İz düşüm açısı sayısı arttırıldıkça daha fazla açıda görüntüye ait izdüşüm elde edileceğinden daha kaliteli görüntü elde edilmektedir [62]. Fakat uygulanan her izdüşüm işlemi hastanın maruz kalacağı radyasyon oranını arttırır. Dolayısıyla görüntü kalitesi ve hastanın maruz kalacağı radyasyon dozu oranı için optimum izdüşüm açısı seçmekte yarar vardır. Simülasyon ile yapılan çalışmada seçilen izdüşüm açıları maksimum düzeyde olmuştur. 180°'ye kadar eşit aralıklarla 1° artan açılar olacak şekilde seçilmiştir. Cebirsel rekonstrüksiyon uygulamasında programdan kaynaklanan yetersizlikten dolayı 128x128 boyutlarına sahip görüntülerde izdüşüm açısı minimum 5° artan açılar olacak şekilde ayarlandığı için iz düşüm açısı sayısı yetersiz olmuş, elde edilen görüntülerde hatalar meydana gelmiştir.

Cebirsel rekonstrüksiyon ve eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon algoritmalarında ağırlık matrisi kullanılarak tahmin edilen sinogram görüntüsü ile asıl sinogram görüntüsü karşılaştırılarak hata farkı hesaplanmıştır. Farklı iterasyon sayılarında elde edilen görüntülerin PSNR, MSE ve RMSE değerleri ölçülüp kıyaslanmıştır. İteratif yöntemlerde hesaplama için müsaade edilen iterasyon sayısının sonuçlar üzerinde etkili olduğu görülmüştür. İteratif yöntemlerdeki en iyi PSNR değerlerinin hesaplandığı iterasyon sayıları Tablo 5.2'de gösterilmiştir.

Tablo 5.2. İteratif yöntemlerde eni iyi PSNR değerlerinin hesaplandığı iterasyon sayıları

		Head Phantom			Tomografik görüntü		
		16x16	64x64	128x128	16x16	64x64	128x128
ART	12				✓		
	25	✓					
	50		✓	✓		✓	✓
	100						
SART	12				✓		
	25						
	50	✓				✓	✓
	100		✓	✓			

Yapılan çalışmalar sonunda iterasyon sayısı az olduğunda sonuçta elde edilen görüntüde bulanıklığın arttığı ve küçük detayların kaybolduğu gözlemlenmiştir. İterasyon sayısı fazla olduğu durumda ise görüntünün keskinleştiği fakat gürültünün arttığı gözlemlenmiştir. Bu gözlemler neticesinde iteratif işlemlerin doğruluğunun artması için uygun iterasyon sayıları ve uygun yumuşatma katsayılarının seçilmesi gerektiği anlaşılmıştır.

Cebirsel rekonstrüksiyon algoritması sonucu elde edilen görüntülerin PSNR değerleri benzer çalışmalar [22,49,61] ile kıyaslandığında iterasyon sayısını optimize etmekle çok daha iyi görüntüler elde edildiği görülmüştür. Eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon algoritması sonucu elde edilen görüntülerin PSNR değerleri X.Wan et al.'un çalışmasıyla [50] kıyaslandığında elde edilen sonuçların oldukça iyi görüntüler olduğu görülmüştür.

Ayrıca çalışmada elde edilen görüntülerin piksel grilik renk seviyeleri dikkate alındığında iteratif yöntemler, direkt yöntemlere kıyasla gerçek görüntüye daha yakın sonuçlar verdiği görülmüştür. İteratif yöntemler ile direkt yöntemlere göre daha gerçeğe yakın görüntüler elde edilse bile ağırlık matrisi etkisinden dolayı bilgisayar ortamında daha geniş yer kaplamaları ve işlem süresinin daha uzun olması gibi dezavantajlara sahiptir. Yumuşatma katsayısının deneme yanılma yolu ile seçilmesi ise bir dezavantajdır. Direkt yöntemlerde ise izdüşüm sayısı kısıtlaması ve izdüşümlerin 180° ve 360° ’lerde düzgün dağılmamasından dolayı oluşan hatalar ve de üst üste düşen izdüşümlerden kaynaklanan görüntünün merkezine gidildikçe artan gürültü için filtre kullanılması zorunluluğu bu yöntemlerin dezavantajıdır.

3-boyutlu görüntülerin oluşumunda ise araştırma ve bulgular bölümünde ifade edildiği üzere, her kesit için uygulanan rekonstrüksiyon algoritmalarının görüntü üzerinde etkisi söz konusudur. Kesit görüntülerinin rekonstrüksiyon kalitesi ile doğru orantılı olarak 3-boyutlu görüntülerin de kalitesi değişmektedir. Eşzamanlı cebirsel rekonstrüksiyon uygulaması sonucu elde edilen 3-boyutlu görüntü kaliteli olduğu görülsede görüntüdeki detaylar gerçek görüntüye kıyasla azalmıştır. Filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması ile elde edilen 3-boyutlu görüntüde detaylar iyi görünmekte ancak interpolasyondan kaynaklandığını düşündüğüm gürültünün arttığı görülmektedir. Yelpaze huzme algoritması ile elde edilen görüntülerin oldukça kalitesiz olmaları, yelpaze huzme algoritması için kullanılan sinogram dönüşümü programından kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu dönüşüm yerine direkt yelpaze huzme rekonstrüksiyon işlemi uygulama çalışmaları yapılırsa daha iyi sonuçların elde edilebileceği düşünülmektedir.

Çalışılan bu algoritmaların hepsinin daha da geliştirilmesine ihtiyaç olduğu kanaatine varılmıştır. Dolayısıyla gelecekte yapılacak çalışmalarda bu iyileştirme konusuna önem verilmesi gerektiği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] V.K.Madisetti and D.B. Williams, *Digital Signal Processing Handbook CRCnetBASE*, CRC Press LLC, USA, 1999.
- [2] W.K. Pratt, *Digital Image Processing*, Wiley-Interscience, USA, 2007.
- [3] Al Bovik, *Handbook of Image and Video Processing*, Academic Press, Canada, 2000.
- [4] R.C. Gonzalez and R.E. Woods, *Digital Image Processing*, Pearson Prentice Hall, USA, 2002.
- [5] R.C. Gonzalez, R.E. Woods and S.L. Eddins, *Digital Image Processing Using Matlab*, Pearson Prentice Hall, USA, 2004.
- [6] W.M. Saltzman, *Biomedical Engineering-Bridging Medicine and Technology*, Cambridge University Press, USA, 2009.
- [7] C.T. Leondes, *Medical Imaging Systems Technology - Analysis and Computational Methods*, World Scientific, USA, 2005.
- [8] J. Beutel, H.L. Kundel and R.L. van Metter, *Handbook of Medical Imaging, Volume 1 - Physics and Psychophysics*, SPIE, USA, 2000.
- [9] Y. Mao, *Biomedical Imaging*, In-Teh, India, 2010.
- [10] N.L. Müller, *Computed tomography and magnetic resonance imaging: past, present and future*, **Eur. Respir. J.** 19:35 (2002) 3s–12s.
- [11] T.Uematsu, S. Yuen, S. Yukisawa, T. Aramaki, N.Morimoto, M. Endo, H. Furukawa, Y. Uchida and J. Watanabe, *Comparison of FDG PET and SPECT for Detection of Bone Metastases in Breast Cancer*, **Am. J. Roentgenol.** 184 (2005) 1266-1273.
- [12] I.F. Tannock, R.P. Hill, R.G. Bristov and L. Harrington, *The basic science of oncology*, McGraw-Hill, USA, 2005.
- [13] R.A. Robb, *Biomedical Imaging: Past, Present and Predictions*, **Med. Imaging Technol.** 24:1 (2006) 25-37.
- [14] P.S. Calhoun, B.S. Kuszyk, D.G. Heath, J.C. Carley and E.K. Fishman, *Three-dimensional Volume Rendering of Spiral CT Data: Theory and Method*, **Radiographics** 19 (1999) 745-764.
- [15] K.H. Hoehne, R.L. Delapaz, R. Bernstein and R.C. Taylor, *Combined Surface Display and Reformatting for the Three-Dimensional Analysis of Tomographic Data*, *Invest. Radiol.* 22 (1987) 658-664.
- [16] L.W. Goldman, *Principles of CT and CT Technology*, *J. Nucl. Med. Technol.* 35: 3 (2007) 115-128.
- [17] J.Radon, *On the Determination of Functions From Their Integral Values Along Certain Manifolds*, *IEEE Trans. Med. Imag.* MI-5: 4 (1986) 170-176.
- [18] S.R. Deans, *The Radon Transform and Some of Its Applications*, John Wiley and Sons, USA, 1983.
- [19] M. Kutz, *Biomedical Engineering and Design Handbook*, McGraw-Hill, USA, 2009.
- [20] C.T. Leondes, *Medical Imaging Systems Technology – Modalities*, World Scientific, USA, 2005.
- [21] J.L. Semmlow, *Biosignal and Biomedical Image Processing MATLAB-Based Applications*, Marcel Dekker, USA, 2004.
- [22] A.C. Kak and M. Slaney, *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, IEEE Press, USA, 1999.
- [23] J. Jan, *Medical Image Processing, Reconstruction and Restoration: Concepts and Methods*, Taylor and Francis, USA, 2006.
- [24] P.P. Bruyant, *Analytic and Iterative Reconstruction Algorithms in SPECT*, **J. Nucl. Med.** 43 (2002) 1343–1358.
- [25] J. Montagnat and H. Delingette, *Globally constrained deformable models for 3D object reconstruction*, **Signal Processing** 71 (1998) 173-186.
- [26] Y. Guan, Y. Li, Y. Wang and H. Zhang, *International Workshop on Intelligent Systems and Applications*, Wuhan, China, May 23-24, (2009), pp.1-4.

- [27] F.N. Deniz, B.B. Alagöz ve M.E. Tağluk, SIU2010 - IEEE 18. Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı, Diyarbakır, (2010), pp.886-889.
- [28] Ng Ren, *Fourier Slice Photography*, **ACM Trans. Graphics** 24:3 (2005) 735-745.
- [29] F. Natterer, *Numerical Methods in Tomography*, **Acta Numerica** 8 (1999) 107-141.
- [30] K. Van Laere, M. Koole, I. Lemahieu and R. Dierckx, *Image filtering in single-photon emission computed tomography: principles and applications*, **Comput. Med. Imag. Grap.** 25 (2001) 127-133.
- [31] L.P. Urimi, “*Image Reconstruction Techniques and Measure of Quality: Classical vs. Modern Approaches*” MSc Thesis, University of Maryland, 2005.
- [32] J.E. Wildberger, A.H. Mahnken, T. Flohr, R. Raupach, C. Weiss, R.W. Günther and S. Schaller, *Spatial domain image filtering in computed tomography: feasibility study in pulmonary embolism*, **Eur. Radiol.** 13 (2003) 717-723.
- [33] Y. Wei, G. Wang and J. Hsieh, *An Intuitive Discussion on the Ideal Ramp Filter in Computed Tomography (I)*, **Comput. Math. Appl.** 49 (2005) 731-740.
- [34] T.H. Farquhar, A. Chatziioannou, G. Chinn, M. Dahlbom and E.J. Hoffman, *An Investigation of Filter Choice for Filtered Back-Projection Reconstruction in PET*, **IEEE Trans. Nuc. Sci.** 45:3 (1998) 1133-1137.
- [35] H. Peng and H. Stark, *Direct Fourier Reconstruction in Fan-Beam Tomography*, **IEEE Trans. Med. Imag.** MI-6: 3 (1987) 209-219.
- [36] J. Hsieh and X. Tang, *Tilted cone-beam reconstruction with row-wise fan-to-parallel rebinning*, **Phys. Med. Biol.** 51 (2006) 5259-5276.
- [37] G.T. Herman, *Fundamentals of Computerized Tomography*, Springer, UK, 2009.
- [38] A.H. Andersen, *Algebraic Reconstruction in CT from Limited Views*, **IEEE Trans. Med. Imag.** 8:1 (1989) 50-55.
- [39] M. Jiang and G. Wang, *Convergence of the Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique (SART)*, **IEEE Trans. Image Processing** 12:8 (2003) 957-961.
- [40] V.H. Tessa, W. Sarah, G. Maggie, B.K. Joost and S. Jan, ‘*Iterative Reconstruction Algorithms 1 The implementation of iterative reconstruction algorithms in MATLAB*’, MSc Thesis, University College of Antwerp, Belgium, 2007,
- [41] M. Saxild-Hansen, “*AIR Tools - A MATLAB Package for Algebraic Iterative Reconstruction Techniques*” MSc Thesis, Technical University of Denmark, 2010.
- [42] C.H. Atkinson and J. Soria, 16th Australasian Fluid Mechanics Conference, Gold Coast, Australia, Dec. 2-7, (2007), pp.191-198.
- [43] A.H. Andersen and A.C. Kak, *Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique (SART): A Superior Implementation of The Art Algorithm*, **Ultrasonic Imaging**, 6 (1984) 81-94.
- [44] http://en.wikipedia.org/wiki/File:Computed_tomography_of_human_brain_-_large.png
- [45] <http://www.mve.info/>
- [46] J.G. Brankov, Y. Yang and M.N. Wernick, *Tomographic Image Reconstruction Based on a Content-Adaptive Mesh Model*, **IEEE Trans. Med. Imag.** 23:2 (2004) 202-212.
- [47] Z. Li and Y. Song, 2009 Fifth International Conference on Natural Computation, Tianjin, China, Aug. 14-16, (2009), pp.387-391.
- [48] I. Gallo, *A Local and Iterative Neural Reconstruction Algorithm for Cone-Beam Data*, **Pro. Biomed. Opt. Imag.** 11:3 (2010) 762253.1-9.
- [49] S.A. Qureshi, S.M. Mirza and M. Arif, *Hybrid simulated annealing image reconstruction for transmission tomography*, **Inverse Probl. Sci. Eng.** 17:5 (2009) 647-664.
- [50] X. Wan, F. Zhang and Z. Liu, 15th International Conference on Parallel and Distributed Systems, Shenzhen, China, Dec. 8-11, (2009), pp.384-390.
- [51] W. Pang, J. Qin, Y. Lu, Y. Xie, C. Chui and P. Heng, *Accelerating simultaneous algebraic reconstruction technique with motion compensation using CUDA-enabled GPU*, **Int. J. CARS** 6 (2011) 187-199.
- [52] J. Feng, 14th IEEE-NPSS Real Time Conference, Stockholm, Sweden, June 10, (2005), pp.468-469.
- [53] S. Horbelt, M. Liebling and M. Unser, *Filter design for filtered back-projection guided by the interpolation model*, **Pro. Biomed. Opt. Imag.** 3:2 (2002) 806-813.

- [54] J. Shtok, M. Elad and M. Zibulevsky, IEEE 25th Convention of Electrical and Electronics Engineers in Israel, Eilat, Israel, Dec. 3-5, (2008), pp.528-532.
- [55] L. Juang, *X-ray chest image reconstruction by Radon transform simulation with fan-beam geometry*, **Measurement** 43 (2010) 447–453.
- [56] P. Juang and M. Wu, 3rd Int.Conf. on Intelligent Information Hiding & Multimedia Signal Process.v.2, Kaohsiung, Taiwan, Nov. 26-28, (2007), pp.237-241.
- [57] X. Lin, S. Luo, L. Wang, S. He and G. Chen, 3rd International Congress on Image and Signal Processing, Yantai, China, Oct. 16-18, (2010), pp.2737-2741.
- [58] R.J. Gaudette, D.H. Brooks, C.A. DiMarzio, M.E. Kilmer, E.L. Miller, T. Gaudettek and D.A. Boas, *A comparison study of linear reconstruction techniques for diffuse optical tomographic imaging of absorption coefficient*, **Phys. Med. Biol.** 45 (2000) 1051–1070.
- [59] X. Intes, V. Ntziachristos, J.P. Culver, A. Yodh and B. Chance, *Projection access order in algebraic reconstruction technique for diffuse optical tomography*, **Phys. Med. Biol.** 47 (2002) N1–N10.
- [60] S.A. Qureshi, S.M. Mirza and M. Arif , Student Conference on Engineering Sciences and Technology, Karachi, Pakistan, Aug. 27, (2005), pp.1-8.
- [61] S.D. Desai and L. Kulkarni, *A Quantitative Comparative Study of Analytical and Iterative Reconstruction Techniques*, **Int. J. Image Process.** 4:4 (2010) 307-319.
- [62] A.N. van Daatselaar, D.A. Tyndall, H. Verheij and P.F. van der Stelt, *Minimum number of basis projections for caries detection with local CT*, **Dentomaxillofac. Rad.** 33 (2004) 355-360.
- [63] D.M Akbar Hussain, A.Q.K. Rajput, B.S. Chowdhry and Q.Gee, *Wireless Networks, Information Processing and Systems, Digital Signal Processing*, Springer, Germany, 2008.

EKLER

EK 1. Çalışmada Kullanılmak İçin Yazılan Matlab Fonksiyonları

Iz.m fonksiyonu (Radon Dönüşümü ile Sinogram oluşumu)

```
function [Izdusum,xp,theta] = iz(image, N)
% Görüntüyü döndürürken hataları engellemek için padding
[boy, en] = size(image);
kosegen= sqrt(boy^2 + en^2);
boypad = ceil(diagonal - boy) + 3;
enpad = ceil(kosegen - en) + 3;
padimage = zeros(boy+boypad, en+enpad);
padimage(ceil(boypad/2):(ceil(boypad/2)+boy-1),ceil(enpad/2):(ceil(enpad/2)+en-1)) = image;
% theta'nın N farklı açısı için image dönderilir(imrotate),
%N tane izdüşümün bulunabilmesi için dönderdiğimiz image'in bütün
dizileri toplanır.
n = length(aralık);
Izdusum = zeros(size(padimage,1), n);
    depoizdusum = imrotate(padimage, aralık(i), 'bilinear', 'crop');
    Izdusum(:,i) = (sum(depoizdusum))';
x1=floor((size(Izdusum,1))/2);
x2=-floor((size(Izdusum,1))/2);
xp=x2:x1;
theta=aralık;
imagesc(Izdusum)
colormap(gray)
```

Fbp1.m fonksiyonu (Filtrelenmiş geri izdüşüm algoritması)

```
function [img]=fbp1(R,theta,xp,esit,filtresecim)
[N K]=size(R);
theta=1:esit:180;
outputsize=2*floor(size(R,1)/(2*sqrt(2)));
n=2^nextpow2(N);
izdusumw=zeros(n,n);
filtrelenmisizdusum=zeros(n,n);
tersizdusum=zeros(n,n);
[filtre]=backfiltre(n,filtresecim);
for i=1:K
    izdusumw(:,i)=fft(R(:,i),n);
    filtrelenmisizdusum(:,i)=izdusumw(:,i).*filtre;
    tersizdusum(:,i)=real((ifft(filtrelenmisizdusum(:,i))));
end
y=abs(min(xp))+1;
yeniimg=zeros(outputsize,outputsize);
for i=1:K
    radyanaci=theta(i)*pi/180;
    Q=tersizdusum(:,i);
    t=(x-outputsize/2)*cos(radyanaci)+
    (y-outputsize/2)*sin(radyanaci)+y;
    if(floor(t))
        t1=Q(ceil(t));
    else
        t1=Q(floor(t));
    end
    yeniimg(x,y)=yeniimg(x,y)+t1+t2;
```

```

yeniimg(outputsize/2,outputsize/2)=(yeniimg(outputsize/2,outputsize/2-
1)+yeniimg(outputsize/2,outputsize/2+1))/2;
end
    end
    end
end
img=(pi/K)*(yeniimg);
img=img.';

```

Yelpazehuzme.m fonksiyonu (Yelpaze hüzme geri izdüşüm algoritması)

```

function[Izdusum,xp,theta]=yelpazehuzme(F,d)
[m n]=size(F);
mb=m/2;
if ceil(mb)==floor(mb)
    m=m;
else
    F=padarray(F,[1 0]);
    % m tek sayı ise padding yaparsak daha sonra round
    %komutu ile yuvarlama yaptığımızda data kaybına yol açmaz ve doğru
    %dedektoraralığını elde etmiş oluruz.
    [m n]=size(F);
end
m1=floor((m-1)/2);
m2=floor((m)/2);
gamadeg=(-m1:m2);
betadeg=(0:n-1);
thetadeg=0:179;
numeltheta=numel(thetadeg);
numelgama=numel(gamadeg);
%gama,beta ve theta değerleri tanımlandı.
gamaaralik=[min(gamadeg) max(gamadeg)]*pi/180;
dedektorlokasyon=d*sin(gamaaralik);
dedektormin=round(dedektorlokasyon(1));
dedektormax=round(dedektorlokasyon(2));
dedektoraralik=dedektormin:dedektormax;

numelddedektoraralik=numel(dedektoraralik);
Fyeni=zeros(m,numeltheta);
for i=1:m
    Fyeni(i,:)=interp1(betadeg-gamadeg(i),F(i,:),thetadeg,'linear');
    %Birinci interpolasyon F(gama,beta)
    %fonksiyonunu ayrık formdan sürekli forma getirmek amacıyla
    uygulandı.
    % burada shift yapmanın amacı 0:179 arası
    %interpolasyon bilgilerini tam olarak elde etmek içindir.
end
%figure(1)
%imagesc(Fyeni)
P=zeros(numelddedektoraralik,numeltheta);
t=d*sin(gamadeg*pi/180);
for i=1:numeltheta
    P(:,i)=interp1(t,Fyeni(:,i)',dedektoraralik,'linear');
    %ikinci interpolasyon ise P(t,theta) fonksiyonunu,
    %birinci interpolasyondan elde ettiğimiz sürekli fonksiyondaki
    değerleri
    %kullanarak elde etmek amacıyla uygulanmıştır.
end

```



```

k=find(isnan(P));
% P matrisinin içinde 'Nan'lar tanımlandı.(Not-a-Number) NaN'lar
varken image oluşturulamadığından
% Nan değerleri bulunup sifıra eşitlenmiştir.
P(k)=0;
%figure(2);
%imagesc(P)
    Izdusum=P;
xp=(dedektoraralik)';
    theta=thetadeg;

```

Weight.m Fonksiyonu (Ağırlık Matrisi)

```

function W =Weight(n,m,n1,n2)
%görüntü piksellerinin koordinatları bir ızgara şekline dönüştülür.
x = [0:n-1] - (n-1)/2;
y = (-1)*([0:m-1] - (m-1)/2);
piksel = length(x);
aci = [0:n2-1]'/n2 * pi; %radyan olarak açı değerleri hesaplanır.
    %daha sonra ışının ızgara üzerinden geçtiğinde eğer piksel
koordinatlarına
    %denk geliyorsa değeri 1 olarak alınır. Gelmiyorsa da arada kalan
değer
    %t'nin bir alt değerine yuvarlanmasıyla oluşan farktan yola çıkarak
ışının
    %sağ ve sol tarafındaki etkisi hesaplanarak ağırlık matrisi bulunur.
t = cos(aci) * x' + sin(aci) * y';
t = t + (n1+1)/2; % radondaki paddingden dolayı matrisin başlangıcı
kaydığından offset ile tekrar
%1 den başlaması sağlanır.
fark = floor(t); % Find left bins of projected piexl centers.
soltaraf = 1 - (t-fark); % soldaki ışınların ağırlık değeri
sagtaraf = 1-soltaraf; % sağdaki ılınların ağırlık değeri
nc = n * m; %ağırlık matrisindeki piksel sayısı ile sütunların
bulunması
ri = fark + [0:n2-1]'*n1*ones(1,piksel); % ağırlık matrisindeki
satırların indisi
kj = find(Fonksiyon(:))';
kj = kj(ones(1,n2),:); % ağırlık matrisindeki sütunların
indisi
deger=fark(:) >= 1 %matris içindeki değerleri 1den n1 e kadar ve*fark
%true yani 1 'e eşittir.
%Sparse ağırlık matrisinin oluşturulması
W = sparse(ri,kj), soltaraf, n1*n2, nc);

```

Art.m fonksiyonu (Cebirsel rekonstrüksiyon algoritması)

```
function sonimg=art(W,sinogram,iterasyon,alfa)
f = ones(size(W,2),1);
N = sqrt(length(f));
p = sinogram(:);%sinogram vektör olarak düzenlenir.
ind=find(sum(W,2));%Burada amaç ağırlık matrisi bol sıfırlı bir sparse
matris
%sıfır olan satırları çıkararak işlem kolaylığı sağlayıp hızını
arttırmak.
W=W(ind,:);
p=p(ind);%ağırlık matrisinin satır sayısı ile sinogram satır sayısı
eşit olmalıki iteratif işlem yapılsın.
Wt = W';
R=sum(Wt.^2);%payda sabit olduğu için döngü dışında hesaplandı.
alfa =0.002;%relaxtion katsayısı literatürde <1 olarak verilmiştir.
for k = 1:iterasyon %iterason sayısı ne kadar büyürse gerçek
görüntüye okadar yaklaşılr fakat hantal
    %ve daha uzun süren bir zamanda görüntü elde edilir.
    q = W*f;
    A=(p-q)./R;
    % l=isnan(A);gerek kalmadı. sıfırlar çıkınca NAN yok.
    % A(1)=0;
    A=repmat(A,1,(size(W,2)));%128x128 1:1:180 için yetersiz
    geldi, taşma oluyor.
    B=A.*W;
    f=f+alfa.*sum(B)';
end
sonimg=reshape(f,N,N);%elde ettiğimiz f vektörünü yenien NxN
formatında image dönüştürdüm...
sonimg=sonimg';
```

Sart.m fonksiyonu (Eşzamanlı Cebirsel rekonstrüksiyon algoritması)

```
function sonimg = sart(W,f,p,iterasyon)
sonimg= zeros(f,1);
Wt = W';
C = sum(Wt); %toplamsütunlar
R = sum(W); % toplam satırlar
for k = 1:iterasyon
    q = W*f;
    A = (p-q)./R;
    B = Wt * A;%vektörel çarpım her bir değerin çarpılıp toplanmasını
    ifade eder.
    f = f + (B ./ C);
    sonimg = f;
end
sonimg=reshape(sonimg,n,n);
sonimg=sonimg';
```

ÖZGEÇMİŞ

Furkan Nur DENİZ, 1983 yılında Eskişehir’de doğmuştur.

2004-2008 yılları arasında İnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü’nde lisans eğitimini tamamlayarak Elektrik-Elektronik Mühendisi olarak mezun olmuştur.

2008-2009 yılları arasında Malatya Türk Telekom İl Müdürlüğü’nde santral mühendisi olarak çalışan Furkan Nur DENİZ, 2009 yılından itibaren İnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü’nde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.

Furkan Nur DENİZ evlidir ve iyi derecede İngilizce bilmektedir.