

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MÜDÜRLÜĞÜ
30
1979 EKİM AYI
1979 EKİM AYI

**DİFERENSİYEL DENKLEMLER
VARLIK VE TEKLİK TEORİSİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

28

HAYDAR AKÇA
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
TEMEL BİLİMLER FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ
MALATYA
EKİM-1979

İÇİNDEKİLER

| | |
|------------------------------------|----|
| 1.1. Genel Teorikler ve Kavramlar | 1 |
| 1.2. Genel Teorikler ve Kavramlar | 10 |
| 1.3. Genel Teorikler ve Kavramlar | 17 |
| 1.4. Genel Teorikler ve Kavramlar | 24 |
| 1.5. Genel Teorikler ve Kavramlar | 31 |
| 1.6. Genel Teorikler ve Kavramlar | 38 |
| 1.7. Genel Teorikler ve Kavramlar | 45 |
| 1.8. Genel Teorikler ve Kavramlar | 52 |
| 1.9. Genel Teorikler ve Kavramlar | 59 |
| 1.10. Genel Teorikler ve Kavramlar | 66 |

Bu tezin hazırlanmasında ve çalışmam süresince büyük destek ve katkısına gürdüğüm Sayın Hocam Dođ. Dr. Cevat Kart'a teğekkürü ödev bilirim.

İÇİNDEKİLER

| | | |
|------|--|----|
| 1.1. | Gerçek Fonksiyonlar Kuramından Bazı Kavramlar. | 1 |
| 1.2. | Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık. | 10 |
| 2.1. | Birinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler için Başlangıç Değer Problemi. | 12 |
| 2.2. | İkinci Mertebeden Lineer Denklemler için Başlangıç Değer Problemi. | 13 |
| 2.3. | n yinci Mertebeden Lineer Denklemler için Başlangıç Değer Problemi. | 19 |
| 2.4. | Vektör Değerli Denklemler için Başlangıç Değer Problemi. | 25 |
| 2.5. | Lipschitz Koşulu. | 29 |
| 3.1. | Ardışık Yaklaşımlar Yöntemi ile Varlık ve Teklik Teoreminin Kanıtı. | 35 |
| 3.2. | Çözümlerin Yerel ve Küresel Varlığı. | 51 |
| 3.3. | Gronwall Eşitsizliği Yardımı ile Teklik Teoremi. | 55 |
| 3.4. | İrdeleme. | 57 |
| 3.5. | Şüreklik Kavramı Yardımı ile Varlık ve Teklik Teoremi. | 63 |
| | Kaynaklar. | 72 |

ÖZET

Adi diferensiyel denklemlerde her n yinci mertebeden lineer diferensiyel denklem ve en yüksek n yinci mertebeden türevi diğerleri cinsinden ayıklanabilen lineer olmayan diferensiyel denklem

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

formuna indirgenebilir. Verilen diferensiyel denklem n yinci mertebeden lineer diferensiyel denklem ise $A(x)$, n yinci mertebeden bir karesel matris ve $B(x)$ de n satırlı kolon vektörü olmak üzere (1) formu

$$y' = A(x)y + B(x) \quad (2)$$

biçiminde yazılabilir. Denklemin mertebesine göre verilen ve denklemin çözümlerinin sağlanması gereken

$$y(x_0) = C_0, y'(x_0) = C_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = C_{n-1} \quad (3)$$

başlangıç koşulları da kısaca

$$y(x_0) = Y_0 \quad (4)$$

biçiminde yazılabilir.

Bu çalışmada

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0 \quad (5)$$

ve
$$y' = A(x)y + B(x), y(x_0) = Y_0 \quad (6)$$

başlangıç değer problemleri ele alınarak önce amaca yönelik bazı kavram ve tanımlar üzerinde durulmuş ve genel olarak (5) başlangıç değer problemine ilişkin çözümlerin Varlık ve Teklik Teoremleri,

a) $f(x, y)$ fonksiyonunun bir bölgede Lipschitz koşulunu sağlanması,

b) $f(x, y)$ fonksiyonunun $\frac{\partial f}{\partial y}$ parçalı türevinin bir bölgede sürekli

olması durumlarına göre iki temel yapıdan hareketle incelenme ve irdelenme geliştirilmiştir.

1.1. GERÇEL FONKSİYONLAR KURAMINDAN BAZI KAVRAMLAR:

Bu kesimde amaca yönelik bazı Tanım ve Teoremler Üzerinde durulacaktır [9].

Dizi gösterimini; nokta cümlesi ile karışmaması bakımından $\langle S_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ ile göstereceğiz. Böylece bir dizi, tanım cümlesi N doğal sayılar cümlesi olan bir fonksiyondur [13].

TANIM 1.1.1. Bir $\langle C_n \rangle$ gerçel sayılar dizisinin bir c limitine yakınsaması, verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n > N$ için $|C_n - c| < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir N sayısının varlığı ile eşdeğerlidir. Bu durum $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = c$ yazılarak gösterilir.

ÖRNEK: $C_n = \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$ olsun.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ dir. $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \text{olur.}$$

Buradan, $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ bulunur. $\varepsilon > 0$ olduğundan $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ olacak şekilde bir N sayısı belirlenebilir. Böylece her $n > N$ için $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$ olur. Bu ise verilen dizinin 1 limitine yakınsadığını gösterir.

TANIM 1.1.2. $\langle f_n \rangle$ fonksiyonlar dizisi, dizide ki her bir fonksiyon $a \leq x \leq b$ gerçel aralığı üzerindeki her x için tanımlı gerçel fonksiyonlar dizisi olsun. $x \in [a, b]$ olacak şekilde her bir özel x 'e karşılık gelen $\langle f_n(x) \rangle$ dizisini gözönüne alalım. Her $x \in [a, b]$ için $\langle f_n(x) \rangle$ dizisinin yakınsadığını ve $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ olduğunu varsayalım.

Nevar ki bu aralıkta f limit fonksiyonu, $f(0)=0$ iken, $0 < x \leq 1$ aralığında $f(x)=1$ dir. Bu nedenle limit f fonksiyonunun $0 \leq x \leq 1$ aralığında sürekli olmadığı açıktır. Buradan sürekli fonksiyonlar dizisinin limit fonksiyonunun da sürekli olmasını güvence altına almak için düzgün yakınsaklık denen daha kuvvetli bir yakınsaklık çeşidine gereksinim vardır. Düzgün yakınsaklık kavramını vermeden önce noktasal yakınsaklık tanımını Tanım 1.1.1 diliyle yeniden düzenleyerek verelim:

TANIM 1.1.3. $\langle f_n \rangle$ gerçel fonksiyonlar dizisi, dizideki herbir fonksiyonun $a \leq x \leq b$ aralığı üzerinde tanımlı olduğu fonksiyonlar dizisi olsun. Eğer verilen her hangi bir $\varepsilon > 0$ a karşılık her bir $x \in [a, b]$ ve her $n > N$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde pozitif bir N sayısı (genel olarak ε ve x 'e bağlı) var ise, bu durumda $\langle f_n \rangle$ fonksiyonlar dizisine, $a \leq x \leq b$ üzerinde f fonksiyonuna noktasal biçimde yakınsıyor denir.

Bu tanımda ki N sayısı genel olarak sadece ε 'na değil aynı zamanda x 'e de bağlıdır. Verilen bir ε 'na karşılık genellikle farklı x noktaları için farklı $N(x)$ sayıları elde edilir. Bununla beraber, verilen bir $\varepsilon > 0$ karşılık her $x \in [a, b]$ ve her $n > N$ için;

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir tek N sayısı varsa bu durumda yakınsaklık $a \leq x \leq b$ üzerinde düzgündür. Şimdi bu yakınsaklığı daha açık biçimde verelim:

TANIM 1.1.4. $\langle f_n \rangle$ fonksiyonlar dizisi, dizideki herbir fonksiyonun $a \leq x \leq b$ aralığı üzerinde tanımlı olduğu gerçel fonksiyonlar dizisi olsun. Bu durumda verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ a karşılık her $x \in [a, b]$ ve her $n > N$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde pozitif bir N sayısı (sadece ε 'na bağlı) var ise, $\langle f_n \rangle$ fonksiyonlar dizisine $a \leq x \leq b$ üzerinde f ye düzgün yakınsıyor denir. Geometrik olarak bunun anlamı şudur:

Verilen bir $\varepsilon > 0$ a karşılık her $n > N$ için

$y = f_n(x)$ fonksiyonlarının grafiklerinin tümü,

$$y = f(x) + \varepsilon \text{ ile } y = f(x) - \varepsilon$$

fonksiyonlarının grafikleri arasında bulunur.

ÖRNEK: $0 \leq x \leq 1$ gerçel aralığında ki

tüm x ler için tanımlı olan $\langle f_n \rangle$ fonksiyonlar

dizisi;

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{nx+1}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (n=1, 2, \dots)$$

ile tanımlansın. $x=0$ değerine karşı gelen $\langle f_n(0) \rangle$ gerçel sayılar dizisi

$\langle 0, 0, \dots \rangle$ şeklinde yazılabilir. Ayrıca $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$ dir. $0 < x \leq 1$ aralığında

da ki her x için de:

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{nx+1} \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x \text{ dir.}$$

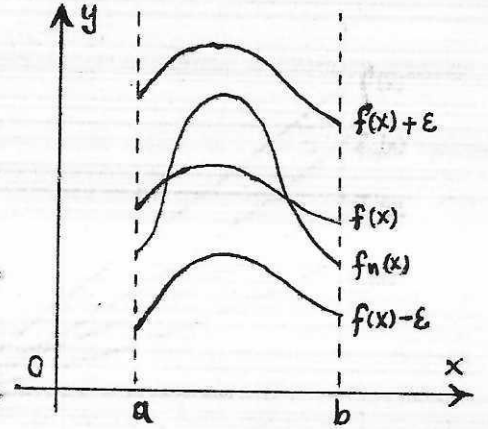
Böylece $\langle f_n \rangle$ dizisi $0 \leq x \leq 1$ aralığında $f(x) = x$ ile tanımlı f limit fonksiyonuna noktasal biçimde yakınsar. Ayrıca bu aralık üzerindeki yakınsaklık düzgün yakınsaklıktır. Gerçekten;

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| = \left| \frac{nx^2}{nx+1} - x \right| = \frac{x}{nx+1}$$

ve verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ değeri için $\frac{x}{nx+1} < \varepsilon$ den $n > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{x}$ ve

$0 \leq x \leq 1$ aralığında ki her x için $\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\varepsilon} - 1$ yazılabilir.

Böylece $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ seçilirse her $n > N$ için $n > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{x}$ olur.



Şekil 2

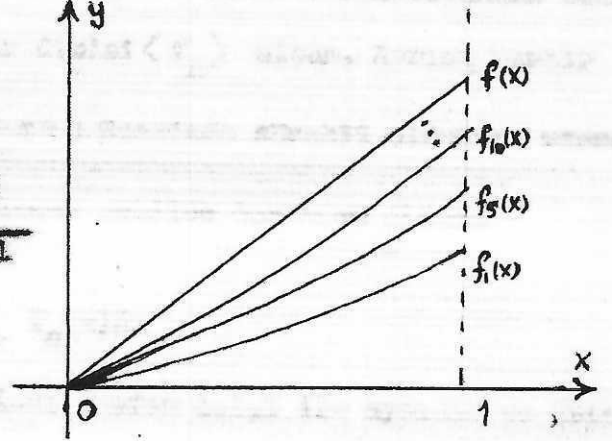
Buradan verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ a karşılık $0 \leq x \leq 1$ aralığında her x ve her $n > N$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde sadece ε na bağlı bir $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ sayısı vardır. Başka bir deyişle yakınsaklık $0 \leq x \leq 1$ aralığı üzerinde düzgündür.

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{nx+1}, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ (n = 1, 2, 3, \dots) \text{ den}$$

$$\text{sirasıyla, } f_1(x) = \frac{x^2}{x+1}, \quad f_5(x) = \frac{5x^2}{5x+1}$$

$$\text{ve } f_{10}(x) = \frac{10x^2}{10x+1} \text{ ile tanımlı}$$

f_1 , f_5 ve f_{10} fonksiyonları ile



Şekil 3

$f(x) = x$ limit fonksiyonunun grafiği Şekil 3 de görülmüyor.

Şimdi de, ileride Varlık Teoreminin kanıtında kullanacağımız fonksiyonlar dizisinin düzgün yakınsaklığına ilişkin iki önemli teoremi kanıtlarına

girmeden verelim:

TEOREM 1.1.1 Bir $a \leq x \leq b$ aralığı üzerinde f fonksiyonuna düzgün

yakınsayan gerçel fonksiyonlar dizisi $\langle f_n \rangle$ olsun. Herbir f_n ; $n=1, 2, 3, \dots$ fonksiyonunun $a \leq x \leq b$ üzerinde sürekli olduğunu varsayalım. Bu durumda f limit fonksiyonu $a \leq x \leq b$ üzerinde sürekli dir.

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{nx+1}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ile tanımlı $\langle f_n \rangle$ fonksiyonlar dizisinin $0 \leq x \leq 1$ aralığı üzerinde bir f limit fonksiyonuna düzgün yakınsadığını daha önce gördük. Ayrıca herbir f_n ; $n = 1, 2, 3, \dots$ fonksiyonu $0 \leq x \leq 1$ aralığı üzerinde sürekli dir.

Teorem 1.1.1. nedeniyle limit fonksiyonunun da $0 \leq x \leq 1$ üzerinde sürekli olması gerektiği sonucuna varılır. Gerçekten bu örnekte $f(x)=x$ ile tanımlı limit fonksiyonu $0 \leq x \leq 1$ aralığı üzerinde sürekli'dir.

TEOREM 1.1.2 Bir $a \leq x \leq b$ aralığı üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsayan gerçel fonksiyonlar dizisi $\langle f_n \rangle$ olsun. Ayrıca herbir f_n ; $n=1,2,3,\dots$ fonksiyonunun $a \leq x \leq b$ üzerinde sürekli olduğunu varsayalım. Bu durumda $a \leq \alpha < \beta \leq b$ olacak şekilde her α ve β için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

geçerlidir. Bu teoremin varsayımları Teorem 1.1.1 ile aynıdır ve Teorem 1.1.1 de göz önüne alınan dizi $0 \leq x \leq 1$ üzerinde bu varsayımları sağlar.

Örnekte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

geçerlidir. Gerçekten göz önüne alınan örnekte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = x$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx^2}{nx+1} dx = \int_0^1 x dx$$

dir. Bu sonuç doğrudan gerçekleştirilebilir.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{nx^2}{nx+1} dx &= \int_0^1 \left[x - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(nx+1)} \right] dx \\ &= \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x}{n} + \frac{1}{n^2} \ln(nx+1) \right|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{\ln(n+1)}{n^2} \end{aligned}$$

olduğuna göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx^2}{nx+1} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{\ln(n+1)}{n^2} \right] = \frac{1}{2}$$

dir.

Buradan $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ olması nedeniyle sonuç gerçektir.

Şimdi de sonsuz gerçel fonksiyonlar serisinin düzgün yakınsaklığı üzerinde kısaca duralım.

TANIM 1.1.5 $U_n(x)$; $n=1,2,3,\dots$ fonksiyonlarının herbiri $a \leq x \leq b$ aralığı üzerinde tanımlı olmak üzere $U_n(x)$ gerçel fonksiyonlarının $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ serisi ile bu serinin

$$\begin{aligned}
f_1 &= U_1 \\
f_2 &= U_1 + U_2 \\
f_3 &= U_1 + U_2 + U_3 \\
&\vdots \\
f_n &= U_1 + U_2 + \dots + U_n
\end{aligned}$$

ile tanımlı $\langle f_n \rangle$ parçalı toplamlar dizisini gözününe alalım. Eğer $\langle f_n \rangle$ parçalı toplamlar dizisi $a \leq x \leq b$ üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsar ise $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ gerçel fonksiyonlar serisi $a \leq x \leq b$ üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsar.

TEOREM 1.1.3. (Weierstrass M testi)

$a \leq x \leq b$ aralığında her x ve herbir $n=1,2,3,\dots$ için $|U_n(x)| \leq M_n$ olacak şekilde gerçel fonksiyonlar serisi $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ olsun $\langle M_n \rangle$ pozitif sabitler dizisi $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ serisi yakınsak olacak şekilde bir dizi ise, bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ serisi $a \leq x \leq b$ üzerinde düzgün yakınsar. Bu teorem serinin düzgün yakınsaklığı için oldukça yararlı bir kriterdir.

ÖRNEK: $0 \leq x \leq 1$ aralığı üzerinde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

serisini gözününe alalım. $0 \leq x \leq 1$ aralığında her x ve herbir $n=1,2,3,$

için
$$\left| U_n(x) \right| = \left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} = M_n$$

dir.

Buradan $\langle \frac{1}{n} \rangle$ dizisi, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi yakınsak olacak şekilde bir dizinin olduğu için Weierstrass M testi (Teorem 1.1.3) nedeniyle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ serisi $0 \leq x \leq 1$ üzerinde düzgün yakınsar.

TEOREM 1.1.4. Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun bir

$$R: |x-x_0| \leq a, |y-y_0| \leq b$$

bölgesinde sürekli ise $f(x,y)$ fonksiyonu bu bölgede sınırlıdır.

KANIT: R bölgesi kapalı olduğundan, $f(x,y)$ fonksiyonu R üzerinde sınırlıdır. Bu nedenle $m = \inf_{p \in R} f(p) \leq f(p) \leq M = \sup_{p \in R} f(p)$ olacak şekilde "m" ve "M" gibi sınırlı iki sayı vardır ki, her $p \in R$ olmak koşulu ile;

$$m \leq f(p) \leq M \text{ dir.}$$

Her $p \in R$ için "M", $f(p)$ fonksiyonunun R üzerinde en küçük üst sınırı ve "m" de en büyük alt sınırı olduğunu varsayalım. Böylece $m \leq f(p) \leq M$ olur. Burada "M" nin azalmayan, "m" nin de artmayan bir değer olduğu açıktır. Eğer R bölgesi içinde her $p \in R$ olmak üzere, R içinde p_0 gibi bir nokta var ve $f(p_0) = M$ ise, f fonksiyonu için Max. değer R içindedir. Böyle bir p_0 noktası yok ise $f(p) < M$ dir. Şimdi

$$g(p) = \frac{1}{M-f(p)}$$

diyelim. Bu durumda payda hiçbir zaman sıfır olamayacağından $g(p)$, R bölgesinde süreklidir ve bu bölgede sınırlı olması gerekir. Eğer bu sınırı her $p \in R$ için $g(p) \leq A$ kabul edersek her $p \in R$ olmak üzere

$$\frac{1}{M-f(p)} \leq A \text{ olur. Buradan } f(p) \leq M - \frac{1}{A} \text{ dir.}$$

Bu ise f fonksiyonunun R üzerindeki en küçük üst sınırı olarak kabul edilen "m" değeri ile gelir. Böylece R bölgesinde $p_0 \in R$ olacak şekilde $f(p_0) = M$ gibi bir nokta bulunamaz. Benzer düşünce ile "m" de f fonksiyonunun R bölgesindeki en büyük alt sınırı olduğu gösterilebilir.

TEOREM 1.1.5. (Gronwall Eşitsizliği)

$\alpha \leq t \leq \beta$ aralığında,

$$f(t) \leq A + \int_{\alpha}^t f(s)g(s)ds, \quad (1.1.1)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde A pozitif bir sabit ve $f(t)$, $g(t)$ bu aralıkta negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olsun.

Bu koşullar altında $\alpha \leq t \leq \beta$ için;

$$f(t) \leq A \exp\left(\int_{\alpha}^t g(s)ds\right) \quad (1.1.2)$$

dir [7].

$$\text{KANIT: } U(t) = A + \int_{\alpha}^t f(s)g(s)ds \quad (1.1.3)$$

diyelim. Buna göre $U(\alpha) = A + \int_{\alpha}^{\alpha} f(s)g(s)ds = A$ olur.

Böylece (1.1.1) nedeniyle

$$f(t) \leq U(t) \quad (1.1.4)$$

bulunur. İntegral altında türev alma özeliği (1.1.3) e uygulanırsa

$$U'(t) = f(t)g(t) \leq U(t)g(t); \quad \alpha \leq t \leq \beta \text{ elde edilir. Şimdi}$$

(1.1.2) eşitsizliğinin her iki yanını

$$\frac{f(t)}{e^{\int_{\alpha}^t g(s)ds}} \leq \frac{U(t)}{e^{\int_{\alpha}^t g(s)ds}} \leq A \text{ bulunur.}$$

$e^{\int_{\alpha}^t g(s)ds}$ negatif ve sıfır olmayan bir çarpan olduğu için (1.1.4) eşitsizliği yardımı ile, $f(t)e^{\int_{\alpha}^t g(s)ds} \leq U(t)e^{\int_{\alpha}^t g(s)ds} \leq A$ olur.

Son iki beşantı alınarak;

$$\frac{d}{dt} \left[U(t) e^{\int_{\alpha}^t g(s)ds} \right] \leq 0 \text{ bulunur. Buradan;}$$

$$\int_{\alpha}^t \frac{d}{dt} \left[U(t) e^{\int_{\alpha}^t g(s)ds} \right] dt \leq 0 \text{ nedeniyle}$$

$$U(t) e^{\int_{\alpha}^t g(s)ds} - U(\alpha) \leq 0 \text{ yada } U(t) \leq U(\alpha) e^{\int_{\alpha}^t g(s)ds} \text{ elde edilir.}$$

$f(t) \leq U(t)$ ve $U(\alpha) = A$ olduğundan $f(t) \leq U(t) \leq A e^{\int_{\alpha}^t g(s)ds}$, $\alpha \leq t \leq \beta$ şeklinde (1.1.2) eşitsizliğinin varlığı gösterilmiş olur.

1.2. LINEER BAĞIMLILIK VE LINEER BAĞIMSIZLIK

TANIM 1.2.1. φ_1, φ_2 bir $I: |x-x_0| \leq a$ aralığı üzerinde tanımlı iki fonksiyon olmak üzere, bu fonksiyonların I üzerinde lineer bağımlı olmaları C_1, C_2 sabitlerinin her ikisi birden 0 olmamak koşulu ile her $x \in I$ için

$$C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) = 0 \quad (1.2.1)$$

olması ile eşdeğerlidir [5]. (1.2.1) eşitliği ancak ve ancak $C_1 = C_2 = 0$ için sağlanıyorsa bu durumda φ_1 ve φ_2 fonksiyonları I üzerinde lineer bağımsızdır denir.

TEOREM 1.2.1. Bir $I: |x-x_0| \leq a$ aralığı üzerinde $L(y)=0$ denkleminin φ_1, φ_2 çözümlerinin lineer bağımsız olmaları için gerek ve yeter koşul her $x \in I$ için $W(\varphi_1, \varphi_2)(x) \neq 0$ dir.

KANIT: Önce her $x \in I$ için ve C_1, C_2 birer sabitler olmak üzere, $W(\varphi_1, \varphi_2)(x) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Böylece;

$$C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) = 0 \quad (1.2.2)$$

$$C_1 \varphi_1'(x) + C_2 \varphi_2'(x) = 0$$

olur. Bu ise C_1 ve C_2 için lineer homogen bir denklem sistemidir. Bu sistemin katsayılar determinantı;

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} \neq 0 \text{ olduğundan}$$

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \varphi_2 \\ 0 & \varphi_2' \end{vmatrix}}{W} = 0 \cdot C_2 = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \varphi_1' & 0 \end{vmatrix}}{W} = 0 \text{ dir. Sonuç olarak,}$$

φ_1, φ_2 I üzerinde lineer bağımsızdır.

Şimdi de karşıt olarak φ_1, φ_2 nin I üzerinde lineer bağımsız olduklarını kabul edelim. Bu durumda, I aralığı üzerinde x_0 noktasının $W(\varphi_1, \varphi_2)(x_0) = 0$ olacak şekilde bir nokta olduğunu varsayalım. Böylece (1.2.2) sistemi;

$$C_1 \Phi_1(x_1) + C_2 \Phi_2(x_1) = 0$$

$$C_1 \Phi_1'(x_1) + C_2 \Phi_2'(x_1) = 0$$

(1.2.3)

formuna girer. Bu sistemde en az biri 0 dan farklı olmak üzere C_1 ve C_2 sabitlerinin bulunması gerekir. Böylece C_1 ve C_2 sabitleri için $\Psi = C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2$ olacak şekilde bir Ψ fonksiyonunun varlığını gözönüne alalım. Φ_1, Φ_2 nin her biri $L(y)=0$ homogen lineer diferensiyel denklemin bir çözümü olduğuna göre, C_1 ve C_2 sabitler olmak üzere $C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2$ de bu denklemin bir çözümüdür. Bu nedenle $L(\Psi)=0$ olur. Ayrıca (1.2.3) sistemi nedeniyle $\Psi(x_1)=0, \Psi'(x_1)=0$ dir. Teklik teoreminden dolayı, I aralığındaki her x için $\Psi(x)=0$ olur. Böylece,

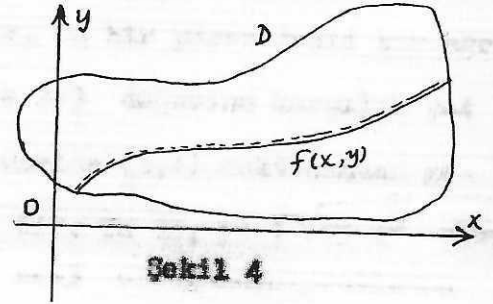
$$C_1 \Phi_1(x) + C_2 \Phi_2(x) = 0 \text{ bulunur.}$$

Bu ise Φ_1 ve Φ_2 nin I üzerinde lineer bağımsız olmaları ile çelişir. Sonuç olarak I aralığı üzerinde $W(\Phi_1, \Phi_2)(x_1)=0$ olacak biçimde bir x_1 noktesinin varlığı olaneksizdir. Ohalde I aralığı üzerinde her x için $W(\Phi_1, \Phi_2)(x) \neq 0$ dir.

2.1 BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN

BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ

TANIM 2.1.1 $f(x,y)$ fonksiyonu,
(x y) düzlemindeki açık bağlantılı bir
D bölgesinde x ve y ye göre sürekli
olmak üzere birinci mertebeden



Şekil 4

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad (2.1.1)$$

diferansiyel denklemini gözönüne alalım. $(x_0, y_0) \in D$ olmak üzere x_0 noktasında içinde bulunduran bir $I: |x-x_0| \leq a$ gerçel aralığında (2.1.1) denkleminin çözümlü olan ϕ fonksiyonu, $\phi(x_0) = y_0$ olacak biçimde başlangıç koşulunda sağlıyor ise, bu problem kısaca

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (2.1.2)$$

biçiminde yazılabilir [9]. Böylece çözüm olan ϕ fonksiyonu yalnız (2.1.1) denklemini değil aynı zamanda x in x_0 değerine karşılık y de y_0 değerini alarak, $\phi(x_0) = y_0$ başlangıç koşulunda sağlar. ϕ çözümünü bulma işlemi (2.1.1) denkleminin özelliğine bağlıdır. Birinci mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlü bir parametrelili integral eğri-leri ailesi gösterir. Bulunan bir parametrelili bu integral eğri ailesi bulunduğundan sonra başlangıç koşulunun uygulanması ile istenilen noktadan geçen özel bir tek integral eğrisi elde edilir. Böylece başlangıç değer problemi, verilen bir (x_0, y_0) noktasından geçen bir özel integral eğrisinin denklemini bulma işlemidir.

ÖRNEK:
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad , \quad y(3) = 4$$

başlangıç değer probleminin çözümüne elalım. Verilen diferensiyel denkleminin çözümü kapalı biçimde, $x^2 + y^2 = C$ dir. Bu bir parametrelili bir eğri ailesi gösterir. Başlangıç koşulu gereğince $x=3$ değerine karşılık $y=4$ olmalıdır. Böylece $9+16=C$ veya $25=C$ olur. Onda $(3,4)$ noktasından geçen integral eğrisinin denklemi $x^2 + y^2 = 25$ dir. Ya da, $y = \pm \sqrt{25-x^2}$ olur. Başlangıç koşulunda $y=4$ değerine karşın, $x=3$ olduğundan problemin çözümü olan $\Phi(x)$ fonksiyonu,

$$\Phi(x) = \sqrt{25-x^2} \quad -5 < x < 5$$

şeklinde gösterilir. Çözümlerin varlığı ve tekliği üzerinde ilerde durulacaktır.

2.2 İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DENKLEMLER İÇİN BAŞLANGIÇ DEĞER

PROBLEMİ

TEOREM 2.2.1 a_1, a_2 birer sabitler olmak üzere

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (2.2.1)$$

$$\Phi(x_0) = \alpha, \quad \Phi'(x_0) = \beta$$

başlangıç değer probleminin, $-\infty < x < \infty$ aralığındaki gerçel bir x_0 noktasında bir Φ çözümü vardır [5].

KANIT: (2.2.1) de verilen denklemin $r_1 \neq r_2$ için,

$$\Phi_1(x) = e^{r_1 x}, \quad \Phi_2(x) = e^{r_2 x} \quad (2.2.2)$$

gibi iki ayrı çözümü veya $r_1 = r_2$ için,

$$\Phi_1(x) = e^{r_1 x}, \quad \Phi_2(x) = x e^{r_1 x} \quad (2.2.3)$$

gibi iki çözümü olsun. Göstereceğiz ki; C_1 ve C_2 birer sabitler olmak üzere bu çözüm,

$$\Phi = C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2 \quad (2.2.4)$$

şeklinde tek biçimde gösterilir.

Φ_1 ve Φ_2 , (2.2.1) denkleminin birer çözümleri olup, başlangıç koşullarında sağlayacaklarından;

$$\begin{aligned} C_1 \Phi_1(x_0) + C_2 \Phi_2(x_0) &= \alpha \\ C_1 \Phi_1'(x_0) + C_2 \Phi_2'(x_0) &= \beta \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

biçiminde bir sistem elde edilir. Bu sistemin C_1 ve C_2 gibi bir tek çözümlü olması için gerek ve yeter koşul;

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Phi_1(x_0) & \Phi_2(x_0) \\ \Phi_1'(x_0) & \Phi_2'(x_0) \end{vmatrix} = \Phi_1(x_0) \Phi_2'(x_0) - \Phi_1'(x_0) \Phi_2(x_0) \neq 0$$

olmasıdır. $r_1 \neq r_2$ olması durumunu göz önüne alarak (2.2.2) deki çözümleri alalım.

$$\begin{aligned} \Delta &= r_2 e^{r_1 x_0} e^{r_2 x_0} - r_1 e^{r_1 x_0} e^{r_2 x_0} = r_2 e^{(r_1+r_2)x_0} - r_1 e^{(r_1+r_2)x_0} \\ &= (r_2 - r_1) e^{(r_1+r_2)x_0} \text{ olur. } r_1 \neq r_2 \text{ ve ikinci çarpan olan } e^{(r_1+r_2)x_0} \end{aligned}$$

olduğundan $\Delta \neq 0$ dir.

Şimdide $r_1 = r_2$ olması durumunu gözönüne alalım.

$$\begin{aligned} \Delta &= e^{r_1 x} (e^{r_1 x} + x r_1 e^{r_1 x}) - x r_1 e^{2r_1 x} \\ &= e^{2r_1 x} + x r_1 e^{2r_1 x} - x r_1 e^{2r_1 x} = e^{2r_1 x} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Burada $e^{2r_1 x}$ üslü terimi x in her değeri için sıfırdan farklıdır. Böylece her iki halde de $\Delta \neq 0$ koşulu gerçekleşmiş olur. Eğer C_1 ve C_2 , (2.2.5) sistemini sağlayacak biçimde tek türlü belirlenen sabitler ise; $\Phi = C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2$ fonksiyonu, başlangıç koşulları olan, $\Phi(x_0) = \alpha$,

$\Phi'(x_0) = \beta$ bağıntılarına da sağlayan, aranan çözüm fonksiyonudur.

Böylece $L(y) = 0$, $y(x_0) = \alpha$, $y'(x_0) = \beta$ başlangıç değer probleminin çözümleri olan Φ_1 ve Φ_2 nin lineer kombinasyonu tek türlü belirlenir.

Bununla birlikte bu gözlemin tek olduğu kesin olarak belli değildir. Öncelikle, $L(y)=0$ denkleminin çözümü olan bir Φ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin geometrik olarak değişimini inceleyelim;

$$L(y)=y''+a_1y'+a_2y=0 \quad \text{linear denkleminde}$$

$$y_1=y, y_2=y' \quad \text{konumu ile } y_1'=y_2, y_2'=-a_2y_1-a_1y_2$$

oldu edilir. Buradan birinci mertebeden

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (2.2.6)$$

ya da kısaca $y'=Ay$ biçiminde vektörel diferensiyel denkleminde verilir.

Bu sistemde A matrisinin normu;

$$\|A\|_0 = \sum |a_{ij}| = 1 + |a_2| + |a_1| = k \quad \text{dir.}$$

$y_1 = y = \Phi, y_2 = y' = \Phi'$ değişimi ile

$$\Phi = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi' \end{pmatrix} \quad \text{olur. Şimdi de } \Phi \text{ vektör fonksiyonunun}$$

normu alınır ise,

$$\|\Phi\|_2 = \left[|\Phi|^2 + |\Phi'|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.7)$$

olur. Ayrıca ileride, teoremlerin kanıtında kullanılacak olan bir eşitsizlikten söz edelim:

b ve c birer sabitler olmak üzere

$$2|b||c| \leq |b|^2 + |c|^2 \quad \text{dir. Gerçekten,}$$

$$0 \leq (|b| - |c|)^2 = |b|^2 + |c|^2 - 2|b||c| \quad \text{yazılabilir. Buradan}$$

$$2|b||c| \leq |b|^2 + |c|^2 \quad (2.2.8)$$

olur. Bu ön bilgilerden sonra aşağıdaki teoremler verilebilir:

TEOREM 2.2.2. Verilen bir, x_0 noktasını içersinde bulunduran bir I aralığı üzerinde,

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

denkleminin bir çözümü Φ olsun. Buradan her $x \in I$ için,

$$\|\Phi(x)\| = \left[|\Phi(x)|^2 + |\Phi'(x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{ve}$$

$k = 1 + |a_1| + |a_2|$ olması koşulu ile;

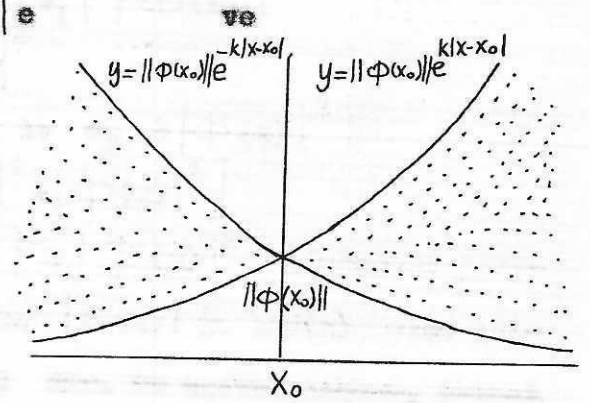
$$\|\Phi(x_0)\| e^{-k|x-x_0|} \leq \|\Phi(x)\| \leq \|\Phi(x_0)\| e^{k|x-x_0|} \quad (2.2.9)$$

eşitsizliği geçerlidir [5].

Geometrik olarak bu eşitsizliğin anlamı,

$$\|\Phi(x)\| \text{ her zaman } y = \|\Phi(x_0)\| e^{-k|x-x_0|} \text{ ve } y = \|\Phi(x_0)\| e^{k|x-x_0|} \text{ eğrileri}$$

arasında bulunur. Bu bölge şekil 5 deki iki eğri arasındaki kısımdır. Geometrik anlamını böylece belirttikten sonra teoremin kanıtına geçelim.



Şekil 5

KANIT: $U(x) = \|\Phi(x)\|^2$ diyelim. Bu genel durumu ile $\Phi(x)$ çözümünün karmaşık bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Karmaşık fonksiyonların norm tanımı gereğince (2.2.7) bağıntısını

$$U = \Phi \bar{\Phi} + \Phi' \bar{\Phi}'$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan U karmaşık fonksiyonunun türevini alalım.

$$U' = \Phi' \bar{\Phi} + \Phi \bar{\Phi}' + \Phi'' \bar{\Phi}' + \Phi' \bar{\Phi}'' \quad (2.2.10)$$

olur. Karmaşık Φ ve $\bar{\Phi}$ fonksiyonları için;

$\bar{\phi}' = \overline{\phi}'$ ve $|\phi(x)| = |\overline{\phi}(x)|$ olduğu aşkıtır.

(2.2.8) Özeliği (2.2.10) bağıntısına uygulanırsa,

$$|U'(x)| \leq 2|\phi(x)| |\phi'(x)| + 2|\phi'(x)| |\phi''(x)| \quad (2.2.11)$$

olur. ϕ , çözümlü olduğundan denklemleri sağlar ve $L(\phi) = 0$ olur.

(2.2.6) da $\phi'' = -a_1\phi' - a_2\phi$ eşitliği, (2.2.8) Özeliği kullanılarak,

$|\phi''(x)| \leq |a_1| |\phi'(x)| + |a_2| |\phi(x)|$ biçiminde yazılabilir. Bu $\phi''(x)$ değeri (2.2.11) de yerine konursa,

$$\begin{aligned} |U'(x)| &\leq 2|\phi(x)| |\phi'(x)| + 2|\phi'(x)| \left[|a_1| |\phi'(x)| + |a_2| |\phi(x)| \right] \\ &\leq 2|\phi(x)| |\phi'(x)| + 2|a_1| |\phi'(x)|^2 + 2|a_2| |\phi'(x)| |\phi(x)| \end{aligned}$$

olur. Şimdi bu eşitsizlikte (2.2.8) Özeliğini kullanalım:

$$\begin{aligned} |U'(x)| &\leq |\phi(x)|^2 + |\phi'(x)|^2 + 2|a_1| |\phi'(x)|^2 \\ &\quad + |a_2| |\phi'(x)|^2 + |a_2| |\phi(x)|^2 \\ &= (1 + 2|a_1| + |a_2|) |\phi'(x)|^2 + (1 + |a_2|) |\phi(x)|^2 \\ &\leq 2(1 + |a_1| + |a_2|) \left[|\phi'(x)|^2 + |\phi(x)|^2 \right] \end{aligned}$$

Burada $1 + |a_1| + |a_2|$ ve $\left[|\phi'(x)|^2 + |\phi(x)|^2 \right]$ ifadeleri yerine sırasıyla k ve U değerleri konulursa $|U'(x)| \leq 2kU(x)$ elde edilir. Buradan $-2kU(x) \leq U'(x) \leq 2kU(x)$ dir. Bu eşitsizlikten, ikinci eşitsizlik gözönüne alınır ise, $U'(x) - 2kU(x) \leq 0$ şeklinde U için birinci mertebeden lineer diferensiyel denklem elde edilir.

Denklemin integral çarpanı e^{-2kx} olup;

$e^{-2kx}(U' - 2kU) = (e^{-2kx} U)'$ ≤ 0 dir. $x > x_0$ alınarak, x_0 dan x e kadar integre edilirse, $e^{-2kx} U(x) - e^{-2kx_0} U(x_0) \leq 0$ ya da $U(x) \leq U(x_0) e^{2k(x-x_0)}$ elde edilir. Şimdi $U(x)$ ve $U(x_0)$ yerlerine değerleri yazılırsa,

$$\|\phi(x)\| \leq \|\phi(x_0)\| e^{k(x-x_0)} \quad (x > x_0) \text{ elde edilir.}$$

Benzer şekilde $0 \leq U'(x) + 2kU(x)$ eşitsizliği alınırsa bu kez de,

$$\|\Phi(x_0)\| e^{-k(x-x_0)} \leq \|\Phi(x)\| \quad (x > x_0 \text{ için}) \text{ bulunur.}$$

Böylece (2.2.9) eşitsizliğinin varlığı kanıtlanmış olur. Benzer düşünce ile $x < x_0$ için de uygulanabilir. Bu zamanda,

$$\|\Phi(x_0)\| e^{k(x-x_0)} \leq \|\Phi(x)\| \leq \|\Phi(x_0)\| e^{-k(x-x_0)} \quad (x < x_0 \text{ için})$$

elde edilir. Şimdide (2.2.1) başlangıç değer probleminin çözümlü olan Φ fonksiyonunun tek olduğunu gösterelim.

TEOREM 2.2.3 α, β herhangi iki sabit ve x_0 da gerçel bir sayı olsun. x_0 noktasını kapsayan herhangi bir I aralığı üzerinde,

$$L(y) = 0, \quad y(x_0) = \alpha, \quad y'(x_0) = \beta$$

başlangıç değer probleminin en fazla bir Φ çözümlü vardır [5].

KANIT: Φ ve Ψ nin I üzerinde verilen başlangıç değer probleminin iki farklı çözümlü olduklarını varsayalım, $\eta = \Phi - \Psi$ olsun.

Φ ve Ψ birer çözüm olduklarından Teorem 2.2.1 gereğince bunların lineer kombinasyonu da homogen lineer denklemin bir çözümlüdür. Böylece

$$L(\eta) = L(\Phi) - L(\Psi) = 0 \text{ ve}$$

$$\eta(x_0) = \Phi(x_0) - \Psi(x_0) = \alpha - \alpha = 0$$

$$\eta'(x_0) = \Phi'(x_0) - \Psi'(x_0) = \beta - \beta = 0$$

olur. Bu ise $\|\eta(x_0)\| = 0$ olmasını gerektirir. Gerçekten

$$\|\eta(x_0)\| = \left[|\eta(x_0)|^2 + |\eta'(x_0)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ dir. Buradan da}$$

$$(2.2.9) \text{ nedeniyle, } \|\eta(x_0)\| e^{-k(x-x_0)} \leq \|\eta(x)\| \leq \|\eta(x_0)\| e^{k(x-x_0)}$$

olur. Sonuç olarak $0 \leq \|\eta(x)\| \leq 0$ bulunur. Bu ise her $x \in I$ için

$$\|\eta(x)\| = 0 \text{ olmasını gerektirir. Buradanda } \eta(x) = 0 \text{ olur.}$$

$\eta(x)=0$ olması $\Phi(x)=\Psi(x)$ olmasını gerektireceğinden kanıt tamamlanmış olur. (2.2.1) başlangıç değer probleminde, a_1, a_2 katsayıları birer sabitler değilse, bir I aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar ise; Teorem 2.2.2 ve Teorem 2.2.3 bu hal içinde doğrudur.

$a_1(x), a_2(x)$, bir I aralığı üzerinde her $x \in I$ için birer sürekli fonksiyonlar olmak üzere $|a_1(x)| \leq b_1$ olacak şekilde b_1, b_2 gibi sabitler bulunabilir. Böylece, I aralığı üzerindeki bir x_0 noktasında $L(y)=0$ denkleminin,

$$k = 1 + b_1 + b_2 \quad \text{ve}$$

$$\|\Phi(x_0)\| e^{-k(x-x_0)} \leq \|\Phi(x)\| \leq \|\Phi(x_0)\| e^{k(x-x_0)},$$

koşullarına sağlayacak biçimde bir Φ çözümlü vardır. a_1 ve a_2 yerine sırası ile b_1 ve b_2 değerleri konarak, Teorem 2.2.2 ve Teorem 2.2.3 deki yöntem olduğu gibi uygulanabilir.

2.3 n yinci MÜRTEBEDEN LİNEER DENKLEMLER İÇİN BAŞLANGIÇ

DEĞER PROBLEMİ

a_1, a_2, \dots, a_n ler birer sabitler olmak üzere n yinci mertebeden sabit katsayılı bir lineer denklem genel olarak;

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b(x) \quad (2.3.1)$$

biçimindedir. İkinci mertebeden denklemler için başlangıç değer probleminde yapılan işlemlerin benzeri, n yinci mertebeye için genelleştirilerek aynı uygulanabilir.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ler birer sabitler olsun. x_0 gerçel sayı bir I gerçel aralığında bulunmak üzere, n yinci mertebeden $L(y)=0$ lineer homogen denklemin,

$$\Phi(x_0) = \alpha_1, \Phi'(x_0) = \alpha_2, \dots, \Phi^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n \quad (2.3.2)$$

koşullarına gerçekleyen bir çözümü Φ olsun. Bu başlangıç değer problemi kısaca,

$$L(y)=0; y(x_0)=\alpha_1, y'(x_0)=\alpha_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0)=\alpha_n \quad (2.3.3)$$

şeklinde gösterilir. (2.3.3) başlangıç değer problemi tanımlanan I aralığı üzerinde bir Φ çözümüne sahiptir [5].

TEOREM 2.3.1 x_0 noktasına kapsayan bir I aralığı üzerinde $L(y)=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_ny=0$ denkleminin herhangi bir çözümü Φ olsun. Bu durumda

$$k=1+|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n| \quad (2.3.4)$$

olmak üzere her $x \in I$ için;

$$\|\Phi(x_0)\| e^{-k|x-x_0|} \leq \|\Phi(x)\| \leq \|\Phi(x_0)\| e^{k|x-x_0|} \quad (2.3.5)$$

eşitsizliği geçerlidir.

KANIT:

$$L(y)=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=0$$

lineer homogen denklemini birinci mertebeden lineer denklem sistemine indirgeyelim. Bunun için; $x_1=y, x_2=y', x_3=y'', \dots, x_n=y^{(n-1)}$, değişken değişimi ile;

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n \quad (2.3.6)$$

sistemi elde edilir. Bu sistem, $X=(x_1, x_2, \dots, x_n), Y=(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ olmak üzere genel olarak $X' = P(X, Y)$ şeklinde yazılabilir. Bu sistem matris gösterimi olarak

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

yada $x' = AX$ biçiminde yazılabilir.

$$\|A\|_0 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \text{ dir. } k = 1 + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

diyelim. Φ denklemin çözümü olduğundan, (2.3.6) sistemini sağlayacağı açıktır. Buradan,

$$\begin{aligned} x_1 &= y = \Phi \\ x_1' &= x_2 = \Phi' \\ x_2' &= x_3 = \Phi'' \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n = \Phi^{(n-1)} \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

yazılabilir. Burada Φ çözümü,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi' \\ \vdots \\ \Phi^{(n-1)} \end{pmatrix} \text{ şeklinde } n \times 1 \text{ boyutlu bir kolon vektörüdür. Bu vektörün normu;}$$

$$\|\Phi\|_e = \left[|\Phi|^2 + |\Phi'|^2 + |\Phi''|^2 + \dots + |\Phi^{(n-1)}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ dir.}$$

Teorem 2.2.2 de olduğu gibi $U(x) = \|\Phi(x)\|^2$ diyelim. Φ nin karmaşık bir fonksiyon olduğunu varsayalım. Bu durumun doğruluğunu kanıtlanırsa, gerçel fonksiyon olması durumunda gösterilmiş olur. (2.2.7) bağıntısı nedeniyle,

$$U = \Phi \bar{\Phi} + \Phi' \bar{\Phi}' + \dots + \Phi^{(n-1)} \bar{\Phi}^{(n-1)} \quad (2.3.8)$$

$$\begin{aligned} \text{dir. Buradan } U' &= \Phi' \bar{\Phi} + \Phi'' \bar{\Phi}' + \dots + \Phi^{(n)} \bar{\Phi}^{(n-1)} \\ &+ \Phi \bar{\Phi}' + \Phi' \bar{\Phi}'' + \dots + \Phi^{(n-1)} \bar{\Phi}^{(n)} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik

$$|U'(x)| \leq |\phi| |\phi| + |\phi''| |\phi| + \dots + |\phi^{(n)}| |\phi^{(n-1)}| \\ + |\phi| |\phi| + |\phi| |\phi''| + \dots + |\phi^{(n-1)}| |\phi^{(n)}| \quad \text{yada} \\ |U'(x)| \leq 2|\phi(x)| |\phi'(x)| + 2|\phi'(x)| |\phi''(x)| + \dots \\ + 2|\phi^{(n-1)}(x)| |\phi^{(n)}(x)| \quad (2.3.9)$$

biçiminde yazılabilir. ϕ çözüm fonksiyonu $L(y)=0$ homogen denklemini sağlayacağından $L(\phi)=0$ olur. (2.3.6) bağıntısından

$$\phi^{(n)} = - \left[a_1 \phi^{(n-1)} + a_2 \phi^{(n-2)} + \dots + a_n \phi \right] \quad \text{ve}$$

$$|\phi^{(n)}(x)| \leq |a_1| |\phi^{(n-1)}(x)| + \dots + |a_n| |\phi| \quad (2.3.10)$$

elde edilir. (2.3.10) bağıntısı (2.3.9) eşitsizliğinde yerine konursa,

$$|U'(x)| \leq 2|\phi(x)| |\phi'(x)| + 2|\phi'(x)| |\phi''(x)| + \dots \\ + 2|\phi^{(n-2)}(x)| |\phi^{(n-1)}(x)| + 2|a_1| |\phi^{(n-1)}(x)|^2 + 2|a_2| |\phi^{(n-2)}(x)| |\phi^{(n-1)}(x)| \\ + \dots + 2|a_n| |\phi(x)| |\phi^{(n-1)}(x)| \quad (2.3.11)$$

bulunur. Şimdi (2.2.8) özeliği kullanılarak bu eşitsizlik,

$$|U'(x)| \leq (1+|a_n|) |\phi(x)|^2 + (2+|a_{n-1}|) |\phi'(x)|^2 + \dots + (2+|a_2|) |\phi^{(n-2)}(x)|^2 \\ + (1+2|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|) |\phi^{(n-1)}(x)|^2 \quad \text{yada}$$

$$|U'(x)| \leq 2(1+|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|) (|\phi(x)|^2 + |\phi'(x)|^2 + \dots + |\phi^{(n-1)}(x)|^2)$$

biçiminde yazılabilir. Eşitsizliğin ikinci yanındaki parantezler içinde bulunan ifadelerin özdeğeri olan k ve $U(x)$ değerleri yerlerine yazıldığında;

$$|U'(x)| \leq 2kU(x) \quad (2.3.12)$$

bağıntısı elde edilir. Bu ise daha açık olarak,

$$-2kU(x) \leq U'(x) \leq 2kU(x) \quad \text{şeklinde yazılabilir. Buradan}$$

$U'(x) - 2kU(x) \leq 0$ şeklinde birinci mertebeden bir lineer diferensiyel denklem elde edilir. Bunun kolaylıkla çözülebileceği açıktır. Benzer düşünce ile $0 \leq U'(x) + 2kU(x)$ denklemi elde edilir. Teorem 2.2.2 den hatırlanacağı gibi bu denklemler çözülür ve $x > x_0$ olmak üzere x_0 dan x e kadar integre edilirse

$$U(x) \leq U(x_0) e^{2k(x-x_0)} \quad \text{ve}$$

$$U(x_0) e^{-2k(x-x_0)} \leq U(x) \quad \text{bulunur. Buradan (2.3.5) bağıntısının varlığı kanıtlanmış olur. Şimdi bu } \Phi \text{ çözümünün I aralığında tek olduğunu kanıtlayalım [5].}$$

TEOREM 2.3.2 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ler sabitler ve x_0 herhangi bir sayı olsun. Bu durumda x_0 noktasını kapsayan herhangi bir I aralığı üzerinde $L(y)=0$ denkleminin

$$\Phi(x_0) = \alpha_1, \Phi'(x_0) = \alpha_2, \dots, \Phi^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n \quad (2.3.13)$$

koşullarını sağlayan bir tek Φ çözümü vardır.

KANIT: $L(y)=0$ denkleminin x_0 noktasında (2.3.13) koşullarını gerçekleyecek biçimde Φ ve Ψ gibi iki farklı çözümünün bulunduğunu varsayalım. Φ ve Ψ lineer bağımsız olduklarından bunların $\eta = \Phi - \Psi$ şeklindeki lineer birleşimi olan η fonksiyonu da,

$L(\eta)=0$ denkleminin bir çözümü olup $L(\eta)=0$ dir.

$$\eta(x_0) = \Phi(x_0) - \Psi(x_0) = \alpha_1 - \alpha_1 = 0$$

$$\eta'(x_0) = \Phi'(x_0) - \Psi'(x_0) = \alpha_2 - \alpha_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$\eta^{(n-1)}(x_0) = \Phi^{(n-1)}(x_0) - \Psi^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n - \alpha_n = 0$$

olacağından, $\|\eta(x_0)\| = 0$ olur. Bu ise her $x \in I$ için

$\|\eta(x)\| = 0$ olmasını gerektirir. Böylece her $x \in I$ için $\eta(x) = 0$

olduğundan $\phi(x) = \psi(x)$ olması gerektiği kanısına varılır. Böylece n yinci mertebeden sabit katsayılı lineer denklemler için

başlangıç değer probleminin çözümünün varlık ve tekliğinin kanıtı

tamamlanmış olur. Eğer (2.3.1) denklemi değişken katsayılı ve

$a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ katsayıları da I aralığı üzerinde sürekli

fonksiyonlar ise $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sabitler olmak üzere, I aralığı

üzerindeki bir x_0 gerçel noktasında;

$$\phi(x_0) = \alpha_1, \phi'(x_0) = \alpha_2, \dots, \phi^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n$$

koşullarını sağlayacak biçimde (2.3.1) denklemi yine ϕ gibi bir

çözüme sahiptir. I gerçel aralığı $a \leq x \leq b$ gibi kapalı bir aralık

olduğundan, bu aralıktaki sürekli olan $a_i(x)$ fonksiyonlarının

Teorem 1.1.4 gereğince bir üst sınırları vardır. Bu nedenle her $x \in I$ için $|a_i(x)| \leq b_i$ olacak biçimde b_i sabitleri belirlenebilir.

Teorem 2.3.1 ve Teorem 2.3.2 de ki kanıtlama yöntemlerinde

a_i ler yerine b_i sabitleri alınarak aynen uygulanır. Homogen olmayan $L(y) = b(x)$ lineer denkleminin çözümü ψ_p , $L(y) = b(x)$ denkleminin

özel çözümü ile $L(y) = 0$ homogen denkleminin genel çözümünün toplamıdır.

Eğer $L(y) = b(x)$ in bir özel çözümü ψ_p ve $L(y) = 0$ in çözümleride

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ ise $L(y) = b(x)$ denkleminin genel çözümü,

c_1, c_2, \dots, c_n sabitler olmak üzere,

$$\phi = \psi_p + c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 + \dots + c_n \phi_n \text{ biçimindedir.}$$

2.4 VEKTÖR DEĞERLİ DENKLEMLER İÇİN BAŞLANGIÇ DEĞER

PROBLEMİ

Bilgenleri sayılardan oluşan bir vektöre sabit vektör denir. Bilgenleri $[a, b]$ aralığında tanımlı olan gerçel fonksiyonlardan oluşan vektör de vektör değerli fonksiyon adını alır. Örneğin, bir $[a, b]$ aralığında diferensiyellenebilen $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)$ leri bilgen kabul eden nxl boyutlu vektör değerli fonksiyonu,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{pmatrix} \text{ biçiminde gösterilebilir.}$$

Her $t \in [a, b]$ için Φ nin türevi olan $\frac{d\Phi(t)}{dt}$ vektör fonksiyonu-

nu da,

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{d\phi_1(t)}{dt} \\ \frac{d\phi_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\phi_n(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

şeklinde nxl boyutlu kolon vektördür.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + F(t) \quad (2.4.1)$$

biçiminde ki her vektörel diferensiyel denklem; n değişken ve n denklemden oluşan lineer sisteme karşı gelir.

x_1, x_2, \dots, x_n ler n tane bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere birinci mertebeden n diferensiyel denklem sistemi,

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + F_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + F_2(t) \quad (2.4.2)$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + F_n(t)$$

şeklinde dir.

Bu sistemde,

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad F(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$$

olmak üzere (2.4.2) lineer sistemi, (2.4.1) vektörel diferensiyel denkleme indirgenmiş olur.

TEOREM 2.4.1. (2.4.1) vektörel diferensiyel denklemini gözönüne alalım. $A(t)$ matrisinin elemanları olan $a_{ij}(t)$, $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,n$ ve $F(t)$ kolon vektörünün bileşenleri olan $F_j(t)$, $j=1,2,\dots,n$ in her biri $a \leq t \leq b$ gerçel aralığında sürekli olsunlar. t_0 , $a \leq t_0 \leq b$ aralığında bir gerçel sayı olsun. C_1, C_2, \dots, C_n ler sabitler olmak üzere n xl boyutlu C kolon vektörünü,

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterelim.

Bu durumda (2.4.1) denkleminin

$$\Phi_1(t_0) = C_1, \quad \Phi_2(t_0) = C_2, \quad \dots, \quad \Phi_n(t_0) = C_n$$

olacak şekilde bir tek

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix}$$

çözümü vardır. Bu çözüm $a \leq t \leq b$ gerçel aralığında tanımlı ve sürekli dir.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (2.4.3)$$

homogen vektörel diferensiyel denklemin n lineer bağımsız çözümlü mü $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ ise; C_1, C_2, \dots, C_n sabitler olmak üzere

$$\Phi = \sum_{k=1}^n C_k \Phi_k \quad \text{vektör fonksiyonunda (2.4.3) ün bir çözümlüdür. Benzer şekilde eğer } \Phi_0, \text{ (2.4.1) denkleminin bir özel çözümlü ve } \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n \text{ lerde (2.4.3) homogen denkleminin } n \text{ lineer bağımsız çözümleri iseler; } C_1, C_2, \dots, C_n \text{ sabitler olmak üzere;}$$

$$\Phi_0 + \sum_{k=1}^n C_k \Phi_k \quad (2.4.4)$$

da (2.4.1) denkleminin bir çözümlüdür. C_1, C_2, \dots, C_n ler birer sabitler ve $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ lerde birer vektör fonksiyonu olmak üzere,

$$\sum_{k=1}^n C_k \Phi_k \quad (2.4.5)$$

çözüm fonksiyonu, (2.4.3) denklemini sağlar. Gerçekten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^n C_k \Phi_k(t) \right] &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} C_k \Phi_k(t) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n C_k \left[\frac{d\Phi_k(t)}{dt} \right] \end{aligned}$$

olur. Her bir Φ_k , (2.4.3.) denkleminin bir çözümlü olduğundan, $k=1, 2, \dots, n$ için

$$\frac{d\Phi_k(t)}{dt} = A(t) \Phi_k(t) \text{ ve } \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^n C_k \Phi_k(t) \right] = \sum_{k=1}^n C_k A(t) \Phi_k(t)$$

dır. Burada matris özellikleri kullanılırsa,

$$\sum_{k=1}^n C_k A(t) \Phi_k(t) = \sum_{k=1}^n A(t) \left[C_k \Phi_k(t) \right] = A(t) \sum_{k=1}^n C_k \Phi_k(t)$$

olur. Buradan

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^n C_k \Phi_k(t) \right] = A(t) \left[\sum_{k=1}^n C_k \Phi_k(t) \right] \text{ yazılabilir.}$$

Ohalde $a \leq t \leq b$ aralığındaki her t için $\frac{d\phi(t)}{dt} = A(t)\phi(t)$

olduğu sonucuna varılır. Benzer düşünce ile, (2.4.4) vektör fonksiyonunun, (2.4.1) denklemini sağladığı gösterilebilir:

C_1, C_2, \dots, C_n sabitler olmak üzere,

$$\frac{d}{dt} \left[\phi_0(t) + \sum_{k=1}^n C_k \phi_k(t) \right] = \frac{d\phi_0(t)}{dt} + \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^n C_k \phi_k(t) \right]$$

olur. ϕ_0 , (2.4.1) denkleminin bir özel çözümü olduğundan, denklemi sağlayacağı açıktır. Böylece;

$$\frac{d\phi_0(t)}{dt} = A(t)\phi_0(t) + F(t)$$

olur. Ayrıca (2.4.5) vektör fonksiyonunun (2.4.3) denklemini sağlaması ve ayrıca

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^n C_k \phi_k(t) \right] = A(t) \left[\sum_{k=1}^n C_k \phi_k(t) \right] \text{ olması nedeniyle}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\phi_0(t) + \sum_{k=1}^n C_k \phi_k(t) \right] = A(t)\phi_0(t) + F(t) + A(t) \left[\sum_{k=1}^n C_k \phi_k(t) \right]$$

$$= A(t) \left[\phi_0(t) + \sum_{k=1}^n C_k \phi_k(t) \right] + F(t) \text{ olur. Buradan}$$

$$\psi = \phi_0 + \sum_{k=1}^n C_k \phi_k \quad (2.4.6)$$

olmak üzere $\frac{d\psi(t)}{dt} = A(t)\psi(t) + F(t)$ şeklinde yazılabilir.

Ohalde (2.4.6) vektör fonksiyonu (2.4.1) nin bir çözümüdür. Keza birinci mertebeden n denklemden oluşan,

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

şeklinde $n+1$ değişkenli sistem, bir vektörel diferensiyel denkleme indirgenebilir. Buradanda f_1, f_2, \dots, f_n lerin herbiri $(n+1)$ boyutlu bir R uzaya içinde sürekli fonksiyonlardır. (2.4.7) sistemi,

$$Y' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

olmak üzere birinci mertebeden $Y' = F(x, Y)$ biçiminde yazılabilir.

R uzaya içinde,

$$D_{n+1} : |x - x_0| \leq a, |y_1 - y_1^0| \leq b_1, \dots, |y_n - y_n^0| \leq b_n$$

bölgesinde f_1, f_2, \dots, f_n fonksiyonlarının her biri sürekli olduklarından bunların birer üst sınırları vardır. Ayrıca bu fonksiyonların her-

biri $I: |x - x_0| \leq a$ aralığında

$$\Phi_1(x_0) = b_1, \Phi_2(x_0) = b_2, \dots, \Phi_n(x_0) = b_n$$

başlangıç koşullarını sağladıklarından problem daha önce incelenen forma indirgenir.

2.5 LIPSCHITZ KOŞULU

TANIM 2.5.1. XY düzleminde bir D bölgesi gözetelim (kısım 2.1, şekil 4). $f(x, y)$, D bölgesi içinde her (x, y) çifti için tanımlı bir fonksiyon olsun. D bölgesi üzerinde

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2| \quad (2.5.1)$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti bulunabiliyor ise, f fonksiyonu D üzerinde bir Lipschitz koşulunu sağlıyor denir.

TEOREM 2.5.1. D bölgesinin

$$|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, (a, b > 0) \text{ dikdörtgenel yada}$$

$$|x - x_0| \leq a, |y| < \infty, (a > 0) \text{ şeklinde bir şerit bölge}$$

olduğunu varsayalım. Ayrıca $f(x, y)$ fonksiyonunun D bölgesinde

sürekli gerçel değerli ve D de her (x,y) için

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| \leq K \quad (2.5.2)$$

olsun. Bu durumda f fonksiyonu K sabitli bir Lipschitz koşulunu sağlar.

KANIT:

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = \int_{y_2}^{y_1} \frac{\partial f}{\partial y}(x,t) dt$$

yazılabilir. Buradan her $(x,y_1), (x,y_2) \in D$ için

$$\left| f(x,y_1) - f(x,y_2) \right| \leq \int_{y_2}^{y_1} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,t) \right| dt \leq K |y_1 - y_2| \text{ elde edilir.}$$

Şimdi de vektör değerli fonksiyonlar ve denklem sistemleri için, Lipschitz koşulunun varlığına ilişkin tanım ve teoremleri verelim:

TANIM 2.5.2.

$$D_{n+1} = \left\{ (t, y_1, y_2, \dots, y_n) \mid |t - t_0| \leq r_0, |y_1 - a_1| \leq r_1, \dots, |y_n - a_n| \leq r_n \right\}$$

uzayı içinde, her $(t, y_1), (t, y_2), \dots \in D$ olmak üzere;

$$\| f(t, y_1) - f(t, y_2) \| \leq K \| y_1 - y_2 \| \text{ koşulunu gerçekleyecek biçim de}$$

bir K sabiti bulunabiliyor ise, $F(t, Y)$ fonksiyonu D için de bir Lipschitz koşulunu sağlıyor denir.

TEOREM 2.5.2.

$$D_{n+1} = \left\{ (t, y_1, y_2, \dots, y_n) \mid |t - t_0| \leq r_0, |y_1 - a_1| \leq r_1, \dots, |y_n - a_n| \leq r_n \right\}$$

$(n+1)$ boyutlu uzayı içinde, $F(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ fonksiyonunun kendisi bu uzay içinde sürekli ve her bir y_1, y_2, \dots, y_n değişkenine göre kısmi türevleri tanımlı ve sürekli ise, F fonksiyonu D_{n+1} içinde bir Lipschitz koşulunu sağlar [4].

KANIT: Kolay anlaşılması için F ve Y nin iki bileşenli $f_1(t, y_1, y_2)$ ve $f_2(t, y_1, y_2)$ durumuna gözününe alalım.

Böylece $y_1=(y_{11}, y_{12})$ ve $y_2=(y_{21}, y_{22})$ D_3 içerisinde bulunur. Buradan;

$$\|F(t, y_1) - F(t, y_2)\| \leq \left| f_1(t, y_{11}, y_{12}) - f_1(t, y_{21}, y_{22}) \right| + \left| f_2(t, y_{11}, y_{12}) - f_2(t, y_{21}, y_{22}) \right| \text{ olur.}$$

Ortalama değer teoremi nedeniyle;

$$f_1(t, y_{11}, y_{12}) - f_1(t, y_{21}, y_{22}) = \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y_{11} - y_{21}) + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(y_{12} - y_{22})$$

$$f_2(t, y_{11}, y_{12}) - f_2(t, y_{21}, y_{22}) = \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(y_{11} - y_{21}) + \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(y_{12} - y_{22}) \text{ dir.}$$

Her defasında hesaplanan kısmi türevler D_3 içinde Y_1 ile Y_2 arasında kalır. Dolayısıyla kısmi türevler D_3 içinde sürekli. Kapalı bir bölge de sürekli olan her fonksiyonun Teorem 1.1.4 nedeniyle bir üst sınıra vardır. Bu değer M olsun. Böylece

$$\|F(t, Y_1) - F(t, Y_2)\| \leq 2M |y_{11} - y_{21}| + 2M |y_{12} - y_{22}| \leq 4M \max[|y_{11} - y_{21}|, |y_{12} - y_{22}|] \leq 4M \|Y_1 - Y_2\|$$

bulunur. Benzer düşüncenin bileşen için genelleştirilebileceği açıktır.

TEOREM 2.5.3. $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere, bir $f(x, Y)$ vektör değerli fonksiyonu;

$$S: |x - x_0| \leq a, |Y - Y_0| \leq b \quad (a, b > 0)$$

$$\text{yada } |x - x_0| \leq a, |y| < \infty \quad (a > 0)$$

bölgesinde tanımlı olsun. Eğer $k=1, 2, \dots, n$ için $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ kısmi türevler:

de S üzerinde tanımlı ve sürekli ise, S içindeki her (x, Y) için

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y_k}(x, Y) \right| \leq K \quad (2.5.3)$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti vardır. Bu K değeri f fonksiyonunun S üzerinde sağladığı bir Lipschitz sabitidir.

KANIT: (x, Y) ve (x, Z) , S içinde sabit noktalar olsun.

$0 \leq S \leq 1$ gerçel sayı için tanımlanan vektör değerli F fonksiyonu,

$F(s) = f(x, Z + s(Y - Z))$, ($0 \leq s \leq 1$) biçiminde belirliyelim. $0 \leq s \leq 1$ için, $(x, Z + s(Y - Z))$ noktaları S içinde bulunacağından, f smeca yönelik tamamla bir fonksiyondur. Açık olarak, $|x - x_0| \leq a$ ve $|Y - Y_0| \leq b$,

$|Z - Y_0| \leq b$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned} \|Z + s(Y - Z) - Y_0\| &= \|Z + sY - sZ - sY_0 + sY_0 - Y_0\| = \|(1-s)(Z - Y_0) + s(Y - Y_0)\| \\ &\leq (1-s)\|Z - Y_0\| + s\|Y - Y_0\| \leq (1-s)b + sb = b \text{ dir.} \end{aligned}$$

$\|Y\| < \infty$, $\|Z\| < \infty$ ise,

$$\|Z + s(Y - Z)\| \leq (1-s)\|Z\| + s\|Y\| \leq \|Z\| + \|Y\| < \infty \text{ olur.}$$

Öte yandan $Y = (y_1, \dots, y_n)$, $Z = (z_1, \dots, z_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F'(s) &= (y_1 - z_1) \frac{\partial f}{\partial y_1}(x, Z + s(Y - Z)) + \dots \\ &\quad + (y_n - z_n) \frac{\partial f}{\partial y_n}(x, Z + s(Y - Z)) \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

dir. Buradan (2.5.3) kullanılırsa

$$\|F'(s)\| \leq K |y_1 - z_1| + K |y_2 - z_2| + \dots + K |y_n - z_n|, \text{ yada kısaca}$$

$$\|F'(s)\| \leq K \|Y - Z\|, \quad (0 \leq s \leq 1) \text{ bulunur. Böylece}$$

$$f(x, Y) - f(x, Z) = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(s) ds \text{ olduğundan}$$

$$\|f(x, Y) - f(x, Z)\| = \left\| \int_0^1 F'(s) ds \right\| \leq \int_0^1 \|F'(s)\| ds = K \|Y - Z\| \text{ sonucuna}$$

varılarak kanıt tamamlanmış olur.

ÖRNEK 1

$$f(x, Y) = (3x + 2y_1 + y_1 - y_2)$$

fonksiyonu, $S: |x| < \infty$, $|y| < \infty$ bölgesi üzerinde bir Lipschitz

kogulumu sağlar. Gerçekten

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}(x, Y) = (2, 1), \quad \frac{\partial f}{\partial y_2}(x, Y) = (0, -1) \text{ ve}$$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y_1}(x, Y) \right\| = 3, \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial y_2}(x, Y) \right\| = 1 \text{ dir. Ohalde } f \text{ fonksiyonu}$$

S üzerinde $K=3$ Lipschitz sabitli bir Lipschitz kogulumu sağlar.

Bu sonucun geçerliliği aşağıdaki şekilde de gösterilebilir:

$$\begin{aligned}
 \|f(x, Y) - f(x, Z)\| &= \|2(y_1 - z_1) \cdot (y_1 - z_1) - (y_2 - z_2)\| \\
 &= 2|y_1 - z_1| + |(y_1 - z_1) - (y_2 - z_2)| \\
 &\leq 2|y_1 - z_1| + |y_1 - z_1| + |y_2 - z_2| \\
 &= 3|y_1 - z_1| + |y_2 - z_2| \\
 &\leq 3\|Y - Z\|
 \end{aligned}$$

ÖRNEK 2

$F = (y_1 + y_2, y_1^2 + y_2^2)$ fonksiyonunun $R_3 = \{(x, y_1, y_2) \mid |t| \leq 1, |y_1| \leq 1, |y_2| \leq 1\}$ bölgesinde bir Lipschitz koşulunu sağladığını gösterelim:

$Y_1 = (y_{11}, y_{21})$ ve $Y_2 = (y_{12}, y_{22})$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
 \|F(x, Y_1) - F(x, Y_2)\| &= \|(y_{11} + y_{21}, y_{11}^2 + y_{21}^2) - (y_{12} + y_{22}, y_{12}^2 + y_{22}^2)\| \\
 &= \|(y_{11} + y_{21} - y_{12} - y_{22}, y_{11}^2 + y_{21}^2 - y_{12}^2 - y_{22}^2)\|_0 \\
 &= |(y_{11} - y_{12} + y_{21} - y_{22})| + |(y_{11}^2 - y_{12}^2 + y_{21}^2 - y_{22}^2)| \\
 &\leq |y_{11} - y_{12}| + |y_{21} - y_{22}| + |y_{11} - y_{12}| |y_{11} + y_{12}| + |y_{21} - y_{22}| |y_{21} + y_{22}| \\
 &= [1 + |y_{11} + y_{12}|] |y_{11} - y_{12}| + [1 + |y_{21} + y_{22}|] |y_{21} - y_{22}| \\
 &\leq [1 + |y_{11}| + |y_{12}|] |y_{11} - y_{12}| + [1 + |y_{21}| + |y_{22}|] |y_{21} - y_{22}| \\
 &\leq 3|y_{11} - y_{12}| + 3|y_{21} - y_{22}| \\
 &= 3[|y_{11} - y_{12}| + |y_{21} - y_{22}|] \\
 &= 3\|Y_1 - Y_2\|_0
 \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Sonlu boyutlu uzaylarda bütün normlar eşdeğerdir. Yani $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ herhangi iki norm ise

$$\alpha \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \beta \|\cdot\|_1$$

olacak şekilde pozitif α ve β sabitleri vardır. Buradan

$$\|f(x, Y_1) - f(x, Y_2)\| = 3 \|Y_1 - Y_2\|_0 \quad (\text{oktahedral norma göre})$$

$$\leq 6 \|Y_1 - Y_2\|_0 \quad (\text{kübik norma göre})$$

$$\leq 6 \|Y_1 - Y_2\|_2 \quad (\text{Öklit normuna göre})$$

olduğundan verilen fonksiyon tanımlanan bölgede oktahedral norma göre $K=3$, kübik norma göre $K=6$ ve Öklit normuna göre $K=6$ Lipschitz sabitli bir Lipschitz Koşulunu sağlar.

ÖRNEK 3.

$F(x, Y) = (y_1, \sqrt{y_2})$ ile verilen $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektör değerli fonksiyonu

$$R_3 = \{(x, y_1, y_2) \mid |x| \leq 1, |y_1| \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 1\}$$

bölgesinde bir Lipschitz Koşulunu sağlamaz. Gerçekten

$$y_1 = (y_{11}, y_{21}), \quad y_2 = (y_{12}, y_{22}) \quad \text{olmak üzere}$$

$$\begin{aligned} \|F(x, Y_1) - F(x, Y_2)\| &= \|(y_{11}, \sqrt{y_{21}}) - (y_{12}, \sqrt{y_{22}})\| \\ &= \|(y_{11} - y_{12}, \sqrt{y_{21}} - \sqrt{y_{22}})\|_0 \\ &= |y_{11} - y_{12}| + |\sqrt{y_{21}} - \sqrt{y_{22}}| \\ &= |y_{11} - y_{12}| + \frac{|y_{21} - y_{22}|}{\sqrt{y_{21}} + \sqrt{y_{22}}} \end{aligned}$$

yazılabilir. $\frac{1}{\sqrt{y_{21}} + \sqrt{y_{22}}}$ kesiri, y_{21} ve y_{22} yeteri kadar sıfıra yakın alınmak suretiyle herhangi bir sabitten daha büyük yapılabilir. Bu nedenle bir Lipschitz Koşulu sağlanmaz. Bu örnek R_3 de sürekli olan ancak R_3 de bir Lipschitz Koşulunu sağlamayan bir vektör değerli fonksiyon örneğidir.

3.1 ARDISIĞIK YAKLAŞIKLIKILAR YÖNTEMİ İLE VARLIK VE TEKLİK

TEOREMİNİN KANITI

Bu yöntemin Cauchy'ye ait olduğu biliniyor ise de, ilk kez Liouville'nin ikinci mertebeden homogen lineer denklemler üzerine bir çalışmasında yayınlanmıştır.*

Yöntemin n yinci mertebeden lineer denklemler üzerine genelleştirilmesine ilişkin çalışmalar Caqué, Fuchs ve Peano tarafından verilmiştir.† Genel formu Picard ve daha sonra Bôcher tarafından geliştirilmiştir.‡

şimdi

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) ; y(x_0) = y_0 \quad (3.1.1)$$

başlangıç değer problemini gözönüne alalım. Bu problemin çözümünü bulmak için x_0 noktasını içinde bulunduran bir I aralığı üzerinde Picard'ın Ardışık Yaklaşıklıkılar Yöntemini kısaca özetliyalım:

İlk adım da verilen $y(x_0) = y_0$ başlangıç koşulunu sağlayacak biçimde bir Φ_0 çözüm fonksiyonu seçilir. Gerçek çözüme yapılan Φ_0 sıfırıncı yaklaşıtırma olarak çoğunlukla $x = x_0$ 'a karşı gelen y_0 değeri alınır. Hemen vurgulamak gerekir ki; y_0 in ilk yaklaşık çözüm olarak seçilmesi zorunlu değildir. Başlangıç koşuluna uygun düşecek herhangi bir çözümde sıfırıncı yaklaşıtırma olarak seçilebilir. Nevarki uygulama da çoğu kez her x için sabit değerli bir fonksiyon olan $y_0 = \Phi_0$ olarak alınır.

* Liouville, J. de Math. (I) 2. (1838) P.19; (I) 3 (1838) P.565.

† Caqué, J. de Math. (2) 9 (1864), P.185.

Fuchs, Annalidi Math. (2) 4 (1870) P.36, (Ges: Werke, I, P.295).

Peano, Math. Ann. 32 (1888), P.450.

‡ Picard, J. de Math. (4) 9 (1893), P.217; Traité d'Analyse, 2, P.301; (2nd ed.) 2, P.340.

Bôcher, Ann. J. Math. 24 (1902), P.311.

Başlıncı yaklaşığ çözüm fonksiyonunu böylece belirledikten sonra bu çözüm (3.1.1) de yerine konarak

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\Phi_1(x)] &= f[x, \Phi_0(x)] \\ \Phi_1(x_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

probleminden Φ_1 birinci yaklaşığ çözümü sepetanz. Burada $f[x, \Phi_0(x)]$ fonksiyonu verilen aralık üzerinde sürekli olmak zorunda dır. Buradan Φ_1 in (3.1.2) bağıntılarına sağlaması

$$\Phi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, \Phi_0(t)] dt \quad (3.1.3)$$

ile eşdeğerlidir. Benzer düşünce ile Φ_2 ikinci yaklaşığ çözümü

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\Phi_2(x)] &= f[x, \Phi_1(x)] \\ \Phi_2(x_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

sağlayacak biçimde belirlenir. $f[x, \Phi_1(x)]$ fonksiyonu da I aralığı üzerinde sürekli olmak üzere Φ_2 nin (3.1.4) bağıntılarını sağlaması

$$\Phi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, \Phi_1(t)] dt \quad (3.1.5)$$

ile eşdeğerlidir. Benzer yöntemle Φ_3, Φ_4 ve diğer yaklaşığ çözüm fonksiyonları belirlenir. Sonuç olarak Φ_{n-1} , (n-1) yinci yaklaşığ çözüm olmak üzere n yinci $\Phi_n(x)$ yaklaşığ çözümü

$$\Phi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, \Phi_{n-1}(t)] dt \quad (3.1.6)$$

ile belirlenir. Böylece

$$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots$$

fonksiyonlar dizisi elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için $n \geq 1$ olmak üzere (3.1.6)

ile tanımlanan Φ_n fonksiyonlar dizisi I aralığında bir Φ limitine yaklaşırlar. Bu Φ limit fonksiyonu (3.1.1) diferensiyel denklemini ve başlangıç koşulunu sağlar. Sonuç olarak (3.1.1) başlangıç değer probleminin gerçek çözümü $\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n$ olarak sepetanz.

Burada n yeterince büyük ve x de x_0 başlangıç değerine olabildiğince yakın seçilirse ardışık yaklaşımlarla bulunan Φ limit çözüm fonksiyonu(3.1.1) başlangıç değer probleminin gerçek çözümüne o denli yakın olur. Bu yöntemin en olumsuz yanı, yapılan birkaç adım ardışık yaklaşımdan sonra hesaplama ve işlemlerin oldukça uzun ve güç olmasıdır. Bu nedenle pratikte, verilen bir başlangıç değer probleminin çözümü için bu yöntem çoğunlukla kullanılmaz. Buna karşın Varlık ve Teklik Teoreminin kanıtlanmasında temel araç olarak alınır.

Özetle, Ardışık Yaklaşımlar Yöntemi; başlangıç değer koşulları ile birlikte verilen bir denklemin çözümünü bulmada amaç, verilen bir diferansiyel denklemin çözümünün Varlık ve Tekliğini göstermede ise bir araç olarak kullanılır.

ÖRNEK.

$$\frac{dy}{dx} = y ; y(0)=1, x \in (0, \infty)$$

başlangıç değer probleminin çözümünü Ardışık Yaklaşımlar Yöntemi ile bulalım.

$$\Phi_0 = y_0 = 1$$

$$\Phi_1(x) = 1 + \int_0^x dt = 1+x$$

$$\Phi_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t) dt = 1+x + \frac{x^2}{2}$$

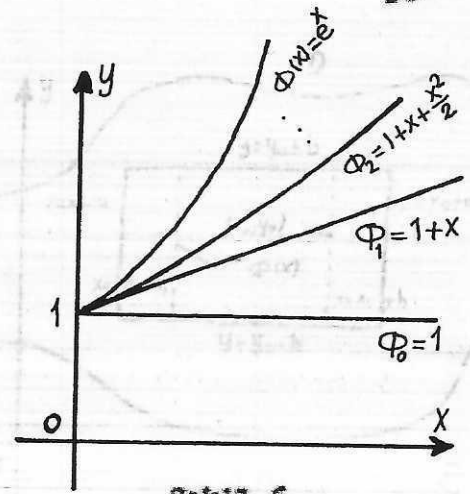
$$\Phi_3(x) = 1 + \int_0^x (1+t+\frac{t^2}{2}) dt = 1+x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$\begin{aligned} \Phi_n(x) &= 1 + \int_0^x (1+t+\frac{t^2}{2} + \dots) dt = 1+x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

bulunur. $\Phi_n(x)$, $y(x)=e^x$ çözümünün Taylor açılımının n yinci kısmı toplamıdır. Gerçekten $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = e^x$ dir.

$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ fonksiyonlar dizisinin geometrik anlamı Şekil 6 de görüldüğü gibidir.

Bu çalışmada Ardışık Yaklaşıklıklar Yöntemini, Varlık ve Teklik Teoreminin kanıtlanmasında bir araç olarak kullanacağız. Bu nedenle önce önce yönelik olması nedeniyle bu yönetime ilişkin bazı Teoremlerin ifade ve kanıtlarını, daha sonra da Ardışık Yaklaşıklıklar Yöntemi ile kanıtla-



Şekil 6

nasak olan sons Varlık ve Teklik Teoremini verelim.

LEMMA 3.1.1.

i) f , (XY) düzlemindeki bir D bölgesinde sürekli bir fonksiyon;

ii) Her $x \in [\alpha, \beta]$ için $(x, \Phi(x)) \in D$ olacak biçimde Φ , $\alpha \leq x \leq \beta$ aralığında sürekli;

iii) x_0 , $\alpha < x_0 < \beta$ olacak şekilde bir gerçel esya olsun. Bu koşullar altında, Φ nin $[\alpha, \beta]$ aralığı üzerinde $\Phi(x_0) = y_0$ olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

denkleminin bir çözümünü olması için gerek ve yeter koşul, her

$x \in [\alpha, \beta]$ için

$$\Phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Phi(t)) dt \quad (3.1.7)$$

integral denklemini sağlamasıdır.

KANIT. Eğer Φ , $[\alpha, \beta]$ aralığında $y' = f(x, y)$ denklemini sağlıyor ise

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = f(x, \Phi(x))$$

olur. Her iki yanın integrali alındığında

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^x f(t, \Phi(t)) dt + C$$

bulunur.

Eğer $\Phi(x_0) = y_0$ ise $C = y_0$ olacağından her $x \in [\alpha, \beta]$ için Φ (3.1.7) denklemini sağlar. Kargıt olarak; her $x \in [\alpha, \beta]$ için, Φ (3.1.7) integral denklemini sağlar. Buradan (3.1.7) denkleminin her iki yanının türevi alındığında

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = f(x, \Phi(x))$$

bulunur. Böylece Φ , $[\alpha, \beta]$ aralığı üzerinde $y' = f(x, y)$ denklemini sağlar. (3.1.7) Denkleminde de,

$$\Phi(x_0) = y_0 \text{ olacağı aşiktır. Sonuç olarak}$$

$$y' = f(x, y); y(x_0) = y_0$$

başlangıç değer probleminin çözümü, (3.1.7) integral denkleminin çözümüne indirgenmiş olur. Bu nedenle şimdi (3.1.7) denkleminin çözümüne dönülmektedir. Çözümü ardışık yaklaşımlar yöntemi ile yapacağız. Sıfırıncı yaklaşım değer olarak

$$\Phi_0(x_0) = y_0 \quad (3.1.8)$$

alalım, (3.1.8) çözümü genellikle (3.1.7) denklemini sağlamayabilir. Bununla birlikte ikinci adımdaki yaklaşım çözüm olan

Φ_1 in, Φ_0 dan daha uygun bir çözüm olacağını bekleyebiliriz.

Bu nedenle

$$\Phi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Phi_0(t)) dt = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt$$

$$\Phi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Phi_1(t)) dt$$

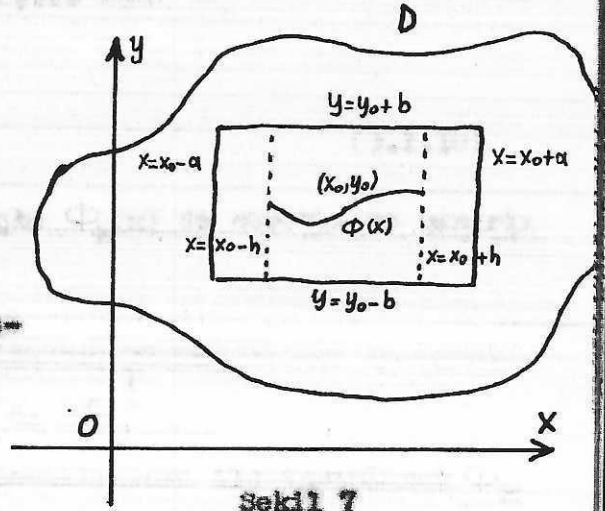
$$\vdots$$

$$\Phi_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Phi_{k-1}(t)) dt$$

$$\Phi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Phi_k(t)) dt$$

(3.1.9)

ardışık yaklaşım çözümleri bulunabilir.



şekil 7

(3.1.9) sistemi genel olarak, $k=0,1,2,\dots$ için

$$\begin{aligned} \Phi(x_0) &= y_0 \\ \Phi_{k+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Phi_k(t)) dt \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

biçiminde tanımlanır. Şimdi $k \rightarrow \infty$ için $\Phi_k(x)$ in sürekli ve sınırlı olduğunu gösterelim.

TEOREM 3.1.2

$$I: |x-x_0| \leq \alpha = \min \{a, b/M\}$$

aralığı üzerinde (3.1.10) ardışık yaklaşıklıkları ile tanımlanan Φ_k fonksiyonları, her $x \in I$ ve

$$(x, \Phi_k(x)) \in R: |x-x_0| \leq a, |y-y_0| \leq b$$

olmak üzere I üzerinde süreklidirler. I aralığındaki tüm x 'ler için Φ_k fonksiyonu,

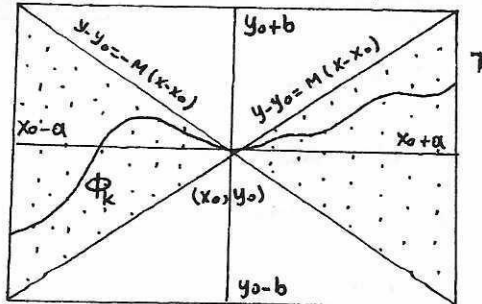
$$|\Phi_k(x) - y_0| \leq M|x-x_0| \quad (3.1.11)$$

egitsizliğini sağlar (şekil 7) [5].

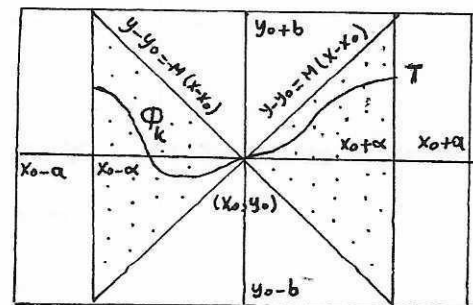
KANIT: $\alpha = b/M$ ise, her $x \in I$ için $|x-x_0| \leq b/M$ olduğundan (3.1.11) bağıntısı $|\Phi_k(x) - y_0| \leq b$ olur. Böylece $(x, \Phi_k(x))$ noktaları R bölgesinde bulunurlar. Eğer $\alpha = a$ ise, her $x \in I$ için, $|x-x_0| \leq a$ olup (3.1.11) egitsizliği $|\Phi_k(x) - y_0| \leq Ma$ olur. Geometrik olarak (3.1.11) egitsizliği

$$Y - y_0 = M(x - x_0), \quad Y - y_0 = -M(x - x_0) \quad (3.1.12)$$

gibi iki doğru denklemi gösterir.



Şekil 8



Şekil 9

Böylece şekil 8 ve 9 da görüldüğü gibi her bir Φ_k ardışık yaklaşık değerleri, R bölgesi içinde (3.1.12) ve $|x-x_0| \leq \infty$ doğruları ile sınırlanan bir T bölgesi içinde bulunurlar. f, R kapalı bölgesinde sürekli olduğundan bu bölge içinde bir max. bir de min. değer alır.

Teorem 1.1.4 nedeniyle bu değer M olsun. Böylece $|f(x,y)| \leq M$ dir.

Φ_0 fonksiyonunun I aralığı üzerinde varlığı ve sürekliliği açıktır. $k=0$ için (3.1.11) eşitsizliği de sağlanır. Şimdi,

$k=1,2,\dots,k+1,\dots$ için $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{k+1}, \dots$

çözümlerinin I aralığı içinde sürekli olduklarını gösterelim. Bunu tümevarım yöntemi ile yapacağız.

$k=1$ için (3.1.10) eşitliği

$$\Phi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \quad \text{dir. Buradan;}$$

$$|\Phi_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_0)| dt \leq M |x - x_0| \quad \text{olur.}$$

Böylece Φ_1 de (3.1.11) eşitsizliğini sağlar. f fonksiyonu R üzerinde sürekli olduğundan $F_0(t)$ ile tanımlanan;

$$F_0(t) = f(t, y_0)$$

fonksiyonu da I aralığı üzerinde süreklidir. Buradan

$$\Phi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F_0(t) dt$$

ile tanımlı olan $\Phi_1(x)$ de I aralığında süreklidir. Şimdi Φ_k nin

I aralığında sürekli olduğunu varsayalım. Böylece her $t \in I$ için

$(t, \Phi_k(t)) \in R$ dir. Kabulden dolayı,

$$F_k(t) = f(t, \Phi_k(t))$$

fonksiyonu I aralığında süreklidir. Çünkü f, R üzerinde sürekli

ve Φ_k da I üzerinde süreklidir. Buradan;

$$\Phi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F_k(t) dt$$

biçiminde tanımlanan $\Phi_{k+1}(x)$ de I üzerinde tanımlı ve süreklidir.

Ayrıca,

$$|\Phi_{k+1}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f_k(t) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f_k(t)| dt \leq M |x - x_0|$$

olduğundan (3.1.11) eşitsizliği de sağlanır. Böylece teoremin kanıtı tamamlanmış olur. Bundan sonraki adım; I aralığı üzerinde (3.1.10) ardışık yaklaşık çözümlerinin, bu aralık üzerinde ki bir başlangıç değer probleminin çözümüne yakınsadığını ve bunun tek olduğunu göstermek olacaktır. Şimdi esas Varlık ve Teklik Teoremini verelim:

TEOREM 3.1.3.

a) D , (XY) düzleminde bir bölge ve f de aşağıda ki iki koşulu sağlayacak biçimde gerçel değerli bir fonksiyon olsun:

i) f , D içinde sürekli,

ii) f , D içinde y göre alınan Lipschitz koşulunu bir $K > 0$

sabiti ile her $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ için,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|$$

olacak biçimde sağlasın.

b) (x_0, y_0) , D nin bir iç noktası olmak üzere, D bölgesi içinde her $(x, y) \in R$ için,

$$R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \quad (a, b > 0)$$

dikdörtgensel bölgesini tanımlıyalım ve

$$f(x, y) \text{ , } R \text{ içinde } |f(x, y)| \leq M ; b = \min(a, b/M)$$

koşulunu sağlasın. (Şekil 7). Bu koşullar altında

$$I: |x - x_0| \leq h = \min(a, b/M) .$$

aralığı üzerinde, (3.1.10) ardışık yaklaşıkları ile bulunan

$\langle \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_k \rangle$ dizisi $k \rightarrow \infty$ için yakınsak olup; bu dizinin

limiti, I aralığı üzerinde, $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ başlangıç değer

probleminin Φ çözümüne yakınsar ve bu çözüm tektir [5] , [9] .

KANIT:

Teoremin kanıtını baş adında gerçekleştireceğiz.

1) Önce $\langle \Phi_k(x) \rangle$ dizisinin bu aralık üzerinde yakınsak olduğunu gösterelim:

Φ_k yineli yaklaşık değeri

$$\Phi_k = \Phi_0 + (\Phi_1 - \Phi_0) + (\Phi_2 - \Phi_1) + \dots + (\Phi_k - \Phi_{k-1})$$

biçiminde yazılabilir. Böylece $\Phi_k(x)$,

$$\Phi_0 + \sum_{p=1}^{\infty} [\Phi_p(x) - \Phi_{p-1}(x)] \quad (3.1.13)$$

serisinin parçalı toplam olarak alınabilir. Böylece $\langle \Phi_k(x) \rangle$ dizisinin yakınsaklığını göstermek, (3.1.13) parçalı toplamlar serisinin yakınsaklığını göstermeye eşdeğerdir. Teorem (3.1.2) nedeniyle, tüm $\Phi_p(x)$ ler I aralığı üzerinde sürekli olup, her

$(x, \Phi(x)) \in R$ dir. Ayrıca her $x \in I$ için,

$$|\Phi_1(x) - \Phi_0(x)| \leq M |x - x_0| \text{ dir.}$$

(3.1.13) ifadesinde, $(\Phi_p(x) - \Phi_{p-1}(x))$ farkının $p \rightarrow \infty$ için limitine bakalım. Bunu tümevarım yöntemi ile yapalım

Φ_2 ve Φ_1 için integral denklemleri yazılarak taraf tarafa çıkarılırsa

$$\Phi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Phi_1(t)) dt$$

$$\Phi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Phi_0(t)) dt$$

$$|\Phi_2(x) - \Phi_1(x)| = \left| \int_{x_0}^x [f(t, \Phi_1(t)) - f(t, \Phi_0(t))] dt \right|$$

olur. Buradan

$$\leq \int_{x_0}^x |f(t, \Phi_1(t)) - f(t, \Phi_0(t))| dt$$

Lipschitz koşulu ile

$$\leq K \int_{x_0}^x |\Phi_1(t) - \Phi_0(t)| dt$$

ve (3.1.11) nedeniyle $\leq KM \int_{x_0}^x |t - x_0| dt$ bulunur.

Böylece $x > x_0$ için

$$|\Phi_2(x) - \Phi_1(x)| \leq KM \frac{|x-x_0|^2}{2!} \quad (3.1.14)$$

bulunur. Bu işleme benzer düşünce ile devam edilirse

$$\begin{aligned} |\Phi_3(x) - \Phi_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, \Phi_2(t)) - f(t, \Phi_1(t))] dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(t, \Phi_2(t)) - f(t, \Phi_1(t))| dt \end{aligned}$$

ve Lipschitz koşulu ile,

$$\leq K \int_{x_0}^x |\Phi_2(t) - \Phi_1(t)| dt$$

bulunur. İntegral altındaki ifade yerine (3.1.14) eşitsizliğindeki daha büyük değer alınırsa

$$\begin{aligned} |\Phi_3(x) - \Phi_2(x)| &\leq K \frac{KM}{2} \int_{x_0}^x |t-x_0|^2 dt \\ |\Phi_3(x) - \Phi_2(x)| &\leq \frac{M}{K} \frac{K^3 |x-x_0|^3}{3!} \end{aligned}$$

bulunur. Varsayalım ki; $k=p$ için

$$|\Phi_p(x) - \Phi_{p-1}(x)| \leq \frac{M}{K} \cdot \frac{K^p |x-x_0|^p}{p!} \quad (3.1.15)$$

(3.1.15) eşitsizliği doğru olsun. $p=k+1$ içinde doğruluğu gösterilir.

İse kanıt tamamlanmış olur. Bunun için

$$\begin{aligned} |\Phi_{p+1}(x) - \Phi_p(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, \Phi_p(t)) - f(t, \Phi_{p-1}(t))] dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(t, \Phi_p(t)) - f(t, \Phi_{p-1}(t))| dt \end{aligned}$$

Lipschitz koşulundan,

$$\leq K \int_{x_0}^x |\Phi_p(t) - \Phi_{p-1}(t)| dt$$

bulunur. İntegral altındaki ifade yerine, doğruluğu kabul edilen

(3.1.15) ifadesinin sağ yanındaki değer yazılırsa

$$|\Phi_{p+1}(x) - \Phi_p(x)| \leq K \frac{MK^p}{Kp!} \int_{x_0}^x |t-x_0|^p dt$$

yada $x > x_0$ için

$$|\Phi_{p+1}(x) - \Phi_p(x)| \leq \frac{M}{K} \frac{K^{p+1} |x-x_0|^{p+1}}{(p+1)!} \quad (3.1.16)$$

bulunur. Bu ise (3.1.15) eşitsizliğinde p yerine $p+1$ gelmesi ha-
lidir. Böylece kanıt tamamlanmış olur. (3.1.16) eşitsizliğinin

sağ yanındaki ifadede $|x-x_0| \leq h$ olınır ise

$$|\Phi_{p+1}(x) - \Phi_p(x)| \leq \frac{M}{K} \frac{(Kh)^{p+1}}{(p+1)!} \quad (3.1.17)$$

elde edilir. Bu ise $\frac{M}{K} e^{Kh}$ kuvvet serisinin genel terimidir.

e^{Kh} kuvvet serisi yakınsak olduğundan, $k \rightarrow \infty$ için (3.1.13) parçalı
toplam serisi, I aralığı üzerinde yakınsaktır.

Sonuç olarak, I aralığı üzerinde, $k \rightarrow \infty$ için; $\langle \Phi_k(x) \rangle$
dizisi, bir $\Phi(x)$ limitine uzanır.

ii) Limit $\Phi(x)$ fonksiyonu I aralığı üzerinde süreklidir.

$x_1, x_2 \in I$ farklı iki nokta olsun. $\Phi(x)$ in bu aralık üzerinde mono-
ton bir fonksiyon olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için x_1 ve x_2
noktalarındaki, Φ_{k+1} inci ardışık yaklaşık çözümü veren integral
denklemleri yazalım ve $k \rightarrow \infty$ için bu iki çözümün farklarının limi-
tine bakalım:

$$\begin{aligned} \Phi_{k+1}(x_1) &= y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(t, \Phi_k(t)) dt \\ \Phi_{k+1}(x_2) &= y_0 + \int_{x_0}^{x_2} f(t, \Phi_k(t)) dt \end{aligned}$$

Buradan;

$$|\Phi_{k+1}(x_1) - \Phi_{k+1}(x_2)| = \left| \int_{x_2}^{x_1} f(t, \Phi_k(t)) dt \right| \leq M |x_1 - x_2|$$

olur. Böylece

$$|\Phi_{k+1}(x_1) - \Phi_{k+1}(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|$$

bulunur. (i) adım gereğince $k \rightarrow \infty$ için $\Phi_{k+1}(x_1) \rightarrow \Phi(x_1)$ limi-

tine ve $\Phi_{k+1}(x_2) \rightarrow \Phi(x_2)$ limitine yaklaşır. Bu nedenle

$$|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|$$

bulunur. Bu eşitsizlikte eğer $x_2 \rightarrow x_1$ e yaklaşır ise $\Phi(x_2)$ de $\Phi(x_1)$ e yaklaşır. Yani $\Phi(x)$ fonksiyonu I aralığında monoton bir fonksiyondur.

iii) Şimdi de k yncı yaklaşık değer olan Φ_k fonksiyonu ile Φ limit fonksiyonu arasındaki farkı belirliyelim. Yani $k \rightarrow \infty$ için $|\Phi(x) - \Phi_k(x)|$ nin limitini arayacağız.

Bu nedenle, (3.1.13) den

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} [\Phi_p(x) - \Phi_{p-1}(x)]$$

ve

$$\Phi_k(x) = \Phi_0(x) + \sum_{p=1}^k [\Phi_p(x) - \Phi_{p-1}(x)]$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} |\Phi(x) - \Phi_k(x)| &= \left| \sum_{p=k+1}^{\infty} [\Phi_p(x) - \Phi_{p-1}(x)] \right| \\ &\leq \sum_{p=k+1}^{\infty} |\Phi_p(x) - \Phi_{p-1}(x)| \end{aligned}$$

ve (3.1.17) nedeniyle,

$$\begin{aligned} &\leq \frac{M}{K} \sum_{p=k+1}^{\infty} \frac{(Kh)^p}{p!} \\ &\leq \frac{M}{K} \frac{(Kh)^{k+1}}{(k+1)!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(Kh)^p}{p!} \end{aligned}$$

$$|\Phi(x) - \Phi_k(x)| \leq \frac{M}{K} \frac{(Kh)^{k+1}}{(k+1)!} e^{Kh} \quad (3.1.18)$$

bulunur. (3.1.18) eşitsizliğinde ki $\frac{(Kh)^{k+1}}{(k+1)!} = \epsilon_k$ diyelim.

$k \rightarrow \infty$ için $\epsilon_k \rightarrow 0$ gideceği açıktır. Ayrıca $\epsilon_k = e^{Kh}$ kuvvet

serisinin genel terimidir. Böylece (3.1.18) eşitsizliği ϵ_k ya

bağlı olarak,

$$|\Phi(x) - \Phi_k(x)| \leq \frac{M}{K} e^{Kh} \epsilon_k \quad (3.1.19)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $k \rightarrow \infty$ için $\epsilon_k \rightarrow 0$ gider iken,

$\Phi_k(x) \rightarrow \Phi(x)$ uzanır.

iv) Limit $\Phi(x)$ fonksiyonu aranan çözümdür. Çözümün varlığı kanıtının tamamlanabilmesi için her $x \in I$ olmak üzere $\Phi(x)$ fonksiyonunun (3.1.7) integral denklemini sağladığı gösterilmelidir.

f , R üzerinde sürekli olduğundan, $F(t) = f(t, \Phi(t))$ ile tanımlanan $F(t)$ fonksiyonu, buna bağlı olarak $\Phi(x)$ fonksiyonu I aralığı üzerinde sürekli dir.

(i), (ii), (iii) de $k=0,1,2,\dots$ için

her $\Phi_k(x)$ fonksiyonun ve limit $\Phi(x)$ fonksiyonunun I aralığı üzerinde sürekli oldukları ve $k \rightarrow \infty$ için her $x \in I$ olmak üzere

$\Phi_{k+1}(x) \rightarrow \Phi(x)$ limitine uzandığı görüldü. Şimdi de, $\Phi(x)$ ve

$\Phi_{k+1}(x)$ fonksiyonlarına karşı gelen integral denklemlerin $k \rightarrow \infty$ için biri diğerinin limiti olduğu gösterilmelidir.

Yani $k \rightarrow \infty$ için

$$\int_{x_0}^x f(t, \Phi_k(t)) dt \rightarrow \int_{x_0}^x f(t, \Phi(t)) dt \quad (3.1.20)$$

geçmelidir. Bunun için;

$$\left| \int_{x_0}^x f(t, \Phi(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, \Phi_k(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, \Phi(t)) - f(t, \Phi_k(t))| dt,$$

ve Lipschitz koşulu nedeniyle;

$$\leq K \int_{x_0}^x |\Phi(t) - \Phi_k(t)| dt$$

bulunur. Şimdi (3.1.19) eşitsizliğinin kullanılması ile;

$$\leq K \frac{M}{K} \frac{(Kh)^{k+1}}{(k+1)!} e^{Kh} \int_{x_0}^x dt$$

yada

$$\left| \int_{x_0}^x f(t, \Phi(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, \Phi_k(t)) dt \right| \leq M \epsilon_k e^{Kh} |x - x_0| \quad (3.1.21)$$

elde edilir. (3.1.21) de $k \rightarrow \infty$ için $\epsilon_k \rightarrow 0$ gideceğinden her $x \in I$ olmak üzere, (3.1.20) bağıntısının varlığı kanıtlanmış olur. Bu ise $\Phi(x)$ limit fonksiyonunun (3.1.7) integral denklemini sağlamasını gerektirir. Sonuç olarak $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ başlangıç değer probleminin Φ çözümünü bulmak için yapılan k yarıca ardışık yaklaşımların Φ_k ise, her $x \in I$ için, $\Phi(x)$ ile $\Phi_k(x)$ arasında,

$$|\Phi(x) - \Phi_k(x)| \leq \frac{M}{K} \frac{(Kh)^{k+1}}{(k+1)!} e^{Kh}.$$

egitsizliği geçerlidir. Böylece çözümün varlığının kanıtı tamamlanmış oldu. Şimdi bu çözümün tek olduğunu gösterelim:

$$v) f, R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$$

bölgesi üzerinde, sürekli ve Lipschitz koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer I aralığı üzerinde ki bir x_0 noktasında

$$y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$$

başlangıç değer probleminin Φ ve Ψ gibi iki farklı çözümü var ise; her $x \in I$ için $\Phi(x) = \Psi(x)$ dir. I aralığını, $|x - x_0| \leq h$ olarak tanımlayalım. Ψ , bu aralıkta başka bir çözüm ise, aralığın bir x_0 noktasında; $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ başlangıç değer problemini sağlar. Böylece,

$$\frac{d\Psi(x)}{dx} = f(x, \Psi(x)), \Psi(x_0) = y_0 \quad (3.1.21)$$

olur. $(x, \Psi(x)) \in R$ olduğundan, $|\Psi(x) - y_0| \leq b$ olacağı açıktır. Ψ nin (3.1.21) ile tanımlanan başlangıç değer probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul, $\Psi(x)$:

$$\Psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, \Psi(t)] dt \quad (3.1.22)$$

integral denklemini sağlamasıdır.

I: $|x-x_0| \leq a$ aralığı üzerinde, Φ_n ardışık yaklaşık çözümlerinin $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ başlangıç değer probleminin bir Φ çözümüne yakınsadığını biliyoruz. Böylece $n \rightarrow \infty$ için $\psi(x)$ in (3.1.22) denkleminin bir çözümü olması

$$|\psi(x) - \Phi_n(x)| \quad (3.1.23)$$

ifadesinin yakınsak olmasını gerektirir. Bu nedenle $n=1,2,\dots$ için (3.1.23) farkının yakınsak olduğu gösterilmelidir. Bunun tümevarım yöntemi ile kanıtlayalım:

$$n=1 \text{ için } \psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \psi(t)) dt,$$

$$\text{ve } \Phi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Phi_0(t)) dt$$

dir. Buradan;

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \Phi_1(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, \psi(t)) - f(t, \Phi_0(t))] dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(t, \psi(t)) - f(t, \Phi_0(t))| dt \end{aligned}$$

ve Lipschitz koşulu ile;

$$\begin{aligned} &\leq K \int_{x_0}^x |\psi(t) - \Phi_0(t)| dt \\ &= K \int_{x_0}^x |\psi(t) - y_0| dt \\ &\leq K b \int_{x_0}^x dt = bK(x-x_0) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$|\psi(x) - \Phi_1(x)| \leq bK |x-x_0| \quad (3.1.24)$$

bulunur. Aynı işlemi $n=2$ için bir adım ileri götürelim.

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \Phi_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, \psi(t)) - f(t, \Phi_1(t))] dt \right| \\ &\leq K \int_{x_0}^x |\psi(t) - \Phi_1(t)| dt \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

olur. (3.1.25) de integral altındaki ifade yerine (3.1.24) deki değeri kullanılırsa;

$$|\Psi(x) - \Phi_2(x)| \leq b K^2 \int_{x_0}^x |t - x_0| dt$$

$$= b K^2 \frac{|x - x_0|^2}{2!}$$

bulunur. Bu işlemin $n=k$ için doğruluğunu kabul edip; $n=k+1$ içinde doğru olduğu gösterilir ise kanıt tamamlanmış olur. Bu nedenle

$$|\Psi(x) - \Phi_k(x)| \leq b \frac{K^k |x - x_0|^k}{k!} \quad (3.1.26)$$

doğru olsun. Buradan;

$$|\Psi(x) - \Phi_{k+1}(x)| = \left| \int_{x_0}^x [f(t, \Psi(t)) - f(t, \Phi_k(t))] dt \right|$$

$$\leq \int_{x_0}^x |f(t, \Psi(t)) - f(t, \Phi_k(t))| dt,$$

$$\leq K \int_{x_0}^x |\Psi(t) - \Phi_k(t)| dt$$

olur. Burada integral altındaki ifade yerine (3.1.26) da ki kabul

alınırsa

$$|\Psi(x) - \Phi_{k+1}(x)| \leq K b \frac{K^k}{k!} \int_{x_0}^x |t - x_0|^k dt$$

$$= b \frac{K^{k+1} |x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \quad (3.1.27)$$

sonucuna varılır. (3.1.27) eşitsizliğinin sağ yanı açıkça görüleceği

gibi $\sum_{n=0}^{\infty} b \frac{(Kb)^n}{n!}$ kuvvet serisi olup, bu serinin genel terimi

$n \rightarrow \infty$ için sifara uzanır. Bu ise;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = \Psi(x)$$

olmasını gerektirir. Oysa (3.1.17) nedeniyle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = \Phi(x)$$

dir. Ohalde $I: |x - x_0| \leq h$ aralığı üzerinde her $x \in I$ için

$$\Phi(x) = \Psi(x)$$

dir. Böylece (3.1.7) integral denkleminin ilişkin $\Phi(x)$ gözüm fonksiyonunun Varlık ve Teklik sorunu kanıtlanmış oldu.

3.2 ÇÖZÜMLERİN YEREL VE YÖREL VARLIĞI

Teorem 3.1.3 yerel varlık ve teklik teoremi olarak adlandırılır [5]. Bu teoreme çözümün varlık ve tekliği bir x_0 noktası komşuluğundaki x ler için güvence altına alınabiliyordu. Başlangıç değer problemleri için bazen $|x-x_0| \leq a$ aralığı boyunca çözümün varlık ve tekliği olasıdır. Bu tür çözümlere yerel çözümler denir. Örneğin diferensiyel denklem,

$$y' + g(x)y = h(x) \quad (3.2.1)$$

olsun. Varsayalım ki $g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonları $|x-x_0| \leq a$ aralığında sürekli olsunlar ve $|g(x)| \leq K$ olacak biçimde bir $K > 0$ sabiti bulunabilsin. Ayrıca her $(x, y_1), (x, y_2)$ noktası (3.2.1) denklemini sağlayacak biçimde,

$$S: |x-x_0| \leq a, |y| < \infty$$

şerit bölgesinde bulunsun. Bu koşullar altında $f(x, y)$ fonksiyonu S bölgesinde tanımlıdır ve Lipschitz koşulunu sağlar. (3.2.1) denklemini her iki nokta için ayrı ayrı yazalım:

$$y' = f(x, y_1) = -g(x)y_1 + h(x)$$

$$y' = f(x, y_2) = -g(x)y_2 + h(x),$$

olur. Buradan;

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= |-g(x)(y_1 - y_2)| \\ &\leq |g(x)| |y_1 - y_2| \leq K |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

bulunur. Böylece f fonksiyonu Teorem 3.1.3 ün koşullarını gerçekleştirdiğinden, S şerit bölgesi boyunca bir çözüme sahiptir ve bu tektir.

TEOREM 3.2.1

Gerçek değerli bir f fonksiyonu,

$$S: |x-x_0| \leq a, |y| < \infty \quad (a > 0)$$

şerit bölgesi üzerinde sürekli olsun. Ayrıca, f, S üzerinde $K > 0$ sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlasın. Bu koşullar altında;

$I: |x-x_0| \leq a$ aralığı üzerinde $y' = f(x,y)$ denkleminin $\langle \Phi_k \rangle$ ardışık yaklaşık çözümlerinin kümesi, I üzerinde sürekli ve tanımlı olup bu aralık üzerinde ki

$$y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$$

bağımlı değer probleminin Φ çözümüne yakınsar.

KANIT: f fonksiyonu, S üzerinde sürekli olduğundan

$|x-x_0| \leq a$ aralığında sürekli ve sınırlı olan bir F_0 fonksiyonunu;

$$F_0(x) = f(x, y_0)$$

biçiminde tanımlayalım. $|x-x_0| \leq a$ için;

$$|f(x, y_0)| \leq M \quad (3.2.2)$$

olacak biçimde bir M pozitif sabitinin varlığı aşaktır. Ayrıca

(3.1.10) bağıntısı ile tanımlanan ardışık yaklaşık çözümlerin varlığı Teorem 3.1.2 de kanıtlanmıştı. Burada da tümevarım yöntemi ile benzer kanıt vereceğiz:

$$\Phi_1(x) = \Phi_0(x) + \int_{x_0}^x f(t, \Phi_0(t)) dt$$

yada

$$|\Phi_1(x) - \Phi_0(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \right|$$

$$\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_0)| dt \leq M |x - x_0|$$

bulunur. Burada hemen belirtelim ki; Limit Φ fonksiyonunun,

$$|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|$$

bağıntısına sürekli sağlanması gerekmez. Buna karşın; $|x-x_0| \leq a$ için

(3.1.15) eşitsizliği geçerlidir. Böylece $|x-x_0| \leq a$ için;

$$|\Phi_k(x) - y_0| = \left| \sum_{p=1}^k [\Phi_p(x) - \Phi_{p-1}(x)] \right|$$

$$\leq \sum_{p=1}^k |\Phi_p(x) - \Phi_{p-1}(x)|$$

$$\leq \frac{M}{k} \sum_{p=1}^k \frac{k^p |x-x_0|^p}{p!}$$

$$\leq \frac{M}{K} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{K^p |x-x_0|^p}{K^p} \leq \frac{M}{K} (e^{Kb} - 1)$$

ölür. Böylece

$$\left| \Phi_k(x) - y_0 \right| \leq \frac{M}{K} (e^{Kb} - 1) \quad (3.2.3)$$

bulunur. Eğer $b = \frac{M}{K} (e^{Kb} - 1)$ denirse

$$\left| \Phi_k(x) - y_0 \right| \leq b, \quad (|x - x_0| \leq a)$$

sonucuna varılır. Bu son eşitlikte Teorem 3.1.3 gereğince $k \rightarrow \infty$ için limit alındığında;

$$\left| \Phi(x) - y_0 \right| \leq b, \quad (|x - x_0| \leq a) \quad (3.2.4)$$

elde edilir. f , fonksiyonu $R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$ bölgesi üzerinde sürekli ve sınırlı olduğundan, bu bölgede her $(x, y) \in R$ için,

$$\left| f(x, y) \right| \leq N \quad (3.2.5)$$

olacak biçimde bir $N > 0$ sabiti bulunabilir. Burada Φ limit fonksiyonunun sürekliliği Teorem 3.1.3 de olduğu gibi gösterilebilir.

x_1, x_2 noktaları $|x - x_0| \leq a$ aralığında olmak üzere; bu noktalardaki Φ_{k+1} inci ardışık yaklaşıklık için integral denklem tanımlarından hareketle;

$$\left| \Phi_{k+1}(x_1) - \Phi_{k+1}(x_2) \right| = \left| \int_{x_2}^{x_1} f(t, \Phi_k(t)) dt \right| \\ \leq \int_{x_2}^{x_1} |f(t, \Phi_k(t))| dt$$

bulunur. (3.2.5) den

$$\left| \Phi_{k+1}(x_1) - \Phi_{k+1}(x_2) \right| \leq N |x_1 - x_2| \quad (3.2.6)$$

elde edilir. (3.2.6) eşitsizliğinin sol yanının $k \rightarrow \infty$ için limiti alındığında, Teorem 3.1.3 den dolayı

$$\left| \Phi(x_1) - \Phi(x_2) \right| \leq N |x_1 - x_2|$$

sonucuna varılır. Φ nin varlığına ilişkin, teoremin artakalem bölümünün kanıtı, Teorem 3.1.3 kanıtı ile eşdeğertir.

Şimdi de; $|x| < \infty$, $|y| < \infty$ düzleminde tanımlanan,

$$\text{Esr: } |x| \leq a, |y| < \infty \quad (3.2.7)$$

gerit bölgesi üzerinde sürekli olan ve Lipschitz koşulunu sağlayan gerçel değerli bir f fonksiyonu için;

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

başlangıç değer probleminin her $x \in \{ |x| \leq a \}$ olacak biçimde bir tek çözümü olduğunu gösterelim:

Eğer x herhangi bir gerçel sayı ise; x , içinde bulunduracak biçimde $|x - x_0| \leq a$ aralığını tanımlayabilmek için a gibi pozitif bir sayı bulunabilir. Böylece f fonksiyonu,

$$|x - x_0| \leq a, |y| < \infty \quad (3.2.8)$$

gerit bölgesinde incelenebilir. Bu ise, (3.2.7) de tanımlanan bölgenin, $|x| \leq |x_0| + a, |y| < \infty$ gerit bölgesi içinde olduğunu vurgular.

Sonuç olarak; Teorem 3.1.3 gereğince, Φ , $|x - x_0| \leq a$ aralığında bir başlangıç değer probleminin çözümü olmak üzere, (3.2.8)

bölgesinde tanımlı ve sürekli olan, ayrıca bu bölgede Lipschitz koşulunu sağlayan $y' = f(x, y)$ diferansiyel denkleminin karşılık gelen (3.1.10) ardışık yaklaşık $\langle \Phi_k(x) \rangle$ çözümlerinin cümalesi,

$|x - x_0| \leq a$ aralığında $\Phi(x)$ limitine yakınsar ve bu limit fonksiyonu tektir. Teorem 3.1.3 de yapılan teklik kanıtı burada da aynen geçerlidir.

3.3. GRONWALL EŞİTSİZLİĞİ YARDIMI İLE TEKLİK TEOREMİ

Tanımlanan bir aralık içerisinde, verilen bir diferensiyel denklemin çözümünün varlığı önemli bir sorundur. Çözümün varlığı belirlenmeden çözüm aramak gereksiz zaman harcanmasına ve maddi kayıba neden olur. Bu aralık içerisinde varlığı saptanan çözümün tek olup olmadığında bağlı başına bir sorundur. Bu nedenle uygulamada çözümün tekliğini belirlemek için aşağıdaki teorem sıkça kullanımlardan biridir.

TEOREM 3.3.1. $R: |x-x_0| < a, |y-y_0| < b$ bölgesinde, f ve $\frac{\partial f}{\partial y}$ fonksiyonları sürekli ve sınırlı olsunlar. Bu koşullar altında, $y' = f(x,y)$ diferensiyel denkleminin $\Phi(x_0) = y_0$ başlangıç koşulunu sağlayacak biçimde en fazla bir çözümlü vardır [7].

KANIT.

Φ_1 ve Φ_2 verilen denklemin $I: |x-x_0| < a$ aralığındaki bir x_0 noktasında başlangıç koşulunu sağlayan iki ayrı çözümlü olsun. Bu çözümlerin her biri her $x \in I$ için,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

integral denklemini ayrı ayrı sağlarlar. Böylece her $x \in I$ için,

$$\Phi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Phi_1(t)) dt$$

ve

$$\Phi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Phi_2(t)) dt$$

dır. Buradan;

$$\Phi_2(x) - \Phi_1(x) = \int_{x_0}^x (f(t, \Phi_2(t)) - f(t, \Phi_1(t))) dt \quad (3.3.1)$$

olur. Her $x \in I$ ve her $(x,y) \in R$ olmak üzere

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| \leq K$$

Lipschitz koşulu (3.3.1) de kullanılırsa;

$$|\Phi_2(x) - \Phi_1(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, \Phi_2(t)) - f(t, \Phi_1(t))| dt$$

$$\leq K \int_{x_0}^x |\Phi_2(t) - \Phi_1(t)| dt$$

elde edilir. Bu ise Teorem 1.1.5 ile verilen Gronwall Eşitsizliğine benzerdir. Öyleki;

$$f(x) = \Phi_2(x) - \Phi_1(x)$$

$$A=0, g(t)=K \text{ dir.}$$

Önce $x \geq x_0$, sonra da $x \leq x_0$ alınrsa, Gronwall Eşitsizliği nedeniyle

$$|\Phi_2(x) - \Phi_1(x)| \leq 0 \quad (3.3.2)$$

bulunur. (3.3.2) bağıntısı hiçbir zaman negatif olamayacağından her $x \in I$ için

$$|\Phi_2(x) - \Phi_1(x)| = 0$$

olur. Buradan da $\Phi_1(x) = \Phi_2(x)$ sonucu çıkar. Böylece $\Phi(x_0) = y_0$ başlangıç koşulunu sağlayacak biçimde $y' = f(x, y)$ diferensiyel denkleminin I aralığının herhangi bir x_0 noktasında iki farklı çözümlü olamaz.

3.4. İRDİLEME

Bu yöntemde $f(x,y)$ fonksiyonu D bölgesi içinde incelenir iken; iki önemli kabul yapıldı. Bunlar; $f(x,y)$ fonksiyonunun D içinde sürekliliği ve $f(x,y)$ nin bu bölge içinde Lipschitz koşulunu sağlamalarıdır. Bu iki kabul birbirlerinden oldukça bağımsızdır. Burada sorun, bu iki farklı kabulün gerekli olup olmadığıdır. Bu nedenle sözkonusu kabullere daha yakından bakıp, gereğinden çok kısıtlayıcı olup olmadıklarını araştıralım [6].

İlk adımda görülebilir ki; sürekli bir çözümün varlığı için $f(x,y)$ nin sürekli olması gerekmez. Gerçekten ilk araştırmaların hepsinde $f(x,y)$ nin sınırlı olması ve

$$\int_{x_0}^x |f(t, y_n(t))| dt$$

formunda ki integrallerin varlığı istenmektedir. Özel olarak,

$f(x,y)$ sınırlı ve belli sayıda süreksizlik noktası olabilir. (Bunlar ayırık noktalar veya y eksenine paralel olan doğrulardır. Bunların dışındaki bir süreksizlik, sonlu boyutlu bir aralık boyunca Lipschitz koşulunun gerçekleşmemesine neden olur.)

Örneğin:

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} Y(1-2x) & x > 0 \text{ için} \\ Y(2x-1) & x < 0 \text{ için} \end{cases}$$

denklemini gözönüne alalım. Bu denklemin $x=1$ için $y=1$ başlangıç koşulunu sağlayacak biçimde sürekli bir çözümlü vardır. Bu çözüm fonksiyonu;

$$y = \begin{cases} e^{x-x^2} & x \geq 0 \\ e^{x^2-x} & x \leq 0 \end{cases}$$

dır. Çözüm tüm gerçel x değerleri için tanımlı ve ayrıca tektir.

Diğer taraftan, Lipschitz koşulu veya benzer özellikte bir koşul, çözümün tekliğini güvence altına almayı yüklenmelidir.* Örneğin Peano, He, Perron, çalışmalarında Lipschitz koşulunu sağlamayan fakat başlangıç koşullarını sağlayan ve en az iki sürekli çözümü olan denklemleri irdelenmişlerdir. Böyle bir denklem kurmak o kadar güç değildir.

ÖRNEK 1.

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{|y|}$$

denklemini gözönüne alalım. $f(x,y) = \sqrt{|y|}$ olup; $y=0$ doğrusunu bulandıran her bölgede, $f(x,y)$ Lipschitz koşulunu sağlamaz. Buna karşın denklem, $x=0$, $y=0$ başlangıç koşullarına sağlayacak biçimde;

$y=0$

$$y = \begin{cases} \frac{1}{4} x^2 & x \geq 0 \text{ için} \\ -\frac{1}{4} x^2 & x \leq 0 \text{ için} \end{cases}$$

iki gerçel, sürekli çözümü kabul eder. Böylece sorun, Osgood tarafından kanıtlanmış olan noktaya indirgenir. Osgood; $f(x,y)$ fonksiyonu (x_0, y_0) noktası komşuluğunda sürekli ise, genel olarak denklemin bu nokta komşuluğunda başlangıç koşulunu sağlayacak biçimde bir dizi çözüm cümlesi kabul ettiğini kanıtlamıştır. Bu çözümler şekil 8 ve şekil 9 da tanımlanan bölge içerisinde bulunur. Bu bölge de çözümün tek olması için bir gerek ve yeter koşul olmalıdır. İşte bu durumda Lipschitz Koşulunun sağlanması aranır. Bununla birlikte Lipschitz koşulu yerine daha az kısıtlayıcı olan aşağıdaki koşullardan biride kullanılabilir.

* Peano, Math. Ann. 37 (1890), P.182;
He, loc. cit., ante;
Perron, Math. Ann. 76 (1915), P.471

$$\begin{aligned} |f(x,Y)-f(x,y)| &< K_1 |Y-y| \operatorname{Log} \frac{1}{|Y-y|} \\ |f(x,Y)-f(x,y)| &\leq K_2 |Y-y| \operatorname{Log} \frac{1}{|Y-y|} \operatorname{Log} \operatorname{Log} \frac{1}{|Y-y|} \end{aligned}$$

Burada K_1, K_2, \dots ler birer sabitlerdir. Uygulamada çoğu kez K_1

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ nin bir R bölgesi içindeki üst sınır değeri olarak alınır. Şimdi farklı örnekler ile, Lipschitz koşuluna ve ardışık yaklaşıklıklar yöntemine açıklık getirmeye çalışalım.

ÖRNEK 2.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^3y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$S: |x| < \infty, |y| < \infty$ bölgesinde x ve y nin her ikisi birden sıfır olmayacak biçimde çözümünü araştıralım:

Eğer $x=0, y=0$ ise; $f(x,y)=0$ dir. Ayrıca görüldüğü gibi $f(x,y)$, x vey y nin sürekli fonksiyonlarıdır. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned} f(x,Y)-f(x,y) &= \frac{4x^3Y}{x^4+Y^2} - \frac{4x^3y}{x^4+y^2} \\ &= \frac{4x^3(x^4-yY)}{(x^4+Y^2)(x^4+y^2)} (Y-y) \end{aligned}$$

olur. Eğer, $y=px^2, Y=qx^2$ denir ise;

$$|f(x,Y)-f(x,y)| = 4 \left| \frac{1-pq}{(1+p^2)(1+q^2)} \right| \frac{|Y-y|}{|x|}$$

bulunur. Böylece Lipschitz koşulu orjini bulunduran bütün bölgeler boyunca sağlanmaz. Bu nedenle $(0,0)$ noktasını bulunduran bölgelerde denklemin çözümünün tekliği güvence altına alınmaz. Gerçekten denklemin, $\Phi(x,y)=x^4y+1/3y^3+C$ gibi bir çözümü vardır. C bir sabit olduğundan $x=y=0$ bağımlı koşulu sağlayacak biçimde sayısız çözüm fonksiyonu bulunabilir.

ÖRNEK 3.

$$y' = y^{1/3}, \quad y(0) = 0,$$

başlangıç değer problemini alalım.

$$f(x,y) = y^{1/3} \text{ olup; } R: |x| \leq a, |y| \leq b$$

bölgesinde orjin konsuluğunda süreklidir. $h \leq a$ olmak üzere, $y' = y^{1/3}, y(0) = 0$ başlangıç değer probleminin $|x| \leq h$ aralığı üzerinde en az bir çözümü vardır. Şimdi de çözümün tek olmasına irdeliyelim. Eğer f , R üzerinde Lipschitz koşulunu sağlıyor ise;

$$\left| \frac{f(x,y_1) - f(x,y_2)}{y_1 - y_2} \right| = \left| \frac{y_1^{1/3} - y_2^{1/3}}{y_1 - y_2} \right| \text{ olur.}$$

$$y_1 = \delta, \quad y_2 = -\delta \text{ seçelim. Böylece;}$$

$$\frac{\delta^{1/3} - (-\delta)^{1/3}}{\delta - (-\delta)} = \frac{1}{\delta^{2/3}} \text{ bulunur. } \delta \rightarrow 0$$

için bu ifadenin bir üst sınırı bulunamaz. Sonuç olarak; $f, y=0$ doğrusunu bulunduran herhangi bir bölge boyunca Lipschitz koşulunu sağlamaz, dolayısıyla R içinde de Lipschitz koşulunu sağlamaz. Bu nedenle, problemin tanımlanan bölgede, Φ_1, Φ_2 gibi iki çözümü vardır. $-\infty < x < \infty$ aralığında bu çözümleri;

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= 0 && \text{(tüm } x \text{ ler için)} \\ \Phi_2(x) &= \begin{cases} (2/3x)^{3/2} & x \geq 0 \text{ için} \\ 0 & x \leq 0 \text{ için} \end{cases} \text{ dir.} \end{aligned}$$

ÖRNEK 4.

$$y' = y^2, \quad y(1) = -1$$

Başlangıç değer probleminin;

$R: |x-1| \leq a, |y+1| \leq b$ bölgesindeki çözümünün varlığını ve tekliğini inceleyelim.

$$f(x,y) = y^2 \text{ olup, } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \text{ dir.}$$

$x_0 = 1, y_0 = -1$ başlangıç koşullarına olan, $(1, -1)$ noktası komşuluğundaki her bölgede f , Varlık ve Teklik Teoreminin koşullarını sağlar.

Teorem 3.1.3 den, her $(x, y) \in R$ için;

$$M = \max f(x, y)$$

$h = \min(a, b/M)$ dir. Burada $|x-1| \leq h$ için

$$M = (-1-b)^2 = (b+1)^2 \text{ ve } h = \min \left\{ a, \frac{b}{(b+1)^2} \right\}$$

olur. Şimdi a ve b yi en uygun biçimde seçmeye çalışalım (Şekil 10).

$$F(b) = \frac{b}{(1+b)^2} \text{ ve } F'(b) = \frac{1-b}{(b+1)^3} \text{ olur.}$$

$F(b)$ nin $b > 0$ için max. değeri $b=1$ de oluşur. Böylece $F(1) = \frac{1}{4}$ olur. Eğer

$$a \geq \frac{1}{4} \text{ ise } \frac{b}{(1+b)^2} \leq a \text{ olacağından}$$

$$h = \frac{b}{(1+b)^2} \leq \frac{1}{4} \text{ alınabilir. Eğer } a < \frac{1}{4} \text{ ise, açık olarak } h < \frac{1}{4} \text{ dir.}$$

Sonuç olarak; her durumda $b=1, a \geq \frac{1}{4}$ için $h \leq \frac{1}{4}$ olur. Böylece probleminiz için tek çözümün varlığının kesinlikle güvence altına alınacağı aralık, $|x-1| \leq \frac{1}{4}$ olup, $\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}$ dir.

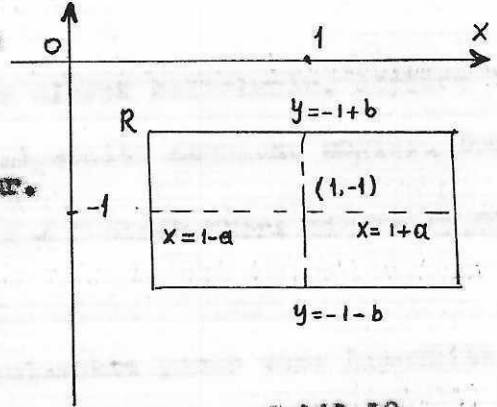
Bu demek değildir ki; $y' = -y^2, y(1) = -1$

başlangıç değer probleminin çözümü yalnızca bu küçük aralık içerisinde (Şekil 11).

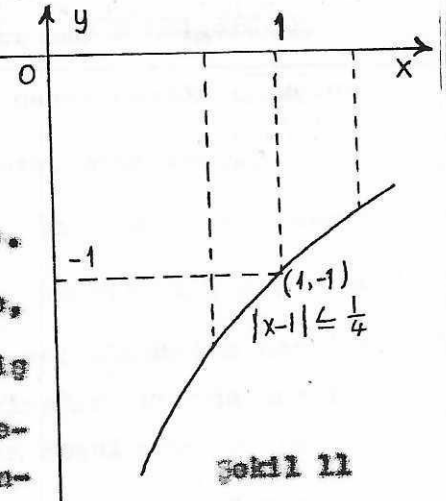
Teorem 3.1.3 ün koşullarına sağlayacak biçimde,

bu küçük aralıkta içinde bulunduran daha geniş bir aralık tanımlanabilir. Gerçekten bu problemin çözümü, $y = -\frac{1}{x}$ olup; $0 < x < \infty$ aralığında

da kendisi ve türevleri sürekli bir fonksiyondur.



Şekil 10



Şekil 11

ÖRNEK 5.

$D: |x| \leq a, |y| \leq b$ bölgesinde tanımlanan $f(x,y) = x|y|$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $f(x,y)$ fonksiyonunun tanımlanan bölgede Lipschitz Koşulunu sağlamasına karşın $\frac{\partial f}{\partial y}$ bu bölgede sürekli olmayabilir. Lipschitz Koşulunun tanımından her $(x,y_1), (x,y_2) \in D$ olacak biçimde

$$\begin{aligned} |f(x,y_1) - f(x,y_2)| &= |x|y_1 - x|y_2| \leq |x||y_1 - y_2| \\ &\leq a|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

bulunur. Burada Lipschitz Sabiti $K=a$ olarak belirlenir. Böylece $f(x,y)$, D bölgesi içinde y ye göre Lipschitz Koşulunu sağlar. Buna karşın $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ parçalı türevi, $x \neq 0$ olmak üzere hiçbir $(x,0) \in D$ noktasında tanımlı değildir.

Bu arada önemli noktayı vurgulamakta yarar var: Lipschitz Koşulunun tanımı olarak verilen

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

bağıntısı tanımlanan bölgede $f(x,y)$ fonksiyonunun x e göre sürekliliği hakkında hiçbir bilgi vermez. Örneğin:

$$f(x,y) = [x] + y$$

biçiminde tanımlanan $f(x,y)$ fonksiyonu kapalı her D bölgesinde y ye göre Lipschitz Koşulunu sağlar. Ayrıca sabit herbir x değeri için y ye bağlı fonksiyon her yerde süreklidir. Buna karşın $f(x,y)$ fonksiyonu x e göre sürekli değildir. Çoğu kez bir fonksiyonun tanımlanan bir bölgede birinci parçalı türevinin (y ye göre) sürekliliğini göstermek, fonksiyonun bu bölgede Lipschitz Koşulunu sağlayıp sağlamadığını göstermekten daha kolaydır. Burada önemli olan nokta, tanımlanan bir bölgede Lipschitz Koşulundan bulunan K sabiti yalnızca bölge içindeki (x_0, y_0) noktası komşuluğunda sağlanır. K sabiti seçilen bölge ile değişir.

3.5. SÜREKLİLİK KAVRAMI YARDIMI İLE VARLIK VE TEKLİK TEOREMİ

Bu kesimde Varlık ve Teklik Teoreminin kanıtı yine Ardışık Yaklaşıklıklar Yöntemi yardımı ile bu kezde süreklilik kavramı temel alınarak verilecek.

n pozitif bir tam sayı olmak üzere $a \leq x \leq b$ kapalı aralığını $C[a, b]$ ile göstereyim. $C[a, b]$ üzerinde sürekli olan n boyutlu vektörel fonksiyonlar cümlesi

$$y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$$

olsun. $C[a, b]$ aralığı üzerinde bu fonksiyonlara ilişkin norm fonksiyonunu

$$\|y\|_C = \max_{a \leq x \leq b} \|y(x)\| = \max_{a \leq x \leq b} \sum_{j=1}^n |y_j(x)|$$

biçiminde tanımlıyalım. $y = y(x)$, $\xi = \xi(x)$, $C[a, b]$

aralığında bulunmak koşulu ile $C[a, b]$ üzerinde tanımlanan

$$d(y, \xi) = \|y - \xi\|_C$$

metriği ile $C[a, b]$ bir metrik uzay tanımlar. Gerçekten, $C[a, b]$ nin bir metrik uzay olması için aşağıdaki özellikleri sağlayacağı kolayca kontrol edilebilir.

$$M_1 : d(y, \xi) \geq 0 \text{ ve } d(y, y) = 0 \text{ (Negatif olmama)}$$

$$M_2 : d(y, \xi) = d(\xi, y) \text{ (Simetri)}$$

$$M_3 : d(y, \xi) \leq d(y, \eta) + d(\eta, \xi) \text{ (Üçgen eşitsizliği)}$$

$$M_4 : y \neq \xi \text{ ise } d(y, \xi) > 0 \text{ (Pozitif olma)}$$

Bundan başka $C[a, b]$ içinde verilen $\langle y_s \rangle$ Cauchy dizileri, seçilen bu norm ile

$$\lim_{r, s \rightarrow \infty} \|y_r - y_s\| = \lim_{r, s \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} \|y_r(x) - y_s(x)\| = 0$$

oluyor ise, bu $\langle y_s \rangle$ dizisinin $a \leq x \leq b$ aralığında düzgün yakınsak olması ile eşdeğerlidir. Sürekli fonksiyonlardan oluşan düzgün

yakınsak dizilerin limiti de sürekli bir fonksiyon olduğundan, sonuç olarak $C[a, b]$ bir tam metrik uzaydır. $C > 0$ bir sabit, y_0 da R^n de bir nokta olsun. n boyutlu, $f(x, y)$ vektör değerli fonksiyonu

$$E = \left\{ (x, y) \mid a < x < b, \|y - y_0\| < c \right\}$$

açık bölgesinde sürekli ve $y = y(x)$, $C[a, b]$ aralığı içinde olsun.

Ayrıca $r_1 \leq x \leq r_2$ için $(x, y(x)) \in E$ kabul edelim. Buradan

$r_1 < x_0 < r_2$ olacak biçimde verilen herhangi bir x_0 için $r_1 \leq x \leq r_2$ aralığında

$$Ay = \xi = \xi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

biçiminde ki bir dönüşüm $r_1 \leq x \leq r_2$ üzerinde sürekli bir fonksiyon tanımlar. Burada $y = y(x) \in C[r_1, r_2]$ olduğundan, A nın $C[r_1, r_2]$ den kendi içine bir dönüşüm tanımladığı açıktır.

$y(x_0) = y_0$ olduğundan x_0 in komşuluğunda ki tüm x ler için $(x, y(x))$ noktaları E açık bölgesinde bulunur. Sonuç olarak

$r_1 \leq x \leq r_2$ aralığı üzerinde $y(x_0) = y_0$ başlangıç koşulunu sağlayacak biçimde $y' = f(x, y)$ denkleminin herhangi bir çözümü olan $y = y(x)$,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad r_1 \leq x \leq r_2 \quad (3.5.1)$$

bağıntısını da sağlar. (3.5.1) in sağ yanı görüleceği gibi Ay dönüşümü olduğundan, $y' = f(x, y)$ diferensiyel denkleminin $r_1 \leq x \leq r_2$ aralığında ki herhangi bir

$$y = y(x) \quad \text{çözümü}$$

$$y = Ay \quad (3.5.2)$$

bağıntısını sağlar. Burada y nin $C[r_1, r_2]$ aralığına ait olduğu açıktır. (3.5.2) nedeniyle $y' = f(x, y)$ diferensiyel denkleminin

$r_1 \leq x \leq r_2$ aralığında ki bir $y = y(x)$ çözümüne, A dönüşümünün bir

ssbit noktası denir. Bu açıklamalardan sonra esas teoremi verebiliriz:

TEOREM 3.3.1. B, R^{n+1} de bir bölge olsun. $f(x,y)$ ve $\frac{\partial f}{\partial y_i}$, $i=1,2,\dots,n,\dots$ için B bölgesinde tanımlı ve sürekli olacak biçimde $y' = f(x,y)$ denklemini gözönüne alalım. B de ki her (x_0, y_0) noktası için $Y' = f(x,y)$ denkleminin $y(x_0) = y_0$ bağlantı koşulunu sağlayacak biçimde (x_0, y_0) noktası komşuluğunda $y=y(x)$ gibi bir tek çözümlü vardır [14].

KANIT.

B boş olmayan açık-bağlantılı bir küme olsun.

$(x_0, y_0) \in B$ ve a, b birer pozitif sayı olacak biçimde B içinde sınırlı ve kapalı bir çümle

$$\Gamma = \left\{ (x,y) \mid |x-x_0| \leq a, \|y-y_0\| \leq b \right\}$$

biçiminde tanımlanabilir.

$f(x,y)$ ve $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ fonksiyonları B bölgesinde sürekli olduklarından, Γ bölgesinde de süreklidirler. Bu ise $(x,y) \in \Gamma$ olduğu sürece,

$$\|f(x,y)\| \leq M, \left| \frac{\partial f_j(x,y)}{\partial y_j} \right| \leq K; \quad i,j=1,2,\dots,n \quad (3.5.3)$$

olacak biçimde pozitif M ve K sayılarının varlığını gerektirir. (3.5.3)

ve Ortalama Değer Teoreminde her $(x,y_1), (x,y_2) \in \Gamma$ ve Γ konveks olduğu sürece

$$\|f(x,y_1) - f(x,y_2)\| \leq \eta K \|y_1 - y_2\|$$

dır. Şimde $r > 0$ olması koşulu ile

$$i) \quad r \leq a, \quad ii) \quad r \leq b/M, \quad iii) \quad r < 1/nK$$

biçiminde seçelim. r nin böyle seçilmesinin nedeni işlemlerde kolaylık sağlanması içindir. Buradan Γ_r, Γ nin bir kapalı alt çümlesi olmak üzere,

$$\Gamma_r = \left\{ (x, y) \mid |x - x_0| \leq r, \|y - y_0\| \leq b \right\}$$

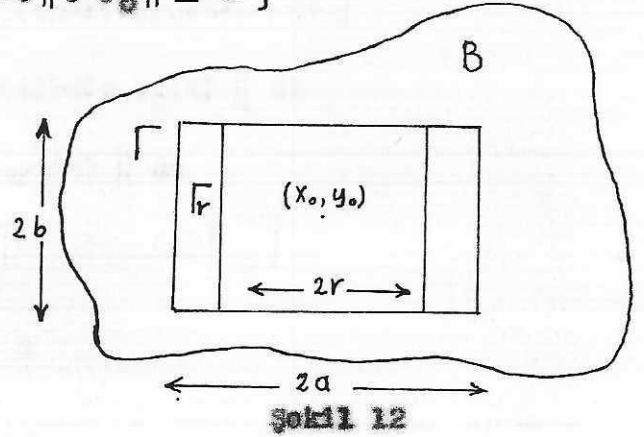
biçiminde tanımlayalım.

Ayrıca \mathcal{E}_r aşağıdaki koşulları sağlayacak biçimde

$$y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$$

fonksiyonlarının kümesi

olsun.



Şekil 12

a) $y(x)$ fonksiyonu $|x - x_0| \leq r$ için sürekli,

b) $|x - x_0| \leq r$ kaldığı sürece $(x, y(x)) \in \Gamma_r$.

Bu koşullar, $|x - x_0| \leq r$ için $\|y'(x) - y_0\| \leq b$ olmasını gerektirir.

Böylece \mathcal{E}_r $C[x_0 - r, x_0 + r]$ ye ait olan fonksiyonların bir alt kümesi olup \mathcal{E}_r nin grafiği tamamen Γ_r içinde bulunur.

\mathcal{E}_r içinde, $y = y(x)$ için $\xi = \xi(x)$ olmak üzere

$$\xi = \xi(x) = Ay - y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad |x - x_0| \leq r$$

biçiminde tanımlansın. Buradan

$$\begin{aligned} \|\xi(x) - y_0\| &= \left\| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right\| \\ &\leq \int_{x_0}^x \|f(t, y(t))\| dt \leq M |x - x_0| \leq Mr \leq b \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $r \leq b/M$ seçimi $\xi = \xi(x) = Ay$ nin grafiğinin

\mathcal{E}_r içinde ki her y için Γ_r içinde kalmasını güvence altına

alır. $\xi(x)$ sürekli bir fonksiyon olduğundan r nin bu şekilde seçimi A nın \mathcal{E}_r den kendi içine bir dönüşüm olduğunu gösterir.

Ayrıca $\xi(x_0) = y_0$ olduğundan ξ başlangıç koşulunu da sağlar.

$$(y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)) \in \mathcal{E}_r$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\|Ay_1 - Ay_2\| &= \left\| \int_{x_0}^x [f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))] dt \right\| \\
&\leq \int_{x_0}^x \|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\| dt \\
&\leq nK \int_{x_0}^x \|y_1(t) - y_2(t)\| dt \\
&\leq nKr \left[\max_{|x-x_0| \leq r} \|y_1(x) - y_2(x)\|_c \right] \\
&= \alpha \|y_1 - y_2\|_c
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $r < \frac{1}{nK}$ seçilmesi $\alpha = nKr < 1$ olmasını sağlar.

Buradan $0 < \alpha < 1$ ve $y_1, y_2 \in \mathcal{E}_r$ için

$$\begin{aligned}
\max_{|x-x_0| \leq r} \|Ay_1 - Ay_2\| &= \|Ay_1 - Ay_2\|_c \\
&\leq \alpha \|y_1 - y_2\|_c
\end{aligned} \tag{3.5.4}$$

olur. $\|\cdot\|_c$ \mathcal{E}_r içinde uzaklık ölçümü olduğundan (3.5.4) nedeniyle \mathcal{E}_r üzerindeki iki noktanın A altındaki uzaklıkları, iki nokta arasındaki uzaklıktan küçüktür. Bu nedenle A dönüşümüne \mathcal{E}_r dan kendi içine olan çekim dönüşümü denir. Şimdi $|x-x_0| \leq r$ aralığında $y(x) = x_0$ başlangıç değeri ile aradığımız noktaları

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_1(x) = Ay_0 \\
y_2 &= y_2(x) = Ay_1 \\
&\vdots \\
y_k &= y_k(x) = Ay_{k-1}
\end{aligned}$$

biçiminde seçenebilir. A dönüşümünün tanımından

$$y_j(x_0) = y_0 \text{ ve } y_j(x) \in \mathcal{E}_r; j=0, 1, 2, \dots, k, \dots$$

Böner şekilde

$$y_k = Ay_{k-1} = A(Ay_{k-2}) = A^2y_{k-2} = \dots = A^k y_0$$

Burada herhangi bir k için A^k, A dâimîliğinin k kez uygulan-
dığını varsular.

m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere $n > m$ olsun. Buradan
 y_n ve y_m yaklaşık değerleri için bütünsel dâimîliği nedeniyle

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|_c &= \|A y_{n-1} - A y_{m-1}\|_c \\ &\leq \alpha \|y_{n-1} - y_{m-1}\|_c \\ &\leq \alpha \|A y_{n-2} - A y_{m-2}\|_c \leq \alpha^2 \|y_{n-2} - y_{m-2}\|_c \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^m \|y_0 - y_{n-m}\|_c \end{aligned}$$

olar. Üçgen Eşitsizliği nedeniyle

$$\begin{aligned} \alpha^m \|y_0 - y_{n-m}\|_c &\leq \alpha^m \left\{ \|y_0 - y_1\|_c + \|y_1 - y_2\|_c + \dots \right. \\ &\quad \left. + \|y_{n-m-1} - y_{n-m}\|_c \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} \alpha^m \|y_0 - y_{n-m}\|_c &\leq \alpha^m \|y_0 - y_1\|_c \left\{ 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-m-1} \right\} \\ &\leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} \|y_0 - y_1\|_c \leq \frac{\alpha^m b}{1-\alpha} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece m, n pozitif tam sayı ve $n > m$ için y_n ve y_m inci
yaklaşık yaklaşımlar

$$\|y_n - y_m\|_c \leq \frac{\alpha^m b}{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.5.5)$$

eşitsizliğini sağlar. (3.5.5) de sağ yarıdaki ifadenin $m \rightarrow \infty$ için
limiti alınırca

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\alpha^m b}{1-\alpha} = 0$$

bulunur.

Bu ise $y_j = y_j(x)$, $j=0,1,2,\dots$ ardışık yaklaşımlarının bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Sonuç olarak, $C[x_0-r, x_0+r]$ tam metrik uzay olduğundan

$$a) \lim_{j \rightarrow \infty} y_j(x) = y(x), \quad |x-x_0| \leq r \quad \text{üzerinde d\u00fcng\u00fcn s\u00fcrekli}$$

$$b) |x-x_0| \leq r \quad \text{ve} \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{i\u00e7in} \quad (x, y(x)) \in \Gamma$$

olacak biçimde $|x-x_0| \leq r$ üzerinde

$$y = y(x)$$

gibi s\u00fcrekli bir fonksiyon vardır. B\u00f6ylece $y = y(x) \in \mathcal{C}_r$ olur. Herhangi bir j i\u00e7in

$$\|Ay - Ay_j\|_C \leq \alpha \|y - y_j\|_C \quad (3.5.6)$$

dir. (3.5.6) E\u0131tsizli\u011finin sa\u011f yama $j \rightarrow \infty$ i\u00e7in sifara gider.

Bu ise

$$Ay = \lim_{j \rightarrow \infty} Ay_j = \lim_{j \rightarrow \infty} y_{j+1} = y$$

bulunur. B\u00f6ylece $y = y(x)$, A d\u00fcng\u00fcl\u00fcn\u00fcn bir sabit noktası olup, $y(x_0) = y_0$ ba\u011flang\u0131\u00e7 ko\u015fulunu sa\u011flayacak biçimde $y' = f(x, y)$ diferansiyel denkleminin bir \u00e7\u00f6z\u00fcm\u00fcnd\u00fcr. B\u00f6ylece \u00e7\u00f6z\u00fcm\u00fcn varlığı kanıtlanmış oldu.

Teklili\u011finin kanıtı i\u00e7in; $|x-x_0| \leq r_1$ aralığında tanımlı ve $\xi(x_0) = y_0$ olacak \u015fekilde ba\u015fka bir $\xi = \xi(x)$ \u00e7\u00f6z\u00fcm\u00fcn\u00fcn varlığına kabul edelim. Bundan $\delta > 0$ olmak \u00fczere $|x-x_0| \leq \delta$ i\u00e7in $(x, \xi(x))$ noktaları Γ s i\u00e7ine bulaşacak biçimde $\delta \leq \min(r, r_1)$ sayısı seçilebilir. $y = y(x)$ ve $\xi = \xi(x)$ birer \u00e7\u00f6z\u00fcm olduklarından, $0 < \alpha < 1$ i\u00e7in

$$\begin{aligned} \max_{|x-x_0| \leq \delta} \|y(x) - \xi(x)\| &= \|y - \xi\|_C \\ &= \|Ay - A\xi\|_C \leq \alpha \|y - \xi\|_C \quad \text{dir.} \end{aligned}$$

Bu ise ancak $\|y - \xi\|_0 = 0$ olması koşulu ile sağlanır. Sonuç olarak $|x - x_0| \leq \delta$ aralığında $y(x) = \xi(x)$ bulunur. Böylece çözümün tekliğinin kanıtı tamamlanmış olur. Şimdi bu yönteme ilişkin bir örnek verelim.

ÖRNEK

$$y' = y^2 + x^2, \quad y(0) = 1, \quad \text{denklemini alalım.}$$

Böylece $f(x, y) = y^2 + x^2$. $(x_0, y_0) = (0, 1)$. B bölgesi tüm (x, y) düzlemi olup, Γ bölgesini birin kare olarak tanımlayalım.

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \mid |x| \leq 1, |y-1| \leq 1 \right\} \quad \text{olsun. Böylece a-böl ve}$$

$$|f(x, y)| = |y^2 + x^2| \leq |y^2| + |x^2| \leq 4 + 1 = 5$$

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| = |2y| \leq 4 \quad (x, y) \in \Gamma \quad \text{için}$$

Buradan $M=5$, $K=4$ bulunmuş olur. i) $r \leq a$, ii) $r \leq b/M$, iii) $r < 1/nk$

koşullarından $0 < r \leq \frac{1}{5}$ olarak belirlenir. Böylece A değeri

$$\xi(x) = Ay = 1 + \int_0^x [y^2(s) + s^2] ds, \quad |x| \leq \frac{1}{5},$$

ilk yaklaşıma için $y(x) = y_0 = 1$ yerine konursa

$$y_1(x) = Ay_0 = 1 + \int_0^x (1 + s^2) ds = 1 + x + \frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x) = Ay_1 = 1 + \int_0^x \left[\left(1 + s + \frac{s^3}{3}\right)^2 + s^2 \right] ds$$

$$= 1 + x + x^2 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{6} x^4 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{1}{63} x^7,$$

ve böylece devam eder. Bu düşünce altında sürdürülen ardışık yaklaşımlar $|x| \leq \frac{1}{5}$ için $y(0) = 1$ koşulunu sağlayacak biçimde bir $y(x)$ çözümüne dâğılm olarak yakınsarlar.

Teoremin kanıtında ve ayrıca örnekte de vurgulandığı gibi

(i),(ii),(iii) koşulları altında bulunan çözümler yereldir. Ardışık yaklaşıklıklarla bulunan çözümler yalnızca x_0 komşuluğunda bağlantılı değer koşulunu sağlar ve $y(x)$ e yakınsarlar.

Örnekte tanımlanan B bölgesi

$$B = \left\{ (x,y) \mid -\infty < x < \infty, \|y-y_0\| \leq b \right\}.$$

veya B tüm R^{n+1} uzayıdır.

KAYNAKLAR

- [1] COURANT R., JOHN, P., Introduction to Calculus and Analysis, Wiley International Editions, New York, 1965.
- [2] KELLS M. L., Elementary Differential Equations, Mc Graw-Hill Book Comp., New York, 1965.
- [3] HILDEBRAND P. B., Advanced Calculus for Applications, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [4] DEYTMAN, J.D., Introduction to Linear Algebra and Differential Equations, Mc Graw-Hill Book Company, U.S.A., 1974.
- [5] COORDINATION E.A., An Introduction to Ordinary Differential Equations, Prentice Hall of India Private Limited, New Delhi, 1968.
- [6] INCE E.L., Ordinary Differential Equations, Dover Publications Inc., U.S.A., 1970.
- [7] BRAUER F. and NAGEL J., Ordinary Differential Equations, W.A. Benjamin Inc., New York, 1968.
- [8] BIRKHOFF G., Ordinary Differential Equations, Ginn and Company, Boston, U.S.A., 1971.
- [9] ROSS S.L., Differential Equations, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1974.
- [10] EBINGUSKI I.G., Ordinary Differential Equations, (Translated by SILVERMAN R.A.) Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1971.

- [11] COCHRAN E.A., and LEVINSON N., Theory of Ordinary Differential Equations, Mc Graw-Hill, New York, 1955.
- [12] COLE R.H., Theory of Ordinary Differential Equations, Appleton-Century-Crofts Division of Meredith Corporation, New York, 1968.
- [13] KART C. Dinsuk Sisteler-I-II, (Henüz yayınlanmadı.)
- [14] DAVID A. SÁNCHEZ, Ordinary Differential Equations and Stability Theory; An Introduction, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1968.