

**T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
B-SPLINE SONLU ELEMAN YÖNTEMLERİ İLE ÇÖZÜMLERİ**

Orkun TAŞBOZAN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**MALATYA
Şubat 2015**

Tezin Başlığı : Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin B-spline Sonlu Eleman Yöntemleri ile Çözümleri
Tezi Hazırlayan : Orkun TAŞBOZAN
Sınav Tarihi : 27.02.2015

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Alaattin ESEN
İnönü Üniversitesi
Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY
İnönü Üniversitesi
Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ
İnönü Üniversitesi
Doç. Dr. Hasan BULUT
Fırat Üniversitesi
Doç. Dr. Ercan ÇELİK
Atatürk Üniversitesi

Prof. Dr. Alaattin ESEN
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora tezi olarak sunduğum "Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin B-spline Sonlu Eleman Yöntemleri ile Çözümleri" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Orkun TAŞBOZAN

ÖZET

Doktora Tezi

Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin B-spline Sonlu Eleman
Yöntemleri ile Çözümleri

Orkun TAŞBOZAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

111+xvii sayfa

2015

Danışman: Prof. Dr. Alaattin ESEN

Yedi bölümden oluşan bu tezin birinci bölümü Giriş bölümü olarak düzenlendi ve literatür özeti de bu bölümde verildi.

İkinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlara yer verildi. Bu bölümde, Gama ve Mittag-Leffler fonksiyonları, kesirli mertebeden türev ve integral hesaplamalarında kullanılan Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo yaklaşımları, spline ve B-spline fonksiyonlar, Galerkin ve kollokasyon sonlu eleman yöntemleri hakkında bazı bilgiler verildi.

Üçüncü, dördüncü, beşinci ve altıncı bölümler bu tezin orijinal kısımlarını oluşturmaktadır. Üçüncü bölümde, zamana göre kesirli mertebeden gaz denklemi, kuadratik B-spline Galerkin ve kübik B-spline kollokasyon yöntemleri ile çözüldü. Elde edilen nümerik çözümler ile L_2 ve L_∞ hata normları tablolar halinde sunuldu. Nümerik ve tam çözümlerin grafikleri ile birlikte mutlak hata grafikleride verildi.

Dördüncü bölümde, zamana göre kesirli mertebeden Burgers denklemi, kuadratik B-spline Galerkin ve kübik B-spline kollokasyon yöntemleri ile çözüldü. Bu yöntemler üç model probleme uygulandı. Elde edilen nümerik çözümler ile L_2 ve L_∞ hata normları tablolar halinde sunuldu. Nümerik ve tam çözümlerin grafikleri ile birlikte mutlak hata grafikleride verildi.

Beşinci bölümde, zamana göre kesirli mertebeden telegraf denklemi, kuadratik B-spline Galerkin ve kübik B-spline kollokasyon yöntemleri ile çözüldü. Bu yöntemler üç model probleme uygulandı. Elde edilen nümerik çözümler ile L_2 ve L_∞ hata normları tablolar halinde sunuldu. Nümerik ve tam çözümlerin grafikleri ile birlikte mutlak hata grafikleride verildi.

Altıncı bölümde, zamana göre kesirli mertebeden Schrödinger denklemi, kuadratik B-spline Galerkin ve kübik B-spline kollokasyon yöntemleri ile çözüldü. Elde edilen

nümerik çözümler ile L_2 ve L_∞ hata normları tablolar halinde sunuldu. Nümerik ve tam çözümlerin grafikleri ile birlikte mutlak hata grafikleride verildi.

Son olarak yedinci bölümde, kuadratik B-spline Galerkin ve kübik B-spline kollokasyon yöntemleri ile çözülen problemlerin nümerik çözümleri için bazı sonuçlar verildi.

ANAHTAR KELİMELEER: Kesirli Mertebeden Gaz Denklemi, Kesirli Mertebeden Burgers Denklemi, Kesirli Mertebeden Telegraf Denklemi, Kesirli Mertebeden Schrödinger Denklemi, Sonlu Elemanlar Yöntemleri, Galerkin Yöntemi, Kollokasyon Yöntemi, B-spline Fonksiyonları.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

Solutions of Fractional Order Partial Differential Equations by B-spline Finite Element Methods

Orkun TAŞBOZAN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

111+xvii pages

2015

Supervisor: Prof. Dr. Alaattin ESEN

The first chapter of this thesis, which is consisting of seven chapters, has been arranged as an introduction chapter and the literature survey has also been given in this chapter.

In the second chapter, basic concepts that will be used in later chapters were presented. In this chapter, some information about Gamma and Mittag-Leffler functions, Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville and Caputo approaches which are used in the fractional order derivative and integral calculus, splines and B-spline functions, Galerkin and collocation finite element methods have been presented.

Third, fourth, fifth and sixth sections constitute the original parts of this thesis. In the third section, the time fractional order gas equation has been solved using quadratic B-spline Galerkin and cubic B-spline collocation methods. The obtained numerical solutions and error norms L_2 and L_∞ have been presented in tables. Absolute error graphics as well as those of exact and numerical solutions have been given.

In the fourth chapter, the time fractional order Burgers equation has been solved by quadratic B-spline Galerkin and cubic B-spline collocation methods. These methods have been applied to three model problems. The obtained numerical solutions and error norms L_2 and L_∞ have been presented in tables. Absolute error graphics as well as those of exact and numerical solutions have been given.

In the fifth chapter, the time fractional order telegraph equation has been solved by quadratic B-spline Galerkin and cubic B-spline collocation methods. These methods have been applied to three model problems. The obtained numerical solutions and error norms L_2 and L_∞ have been presented in tables. Absolute error graphics as well as those of exact and numerical solutions have been given.

In the sixth chapter, the time fractional order Schrödinger equation has been solved by quadratic B-spline Galerkin and cubic B-spline collocation methods. The obtained

numerical solutions and error norms L_2 and L_∞ have been presented in tables. Absolute error graphics as well as those of exact and numerical solutions have been given.

Finally, in the seventh chapter, some results have been presented about the numerical solutions of the problems solved by quadratic B-spline Galerkin and cubic B-spline collocation methods.

KEY WORDS: Fractional Order Gas Equation, Fractional Order Burgers Equation, Fractional Order Telegraph Equation, Fractional Order Schrödinger Equation, Finite Element Methods, Galerkin Method, Collocation Method, B-spline Functions.

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım süresince engin bilgisi ve titiz çalıőma prensibiyle bana örnek olan ve yol gösteren, çalıőmamın her aőamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan tez danıőmanım çok değerli hocam Prof. Dr. Alaattin ESEN'e, araőtırmalarım sırasında görüőleriyle yol gösteren, ilgi ve desteğini esirgemeyen ve her zaman bana yardımcı olan değerli hocalarım Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY'a, Yrd. Doç. Dr. Yusuf UÇAR'a, Yrd. Doç. Dr. Murat YAĞMURLU'ya, bölüm başkanımız Prof. Dr. Sadık KELEŐ'e, her zaman desteklerini aldığım sevgili aileme, çok kıymetli eőim Hatice' ye ve biricik kızım Eylül' e teőekkürü bir borç bilirim.

Aldığım bu akademik katkıların yanısıra eğitimim süresince bana burs desteği gösteren TUBİTAK'a sonsuz teőekkürlerimi sunuyorum.

Orkun TAŞBOZAN

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
TABLolar DİZİNİ	xi
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Gama Fonksiyonu	3
2.2 Mittag-Leffler Fonksiyonu	4
2.3 Grünwald-Letnikov Yaklaşımı	5
2.4 Riemann-Liouville Yaklaşımı	6
2.5 Caputo Yaklaşımı	6
2.6 L_1 ve L_2 Yaklaşımları	7
2.7 Spline Fonksiyonlar	8
2.8 B-spline Fonksiyonlar	9
2.8.1 Lineer B-spline Fonksiyonlar	10
2.8.2 Kuadratik B-spline Fonksiyonlar	11
2.8.3 Kübik B-spline Fonksiyonlar	12
2.9 Sonlu Eleman Yöntemleri	13

2.10	Ağırlıklı Kalan Yöntemleri	15
2.10.1	Galerkin Yöntemi	16
2.10.2	Kollokasyon Yöntemi	17
3	KESİRLİ MERTEBEDEN GAZ DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	18
3.1	Kuadratik B-spline Galerkin Çözümleri	18
3.2	Kübik B-spline Kollokasyon Çözümleri	22
4	KESİRLİ MERTEBEDEN BURGERS TİPİ DENKLEMİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	30
4.1	Model Problemler	31
4.2	Kuadratik B-spline Galerkin Çözümleri	32
4.3	Kübik B-spline Kollokasyon Çözümleri	42
5	KESİRLİ MERTEBEDEN TELEGRAF DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	52
5.1	Model Problemler	53
5.2	Kuadratik B-spline Galerkin Çözümleri	55
5.3	Kübik B-spline Kollokasyon Çözümleri	68
6	KESİRLİ MERTEBEDEN SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	82
6.1	Kuadratik B-spline Galerkin Çözümleri	84
6.2	Kübik B-spline Kollokasyon Çözümleri	92
7	SONUÇLAR	100
	KAYNAKLAR	102

ÖZGEÇMİŞ	109
----------	-----

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Gama fonksiyonu	4
Şekil 2.2	Linear B-spline baz fonksiyonları.	11
Şekil 2.3	Kuadratik B-spline baz fonksiyonları.	12
Şekil 2.4	Kübik B-spline baz fonksiyonları.	13
Şekil 3.1	Problemin $\Delta t = 0.0005$, $N = 80$, farklı γ ve artan t değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	27
Şekil 3.2	Problemin $\Delta t = 0.0005$, $N = 80$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.	28
Şekil 3.3	Problemin $\Delta t = 0.0005$, $N = 80$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri. . . .	29
Şekil 4.1	Problem 1' in $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.00025$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve artan t zamanları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	36
Şekil 4.2	Problem 1' in $\Delta t = 0.00025$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı γ değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri. .	37
Şekil 4.3	Problem 2' nin $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.00025$, $N = 80$, $\nu = 1$ ve artan t zamanları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	38
Şekil 4.4	Problem 2' nin $\Delta t = 0.00025$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı γ değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.	39
Şekil 4.5	Problem 3' ün $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.0005$, $N = 120$, $\nu = 1$ ve artan t zamanları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	41

Şekil 4.6	Problem 3' ün $\Delta t = 0.0005$, $N = 120$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı γ değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.	41
Şekil 4.7	Problem 1' in $\Delta t = 0.00025$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı γ değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.	44
Şekil 4.8	Problem 2' nin $\Delta t = 0.00025$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı γ değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.	46
Şekil 4.9	Problem 3' ün $\Delta t = 0.0005$, $N = 120$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı γ değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.	48
Şekil 5.1	Problem 1' in $\Delta t = 0.001$, $N = 30$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.	61
Şekil 5.2	Problem 1' in $\gamma = 1.5$, $\Delta t = 0.001$, $N = 30$ ve artan t zamanları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	62
Şekil 5.3	Problem 2' nin $\Delta t = 0.0005$, $N = 100$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.	64
Şekil 5.4	Problem 2' nin $\gamma = 1.5$, $\Delta t = 0.0005$, $N = 100$ ve artan t zamanları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	65
Şekil 5.5	Problem 3' ün $\Delta t = 0.0002$, $N = 150$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.	67
Şekil 5.6	Problem 3' ün $\gamma = 1.5$, $\Delta t = 0.0002$, $N = 300$ ve artan t zamanları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	68
Şekil 5.7	Problem 1' in $\Delta t = 0.001$, $N = 30$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.	72
Şekil 5.8	Problem 2' nin $\Delta t = 0.0002$, $N = 100$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.	74

Şekil 5.9	Problem 3' ün $\Delta t = 0.0002$, $N = 150$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri. .	76
Şekil 6.1	Problemin reel kısmının $\Delta t = 0.005$, $N = 40$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri. .	90
Şekil 6.2	Problemin sanal kısmının $\Delta t = 0.005$, $N = 40$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri. .	91
Şekil 6.3	Problemin reel ve sanal kısımlarının $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.005$, $N = 40$ ve artan t zamanları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	92
Şekil 6.4	Problemin reel kısmının $\Delta t = 0.004$, $N = 30$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.	96
Şekil 6.5	Problemin sanal kısmının $\Delta t = 0.004$, $N = 30$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.	97

TABLolar DİZİNİ:

Tablo 3.1	Problemin $N = 80$, $t = 1$, farklı γ değerleri ve Δt zaman adımları için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	26
Tablo 3.2	Problemin $\Delta t = 0.0005$, $N = 80$, farklı γ değerleri ve artan t zamanları için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	26
Tablo 4.1	Problem 1' in $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $v = 1$ ve farklı N değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	35
Tablo 4.2	Problem 1' in $\gamma = 0.50$, $N = 80$, $t = 1$, $v = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	35
Tablo 4.3	Problem 2' nin $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $v = 1$ ve farklı N değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	38
Tablo 4.4	Problem 2' nin $\gamma = 0.50$, $N = 80$, $t = 1$, $v = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	38
Tablo 4.5	Problem 3' ün $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $v = 1$ ve farklı N değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	40
Tablo 4.6	Problem 3' ün $\gamma = 0.50$, $N = 120$, $t = 1$, $v = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	40

Tablo 4.7 Problem 1' in $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı N değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	43
Tablo 4.8 Problem 1' in $\gamma = 0.50$, $N = 40$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	44
Tablo 4.9 Problem 2' nin $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı N değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	45
Tablo 4.10 Problem 2' nin $\gamma = 0.50$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	45
Tablo 4.11 Problem 3' ün $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı N değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	47
Tablo 4.12 Problem 3' ün $\gamma = 0.50$, $N = 120$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	47
Tablo 4.13 Problem 1' in $\Delta t = 0.00025$, $N = 40$, $\nu = 1$, farklı γ değerleri ve artan t zamanları için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	49
Tablo 4.14 Problem 2' nin $\Delta t = 0.00025$, $N = 80$, $\nu = 1$, farklı γ değerleri ve artan t zamanları için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	50
Tablo 4.15 Problem 3' ün $\Delta t = 0.0005$, $N = 120$, $\nu = 1$, farklı γ değerleri ve artan t zamanları için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	51

Tablo 5.1	Problem 1' in $\gamma = 1.50$, $\Delta t = 0.001$, $t = 1$ ve farklı N değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	60
Tablo 5.2	Problem 1' in $\gamma = 1.50$, $N = 30$, $t = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	60
Tablo 5.3	Problem 2' nin $\gamma = 1.50$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 1$ ve farklı N değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	63
Tablo 5.4	Problem 2' nin $\gamma = 1.50$, $N = 100$, $t = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	63
Tablo 5.5	Problem 3' ün $\gamma = 1.50$, $\Delta t = 0.0002$, $t = 1$ ve farklı N değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	66
Tablo 5.6	Problem 3' ün $\gamma = 1.50$, $N = 150$, $t = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	66
Tablo 5.7	Problem 1' in $\gamma = 1.50$, $\Delta t = 0.001$, $t = 1$ ve farklı N değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	70
Tablo 5.8	Problem 1' in $\gamma = 1.50$, $N = 30$, $t = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	71
Tablo 5.9	Problem 2' nin $\gamma = 1.50$, $\Delta t = 0.0002$, $t = 1$ ve farklı N değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	73

Tablo 5.10 Problem 2' nin $\gamma = 1.50$, $N = 80$, $t = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	73
Tablo 5.11 Problem 3' ün $\gamma = 1.50$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 1$ ve farklı N değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	75
Tablo 5.12 Problem 3' ün $\gamma = 1.50$, $N = 150$, $t = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	75
Tablo 5.13 Problem 1' in $\Delta t = 0.001$, $N = 30$, farklı γ değerleri ve artan t zamanları için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	77
Tablo 5.14 Problem 2' nin $\gamma = 1.10$, $t = 1$ için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ve Ref. [54] ile karşılaştırılması.	78
Tablo 5.15 Problem 2' nin $\gamma = 1.50$, $t = 1$ için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ve Ref. [54] ile karşılaştırılması.	79
Tablo 5.16 Problem 2' nin $\gamma = 1.90$, $t = 1$ için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ve Ref. [54] ile karşılaştırılması.	79
Tablo 5.17 Problem 2' nin $\Delta t = 0.0005$, $N = 100$, farklı γ değerleri ve artan t zamanları için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	80
Tablo 5.18 Problem 3' ün $\Delta t = 0.0005$, $N = 150$, farklı γ değerleri ve artan t zamanları için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	81

Tablo 6.1	Problemin reel kısmının $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.005$, $t = 1$ ve farklı N değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	88
Tablo 6.2	Problemin sanal kısmının $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.005$, $t = 1$ ve farklı N değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	89
Tablo 6.3	Problemin reel kısmının $\gamma = 0.50$, $N = 40$, $t = 1$ ve farklı Δt değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	89
Tablo 6.4	Problemin sanal kısmının $\gamma = 0.50$, $N = 40$, $t = 1$ ve farklı Δt değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	89
Tablo 6.5	Problemin reel kısmının $\Delta t = 0.004$, $\gamma = 0.50$, $t = 1$ ve farklı N değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	94
Tablo 6.6	Problemin sanal kısmının $\Delta t = 0.004$, $\gamma = 0.50$, $t = 1$ ve farklı N değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	95
Tablo 6.7	Problemin reel kısmının $N = 30$, $t = 1$, $\gamma = 0.50$ ve farklı Δt değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	95
Tablo 6.8	Problemin sanal kısmının $N = 30$, $t = 1$, $\gamma = 0.50$ ve farklı Δt değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	95
Tablo 6.9	Problemin $N = 30$, $t = 1$ için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ve Ref. [63] ile karşılaştırılması.	98

Tablo 6.10 Problemin reel kısmının $\Delta t = 0.005$, $N = 30$, farklı γ değerleri ve artan t zamanları için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	99
Tablo 6.11 Problemin sanal kısmının $\Delta t = 0.005$, $N = 30$, farklı γ değerleri ve artan t zamanları için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.	99

1. GİRİŞ

Kesirli hesaplama kavramı, 1695 yılında iki ünlü matematikçi G.W. Leibnitz ve L'Hospital'ın katkılarıyla literatürde yerini alan bir kavramdır [1]. Bu tarihten itibaren, keyfi mertebeden diferansiyel ve integrasyon teorisinin gelişmesine Euler, Laplace, Fourier, Lacroix, Abel, Riemann, Liouville, Caputo gibi bir çok ün yapmış matematikçinin katkı yaptığı görülmektedir [1]. Kesirli mertebeden diferansiyel kavramı, çeşitli uygulamaların önünün açılmasına ve bir çok fiziksel problemin ifade edilebilmesine yardımcı olmaktadır [2]. Son zamanlarda yapılan çalışmalar, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin karmaşık olayları ifade etmek için etkili bir araç olduğunu, fizik ve mühendislik ile ilgili birçok olayı daha etkili modelleyebildiğini göstermektedir [3]. Bu tür denklemlerin, viskoelastik ve sönümleme, difüzyon ve dalga yayılımı, elektromanyetik, kaos ve fraktallar, ısı transferi, biyoloji, elektronik, sinyal işleme, robotik, sistem tanımlama, trafik sistemleri, genetik algoritmalar, sızma, modelleme ve tanımlama, telekomünikasyon, kimya, fizik, kontrol sistemleri, ekonomi ve finans vb. gibi bir çok alanda uygulamaları mevcuttur [4].

Literatürde sıklıkla karşılaşılan kesirli türev yaklaşımlarından biri olan Riemann-Liouville yaklaşımı, iki ünlü matematikçi olan Riemann ve Liouville' nin yaptıkları kesirli türev tanımlarından meydana gelmiştir. Fakat bu yaklaşımın en büyük dezavantajı, ele alınan kesirli mertebeden denklem ile verilen başlangıç şartlarının, Riemann-Liouville kesirli türevinin başlangıç noktasındaki limit değerlerinden oluşmasıdır. Bu başlangıç koşullarının herhangi bir fiziksel anlamı mevcut değildir. 1967 yılında M. Caputo tarafından yapılan kesirli mertebeden türev tanımında ise kesirli mertebeden denklem ile birlikte verilen başlangıç şartlarının tamsayı mertebeden türevlerin başlangıç noktasındaki limit değerlerini içermektedir. Caputo tarafından sunulan tanımın bu avantajı sayesinde, bir çok çalışmada ele alınan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerde bulunan kesirli mertebeden türevler Caputo anlamında tercih edilmektedir [3].

Son yıllarda, bir çok araştırmacı Laplace dönüşüm yöntemi [1, 3], kuvvet serisi yöntemi [3], Adomian ayrışım yöntemi [5–7], varyasyonel iterasyon yöntemi [8–10], diferansiyel dönüşüm yöntemi [11–13], homotopi pertürbasyon yöntemi [14–16], homo-

topi analiz yöntemi [17–19], sonlu fark yöntemi [20–22], sonlu eleman yöntemi [23–26] vb. gibi yöntemleri kullanarak kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümlerini araştırdı.

Bu tezde;

$$\frac{\partial^\gamma U}{\partial t^\gamma} + U \frac{\partial U}{\partial x} - U(1 - U) = 0, \quad 0 < \gamma \leq 1$$

ile verilen kesirli mertebeden gaz denklemi,

$$\frac{\partial^\gamma U}{\partial t^\gamma} + U \frac{\partial U}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f(x, t), \quad 0 < \gamma \leq 1$$

biçimdeki kesirli mertebeden Burgers denklemi,

$$\frac{\partial^\gamma U}{\partial t^\gamma} + s_1 \frac{\partial^{\gamma-1} U}{\partial t^{\gamma-1}} + s_2 U - s_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f_1(x, t), \quad 1 < \gamma \leq 2$$

ve

$$\frac{\partial^\gamma U}{\partial t^\gamma} + \frac{\partial^{\gamma-1} U}{\partial t^{\gamma-1}} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f_2(x, t), \quad 1 < \gamma \leq 2$$

şeklindeki kesirli mertebeden iki farklı tipteki telegraf denklemleri ve son olarak

$$i \frac{\partial^\gamma U}{\partial t^\gamma} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + |U|^2 U = f(x, t), \quad 0 < \gamma \leq 1$$

kesirli mertebeden Schrödinger denklemi ele alınan başlangıç ve sınır şartları ile birlikte, kuadratik B-spline Galerkin ve kübik B-spline kollokasyon yöntemleri kullanılarak nümerik olarak çözüldü. Denklemlerdeki kesirli mertebeden türevler Caputo anlamında göz önüne alındı. Bu türevlerin yerine $0 < \gamma \leq 1$ için $b_k^\gamma = (k+1)^{1-\gamma} - k^{1-\gamma}$ olmak üzere

$$L1 : \quad \left. \frac{\partial^\gamma f(t)}{\partial t^\gamma} \right|_{t_m} = \frac{(\Delta t)^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{k=0}^{m-1} b_k^\gamma [f(t_{m-k}) - f(t_{m-1-k})] \quad (1.1)$$

ile verilen $L1$ ve $1 < \gamma \leq 2$ için ise $b_k^\gamma = (k+1)^{2-\gamma} - k^{2-\gamma}$ olmak üzere

$$L2 : \quad \left. \frac{\partial^\gamma f(t)}{\partial t^\gamma} \right|_{t_m} = \frac{(\Delta t)^{-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} \sum_{k=0}^{m-1} b_k^\gamma [f(t_{m-k}) - 2f(t_{m-1-k}) + f(t_{m-2-k})] \quad (1.2)$$

şeklindeki $L2$ yaklaşımları kullanıldı.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Gama Fonksiyonu

Bazen genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu olarak da isimlendirilen Gama fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0 \quad (2.1)$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlanır [27].

Gama fonksiyonuna, "genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu" adının verilmesinin sebebini göstermek için, $c > 0$ olmak üzere her $c \leq u \leq d$ sonlu aralığında

$$F(u) = \int_0^{\infty} e^{-ut} dt = \frac{1}{u} \quad (2.2)$$

integrali ile tanımlanan ve $1/u$ ifadesine düzgün yakınsak olan $F(u)$ fonksiyonu ele alınsın. (2.2) denkleminde u değişkenine göre türevler alınarak elde edilen genelleştirilmiş integraller yine düzgün yakınsak olacağından

$$\begin{aligned} -F'(u) &= \int_0^{\infty} t e^{-ut} dt = \frac{1}{u^2} \\ F''(u) &= \int_0^{\infty} t^2 e^{-ut} dt = \frac{2!}{u^3} \\ -F'''(u) &= \int_0^{\infty} t^3 e^{-ut} dt = \frac{3!}{u^4} \\ F^{(4)}(u) &= \int_0^{\infty} t^4 e^{-ut} dt = \frac{4!}{u^5} \\ &\vdots \\ (-1)^n F^{(n)}(u) &= \int_0^{\infty} t^n e^{-ut} dt = \frac{n!}{u^{n+1}} \end{aligned}$$

yazılabilir [27]. Bu son eşitlikte $u = 1$ alınırsa

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

ifadesi bulunur ki buradan da

$$\Gamma(n+1) = n!$$

elde edilir. Faktöriyel fonksiyonun özelliklerinden yukarıdaki denklemden

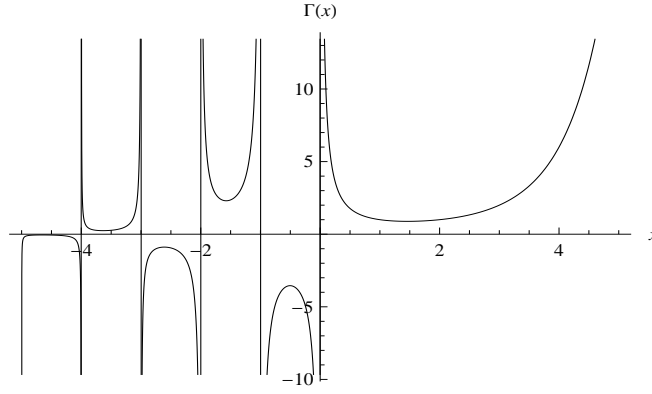
$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n)$$

olarak yazılabilir [27].

Pozitif değerler için tanımlanan Gama fonksiyonu,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

eşitliği kullanılarak negatif x değerleri için de tanımlanabilir. $\Gamma(x)$ fonksiyonu 0 ve negatif tam sayılar için sınırsız olduğu Şekil 2.1' den görülmektedir [27].



Şekil 2.1 Gama fonksiyonu

2.2 Mittag-Leffler Fonksiyonu

Mittag-Leffler fonksiyonunun bir parametrelili gösterimi

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0 \quad (2.3)$$

şeklinde, iki parametrelili gösterimi ise

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad (2.4)$$

olarak kuvvet serileri cinsinden tanımlıdır [3]. (2.4) eşitliğinden

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z,$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - z - 1}{z^2}$$

ve genel olarak

$$E_{1,m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+m)} = \frac{1}{z^{m-1}} \left(e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right)$$

yazılabilir [3]. Hiperbolik fonksiyonların Mittag-Leffler fonksiyonunun özel hali olduğu ise

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z),$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}$$

eşitliklerinden görülmektedir [3].

2.3 Grünwald-Letnikov Yaklaşımı

$f(t)$, sürekli ve $f^{(k)}(t)$ ($k = 1, 2, \dots, m+1$) türevleri $[a, t]$ kapalı aralığında sürekli olan bir fonksiyon olmak üzere $m \leq p < m+1$ şartını sağlayan bir m tamsayısı için $f(t)$ fonksiyonunun p -inci mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli mertebeden türevi

$${}_a D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

şeklindedir [3]. $f(t)$, $[a, t]$ kapalı aralığında sürekli olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun p mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli integrali

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanır [3].

2.4 Riemann-Liouville Yaklaşımı

$f(t)$, (a, t) sonlu aralığında sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere $p > 0$ için $f(t)$ fonksiyonunun p mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali

$${}_a\mathbf{D}_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

biçiminde tanımlanır [3]. $0 < \alpha \leq 1$ ve $k - \alpha > 0$ olmak üzere $(k - \alpha)$. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$${}_a\mathbf{D}_t^{k-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

olarak tanımlanır [3]. (2.7) denkleminde $k - 1 \leq p < k$ olmak üzere $p = k - \alpha$ alınırsa

$${}_a\mathbf{D}_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t - \tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau = \frac{d^k}{dt^k} \left({}_a\mathbf{D}_t^{-(k-p)} f(t) \right)$$

bulunur [3]. Eğer $f(t)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve $m + 1$ defa sürekli diferansiyellenebilir ise $0 \leq m \leq p < m + 1$ şartını sağlayan her p için ${}_a\mathbf{D}_t^p f(t)$ Riemann-Liouville kesirli türevi mevcuttur ve Grünwald-Letnikov kesirli türevine eşittir [3].

2.5 Caputo Yaklaşımı

Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımında gözönüne alınan kesirli mertebeden diferansiyel denklem ile birlikte verilen başlangıç şartları

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} {}_a\mathbf{D}_t^{\alpha-1} f(t) &= b_1, \\ \lim_{t \rightarrow a} {}_a\mathbf{D}_t^{\alpha-2} f(t) &= b_2, \\ &\vdots \\ \lim_{t \rightarrow a} {}_a\mathbf{D}_t^{\alpha-n} f(t) &= b_n \end{aligned} \quad (2.8)$$

şeklinde Riemann-Liouville kesirli türevinin $t = a$ noktasındaki limit değerlerini içermektedir. (2.8) başlangıç koşulları ile birlikte verilen kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin Riemann-Liouville yaklaşımı yardımıyla çözümü bulunabilir. Ancak, (2.8) ile tanımlanan başlangıç koşullarının herhangi bir fiziksel anlamı mevcut değildir [3].

Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımında ortaya çıkan bu dezavantaj, Caputo tarafından sunulan tanım ile giderilmiştir. Bu tanımda kesirli türevler içeren diferansiyel denklem için verilen başlangıç şartları $t = a$ noktasında $y'(a), y''(a), \dots$ gibi tamsayı mertebeden türevlerin limit değerlerini içermektedir. Caputo anlamında kesirli mertebeden türev, $f(t)$ fonksiyonu n defa sürekli diferansiyellenebilir olmak üzere

$${}^C D_t^\alpha f(t) = D^{\alpha-n} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \quad n-1 < \alpha < n \quad (2.9)$$

olarak tanımlanır [3].

2.6 $L1$ ve $L2$ Yaklaşımları

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerde bulunan Caputo anlamındaki kesirli mertebeden türevler, $L1$ ve $L2$ yaklaşımları ile diskrize edilebilir. $0 < \gamma \leq 1$ için $b_k^\gamma = (k+1)^{1-\gamma} - k^{1-\gamma}$ olmak üzere $L1$ yaklaşımı

$$\left. \frac{\partial^\gamma f(t)}{\partial t^\gamma} \right|_{t_m} = \frac{(\Delta t)^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{k=0}^{m-1} b_k^\gamma [f(t_{m-k}) - f(t_{m-1-k})] \quad (2.10)$$

ve $1 < \gamma \leq 2$ için $b_k^\gamma = (k+1)^{2-\gamma} - k^{2-\gamma}$ olmak üzere $L2$ yaklaşımı

$$\left. \frac{\partial^\gamma f(t)}{\partial t^\gamma} \right|_{t_m} = \frac{(\Delta t)^{-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} \sum_{k=0}^{m-1} b_k^\gamma [f(t_{m-k}) - 2f(t_{m-1-k}) + f(t_{m-2-k})] \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanır [22].

(2.10) ile verilen $L1$ yaklaşımı (2.9) denkleminde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^\gamma f(t)}{\partial t^\gamma} \Big|_{t_m} &= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^{t_m} f'(\tau) (t_m - \tau)^{-\gamma} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \sum_{k=1}^m \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \left(\frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{\Delta t} \right) (m\Delta t - \tau)^{-\gamma} d\tau \\
&= \frac{(\Delta t)^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{k=1}^m [(m-k+1)^{1-\gamma} - (m-k)^{1-\gamma}] (f(t_k) - f(t_{k-1})) \\
&= \frac{(\Delta t)^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{k=0}^{m-1} [(k+1)^{1-\gamma} - k^{1-\gamma}] (f(t_{m-k}) - f(t_{m-k-1}))
\end{aligned}$$

olarak bulunur [28]. (2.11) ile verilen $L2$ yaklaşımı da yukarıdakine benzer şekilde elde edilir.

2.7 Spline Fonksiyonlar

İnterpolasyon işlemlerinde, polinomların derecesinin artırılmasının interpolasyonun kalitesini arttıracığı beklenebilir. Fakat bu durum genel olarak doğru değildir. f fonksiyonuna karşılık gelen interpolasyon polinomlarının derecesi arttıkça düğüm noktaları arasında interpolasyon polinomları artan bir şekilde salınım gösterebilir. Bu durum sayısal kararsızlık meydana getirebilir. Bu tür problemleri ortadan kaldırmak için 1946 yılında I.J. Schoenberg tarafından spline fonksiyonları tanımlandı ve çeşitli alanlara uygulandı [29].

Spline fonksiyonlar parçalı polinom interpolasyon olarak da düşünülebilir. Yani, $a \leq x \leq b$ aralığında bir $f(x)$ fonksiyonunun verildiğini ve bu aralık üzerinde başka bir $g(x)$ fonksiyonu ile bu $f(x)$ fonksiyonuna $a \leq x \leq b$ aralığının

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

şeklindeki parçalanışından oluşan alt aralıklarında yaklaşım yapılmak istenildiği anlamına gelir. Daha açık bir ifadeyle, tüm $a \leq x \leq b$ aralığı üzerinde $f(x)$ fonksiyonuna

tek bir polinom ile yaklaşmak yerine n adet polinom ile yaklaşılır. Böylece polinomların derecesi yüksek olmadığından sayısal açıdan kararlı ve yakınsak algoritma elde edilir [29].

$$-\infty = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = \infty \quad (2.12)$$

olmak üzere x_i ' ler reel sayıların monoton artan bir dizisi olsun. $i = 1(1)n$ olmak üzere x_i düğüm noktaları ile m . dereceden bir $S(x)$ spline fonksiyonu için

1. $x_0 = -\infty$ ve $x_{n+1} = \infty$ olmak üzere $S(x)$, $i = 0(1)n$ olmak üzere her bir (x_i, x_{i+1}) aralığında m . veya daha az dereceden bir polinomdur.

2. $S(x)$ 'in kendisi ve $1., 2., \dots, (m-1)$. mertebeden türevleri her yerde süreklidir. gibi özelliklerine sahip bir fonksiyondur [30, 31].

2.8 B-spline Fonksiyonlar

$$\dots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots$$

düğüm noktalarının kümesi için

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.13)$$

olarak tanımlanan sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonlar yardımıyla daha yüksek dereceden B-spline fonksiyonlar $k = 1, 2, 3, \dots$ ve $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ olmak üzere

$$B_i^k(x) = \left(\frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} \right) B_i^{k-1}(x) + \left(\frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} \right) B_{i+1}^{k-1}(x) \quad (2.14)$$

formülü ile hesaplanabilir [30, 31]. Örneğin, $k = 1$ alınması ile (2.14) formülünden lineer B-spline fonksiyonları

$$B_i^1(x) = \begin{cases} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}}, & x_{i+1} \leq x < x_{i+2} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

elde edilir.

$k = 2$ alınması ile (2.14) formülünden kuadratik B-spline fonksiyonları

$$B_i^2(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{i+3} - x)^2 - 3(x_{i+2} - x)^2 + 3(x_{i+1} - x)^2, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ (x_{i+3} - x)^2 - 3(x_{i+2} - x)^2, & x_{i+1} \leq x < x_{i+2} \\ (x_{i+3} - x)^2, & x_{i+2} \leq x < x_{i+3} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olarak bulunur.

$k = 3$ alınması ile (2.14) formülünden kübik B-spline fonksiyonları ise

$$B_i^3(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x_{i+4} - x)^3 - 4(x_{i+3} - x)^3 + 6(x_{i+2} - x)^3 - 4(x_{i+1} - x)^3, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ (x_{i+4} - x)^3 - 4(x_{i+3} - x)^3 + 6(x_{i+2} - x)^3, & x_{i+1} \leq x < x_{i+2} \\ (x_{i+4} - x)^2 - 4(x_{i+3} - x)^2, & x_{i+2} \leq x < x_{i+3} \\ (x_{i+4} - x)^2, & x_{i+3} \leq x < x_{i+4} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

(2.13) denklemi ile verilen sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir [30].

1. Her $t \in [x_i, x_{i+1})$ için $B_i^0(t) \neq 0$ dır.
2. Her i, x için $B_i^0(x) \geq 0$ dır.
3. $B_i^0(x)$ tüm noktalarda sağdan süreklidir.
4. Her x için $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = 1$ dir.

Ayrıca B-spline fonksiyonların

1. Eğer $k \geq 1$ ve $t \notin (x_i, x_{i+k+1})$ ise $B_i^k(t) = 0$ dır.
2. Eğer $k \geq 0$ ve $t \in (x_i, x_{i+k+1})$ ise $B_i^k(t) > 0$ dır.

şeklinde özellikleri mevcuttur [30].

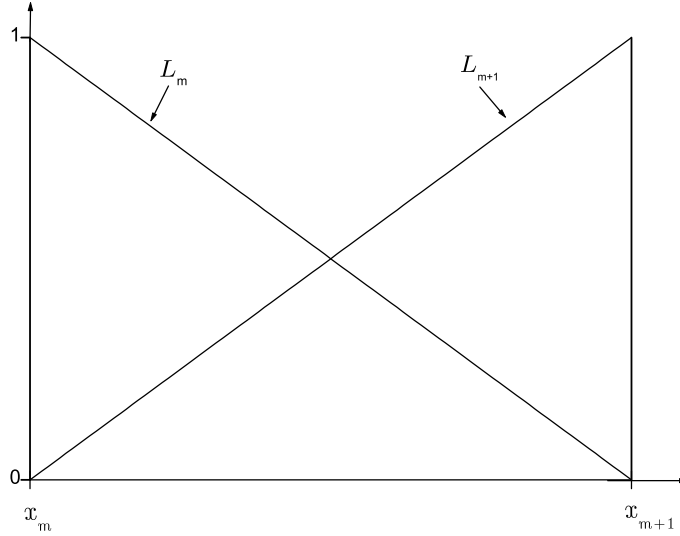
2.8.1 Linear B-spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $L_m(x)$ lineer B-spline baz fonksiyonları,

$m = 0(1)N$ olmak üzere

$$L_m(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} (x_{m+1} - x) - 2(x_m - x), & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+1} - x), & [x_m, x_{m+1}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [32]. Şekil 2.2' de görüldüğü gibi, her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $L_m(x)$ ve $L_{m+1}(x)$ gibi iki tane lineer B-spline baz fonksiyonu tarafından örtülür [33].



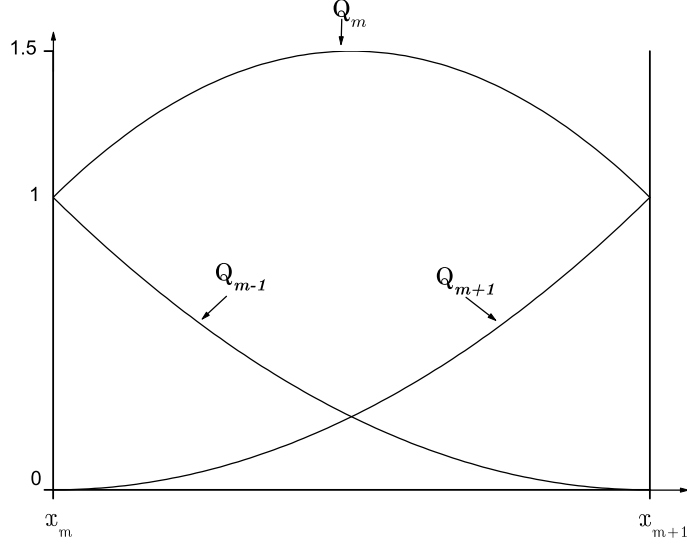
Şekil 2.2 Lineer B-spline baz fonksiyonları.

2.8.2 Kuadratik B-spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $Q_m(x)$ kuadratik B-spline baz fonksiyonları, $m = -1(1)N$ olmak üzere

$$Q_m(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 + 3(x_m - x)^2, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^2, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.15)$$

olarak tanımlanır [32]. Şekil 2.3' de görüldüğü gibi, her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $Q_{m-1}(x), Q_m(x)$ ve $Q_{m+1}(x)$ gibi üç tane kuadratik B-spline baz fonksiyonu tarafından örtülür [33].



Şekil 2.3 Kuadratik B-spline baz fonksiyonları.

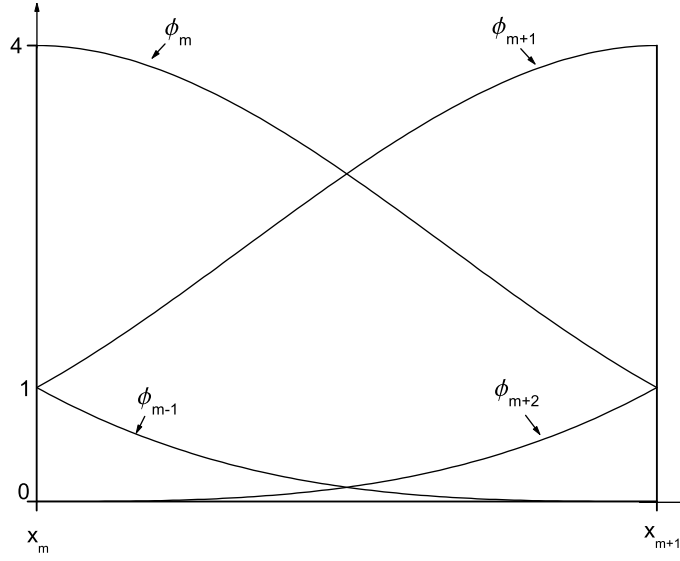
2.8.3 Kübik B-spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ kübik B-spline baz fonksiyonları, $m = -1(1)N + 1$ olmak üzere

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.16)$$

şeklinindedir [32]. Şekil 2.4' de görüldüğü gibi, her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $\phi_{m-1}(x), \phi_m(x), \phi_{m+1}(x)$ ve $\phi_{m+2}(x)$ gibi dört tane kübik B-spline baz fonksiyonu tarafından örtülür

[33].



Şekil 2.4 Kübik B-spline baz fonksiyonları.

2.9 Sonlu Eleman Yöntemleri

Sonlu eleman yöntemlerinin temeli 1960 yılına dayanmaktadır ve o tarihten itibaren fizik ve mühendisliğin çeşitli alanlarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Sonlu eleman yöntemlerinin gelişiminde katkısı olan bazı kişiler Argyris, Clough ve Zienkiewicz'dir [34]. Bu yöntemlerin, son 50 yılda bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle fizikte ve mühendislikte ortaya çıkan bir çok problemin çözülmesinde önemli bir katkı sağladığı görülmektedir [35].

Doğada meydana gelen olaylar ve bu tür olaylardan ortaya çıkan problemleri çözmek genellikle zordur. Bunun bir sonucu olarak, ele alınan problemleri tek bir işlemle çözmek yerine, alt problemlere ayırarak çözmek daha kolaydır. Alt problemlerin çözülmesi ve daha sonra birleştirilmesiyle probleme yaklaşık bir çözümün bulunması sağlanır. Sonlu elemanlar yöntemleri de karmaşık olan bölgelerin daha basit alt bölgelere ayırarak her birinin kendi içinde çözülmesi ve sonra birleştirilmesiyle yaklaşık

çözümlerin bulunduğu bir yöntemdir [35].

Sonlu eleman yöntemlerinin başlıca avantajları:

1. Düzgün olmayan şekilli yapıları oldukça kolay bir şekilde modelleyebilmesi,
2. Eleman denklemleri ayrı ayrı değerlendirildiğinden farklı bir takım malzemelerden oluşan yapıları modelleyebilmesi,
3. Çok çeşitli sınır şartlarını birlikte kullanabilmesi,
4. Gerektiğinde elemanların büyüklüklerinin değiştirilebilmesi,
5. Sonlu eleman modelinin istenildiği zaman kolayca değiştirilebilmesi,
6. Bilgisayar programlama mantığına uygun olması

olarak sıralanabilir [35].

Verilen bir probleme sonlu eleman yöntemlerinin uygulanmasında izlenen temel adımlar aşağıdaki gibidir [33, 36, 37].

1. Verilen bölge ayrıklaştırılır. Bunun için
 - a. Önceden belirlenen elemanların sonlu eleman kümesi oluşturulur.
 - b. Elemanlar ve düğüm noktaları numaralandırılır.
 - c. Problem için gerekli olan geometrik özellikler belirlenir.
2. Elde edilen sonlu eleman kümesi içindeki tüm tipik elemanlar için eleman denklemleri türetilir. Bunun için
 - a. Tipik elemanlar üzerinde verilen diferansiyel denklemin varyasyonel formu oluşturulur.
 - b. Tipik bir “ u ”bağımlı değişkeninin

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \Psi_i$$

formunda olduğu varsayılır ve bu yaklaşım Adım 2a’ da yerine yazılarak

$$[K^e]\{u^e\} = \{F^e\}$$

formunda eleman denklemleri elde edilir.

- c. Yaklaşım fonksiyonları ve eleman matrisleri hesaplanır.
3. Problemin verilen çözüm bölgesi üzerindeki denklemini elde etmek için eleman denklemleri birleştirilir. Bunun için
- Eleman düğümleri global düğümlerle eşleştirilerek birincil değişkenler arasında elemanlar arası süreklilik şartları tanımlanır.
 - İkincil değişkenler arasında “denge” şartları sağlanır.
 - Adım 3a ve 3b kullanılarak eleman denklemleri birleştirilir.
4. Birleştirilmiş eleman denklemlerine problemin sınır şartları uygulanır. Bunun için
- Problemde verilen birincil değişkenler uygulanır.
 - Problemde verilen ikincil değişkenler uygulanır.
5. Birleştirilmiş denklemler çözülür.
6. Hesaplama sonrasında elde edilen sonuçlar değerlendirilir. Bunun için
- Adım 5’ de elde edilen birincil değişkenlerden hareketle çözümlerin değişimi incelenir.
 - Elde edilen sonuçlar grafikler ve tablolar şeklinde sunulur.

2.10 Ağırlıklı Kalan Yöntemleri

Ağırlıklı kalan yöntemlerini ifade etmek için bir D bölgesinde

$$A(u) = f \quad (2.17)$$

olarak verilen operatör denklemini gözönüne alalım. Burada A lineer veya lineer olmayan bir operatör, u bağımlı değişken ve f ise bağımsız değişkenlerin bir bilinen fonksiyonudur. (2.17) ile verilen operatör denkleminin u çözümüne bir u_N yaklaşımı

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \quad (2.18)$$

olarak tanımlanır. Verilen bu yaklaşık çözümde, ϕ_j ' ler uygun yaklaşım fonksiyonları olup c_j parametreleri ise yaklaşık çözümün ağırlıklı integral formunu sağlayacak şekilde belirlenecek olan parametrelerdir. (2.18) ile verilen u_N yaklaşık çözümü (2.17) denkleminde yerine yazıldığında

$$f_N = A(u_N) \quad (2.19)$$

fonksiyonu elde edilir. (2.19) ile verilen fonksiyon genellikle f 'ye eşit değildir. $A(u_N)$ ile f fonksiyonunun arasındaki farka

$$R = A(u_N) - f = A\left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0\right) - f \neq 0 \quad (2.20)$$

yaklaşımın kalanı (*rezidüsü*) denir. R kalan fonksiyonu c_j parametrelerine ve konuma bağlıdır. D iki boyutlu bir bölge ve Ψ_i 'ler ağırlık fonksiyonları olmak üzere ağırlıklı kalan yöntemlerinde c_j parametreleri

$$\int_D \Psi_i(x,y) R(x,y, c_j) dx dy = 0, \quad i = 1(1)N \quad (2.21)$$

ağırlıklı integral formundaki R kalanını sıfır yapacak şekilde aranır. (2.21) integralinden elde edilecek olan cebirsel denklem sisteminin bir tek çözümünün olması için Ψ_i ağırlık fonksiyonlarının kümesi lineer bağımsız olmalıdır [36].

Bu tezde, ele alınan kesirli mertebeden denklemlerin nümerik çözümlerinin bulunması için kullanılacak olan Galerkin ve kollokasyon yöntemleri aşağıda verildi.

2.10.1 Galerkin Yöntemi

Galerkin yönteminde Ψ_i ağırlık fonksiyonları, ϕ_j yaklaşım fonksiyonlarıyla aynı seçilir. Böylece (2.21) yaklaşımı

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i \quad (2.22)$$

olarak elde edilir. Burada A_{ij} ve F_i

$$A_{ij} = \int_D \phi_i A(\phi_j) dx dy,$$

$$F_i = \int_D \phi_i [f - A(\phi_0)] dx dy$$

olup c_j parametreleri (2.22) cebirsel denklem sisteminden elde edilir [36].

2.10.2 Kollokasyon Yöntemi

$i = 1(1)n$ olmak üzere $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ ' ler D bölgesinde seçilmiş n adet nokta olsun. Kollokasyon yönteminde Ψ_i ağırlık fonksiyonları $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ ile gösterilir ve

$$\int_D \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) dx dy = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} = \mathbf{x}_i \\ 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_i \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanır. Burada \mathbf{x}_i ' lere kollokasyon noktaları denir ve keyfi olarak seçilir. (2.21) denkleminde Ψ_i ağırlık fonksiyonları yerine $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ yazılırsa

$$\int_D \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) R(\mathbf{x}, c_j) dx dy = 0$$

veya

$$R(\mathbf{x}_i, c_j) = 0, \quad i = 1(1)N \quad (2.23)$$

elde edilir. (2.23) denkleminin n adet kollokasyon noktalarında hesaplanırsa n -bilinmeyenli n -tane denklemden oluşan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. c_j katsayıları bu cebirsel denklem sisteminin çözümünden bulunur. \mathbf{x}_i noktalarının seçimi iyi şartlı denklem sisteminin ve sonuçta iyi bir yaklaşık çözümün elde edilmesinde önemlidir [36, 38].

3. KESİRLİ MERTEBEDEN GAZ DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, $0 < \gamma \leq 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial^\gamma U}{\partial t^\gamma} + U \frac{\partial U}{\partial x} - U(1 - U) = 0, \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

denklemini ile verilen kesirli mertebeden gaz denklemi

$$U(0, t) = E_\gamma(t^\gamma), \quad U(1, t) = e^{-1} E_\gamma(t^\gamma), \quad t \geq 0 \quad (3.2)$$

sınır şartları ve

$$U(x, 0) = e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.3)$$

başlangıç şartı ile gözönüne alındı. E_γ Mittag-Leffler fonksiyonu olmak üzere, problemin analitik çözümü Das ve Kumar [39] tarafından iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanılarak

$$U(x, t) = e^{-x} E_\gamma(t^\gamma)$$

olarak verildi.

Singh vd. [40] Sumudu dönüşümü yardımıyla homotopi pertürbasyon yöntemini, Mohamed vd. [41] homotopi analiz dönüşüm yöntemini, Kumar ve Rashidi [42] kesirli homotopi analiz dönüşüm yöntemini, Abedl-Rady vd. [43] ise varyasyonel iterasyon Sumudu dönüşüm yöntemini kullanarak denklemin yaklaşık çözümlerini elde etmişlerdir.

Bu bölümde, (3.2)-(3.3) başlangıç ve sınır koşulları gözönüne alınarak (3.1) ile verilen kesirli mertebeden gaz denkleminin kuadratik B-spline Galerkin ve kübik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemleri ile nümerik çözümleri araştırıldı.

3.1 Kuadratik B-spline Galerkin Çözümleri

Bu kısımda, (3.1)-(3.3) ile verilen problemin Galerkin yöntemi ile nümerik çözümleri araştırıldı. Galerkin yönteminin uygulamasında kullanılacak olan ağırlıklı integral formunu oluşturmak için (3.1) denklemini önce W ağırlık fonksiyonu ile çarpılır ve

sonra bölge üzerinden integral alınır

$$\int_0^1 W \left[\frac{\partial^\gamma U}{\partial t^\gamma} + U \frac{\partial U}{\partial x} - U(1-U) \right] dx = 0 \quad (3.4)$$

elde edilir. Böylece (3.1) denkleminin her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde ağırlıklı integral formu (3.4) denkleminde

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} \left(W \frac{\partial^\gamma U}{\partial t^\gamma} + WU \frac{\partial U}{\partial x} - WU + WU^2 \right) dx = 0 \quad (3.5)$$

olarak elde edilir. Bölüm 2' de (2.15) ile verilen $Q_m(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonları kullanılırsa problemin $U(x, t)$ tam çözümüne bir $U_N(x, t)$ yaklaşımı (2.15) kuadratik B-spline fonksiyonlar cinsinden

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-1}^N \delta_j(t) Q_j(x) \quad (3.6)$$

olarak yazılabilir [32]. Burada δ_j belirlenecek olan zamana bağlı parametrelerdir. (2.15) ile verilen $Q_m(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonlarına

$$\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq h$$

şeklinde tanımlanan lokal koordinat dönüşümü uygulanırsa bir eleman üzerinde tanımlı

$$\begin{aligned} Q_{m-1} &= (h - \xi)^2 / h^2, \\ Q_m &= (h^2 + 2h\xi - 2\xi^2) / h^2, \\ Q_{m+1} &= \xi^2 / h^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

kuadratik B-spline baz fonksiyonları elde edilir. Herbir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı Q_{m-1}, Q_m ve Q_{m+1} gibi üç tane kuadratik B-spline baz fonksiyonu ile örtüldüğünden, (3.6) ile verilen $U_N(x, t)$ yaklaşımı

$$U_N(\xi, t) = \sum_{j=m-1}^{m+1} \delta_j(t) Q_j(\xi) \quad (3.8)$$

olarak yazılabilir. Böylece x_m noktasında U_N ' nin kendisinin ve x' e göre birinci türevinin δ_m parametresine göre noktasal değerleri, $m = 0(1)N$ olup üst indis x' e göre türevi göstermek üzere

$$\begin{aligned} U_N(x_m) &= U_m = \delta_{m-1} + \delta_m, \\ U_N'(x_m) &= U_m' = 2(-\delta_{m-1} + \delta_m) / h \end{aligned} \quad (3.9)$$

şeklinde bulunur [44]. Galerkin yönteminde, ağırlık fonksiyonları yaklaşım fonksiyonları ile aynı alındığından, ağırlık fonksiyonlarının kuadratik B-spline fonksiyonlar olarak seçilmesi ve (3.8) yaklaşımının (3.5) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h Q_i Q_j d\xi \right) \delta_j^e + \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{j=m-1}^{m+1} \left[\left(\int_0^h Q_i Q'_k Q_j d\xi \right) \delta_j^e \right] \delta_k^e - \sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h Q_i Q_j d\xi \right) \delta_j^e \\ & + \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{j=m-1}^{m+1} \left[\left(\int_0^h Q_i Q_k Q_j d\xi \right) \delta_j^e \right] \delta_k^e = 0, \quad i = m-1, m, m+1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

elde edilir. Burada δ ifadesi zaman değişkenine göre γ mertebeden kesirli türevi göstermektedir. (3.10) denkleminde eleman matrisleri

$$A_{ij}^e = \int_0^h Q_i Q_j d\xi, \quad B_{ikj}^e = \int_0^h Q_i Q'_k Q_j d\xi, \quad C_{ikj}^e = \int_0^h Q_i Q_k Q_j d\xi \quad (3.11)$$

olarak alınırsa, $\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1})$ olmak üzere denklem matris formunda

$$A^e \delta^e + B^e(\delta) \delta^e - A^e \delta^e + C^e(\delta) \delta^e = 0 \quad (3.12)$$

olarak gösterilebilir. $i, j, k = m-1, m, m+1$ olmak üzere, A_{ij}^e, B_{ikj}^e ve C_{ikj}^e eleman matrisleri, kuadratik B-spline baz fonksiyonları yardımıyla

$$\begin{aligned} A_{ij}^e &= \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{bmatrix}, \\ B_{ikj}^e &= \frac{1}{30} \begin{bmatrix} (-10, -19, -1)\delta^e & (8, 12, 0)\delta^e & (2, 7, 1)\delta^e \\ (-19, -54, -7)\delta^e & (12, 0, -12)\delta^e & (7, 54, 19)\delta^e \\ (-1, -7, -2)\delta^e & (0, -12, -8)\delta^e & (1, 19, 10)\delta^e \end{bmatrix}, \\ C_{ikj}^e &= \frac{h}{105} \begin{bmatrix} (15, 26, 1)\delta^e & (26, 60, 5)\delta^e & (1, 5, 1)\delta^e \\ (26, 60, 5)\delta^e & (60, 258, 60)\delta^e & (5, 60, 26)\delta^e \\ (1, 5, 1)\delta^e & (5, 60, 26)\delta^e & (1, 26, 15)\delta^e \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Eleman matrislerinin birleştirilmesiyle global koordinatlarda elde edilen A, B ve C matrisleri, $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N-1}, \delta_N)$ olmak üzere, (3.12) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$A\delta + [B(\delta) - A + C(\delta)]\delta = 0 \quad (3.13)$$

matris formundaki denklemi elde edilir. A , B ve C matrislerinin genelleştirilmiş satırları

$$\delta = (\delta_{m-2}, \delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T$$

olmak üzere

$$A : \frac{h}{30}(1, 26, 66, 26, 1),$$

$$B : \frac{1}{30} \begin{pmatrix} (-1, -7, -2, 0, 0)\delta, (0, -31, -62, -7, 0)\delta, (1, 31, 0, -31, -1)\delta, \\ (0, 7, 62, 31, 0)\delta, (0, 0, 2, 7, 1)\delta \end{pmatrix},$$

$$C : \frac{h}{105} \begin{pmatrix} (1, 5, 1, 0, 0)\delta, (5, 86, 86, 5, 0)\delta, (1, 86, 288, 86, 1)\delta, \\ (0, 5, 86, 86, 5)\delta, (0, 0, 1, 5, 1)\delta \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. (3.13) denkleminde $\dot{\delta}$ ve δ yerine sırasıyla

$$\dot{\delta} = \frac{\partial^\gamma \delta}{\partial t^\gamma} = \frac{(\Delta t)^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{1-\gamma} - k^{1-\gamma}] (\delta^{n-k} - \delta^{n-k-1}) \quad (3.14)$$

ve

$$\delta = \frac{\delta^n + \delta^{n+1}}{2} \quad (3.15)$$

L1 formülü ve Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\left[\frac{A}{(\Delta t)^\gamma \Gamma(2-\gamma)} + \frac{1}{2} [B(\delta) - A + C(\delta)] \right] \delta^{n+1} = \left[\frac{A}{(\Delta t)^\gamma \Gamma(2-\gamma)} - \frac{1}{2} [B(\delta) - A + C(\delta)] \right] \delta^n$$

$$- \frac{A}{(\Delta t)^\gamma \Gamma(2-\gamma)} \sum_{k=1}^n [(k+1)^{1-\gamma} - k^{1-\gamma}] [\delta^{n-k} - \delta^{n-k-1}] \quad (3.16)$$

formunda $(N+2)$ -bilinmeyenli $(N+2)$ -tane denklemden oluşan karesel cebirsel denklem sistemi elde edilir. Denklem ile birlikte verilen sınır şartlarının kullanılmasıyla δ_{-1} ve δ_N parametreleri sistemden yok edilirse indirgenmiş $(N \times N)$ -boyutlu karesel cebirsel sistemi elde edilir.

Çözüme başlamada ilk olarak δ^0 başlangıç parametrelerinin hesaplanması gerekmektedir. Başlangıç koşulu yardımıyla x_j düğüm noktalarında

$$U_N(x_j, 0) = U(x_j, 0) = \delta_{j-1} + \delta_j, \quad j = 0(1)N$$

değerleri kullanılarak δ_j^0 parametreleri için $(N+2)$ -bilinmeyenli $(N+1)$ -tane denklemden oluşan denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemine ek olarak

$$U'_N(x_0, 0) = U'(x_0, 0) = \frac{2}{h}(\delta_0 - \delta_{-1})$$

şeklinde tanımlanan lokal koordinat dönüşümü uygulanırsa sadece $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde tanımlı

$$\begin{aligned}\phi_{m-1} &= (1 - \xi)^3, \\ \phi_m &= 1 + 3(1 - \xi) + 3(1 - \xi)^2 - 3(1 - \xi)^3, \\ \phi_{m+1} &= 1 + 3\xi + 3\xi^2 - 3\xi^3, \\ \phi_{m+2} &= \xi^3\end{aligned}\quad (3.18)$$

kübik B-spline fonksiyonları elde edilir. Her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı ϕ_{m-1} , ϕ_m , ϕ_{m+1} ve ϕ_{m+2} gibi dört tane kübik B-spline baz fonksiyonu tarafından örtüldüğünden $U_N(x, t)$ yaklaşık çözümü (3.18) denklemi ile verilen kübik baz fonksiyonları cinsinden

$$U_N(\xi, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j(t) \phi_j(\xi) \quad (3.19)$$

olarak yazılabilir. Böylece x_m noktasında U_N ' nin kendisinin ve x' e göre birinci ve ikinci mertebeden türevlerinin δ_m parametresine göre noktasal değerleri

$$\begin{aligned}U_m &= U_N(x_m, t) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\ U'_m &= U'_N(x_m, t) = \frac{3}{h}(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}), \\ U''_m &= U''_N(x_m, t) = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})\end{aligned}\quad (3.20)$$

şeklinde bulunur. Burada $m = 0(1)N$ olup üst indis x' e göre türevi göstermektedir. (3.20) yaklaşımları (3.1) denkleminde yerlerine yazılırsa $Z_m = U$ olmak üzere

$$\dot{\delta}_{m-1} + 4\dot{\delta}_m + \dot{\delta}_{m+1} + \frac{3Z_m}{h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) + (Z_m - 1)(\delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}) = 0 \quad (3.21)$$

elde edilir. Burada $\dot{\delta}$ ifadesi zaman değişkenine göre γ mertebeden kesirli türevi göstermektedir. (3.21) denkleminde $\dot{\delta}$ yerine (3.14) ile verilen $L1$ formülü ve δ yerine de (3.15) ile verilen Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı yazılırsa denklemin genelleştirilmiş satırı

$$\begin{aligned}&(1 - 3\alpha Z_m + \alpha h(Z_m - 1)) \delta_{m-1}^{n+1} + (4 + 4\alpha h(Z_m - 1)) \delta_m^{n+1} + (1 + 3\alpha Z_m + h\alpha(Z_m - 1)) \delta_{m+1}^{n+1} \\ &= (1 + 3\alpha Z_m - \alpha h(Z_m - 1)) \delta_{m-1}^n + (4 - 4\alpha h(Z_m - 1)) \delta_m^n + (1 - 3\alpha Z_m - \alpha h(Z_m - 1)) \delta_{m+1}^n \\ &- \sum_{k=1}^n [(k+1)^{1-\gamma} - k^{1-\gamma}] \left[(\delta_{m-1}^{n-k+1} - \delta_{m-1}^{n-k}) + 4(\delta_m^{n-k+1} - \delta_m^{n-k}) + (\delta_{m+1}^{n-k+1} - \delta_{m+1}^{n-k}) \right]\end{aligned}\quad (3.22)$$

olarak bulunur. Burada

$$Z_m = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}$$

Nümerik Çözümler

Bu kısımda, kuadratik B-spline Galerkin ve kübik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemleriyle ele alınan problemin nümerik çözümleri bulundu. Problemin U_N nümerik çözümünün U analitik çözümüne ne kadar iyi yaklaştığını görmek için

$$L_2 = \|U - U_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j - (U_N)_j|^2}, \quad (3.23)$$

$$L_\infty = \|U - U_N\|_\infty \simeq \max_{0 \leq j \leq N} |U_j - (U_N)_j| \quad (3.24)$$

ile tanımlanan L_2 ve L_∞ hata normları hesaplandı.

Tablo 3.1' de, $N = 80$, $t = 1$, farklı γ ve Δt değerleri için kuadratik Galerkin ve kübik kollokasyon yöntemleri yardımıyla elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırmaları verildi. Tablolardan açıkça görüldüğü gibi Δt zaman adımlarının azalan değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları da azalmaktadır. Ayrıca seçilen bu değerlerde kuadratik B-spline Galerkin yöntemiyle bulunan sonuçlar kübik B-spline kollokasyon yöntemi ile elde edilen sonuçlara göre daha iyidir.

Tablo 3.2' de farklı γ değerlerinde $\Delta t = 0.0005$, $N = 80$ ve artan t zamanları için problemin kuadratik B-spline Galerkin ve kübik B-spline kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümler için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Genel olarak her iki yöntem ile elde edilen sayısal çözümlerin hata normları t ' nin artan değerlerinde azaldığı verilen tablolardan görülmektedir. Ele alınan değerlerde hesaplanan nümerik çözümler için kuadratik B-spline Galerkin yöntemiyle elde edilen sonuçların kübik B-spline kollokasyonla elde edilen sonuçlara göre daha iyi olduğu tablodan görülmektedir.

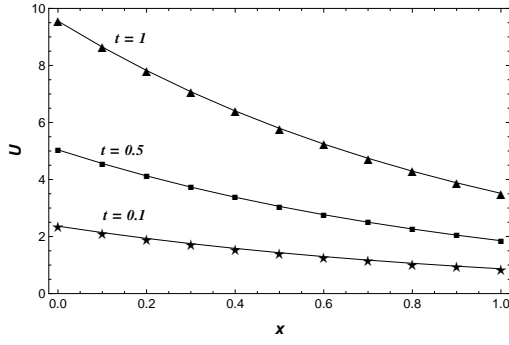
Her iki yöntemle elde edilen çözümler birbirlerine çok yakın olduğundan grafiklerle gösterim kuadratik B-spline Galerkin yöntemi için verildi. γ ve t nin farklı değerleri için $\Delta t = 0.0005$, $N = 80$ seçilerek problemin tam ve nümerik çözümleri Şekil 3.1' de verildi. Şekilden tam ve nümerik çözümlerin ayırt edilemeyecek kadar yakın olduğu gözlemlendi.

Tablo 3.1 Problemin $N = 80$, $t = 1$, farklı γ değerleri ve Δt zaman adımları için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

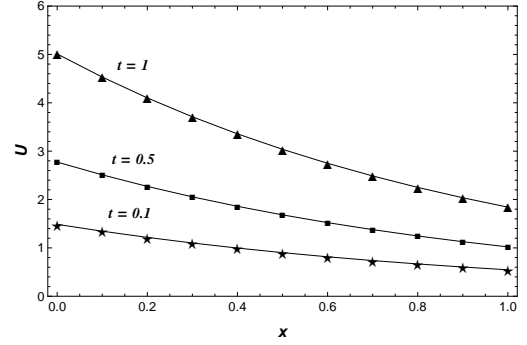
γ	$x \Delta t$	Galerkin			Kollokasyon			Tam Çözüm
		0.01	0.001	0.0005	0.01	0.001	0.0005	
0.25	0.0	9.554107	9.554107	9.554107	9.554107	9.554107	9.554107	9.554107
	0.2	7.823967	7.822314	7.822283	7.824748	7.822400	7.822211	7.822242
	0.4	6.405995	6.404263	6.404300	6.405434	6.404204	6.404282	6.404310
	0.6	5.242357	5.243280	5.243338	5.242689	5.243373	5.243388	5.243405
	0.8	4.290113	4.292747	4.292817	4.290192	4.292966	4.292933	4.292937
	1.0	3.514760	3.514760	3.514760	3.514760	3.514760	3.514760	3.514760
	$L_2 \times 10^3$	3.108324	0.214927	0.095153	7.193496	0.685024	0.340624	
$L_\infty \times 10^3$	5.510420	0.373260	0.182392	12.962180	1.129466	0.548559		
0.50	0.0	5.008980	5.008980	5.008980	5.008980	5.008980	5.008980	5.008980
	0.2	4.101409	4.101038	4.101022	4.101065	4.101007	4.101006	4.101006
	0.4	3.357123	3.357546	3.357583	3.357845	3.357623	3.357621	3.357620
	0.6	2.747289	2.748821	2.748904	2.749023	2.748991	2.748989	2.748987
	0.8	2.248229	2.250432	2.250555	2.250710	2.250684	2.250682	2.250680
	1.0	1.842701	1.842701	1.842701	1.842701	1.842701	1.842701	1.842701
	$L_2 \times 10^3$	1.739034	0.176806	0.088710	7.407662	0.760637	0.381826	
$L_\infty \times 10^3$	3.556598	0.363644	0.182412	11.781515	1.210046	0.607343		
0.75	0.0	3.485866	3.485866	3.485866	3.485866	3.485866	3.485866	3.485866
	0.2	2.854503	2.854040	2.854014	2.854084	2.853996	2.853991	2.853986
	0.4	2.336367	2.336614	2.336630	2.336811	2.336664	2.336655	2.336646
	0.6	1.912091	1.912972	1.913027	1.913265	1.913104	1.913094	1.913084
	0.8	1.564573	1.566108	1.566202	1.566432	1.566315	1.566308	1.566301
	1.0	1.282379	1.282379	1.282379	1.282379	1.282379	1.282379	1.282379
	$L_2 \times 10^3$	1.271010	0.141525	0.072250	6.545792	0.737417	0.377396	
$L_\infty \times 10^3$	2.866624	0.317467	0.162040	10.356218	1.164772	0.595996		

Tablo 3.2 Problemin $\Delta t = 0.0005$, $N = 80$, farklı γ değerleri ve artan t zamanları için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

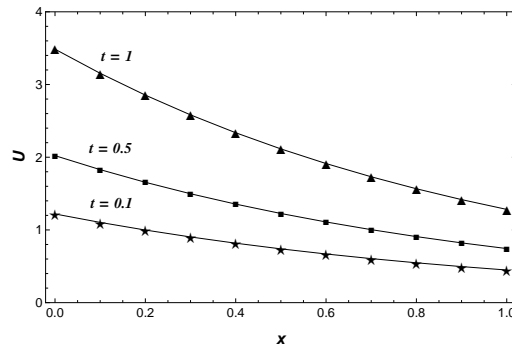
γ	t	Galerkin		Kollokasyon	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.25	0.2	0.200963	0.390517	0.699898	1.127687
	0.4	0.136318	0.254889	0.500072	0.803301
	0.6	0.113775	0.213851	0.415936	0.667972
	0.8	0.102155	0.195196	0.369532	0.594400
	1.0	0.095153	0.182392	0.340624	0.548559
0.50	0.2	0.233909	0.461670	0.502329	0.870746
	0.4	0.132899	0.290864	0.467573	0.755646
	0.6	0.104356	0.223885	0.438989	0.700142
	0.8	0.094023	0.196765	0.409807	0.651525
	1.0	0.088710	0.182412	0.340624	0.548559
0.75	0.2	0.216930	0.312620	0.256093	0.447387
	0.4	0.183290	0.333703	0.312253	0.590927
	0.6	0.130602	0.299655	0.359862	0.581380
	0.8	0.087130	0.207133	0.369240	0.578283
	1.0	0.072250	0.162040	0.377396	0.595996



(a) $\gamma = 0.25$



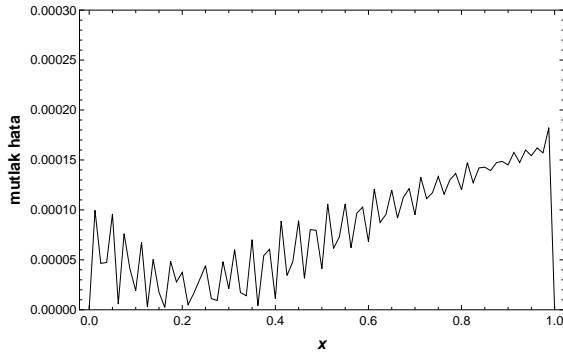
(b) $\gamma = 0.50$



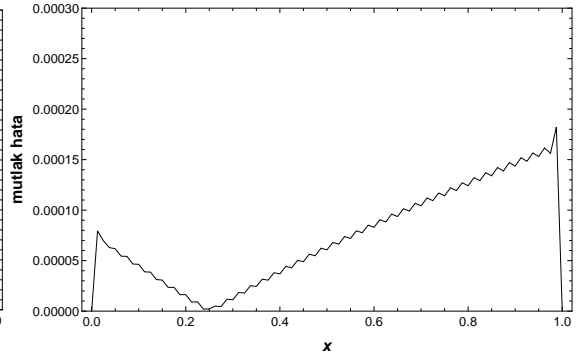
(c) $\gamma = 0.75$

Şekil 3.1 Problemin $\Delta t = 0.0005$, $N = 80$, farklı γ ve artan t değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

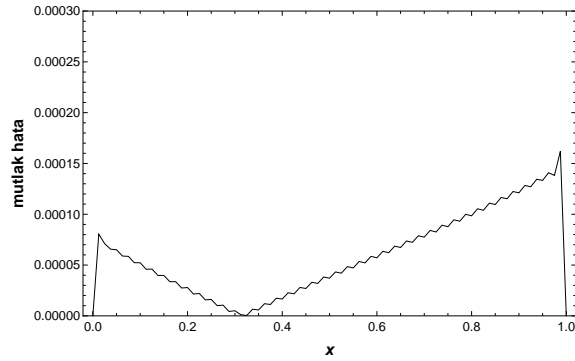
Şekil 3.2 ve Şekil 3.3' de sırasıyla Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile $\Delta t = 0.0005$, $N = 80$, $t = 1$ için farklı γ değerlerinde hesaplanan sayısal çözümlerin mutlak hatalarının grafikleri verildi. Grafiklerden, gözönüne alınan γ değerleri için en büyük hatanın sağ sınır civarında olduğu görülmektedir.



(a) $\gamma = 0.25$

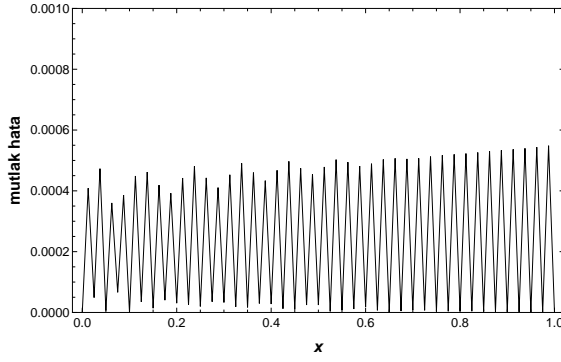


(b) $\gamma = 0.50$

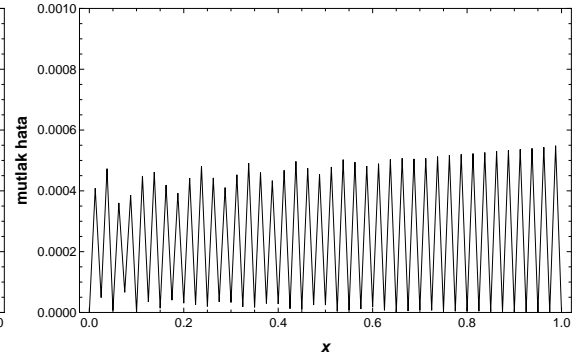


(c) $\gamma = 0.75$

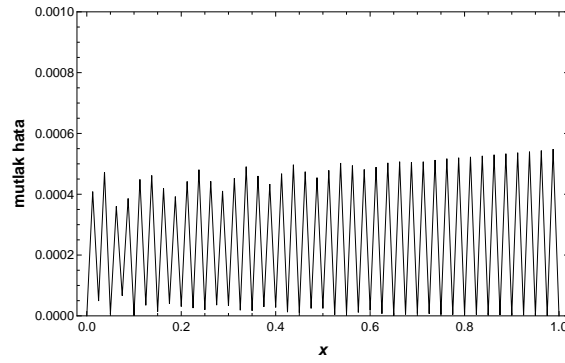
Şekil 3.2 Problemin $\Delta t = 0.0005$, $N = 80$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.



(a) $\gamma = 0.25$



(b) $\gamma = 0.50$



(c) $\gamma = 0.75$

Şekil 3.3 Problemin $\Delta t = 0.0005$, $N = 80$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.

4. KESİRLİ MERTEBEDEN BURGERS TİPİ DENKLEMİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, $0 < \gamma \leq 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial^\gamma U}{\partial t^\gamma} + U \frac{\partial U}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f(x, t), \quad t \geq 0 \quad (4.1)$$

denklemini ile verilen kesirli mertebeden Burgers tipi denklemini

$$U(a, t) = h_1(t), \quad U(b, t) = h_2(t), \quad t \geq 0 \quad (4.2)$$

sınır şartları ve

$$U(x, 0) = g(x), \quad a \leq x \leq b \quad (4.3)$$

başlangıç şartı ile gözönüne alındı. Burada $f(x, t), g(x), h_1(t)$ ve $h_2(t)$ önceden tanımlı fonksiyonlar ve ν viskosite parametresidir.

Farklı tipteki kesirli mertebeden Burgers denklemini, analitik ve nümerik olarak farklı yöntemlerle araştırmacılar tarafından çözülmüştür. Örneğin; Momani [45] Adomian ayrışım yöntemini, Inc [46] varyasyonel iterasyon, Li ve Wang [47] Adomian ayrışım yöntemlerini kullanarak

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial t^\alpha} + \epsilon U \frac{\partial U}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.4)$$

tipteki kesirli mertebeden Burgers denkleminin yaklaşık çözümlerini araştırdılar. El-Danaf ve Hadhoud [48] parametrik spline fonksiyonlarını kullanarak (4.4) denkleminin nümerik çözümünü elde etti. Bekir vd. [49], Hassan ve Mohyud-Din [50] (4.4) ile verilen kesirli mertebeden Burgers denklemine kesirli kompleks dönüşüm uyguladıktan sonra exp-fonksiyon yöntemini kullanarak denklemin analitik çözümlerini elde ettiler. Elbeleze vd. [51] ise kesirli varyasyonel iterasyon yöntemini kullanarak

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + 2x - 2, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

homojen olmayan kesirli mertebeden Burgers denkleminin yaklaşık çözümlerini hesaplamışlardır. Younis ve Zafar [52] ise

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial t^\alpha} + \omega U \frac{\partial^\beta U}{\partial x^\beta} - \eta \frac{\partial^{2\beta} U}{\partial x^{2\beta}} = 0, \quad 0 < \alpha, \beta \leq 1$$

şeklindeki kesirli mertebeden Burgers denkleminin analitik çözümlerini (G'/G)-açılım yöntemi ile buldular.

(4.1) ile verilen kesirli mertebeden Burgers denklemi farklı başlangıç ve sınır şartları ile birlikte ele alındı. Elde edilen nümerik çözümlerin doğruluğunu test etmek için üç model problemin (3.23) ve (3.24) ile verilen L_2 ve L_∞ hata normları hesaplandı.

4.1 Model Problemler

Problem 1: Bu problemde, (4.1) kesirli mertebeden Burgers denklemi

$$f(x,t) = \frac{2t^{2-\gamma}e^x}{\Gamma(3-\gamma)} + t^4e^{2x} - vt^2e^x$$

olmak üzere

$$U(0,t) = t^2, \quad U(1,t) = et^2, \quad t \geq 0$$

sınır şartları ve

$$U(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

başlangıç şartı ile ele alındı. Bu problemin bir tam çözümü

$$U(x,t) = t^2e^x$$

dir.

Problem 2: İkinci problem olarak, (4.1) kesirli mertebeden Burgers denklemi

$$f(x,t) = \frac{2t^{2-\gamma}\cos(\pi x)}{\Gamma(3-\gamma)} - \pi t^4 \cos(\pi x) \sin(\pi x) + v\pi^2 t^2 \cos(\pi x)$$

olmak üzere

$$U(0,t) = t^2, \quad U(1,t) = -t^2, \quad t \geq 0$$

sınır şartları ve

$$U(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

başlangıç şartı ile ele alındı. Bu problemin bir tam çözümü

$$U(x,t) = t^2 \cos(\pi x)$$

dir.

Problem 3: Son olarak, (4.1) kesirli mertebeden Burgers denklemi

$$f(x, t) = \frac{2t^{2-\gamma} \sin(2\pi x)}{\Gamma(3-\gamma)} + 2\pi t^4 \sin(2\pi x) \cos(2\pi x) + 4\nu\pi^2 t^2 \sin(2\pi x)$$

olmak üzere

$$U(0, t) = 0, \quad U(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

sınır şartları ve

$$U(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

başlangıç şartı ile ele alındı. Bu problemin bir tam çözümü

$$U(x, t) = t^2 \sin(2\pi x)$$

dir.

4.2 Kuadratik B-spline Galerkin Çözümleri

Bu kısımda, kuadratik B-spline Galerkin yöntemi (4.1) ile verilen kesirli mertebeden Burgers denkleminin uygulanması için ilk olarak, (4.1) denklemini W ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp ve daha sonra verilen bölge üzerinden integrali alınır

$$\int_0^1 W \left[\frac{\partial^\gamma U}{\partial t^\gamma} + U \frac{\partial U}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] dx = \int_0^1 W f(x, t) dx \quad (4.5)$$

ağırlıklı integral formu bulunur. (4.5) integralinde, bir kez kısmi integrasyonun uygulanmasıyla (4.1) denkleminin tek bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} \left(W \frac{\partial^\gamma U}{\partial t^\gamma} + W U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx = \nu W \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} + \int_{x_m}^{x_{m+1}} W f(x, t) dx \quad (4.6)$$

zayıf formu elde edilir. (4.6) zayıf formundaki ağırlık fonksiyonları yerine Bölüm 3' de (3.7) ile verilen kuadratik B-spline fonksiyonları alınır ve (3.8) yaklaşımı (4.6) zayıf formunda yerine yazılırsa

$$\sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h Q_i Q_j d\xi \right) \delta_j^e + \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{j=m-1}^{m+1} \left[\left(\int_0^h Q_i Q'_k Q_j d\xi \right) \delta_j^e \right] \delta_k^e + \nu \sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h Q'_i Q'_j d\xi \right) \delta_j^e$$

$$-v \sum_{j=m-1}^{m+1} (Q_i Q'_j) \Big|_0^h \delta_j^e = \int_0^h Q_i \tilde{f}(\xi, t) d\xi, \quad i = m-1, m, m+1 \quad (4.7)$$

denklemleri bulunur. Burada δ , γ mertebeden t ' ye göre kesirli türevi göstermektedir. (4.7) ifadesinde

$$A_{ij}^e = \int_0^h Q_i Q_j d\xi, \quad B_{ikj}^e = \int_0^h Q_i Q'_k Q_j d\xi, \quad C_{ij}^e = \int_0^h Q'_i Q'_j d\xi, \\ D_{ij}^e = Q_i Q'_j \Big|_0^h, \quad E_i^e = \int_0^h Q_i \tilde{f}(\xi, t) d\xi \quad (4.8)$$

olarak alınır, (4.7) denklemleri $\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1})$ olmak üzere

$$A^e \delta^e + B^e(\delta) \delta^e + v C^e \delta^e - v D^e \delta^e = E^e \quad (4.9)$$

matris formunda yazılabilir. Yukarıdaki integraller kuadratik B-spline fonksiyonlar kullanılarak hesaplandığında, $i, j, k = m-1, m, m+1$ olmak üzere,

$$A_{ij}^e = \int_0^h Q_i Q_j d\xi = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{bmatrix}, \\ B_{ikj}^e = \int_0^h Q_i Q'_k Q_j d\xi = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} (-10, -19, -1) \delta^e & (8, 12, 0) \delta^e & (2, 7, 1) \delta^e \\ (-19, -54, -7) \delta^e & (12, 0, -12) \delta^e & (7, 54, 19) \delta^e \\ (-1, -7, -2) \delta^e & (0, -12, -8) \delta^e & (1, 19, 10) \delta^e \end{bmatrix}, \\ C_{ij}^e = \int_0^h Q'_i Q'_j d\xi = \frac{2}{3h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \\ D_{ij}^e = Q_i Q'_j \Big|_0^h = \frac{2}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$A_{ij}^e, B_{ikj}^e, C_{ij}^e$ ve D_{ij}^e eleman matrisleri elde edilir. Ayrıca E_i^e eleman matrisi de

$$E_i^e = \int_0^h Q_i \tilde{f}(\xi, t) d\xi = \begin{bmatrix} \int_0^h Q_{m-1} \tilde{f}(\xi, t) d\xi \\ \int_0^h Q_m \tilde{f}(\xi, t) d\xi \\ \int_0^h Q_{m+1} \tilde{f}(\xi, t) d\xi \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. (4.9) denkleminde, eleman matrislerinin birleştirilmesiyle elde edilen A, B, C, D ve E matrisleri yerlerine yazılırsa, $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N-1}, \delta_N)$ olmak üzere,

$$A\delta + [B(\delta) + vC - vD]\delta = E \quad (4.10)$$

matris formundaki denklemi elde edilir. Burada ki A, B, C ve D matrislerinin genelleştirilmiş satırları

$$\delta = (\delta_{m-2}, \delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T$$

olmak üzere

$$A : \frac{h}{30}(1, 26, 66, 26, 1), \quad C : \frac{2}{3h}(-1, -2, 6, -2, -1), \quad D : (0, 0, 0, 0, 0),$$

$$B : \frac{1}{30} \left(\begin{array}{l} (-1, -7, -2, 0, 0)\delta, (0, -31, -62, -7, 0)\delta, (1, 31, 0, -31, -1)\delta, \\ (0, 7, 62, 31, 0)\delta, (0, 0, 2, 7, 1)\delta \end{array} \right)$$

şeklinindedir. (4.10) denkleminde ki δ yerine (3.14) ile verilen $L1$ formülü ve δ yerine de (3.15) ile verilen Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\left[\frac{A}{(\Delta t)^\gamma \Gamma(2-\gamma)} + \frac{1}{2}[B(\delta) + vC - vD] \right] \delta^{n+1} = \left[\frac{A}{(\Delta t)^\gamma \Gamma(2-\gamma)} - \frac{1}{2}[B(\delta) + vC - vD] \right] \delta^n$$

$$- \frac{A}{(\Delta t)^\gamma \Gamma(2-\gamma)} \sum_{k=1}^n [(k+1)^{1-\gamma} - k^{1-\gamma}] [\delta^{n-k} - \delta^{n-k-1}] + E \quad (4.11)$$

şeklinde $(N+2)$ -bilinmeyenli $(N+2)$ -denklemden oluşan karesel cebirsel denklem sistemi elde edilir. Sınır şartlarının yardımıyla δ_{-1} ve δ_N parametreleri bu sistemden yok edilirse $(N \times N)$ -boyutlu karesel cebirsel sistem elde edilir. δ^0 başlangıç parametreleri Bölüm 3' de kuadratik B-spline Galerkin yönteminde olduğu gibi hesaplandıktan sonra (4.11) sisteminde kullanılarak istenilen t zamanına kadar iterasyon yardımıyla elde edilen δ parametreleri bulunur. (3.9) ile verilen U_N yaklaşımında bu değerler yerine yazılarak istenilen zamandaki nümerik çözümler elde edilir. Sonuçların iyileştirilmesinde (4.11) sisteminde bulunan lineer olmayan terimlere, her bir zaman adımında, U_N yaklaşık çözümleri iyileştirmek için

$$\delta_m^* = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)$$

şeklinde tanımlanan iterasyon formülü bir kaç kez uygulandı.

Nümerik Çözümler

Bu kısımda, kuadratik B-spline Galerkin yöntemi ile yukarıda verilen model problemlerin sayısal çözümleri bulundu. Problem 1 için elde edilen nümerik çözümler ile birlikte hata normları Tablo 4.1 ve Tablo 4.2’ de verildi. Tablo 4.1’ de $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $v = 1$ ve farklı N bölüntü sayısı için elde edilen sonuçlar incelendiğinde N bölüntü sayısı arttıkça L_2 ve L_∞ hata normlarında azalma görülmektedir. Tablo 4.2’ de $N = 80$, $t = 1$, $v = 1$, $\gamma = 0.50$ ve farklı Δt zaman adımları için elde edilen sonuçlar verildi. Bu tablodan Δt zaman adımı azaldıkça L_2 ve L_∞ hata normlarının da azaldığı açıkça görülmektedir.

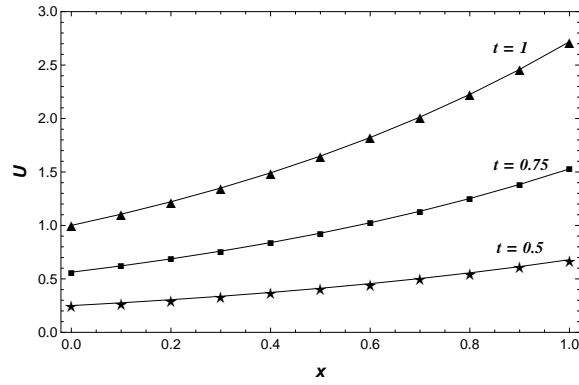
Tablo 4.1 Problem 1’ in $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $v = 1$ ve farklı N değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

x	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	Tam Çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.2	1.222203	1.221644	1.221493	1.221455	1.221403
0.4	1.493437	1.492287	1.491996	1.491922	1.491825
0.6	1.824294	1.822727	1.822342	1.822247	1.822119
0.8	2.227650	2.226118	2.225747	2.225661	2.225541
1.0	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282
$L_2 \times 10^3$	1.632995	0.447720	0.161833	0.092624	
$L_\infty \times 10^3$	2.296683	0.625018	0.227352	0.133125	

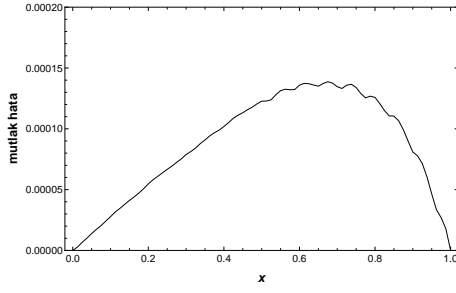
Tablo 4.2 Problem 1’ in $\gamma = 0.50$, $N = 80$, $t = 1$, $v = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

x	$\Delta t = 0.002$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	$\Delta t = 0.00025$	Tam Çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.2	1.221768	1.221611	1.221533	1.221493	1.221403
0.4	1.492516	1.492218	1.492070	1.491996	1.491825
0.6	1.823031	1.822636	1.822440	1.822342	1.822119
0.8	2.226387	2.226020	2.225837	2.225747	2.225541
1.0	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282
$L_2 \times 10^3$	0.660788	0.375012	0.232768	0.092624	
$L_\infty \times 10^3$	0.936619	0.530231	0.328303	0.133125	

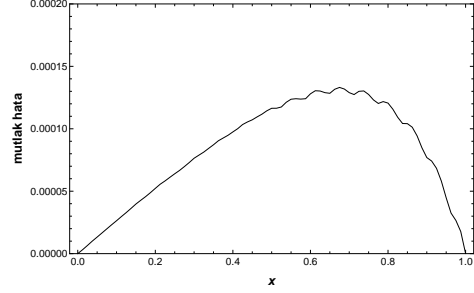
$N = 40$, $\Delta t = 0.00025$, $\nu = 1$, $\gamma = 0.50$ ve farklı t değerleri için problemin tam ve nümerik çözümleri Şekil 4.1’ de verildi. Problemin, Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümleri uyum içerisinde olduğu şekilden görülmektedir. Kuadratik B-spline Galerkin yöntemi ile $\Delta t = 0.00025$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ değerlerinde farklı γ lar için hesaplanan mutlak hatalar grafiksel olarak Şekil 4.2’ de verildi. Seçilen parametreler için $x = 0.675$ noktasında en büyük hata meydana gelmektedir. Ayrıca sol ve sağ sınır civarında hata dağılımları düşük olduğu grafiklerden görülmektedir.



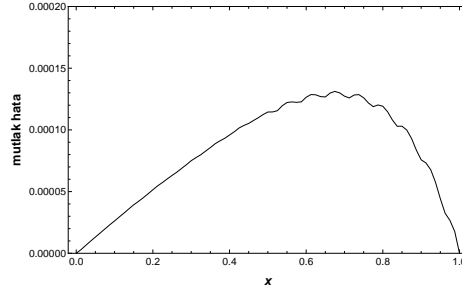
Şekil 4.1 Problem 1’ in $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.00025$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve artan t zamanları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.



(a) $\gamma = 0.25$



(b) $\gamma = 0.50$



(c) $\gamma = 0.75$

Şekil 4.2 Problem 1' in $\Delta t = 0.00025$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı γ değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.

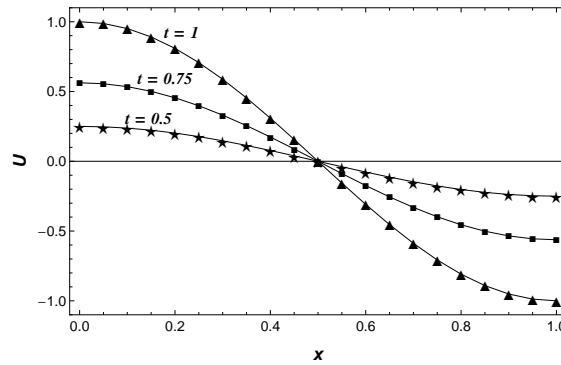
Problem 2' nin sunulan yöntem ile elde edilen nümerik sonuçları, farklı bölüntü sayıları ve zaman adımı uzunlukları için hata normları ile birlikte Tablo 4.3 ve Tablo 4.4' de verildi. Tablo 4.3' de $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$, $\gamma = 0.50$, farklı N değerleri ve Tablo 4.4' de $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$, $\gamma = 0.50$, farklı Δt zaman adımları için elde edilen sayısal çözümler ile hesaplanan hata normları verildi. Tablolar incelendiğinde, bölüntü sayısının artırılması ve zaman adımının azaltılmasıyla sayısal çözümlerin tam çözüme yaklaştığı, L_2 ve L_∞ hata normlarının da küçüldüğü görülmektedir. Şekil 4.3' de $\gamma = 0.50$, $N = 80$, $\Delta t = 0.00025$, $\nu = 1$ ve farklı t değerlerinde problemin Galerkin yöntemi ile elde edilen sayısal çözümler ile tam çözümler verildi. Şekilden nümerik çözümler ile tam çözümlerin uyum içerisinde olduğu görülmektedir. Gözönüne alınan yöntem ile farklı γ ve $\Delta t = 0.00025$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ değerlerinde elde edilen nümerik çözümlerin mutlak hatalarının grafiği Şekil 4.4' de verildi. Seçilen parametreler için gözönüne alınan γ değerlerinde $x = 0.7125$ noktasında en büyük hata meydana gelmektedir.

Tablo 4.3 Problem 2' nin $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı N değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

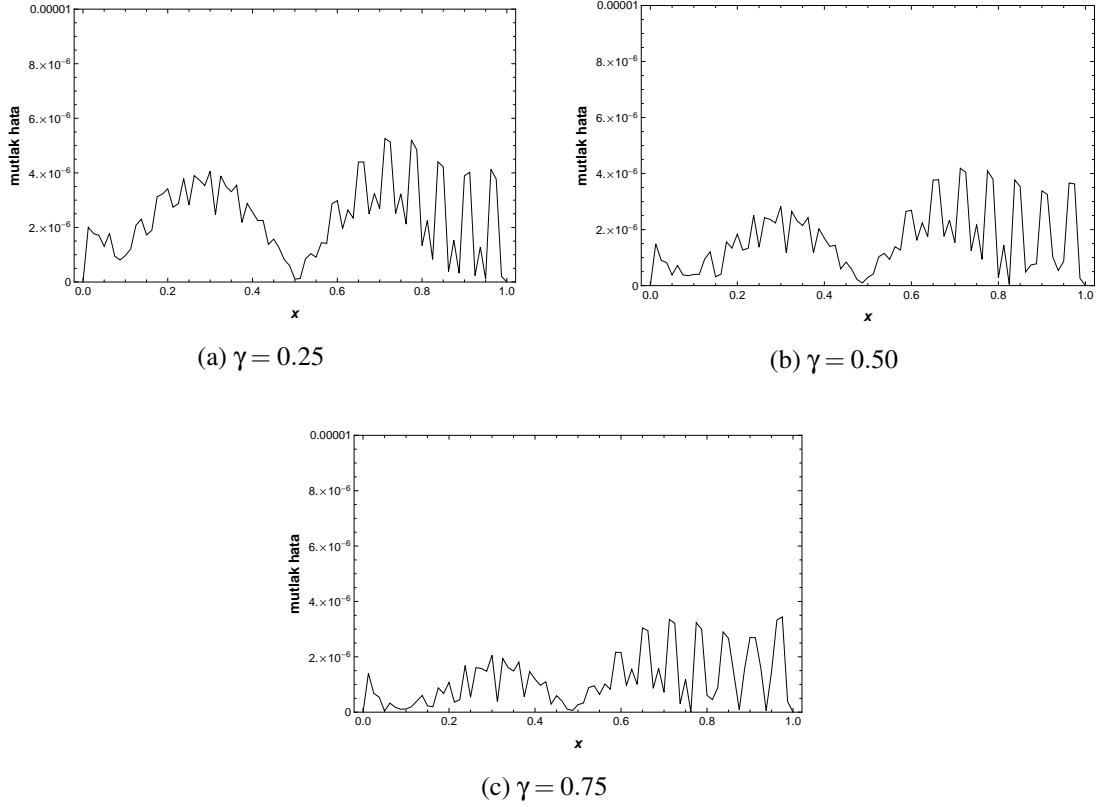
x	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	Tam Çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.2	0.808287	0.808744	0.808954	0.809019	0.809017
0.4	0.308724	0.308910	0.308993	0.309019	0.309017
0.6	-0.308724	-0.308909	-0.308996	-0.309020	-0.309017
0.8	-0.808286	-0.808744	-0.808957	-0.809017	-0.809017
1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
$L_2 \times 10^3$	0.435334	0.183000	0.041977	0.001982	
$L_\infty \times 10^3$	0.731099	0.273318	0.063233	0.004192	

Tablo 4.4 Problem 2' nin $\gamma = 0.50$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

x	$\Delta t = 0.002$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	$\Delta t = 0.00025$	Tam Çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.2	0.809192	0.809093	0.809044	0.809019	0.809017
0.4	0.309094	0.309051	0.309030	0.309019	0.309017
0.6	-0.309095	-0.309052	-0.309030	-0.309020	-0.309017
0.8	-0.809191	-0.809092	-0.809042	-0.809017	-0.809017
1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
$L_2 \times 10^3$	0.124076	0.054112	0.019282	0.001982	
$L_\infty \times 10^3$	0.175640	0.077491	0.028460	0.004192	



Şekil 4.3 Problem 2' nin $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.00025$, $N = 80$, $\nu = 1$ ve artan t zamanları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.



Şekil 4.4 Problem 2' nin $\Delta t = 0.00025$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı γ değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.

Son olarak, Problem 3 için elde edilen sayısal sonuçlar ile bu sonuçların doğruluğunu test etmek için hesaplanan hata normları Tablo 4.5 ve Tablo 4.6' da verildi. $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$, $\gamma = 0.50$ ve farklı N değerleri için nümerik çözümler ile birlikte L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 4.5' de sunuldu. Tablodan N değeri büyüdükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı görülmektedir. $N = 120$, $t = 1$, $\nu = 1$, $\gamma = 0.50$ ve farklı Δt zaman adımları için elde edilen nümerik çözümler ile birlikte hata normları Tablo 4.6' da verildi. Tablodan Δt zaman adımları küçüldükçe hata normlarının azaldığı görülmektedir. Her iki tablodan sayısal sonuçların tam sonuçlara oldukça yakın olduğu anlaşılmaktadır. Problemin, farklı t zamanlarında $N = 120$, $\Delta t = 0.0005$, $\nu = 1$, $\gamma = 0.50$ için hesaplanan nümerik çözümler ve tam çözümler Şekil 4.5' de sunuldu. Tam ve nümerik çözümlerin birbirine ne kadar yakın olduğu şekilden açıkça görülmektedir. Şekil 4.6' da farklı γ ve $\Delta t = 0.0005$, $N = 120$, $t = 1$, $\nu = 1$ değerlerinde elde edilen nümerik çözümlerin tam

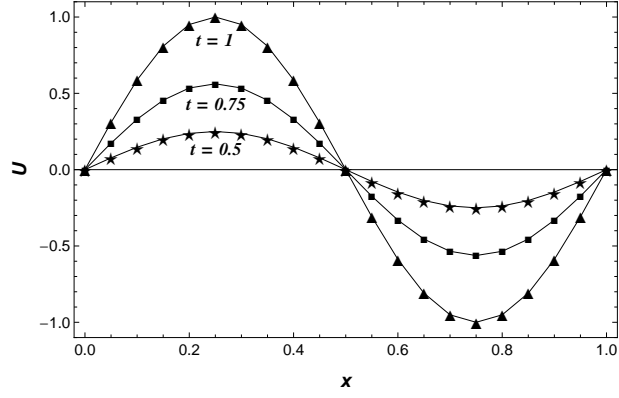
çözüm ile farkının mutlak değerlerinin grafiği verildi. Seçilen parametreler için $x = 0.325$ noktası civarında hata dağılımlarının büyük olduğu grafiklerden görülmektedir.

Tablo 4.5 Problem 3' ün $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı N değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

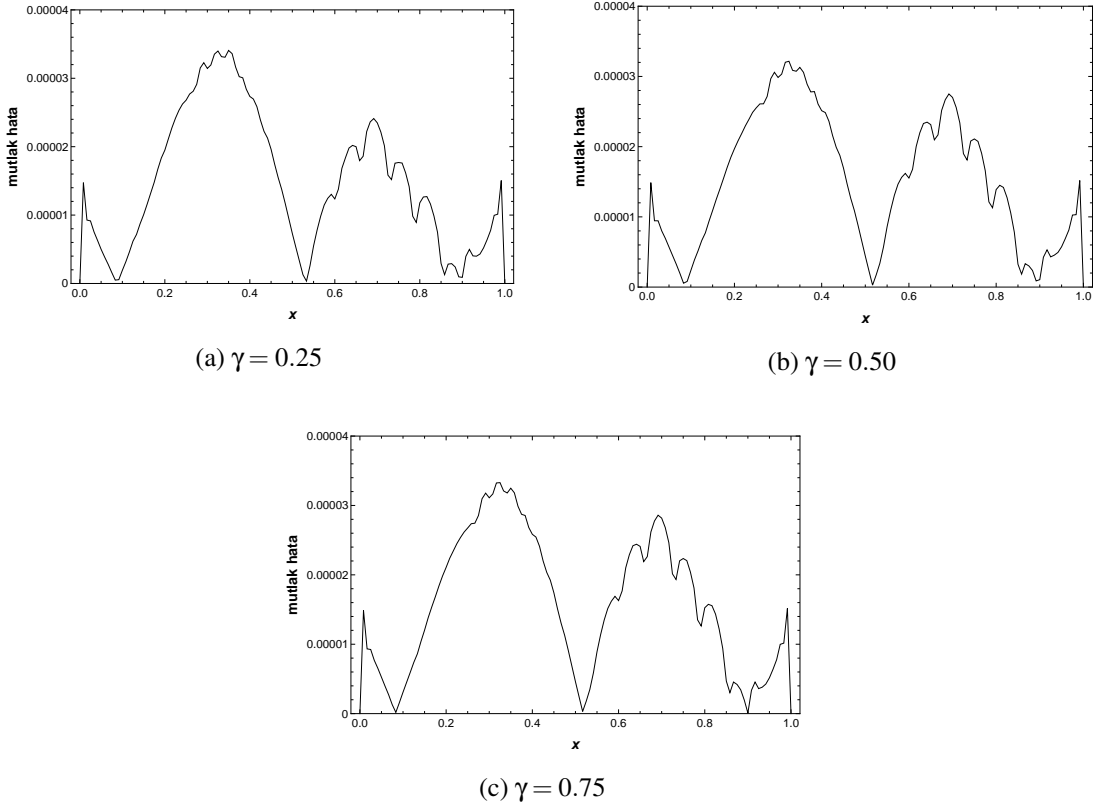
x	$N = 40$	$N = 50$	$N = 80$	$N = 100$	Tam Çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.947079	0.948617	0.950262	0.950638	0.951057
0.4	0.585586	0.586434	0.587348	0.587562	0.587785
0.6	-0.585584	-0.586437	-0.587346	-0.587548	-0.587785
0.8	-0.947078	-0.948621	-0.950260	-0.950631	-0.951057
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	2.899412	1.774196	0.577143	0.305058	
$L_\infty \times 10^3$	4.063808	2.495647	0.813220	0.430014	

Tablo 4.6 Problem 3' ün $\gamma = 0.50$, $N = 120$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

x	$\Delta t = 0.0025$	$\Delta t = 0.002$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	Tam Çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.952952	0.952484	0.951545	0.951076	0.951057
0.4	0.588914	0.588635	0.588087	0.587810	0.587785
0.6	-0.588905	-0.588630	-0.588077	-0.587801	-0.587785
0.8	-0.952949	-0.952479	-0.951540	-0.951070	-0.951057
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	1.392372	1.048597	0.359489	0.017828	
$L_\infty \times 10^3$	1.974356	1.487805	0.512105	0.032162	



Şekil 4.5 Problem 3' ün $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.0005$, $N = 120$, $\nu = 1$ ve artan t zamanları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.



Şekil 4.6 Problem 3' ün $\Delta t = 0.0005$, $N = 120$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı γ değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.

4.3 Kübik B-spline Kollokasyon Çözümleri

Bu kısımda, kübik B-spline kollokasyon yöntemi kullanılarak (4.1) ile verilen denklemin sayısal çözümleri elde edildi. İlk olarak, (3.20) yaklaşımları (4.1) denkleminde yerlerine yazılırsa, $Z_m = U$ olmak üzere,

$$\dot{\delta}_{m-1} + 4\dot{\delta}_m + \dot{\delta}_{m+1} + Z_m \frac{3}{h} (-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}) - \nu \frac{6}{h^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) = \tilde{f}(\xi, t) \quad (4.12)$$

elde edilir. Burada δ , t değişkenine göre γ mertebeden kesirli türevi göstermektedir. Şimdi

$$\alpha = \frac{(\Delta t)^\gamma \Gamma(2 - \gamma)}{2rh^2}, \quad r = 1/\nu$$

ve U_N 'nin x_m noktasındaki noktasal değerinden

$$Z_m = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}$$

olarak alınır ve (4.12) denkleminde $\dot{\delta}$ yerine (3.14) ile verilen $L1$ formülü ve δ yerine (3.15) ile verilen Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\begin{aligned} & (1 - 6\alpha - 3rh\alpha Z_m) \delta_{m-1}^{n+1} + (4 + 12\alpha) \delta_m^{n+1} + (1 - 6\alpha + 3rh\alpha Z_m) \delta_{m+1}^{n+1} \\ & = (1 + 6\alpha + 3rh\alpha Z_m) \delta_{m-1}^n + (4 - 12\alpha) \delta_m^n + (1 + 6\alpha - 3rh\alpha Z_m) \delta_{m+1}^n \\ & - \sum_{k=1}^n b_k^\gamma [(\delta_{m-1}^{n-k+1} - \delta_{m-1}^{n-k}) + 4(\delta_m^{n-k+1} - \delta_m^{n-k}) + (\delta_{m+1}^{n-k+1} - \delta_{m+1}^{n-k})] \\ & + 2rh^2 \alpha \tilde{f}(\xi, t_n) \end{aligned} \quad (4.13)$$

şeklinde $(N + 3)$ -bilinmeyenli $(N + 1)$ -denklemden oluşan cebirsel denklem sistemi elde edilir. (3.20) ifadelerindeki U_m ve U_m'' yaklaşımlarının sınırlardaki değerlerinin kullanılması ile δ_{-1} ve δ_{N+1} parametreleri sistemden yok edilir. Böylece $(N + 1) \times (N + 1)$ -boyutlu karesel cebirsel sistemi elde edilir.

δ^0 başlangıç parametreleri Bölüm 3' de kübik B-spline kollokasyon yönteminde olduğu gibi hesaplandıktan sonra (4.13) denkleminde kullanılarak istenilen t zamanına kadar iterasyon yardımıyla elde edilen δ parametreleri bulunur. (3.20) ile verilen U_N yaklaşımında bu değerler yerine yazılarak t zamandaki nümerik çözümler elde edilir.

Sonuçların iyileştirilmesinde (4.13) sisteminde bulunan lineer olmayan terimlere, her bir zaman adımında, U_N yaklaşık çözümleri iyileştirmek için

$$\delta_m^* = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)$$

şeklinde tanımlanan iterasyon formülü bir kaç kez uygulandı.

Nümerik Çözümler

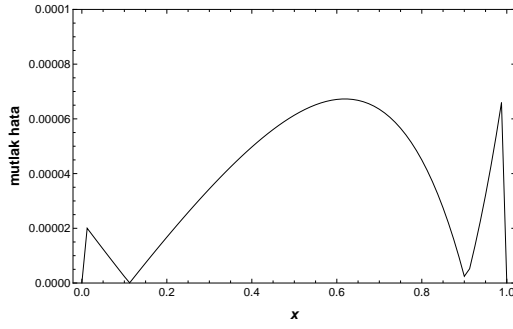
Bu kısımda, kübik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile elde edilen sonuçların tam çözümlere ne kadar iyi yaklaştığını görmek için yukarıda verilen üç model probleme uygulandı. Nümerik sonuçlar ve tam çözümün karşılaştırmalarını yapabilmek için tablolarda her bir değer için hata normları da sunuldu. Problem 1 için elde edilen nümerik ve tam çözümler ile hata normları Tablo 4.7 ve Tablo 4.8' de verildi. N bölüntü sayısındaki değişim ile sonuçlardaki değişimin gözlenmesi için $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $v = 1$, $\gamma = 0.50$ değerlerinde elde edilen nümerik çözümler Tablo 4.7' de verildi. Tablodan N bölüntü sayısının artan değerlerinde L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı açıkça görülmektedir. Benzer şekilde Δt zaman adımının küçülen değerlerinde sonuçlardaki değişim, $\gamma = 0.50$, $N = 40$, $t = 1$, $v = 1$ için Tablo 4.8' de sunuldu. Δt zaman adımları küçüldükçe hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı görüldü. Şekil 4.7' de yöntemin uygulanmasıyla elde edilen nümerik çözümlerin farklı γ ve $\Delta t = 0.00025$, $N = 80$, $t = 1$, $v = 1$ değerlerindeki sonuçlarıyla tam çözümlerin farkının mutlak değerleri grafiksel olarak verildi. Grafikler incelendiğinde, gözönüne alınan γ değerlerinde $x = 0.6375$ noktası civarında en büyük hata meydana geldiği açıkça görülmektedir. Ayrıca sol sınır civarındaki hata dağılımları sağ sınır civarındaki hata dağılımlarına göre daha düşüktür.

Tablo 4.7 Problem 1' in $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $v = 1$ ve farklı N değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

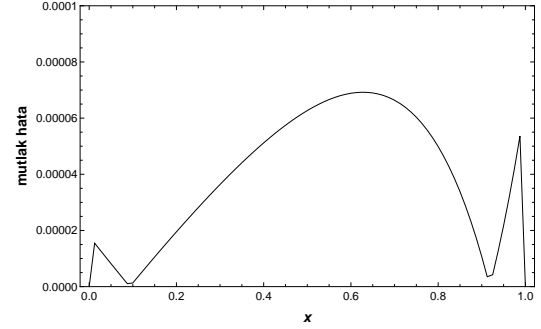
x	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	Tam Çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.2	1.220189	1.221128	1.221024	1.221422	1.221403
0.4	1.490465	1.491545	1.491666	1.491876	1.491825
0.6	1.820413	1.821777	1.822139	1.822188	1.822119
0.8	2.223091	2.225022	2.225695	2.225591	2.225541
1.0	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282
$L_2 \times 10^3$	1.764966	0.405690	0.067743	0.045754	
$L_\infty \times 10^3$	3.101238	0.812842	0.209495	0.069208	

Tablo 4.8 Problem 1' in $\gamma = 0.50$, $N = 40$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

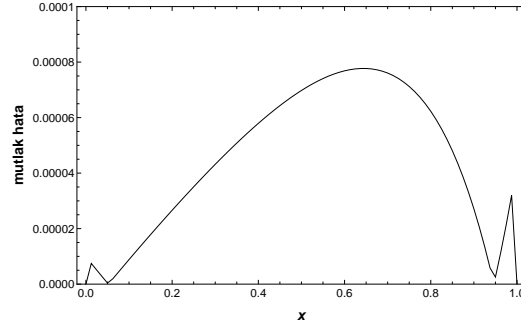
x	$\Delta t = 0.002$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	$\Delta t = 0.00025$	Tam Çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.2	1.221644	1.221484	1.221403	1.221024	1.221403
0.4	1.492319	1.492027	1.491882	1.491666	1.491825
0.6	1.822757	1.822384	1.822198	1.822139	1.822119
0.8	2.226037	2.225716	2.225557	2.225695	2.225541
1.0	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282
$L_2 \times 10^3$	0.434586	0.176195	0.068869	0.067743	
$L_\infty \times 10^3$	0.642003	0.265419	0.211883	0.209495	



(a) $\gamma = 0.25$



(b) $\gamma = 0.50$



(c) $\gamma = 0.75$

Şekil 4.7 Problem 1' in $\Delta t = 0.00025$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı γ değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.

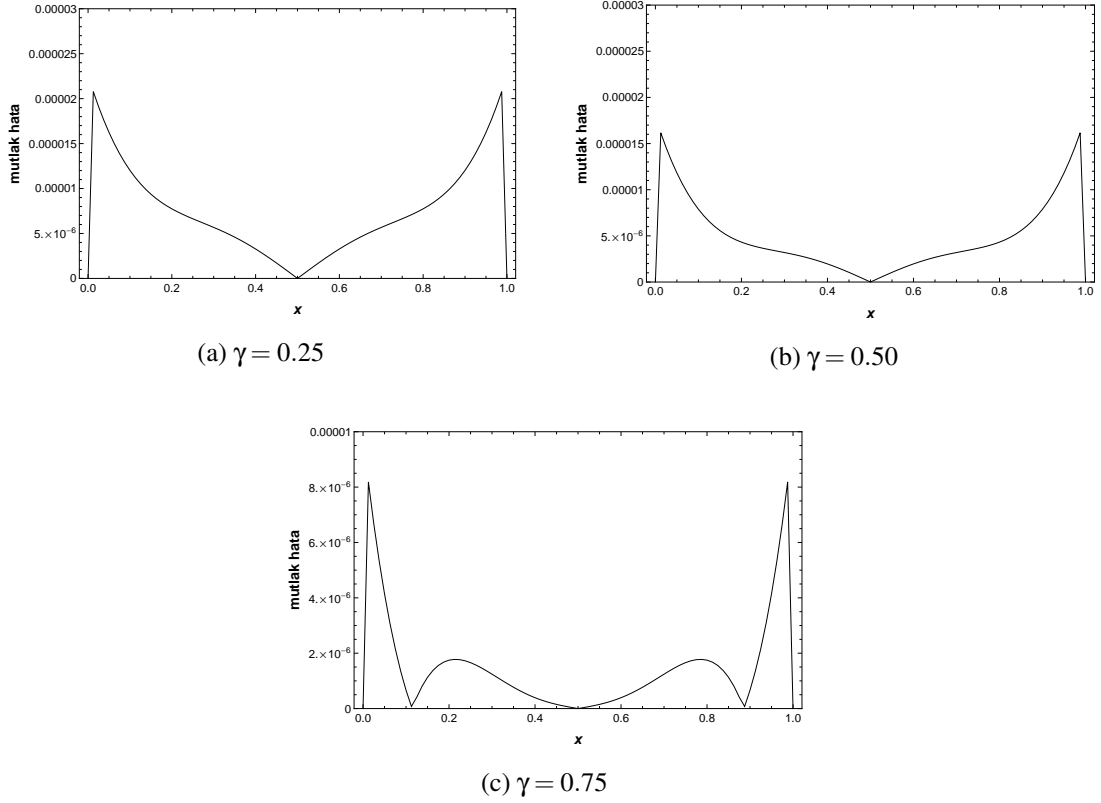
Problem 2 için hesaplanan nümerik çözümler ve hata normları Tablo 4.9 ve Tablo 4.10' da verildi. Tablo 4.9' da, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$, $\gamma = 0.50$ ve farklı N bölüntü sayıları için Tablo 4.10' da ise $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$, $\gamma = 0.50$ ve farklı Δt zaman adımları için elde edilen sayısal sonuçlar ile birlikte L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablolardan hem bölüntü sayısı arttığında hem de zaman adımı küçüldüğünde sayısal çözümlerin tam çözüme çok iyi yaklaştığı ve L_2 ile L_∞ hata normlarının da azaldığı görülmektedir. Kübik B-spline kollokasyon yöntemi ile $\Delta t = 0.00025$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı γ değerleri için hesaplanan çözümlerin mutlak hataları Şekil 4.8' de verildi. Seçilen γ değerlerinde sol ve sağ sınır civarlarında hata dağılımlarının büyük olduğu grafiklerden görülmektedir.

Tablo 4.9 Problem 2' nin $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı N değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

x	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	Tam Çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.2	0.806601	0.808433	0.808897	0.809013	0.809017
0.4	0.307848	0.308735	0.308959	0.309015	0.309017
0.6	-0.307848	-0.308735	-0.308959	-0.309015	-0.309017
0.8	-0.806601	-0.808433	-0.808897	-0.809013	-0.809017
1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
$L_2 \times 10^3$	1.787278	0.440305	0.092735	0.006221	
$L_\infty \times 10^3$	2.415589	0.583583	0.120495	0.016164	

Tablo 4.10 Problem 2' nin $\gamma = 0.50$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

x	$\Delta t = 0.002$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	$\Delta t = 0.00025$	Tam Çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.2	0.809257	0.809117	0.809047	0.809013	0.809017
0.4	0.309134	0.309066	0.309032	0.309015	0.309017
0.6	-0.309134	-0.309066	-0.309032	-0.309015	-0.309017
0.8	-0.809257	-0.809117	-0.809048	-0.809013	-0.809017
1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
$L_2 \times 10^3$	0.171076	0.070874	0.021092	0.006221	
$L_\infty \times 10^3$	0.239785	0.100354	0.030679	0.016164	



Şekil 4.8 Problem 2' nin $\Delta t = 0.00025$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı γ değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.

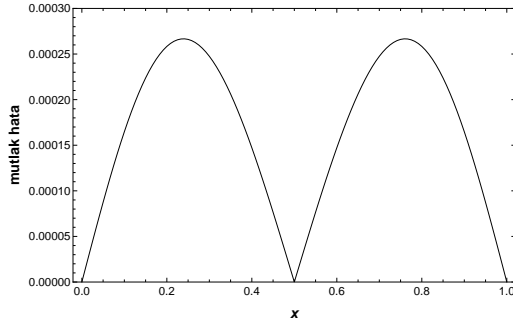
Problem 3 için bölüntü sayısının artırılması ve Δt zaman adımının küçültülmesi durumunda sunulan yöntemle elde edilen sonuçların değişimi hata normları ile birlikte sırasıyla Tablo 4.11 ve Tablo 4.12' de gösterildi. Tablo 4.11' de $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı N değerleri için nümerik çözümler gösterilirken, Tablo 4.12' de ise $N = 120$, $t = 1$, $\nu = 1$, $\gamma = 0.50$ ve farklı Δt zaman adımları için elde edilen sonuçlar verildi. Tablolardan her iki durumda da sonuçların iyileştiği ve hata normlarını oldukça azaldığı açık olarak görülmektedir. Şekil 4.9' da $\Delta t = 0.0005$, $N = 120$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı γ değerlerinde kübik B-spline kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçlar ile tam çözümlerin mutlak hataları verildi. Ele alınan üç γ değeri için maksimum hatanın meydana geldiği noktalar $x = 0.233333$ ve $x = 0.766667$ noktalarıdır. Sınırlar ve $x = 0.5$ noktası civarlarındaki hata dağılımları ise düşük olduğu grafiklerden görülmektedir.

Tablo 4.11 Problem 3' ün $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı N değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

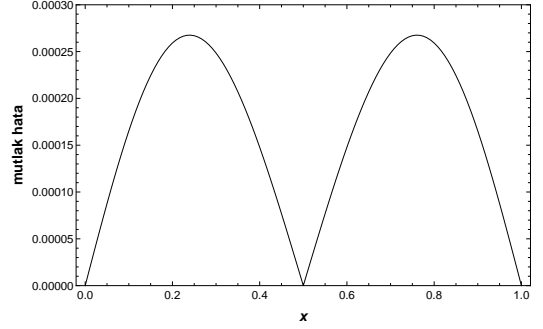
x	$N = 40$	$N = 80$	$N = 100$	$N = 120$	Tam Çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.949458	0.950830	0.950995	0.951084	0.951057
0.4	0.586693	0.587619	0.587730	0.587790	0.587785
0.6	-0.586693	-0.587619	-0.587730	-0.587790	-0.587785
0.8	-0.949458	-0.950830	-0.950995	-0.951084	-0.951057
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	1.224329	0.177703	0.052299	0.017867	
$L_\infty \times 10^3$	1.730469	0.253053	0.076541	0.028290	

Tablo 4.12 Problem 3' ün $\gamma = 0.50$, $N = 120$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

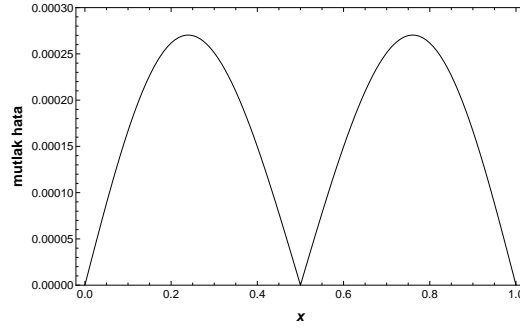
x	$\Delta t = 0.002$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	$\Delta t = 0.00025$	Tam Çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.952704	0.951778	0.951316	0.951084	0.951057
0.4	0.588789	0.588218	0.587933	0.587790	0.587785
0.6	-0.588789	-0.588218	-0.587933	-0.587790	-0.587785
0.8	-0.952704	-0.951778	-0.951316	-0.951084	-0.951057
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	1.220123	0.532436	0.188710	0.017867	
$L_\infty \times 10^3$	1.725765	0.753171	0.267546	0.028290	



(a) $\gamma = 0.25$



(b) $\gamma = 0.50$



(c) $\gamma = 0.75$

Şekil 4.9 Problem 3' ün $\Delta t = 0.0005$, $N = 120$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve farklı γ değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.

Problem 1' in kuadratik B-spline Galerkin ve kübik B-spline kollokasyon yöntemleri ile hesaplanan nümerik çözümlerin L_2 ve L_∞ hata normları farklı γ değerlerinde Tablo 4.13' de $\Delta t = 0.00025$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve artan t zamanları için verildi. Küçük t zamanlarında kuadratik B-spline Galerkin yönteminin, büyük t zamanları için ise kübik B-spline kollokasyon yönteminin daha iyi sonuçlar verdiği tablolardaki hata normlarından görülmektedir.

Tablo 4.13 Problem 1' in $\Delta t = 0.00025$, $N = 40$, $v = 1$, farklı γ değerleri ve artan t zamanları için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

γ	t	Galerkin		Kollokasyon	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.25	0.2	0.005040	0.006900	0.015139	0.018232
	0.4	0.002364	0.003486	0.038859	0.053963
	0.6	0.019555	0.027506	0.062402	0.108462
	0.8	0.071781	0.100726	0.079892	0.177720
	1.0	0.165443	0.232645	0.090053	0.258623
0.50	0.2	0.003715	0.005077	0.015576	0.019379
	0.4	0.001126	0.001714	0.037877	0.054413
	0.6	0.020305	0.028598	0.056625	0.099541
	0.8	0.070763	0.098855	0.066282	0.152216
	1.0	0.161833	0.227352	0.067743	0.209495
0.75	0.2	0.000584	0.000805	0.010369	0.016376
	0.4	0.004027	0.005798	0.026425	0.040124
	0.6	0.023481	0.032761	0.036119	0.067130
	0.8	0.071532	0.099764	0.035624	0.095921
	1.0	0.159924	0.224523	0.035448	0.124569

Problem 2' nin gözönüne alınan yöntemler ile elde edilen nümerik çözümleri için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları $\gamma = 0.25, 0.50, 0.75$ değerlerinde $\Delta t = 0.00025$, $N = 40$, $v = 1$ ve artan t zamanları için Tablo 4.14' de verildi. Kuadratik B-spline Galerkin yönteminde elde edilen sonuçların kübik B-spline kollokasyon yönteminde hesaplanan sonuçlardan daha iyi olduğu verilen tablolardan görülmektedir.

Tablo 4.14 Problem 2' nin $\Delta t = 0.00025$, $N = 80$, $\nu = 1$, farklı γ değerleri ve artan t zamanları için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

γ	t	Galerkin		Kollokasyon	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.25	0.2	0.005389	0.007613	0.005765	0.008179
	0.4	0.007132	0.010148	0.008683	0.012513
	0.6	0.005969	0.008806	0.008353	0.012186
	0.8	0.003508	0.005590	0.005262	0.013245
	1.0	0.002733	0.005257	0.009121	0.020782
0.50	0.2	0.005100	0.007201	0.005555	0.007908
	0.4	0.006697	0.009683	0.008639	0.012456
	0.6	0.005342	0.008221	0.008717	0.012703
	0.8	0.002778	0.004989	0.005621	0.010873
	1.0	0.001982	0.004192	0.006221	0.016164
0.75	0.2	0.004940	0.006994	0.005807	0.008242
	0.4	0.006369	0.009243	0.009460	0.013509
	0.6	0.004903	0.007599	0.010316	0.014854
	0.8	0.002237	0.004264	0.007746	0.011287
	1.0	0.001520	0.003443	0.002297	0.008187

Problem 3 için her iki yöntem ile elde edilen denklem sistemlerinin çözülmesiyle, $\gamma = 0.25, 0.50, 0.75$ değerlerinde $\Delta t = 0.00025$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve artan t zamanları için hesaplanan sayısal çözümlerin L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 4.15' de verildi. Seçilen parametreler için kuadratik B-spline Galerkin yönteminin kübik B-spline kollokasyon yöntemine göre daha düşük L_2 ve L_∞ hata normlarına sahip olduğu görülmektedir.

Tablo 4.15 Problem 3' ün $\Delta t = 0.0005$, $N = 120$, $\nu = 1$, farklı γ değerleri ve artan t zamanları için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

γ	t	Galerkin		Kollokasyon	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.25	0.2	0.054810	0.077650	0.061729	0.087298
	0.4	0.084202	0.119700	0.111794	0.158101
	0.6	0.087729	0.125709	0.149541	0.211491
	0.8	0.064940	0.094647	0.174920	0.247472
	1.0	0.017780	0.034072	0.188066	0.266644
0.50	0.2	0.053376	0.075644	0.060536	0.085611
	0.4	0.082933	0.117859	0.110951	0.156909
	0.6	0.086668	0.123860	0.149202	0.211012
	0.8	0.064213	0.093084	0.175084	0.247700
	1.0	0.017828	0.032162	0.188710	0.267546
0.75	0.2	0.052198	0.073953	0.059712	0.084446
	0.4	0.082255	0.116871	0.110987	0.156960
	0.6	0.086537	0.123725	0.150010	0.212154
	0.8	0.064813	0.093932	0.176548	0.249759
	1.0	0.018641	0.033291	0.190698	0.270340

5. KESİRLİ MERTEBEDEN TELEGRAF DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, $1 < \gamma \leq 2$ olmak üzere

$$\frac{\partial^\gamma U}{\partial t^\gamma} + s_1 \frac{\partial^{\gamma-1} U}{\partial t^{\gamma-1}} + s_2 U - s_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f_1(x, t), \quad t \geq 0 \quad (5.1)$$

ve

$$\frac{\partial^\gamma U}{\partial t^\gamma} + \frac{\partial^{\gamma-1} U}{\partial t^{\gamma-1}} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f_2(x, t), \quad t \geq 0 \quad (5.2)$$

kesirli mertebeden iki farklı tipteki telegraf denklemleri

$$U(a, t) = h_1(t), \quad U(b, t) = h_2(t), \quad t \geq 0 \quad (5.3)$$

sınır şartları ve

$$U(x, 0) = g_1(x), \quad U_t(x, 0) = g_2(x), \quad a \leq x \leq b \quad (5.4)$$

başlangıç şartları ile gözönüne alındı [53, 54]. Burada $f_i(x, t), g_i(x)$ ve $h_i(t)$ ($i = 1, 2$) önceden tanımlı fonksiyonlardır. Hosseini vd. [53] radyal baz fonksiyonlarını kullanarak (5.1) denkleminin, Wei vd. [54] ise lokal süreksiz Galerkin yöntemini kullanarak (5.2) denkleminin nümerik çözümlerini vermişlerdir.

Farklı tipteki kesirli mertebeden telegraf denklemlerinin çözümleri analitik ve nümerik olarak birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır. Örneğin; Orsingher ve Beghin [55] Fourier dönüşümü yardımıyla, Momani [56] ise Adomian ayrışım yöntemini kullanarak

$$\frac{\partial^{2\alpha} U}{\partial t^{2\alpha}} + 2\lambda \frac{\partial^\alpha U}{\partial t^\alpha} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

şeklindeki kesirli mertebeden telegraf denkleminin çözümlerini elde etmişlerdir. Ayrıca, Momani [56] Adomian ayrışım yöntemini kullanarak

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial t^\alpha} = \lambda \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial t} + g(t), \quad 1 < \alpha \leq 2$$

tipindeki kesirli mertebeden telegraf denkleminin analitik ve yaklaşık çözümlerini bulmuştur. Chen vd. [57] değişkenlere ayırma yöntemini, Huang [58] Fourier-Laplace

dönüşümlerini ve ters dönüşümlerini, Jiang ve Lin [59] çekirdek alan çoğaltılması yöntemini kullanarak

$$\frac{\partial^{2\alpha}U}{\partial t^{2\alpha}} + a\frac{\partial^\alpha U}{\partial t^\alpha} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 1 < \alpha \leq 2$$

denkleminin analitik çözümlerini elde etmişlerdir.

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a\frac{\partial U}{\partial t} + bU + f(x,t), \quad 0 < \alpha \leq 1$$

denklemini için ise Sevimlican [60] varyasyonel iterasyon yöntemini kullanarak yaklaşık çözümler elde etmiştir. Garg vd. [61]

$$c^2 \frac{\partial^{2\alpha}U}{\partial x^{2\alpha}} = \frac{\partial^{p\beta}U}{\partial t^{p\beta}} + a\frac{\partial^{r\beta}U}{\partial t^{r\beta}} + bU + f(x,t), \quad 1 < 2\alpha \leq 2, 1 < p\beta \leq 2, 0 < r\beta \leq 1$$

denklemine genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm yöntemini uygulayarak denklemin analitik çözümlerini elde etmişlerdir.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = a\frac{\partial^{2\alpha}U}{\partial t^{2\alpha}} + b\frac{\partial^\alpha U}{\partial t^\alpha} + cU, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

tipindeki denklem ise Ansari [62] tarafından kesirli üstel operatör kullanılarak analitik olarak çözülmüştür.

Bu bölümde iki farklı tipteki kesirli mertebeden telegraf denklemi, farklı başlangıç ve sınır şartları ile birlikte kuadratik B-spline Galerkin ve kübik B-spline kollokasyon yöntemleri kullanılarak nümerik olarak çözüldü. Elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlere ne kadar iyi yaklaştığını görmek için üç model problem için de (3.23) ve (3.24) ile verilen L_2 ve L_∞ hata normları hesaplandı.

5.1 Model Problemler

Problem 1: Bu problemde, (5.1) ile verilen kesirli mertebeden telegraf denklemi $s_1 = 1$, $s_2 = 1$, $s_3 = \pi$ ve

$$f_1(x,t) = \frac{6t^{3-\gamma}}{\Gamma(4-\gamma)} \sin^2 x + \frac{6t^{4-\gamma}}{\Gamma(5-\gamma)} \sin^2 x + t^3 \sin^2 x - 2\pi t^3 (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

olmak üzere

$$U(0,t) = 0, \quad U(1,t) = t^3 \sin^2(1), \quad t \geq 0$$

sınır şartları ve

$$U(x,0) = 0, \quad U_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

başlangıç şartları ile göz önüne alındı. Bu problemin tam çözümü

$$U(x,t) = t^3 \sin^2 x$$

dir [53].

Problem 2: İkinci problem olarak, (5.2) kesirli mertebeden telegraf denklemi $\lambda = 0$ ve

$$f_2(x,t) = \frac{6t^{3-\gamma}}{\Gamma(4-\gamma)} \sin(2\pi x) + \frac{6t^{4-\gamma}}{\Gamma(5-\gamma)} \sin(2\pi x) + 4\pi^2 t^3 \sin(2\pi x)$$

olmak üzere

$$U(0,t) = 0, \quad U(1,t) = 0, \quad t \geq 0$$

sınır şartları ve

$$U(x,0) = 0, \quad U_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

başlangıç şartları ile göz önüne alındı. Bu problemin tam çözümü

$$U(x,t) = t^3 \sin(2\pi x)$$

dir [54].

Problem 3: Son olarak, (5.2) kesirli mertebeden telegraf denklemi $\lambda = 0.1$ ve

$$f_2(x,t) = \frac{6t^{3-\gamma}}{\Gamma(4-\gamma)} \cos x + \frac{6t^{4-\gamma}}{\Gamma(5-\gamma)} \cos x + t^3 (\cos x - 0.1 \sin x)$$

olmak üzere

$$U(0,t) = t^3, \quad U(2\pi,t) = t^3, \quad t \geq 0$$

sınır şartları ve

$$U(x,0) = 0, \quad U_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

başlangıç şartları ile göz önüne alındı. Bu problemin tam çözümü

$$U(x,t) = t^3 \cos x$$

dir [54].

5.2 Kuadratik B-spline Galerkin Çözümleri

Bu kısımda, (5.1) ve (5.2) ile verilen kesirli mertebeden telegraf denklemleri kuadratik B-spline Galerkin yöntemi ile nümerik olarak çözüldü. Yöntemin uygulanmasında ilk olarak, (5.1) denklemini W ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp bölge üzerinden integral alınır

$$\int_0^1 W \left[\frac{\partial^\gamma U}{\partial t^\gamma} + s_1 \frac{\partial^{\gamma-1} U}{\partial t^{\gamma-1}} + s_2 U - s_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] dx = \int_0^1 W f_1(x, t) dx \quad (5.5)$$

ağırlıklı integral formu elde edilir. (5.5) ile verilen ağırlıklı integral formunda, bir kez kısmi integrasyon uygulanırsa (5.1) denkleminin tek bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde zayıf formu

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} \left(W \frac{\partial^\gamma U}{\partial t^\gamma} + s_1 W \frac{\partial^{\gamma-1} U}{\partial t^{\gamma-1}} + s_2 W U + s_3 \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx = s_3 W \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} + \int_{x_m}^{x_{m+1}} W f_1(x, t) dx \quad (5.6)$$

olarak elde edilir. Ağırlık fonksiyonları yerine Bölüm 3' de (3.7) ile verilen kuadratik B-spline fonksiyonlar alınır ve (3.8) yaklaşımı (5.6) zayıf formunda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h Q_i Q_j d\xi \right) \delta_j^e + s_1 \sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h Q_i Q_j d\xi \right) \delta_j^e + s_2 \sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h Q_i Q_j d\xi \right) \delta_j^e \\ & + s_3 \sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h Q_i' Q_j' d\xi \right) \delta_j^e - s_3 \sum_{j=m-1}^{m+1} (Q_i Q_j') \Big|_0^h \delta_j^e = \int_0^h Q_i \tilde{f}_1(\xi, t) d\xi, \quad i = m-1, m, m+1 \end{aligned} \quad (5.7)$$

elde edilir. Burada δ ve δ , sırasıyla γ ve $\gamma-1$ mertebeden t zaman değişkenine göre kesirli türevlerdir. (5.7) denklemini

$$A_{ij}^e = \int_0^h Q_i Q_j d\xi, \quad B_{ij}^e = \int_0^h Q_i' Q_j' d\xi, \quad C_{ij}^e = Q_i Q_j' \Big|_0^h, \quad D_i^e = \int_0^h Q_i \tilde{f}_1(\xi, t) d\xi$$

olmak üzere

$$A^e \delta^e + s_1 A^e \delta^e + s_2 A^e \delta^e + s_3 B^e \delta^e - s_3 C^e \delta^e = D^e \quad (5.8)$$

olarak matris formunda yazılabilir. Burada $\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1})$ dir. İntegraller, kuadratik B-spline fonksiyonlar kullanılarak hesaplandığında, $i, j, k = m-1, m, m+1$ için A_{ij}^e, B_{ij}^e ve C_{ij}^e eleman matrisleri

$$A_{ij}^e = \int_0^h Q_i Q_j d\xi = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{bmatrix},$$

$$B_{ij}^e = \int_0^h Q'_i Q'_j d\xi = \frac{2}{3h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C_{ij}^e = Q_i Q'_j \Big|_0^h = \frac{2}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca D_i^e eleman matrisi

$$D_i^e = \int_0^h Q_i \tilde{f}_1(\xi, t) d\xi = \begin{bmatrix} \int_0^h Q_{m-1} \tilde{f}_1(\xi, t) d\xi \\ \int_0^h Q_m \tilde{f}_1(\xi, t) d\xi \\ \int_0^h Q_{m+1} \tilde{f}_1(\xi, t) d\xi \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Eleman matrislerinin birleştirilmesiyle oluşan A, B, C ve D matrisleri (5.8) denkleminde yerlerine yazılırsa, $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N-1}, \delta_N)$ olmak üzere, matris formundaki

$$A\ddot{\delta} + s_1 A\dot{\delta} + s_2 A\delta + s_3 B\delta - s_3 C\delta = D \quad (5.9)$$

denklemini elde edilir. A, B ve C matrislerinin genelleştirilmiş satırları

$$A : \frac{h}{30}(1, 26, 66, 26, 1), \quad B : \frac{2}{3h}(-1, -2, 6, -2, -1), \quad C : (0, 0, 0, 0, 0)$$

olarak bulunur. (5.9) denkleminde δ yerine (3.15) ile verilen Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı, δ yerine

$$\delta = \frac{d^{\gamma-1} \delta}{dt^{\gamma-1}} = \frac{(\Delta t)^{1-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{2-\gamma} - k^{2-\gamma}] [\delta^{n-k} - \delta^{n-k-1}] \quad (5.10)$$

L1 formülü ve δ yerine de

$$\delta = \frac{d^{\gamma} \delta}{dt^{\gamma}} = \frac{(\Delta t)^{-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{2-\gamma} - k^{2-\gamma}] [\delta^{n-k} - 2\delta^{n-k-1} + \delta^{n-k-2}] \quad (5.11)$$

$L2$ formülü yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{A}{(\Delta t)^\gamma \Gamma(3-\gamma)} + \frac{s_1 A}{(\Delta t)^{\gamma-1} \Gamma(3-\gamma)} + \frac{1}{2}(s_2 A + s_3 B - s_3 C) \right] \delta^{n+1} \\
= & \left[\frac{2A}{(\Delta t)^\gamma \Gamma(3-\gamma)} + \frac{s_1 A}{(\Delta t)^{\gamma-1} \Gamma(3-\gamma)} - \frac{1}{2}(s_2 A + s_3 B - s_3 C) \right] \delta^n - \frac{A}{(\Delta t)^\gamma \Gamma(3-\gamma)} \delta^{n-1} \\
& - \frac{A}{(\Delta t)^\gamma \Gamma(3-\gamma)} \sum_{k=1}^n [(k+1)^{2-\gamma} - k^{2-\gamma}] \left[\delta^{n-k} - 2\delta^{n-k-1} + \delta^{n-k-2} \right] \\
& - \frac{s_1 A}{(\Delta t)^{\gamma-1} \Gamma(3-\gamma)} \sum_{k=1}^n [(k+1)^{2-\gamma} - k^{2-\gamma}] \left[\delta^{n-k} - \delta^{n-k-1} \right] + D
\end{aligned} \tag{5.12}$$

elde edilir.

Benzer olarak (5.2) denklemi ile verilen ikinci tipteki telegraf denkleminin ağırlıklı integral formu oluşturulup kuadratik B-spline fonksiyonları kullanılarak

$$A_{ij}^e = \int_0^h Q_i Q_j d\xi, B_{ij}^e = \int_0^h Q_i Q'_j d\xi, C_{ij}^e = \int_0^h Q'_i Q'_j d\xi, D_{ij}^e = Q_i Q'_j|_0^h, E_i^e = \int_0^h Q_i \tilde{f}_2(\xi, t) d\xi$$

olmak üzere, birim eleman matris formunda

$$A^e \delta^e + A^e \delta^e + \lambda B^e \delta^e + C^e \delta^e - D^e \delta^e = E^e \tag{5.13}$$

olarak yazılabilir. Burada $\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1})$ dir. $i, j, k = m-1, m, m+1$ için $A_{ij}^e, B_{ij}^e, C_{ij}^e$ ve D_{ij}^e eleman matrisleri

$$A_{ij}^e = \int_0^h Q_i Q_j d\xi = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{bmatrix},$$

$$B_{ij}^e = \int_0^h Q_i Q'_j d\xi = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -8 & 0 & 8 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C_{ij}^e = \int_0^h Q'_i Q'_j d\xi = \frac{2}{3h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D_{ij}^e = Q_i Q'_j|_0^h = \frac{2}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Ayrıca E_i^e eleman matrisi

$$E_i^e = \int_0^h Q_i \tilde{f}_2(\xi, t) d\xi = \begin{bmatrix} \int_0^h Q_{m-1} \tilde{f}_2(\xi, t) d\xi \\ \int_0^h Q_m \tilde{f}_2(\xi, t) d\xi \\ \int_0^h Q_{m+1} \tilde{f}_2(\xi, t) d\xi \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Eleman matrislerinin birleştirilmesiyle elde edilen A, B, C, D ve E matrisleri (5.13) denkleminde yerlerine yazılırsa, $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N-1}, \delta_N)$ olmak üzere,

$$A\ddot{\delta} + A\dot{\delta} + \lambda B\delta + C\delta - D\delta = E \quad (5.14)$$

matris formundaki denklemi elde edilir. A, B, C ve D matrislerinin genelleştirilmiş satırları

$$A: \frac{h}{30}(1, 26, 66, 26, 1), B: \frac{1}{6}(-1, -10, 0, 10, 1), C: \frac{2}{3h}(-1, -2, 6, -2, -1), D: (0, 0, 0, 0, 0)$$

şeklinde yazılabilir. (5.14) denkleminde δ yerine (3.15) ile verilen Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı, $\dot{\delta}$ yerine (5.10) ile verilen $L1$ formülü ve $\ddot{\delta}$ yerine de (5.11) ile verilen $L2$ formülü yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left[\frac{A}{(\Delta t)^\gamma \Gamma(3-\gamma)} + \frac{A}{(\Delta t)^{\gamma-1} \Gamma(3-\gamma)} + \frac{1}{2}(\lambda B + C - D) \right] \delta^{n+1} \\ &= \left[\frac{2A}{(\Delta t)^\gamma \Gamma(3-\gamma)} + \frac{A}{(\Delta t)^{\gamma-1} \Gamma(3-\gamma)} - \frac{1}{2}(\lambda B + C - D) \right] \delta^n - \frac{A}{(\Delta t)^\gamma \Gamma(3-\gamma)} \delta^{n-1} \\ & \quad - \frac{A}{(\Delta t)^\gamma \Gamma(3-\gamma)} \sum_{k=1}^n [(k+1)^{2-\gamma} - k^{2-\gamma}] \left[\delta^{n-k} - 2\delta^{n-k-1} + \delta^{n-k-2} \right] \\ & \quad - \frac{A}{(\Delta t)^{\gamma-1} \Gamma(3-\gamma)} \sum_{k=1}^n [(k+1)^{2-\gamma} - k^{2-\gamma}] \left[\delta^{n-k} - \delta^{n-k-1} \right] + E \end{aligned} \quad (5.15)$$

elde edilir.

(5.12) ve (5.15) sistemlerinde $n = 0$ veya $k = n$ için δ^{-1} bilinmeyen değerleri ortaya çıkmaktadır. Problemlerde verilen $U_t(x, 0) = g_2(x)$ ikinci başlangıç koşulunda türev ifadesi yerine merkezi fark yaklaşımı kullanılarak

$$\frac{\delta^1 - \delta^{-1}}{2\Delta t} = g_2(x)$$

yazılabilir. Böylece $\delta^{-1} = \delta^1 - 2\Delta t g_2(x)$ olarak alınabilir. (5.12) ve (5.15) sistemleri $(N+2) \times (N+2)$ tipinde olup sınır şartlarının kullanılmasıyla δ_{-1} ve δ_N parametreleri bu sistemlerden yok edilirse $N \times N$ tipinde cebirsel sistemler elde edilir.

İterasyona başlamada δ^0 başlangıç parametreleri önceki bölümlerde kuadratik B-spline Galerkin yöntemlerinde olduğu gibi hesaplandıktan sonra (5.12) ve (5.15) sistemlerinde kullanılarak istenilen t zamanına kadar iterasyon yardımıyla elde edilen δ parametreleri bulunur. (3.9) ile verilen U_N yaklaşımında bu değerler yerine yazılarak t zamandaki nümerik çözümler elde edilir.

Nümerik Çözümler

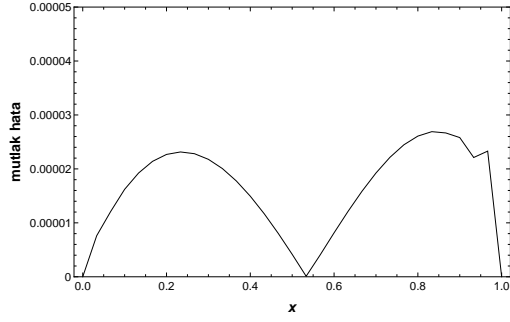
Bu kısımda, ele alınan problemlerin nümerik çözümleri kuadratik B-spline Galerkin yöntemi ile hesaplandı. Hesaplanan nümerik çözümler ile L_2 ve L_∞ hata normları Problem 1 için Tablo 5.1 ve Tablo 5.2’ de verildi. Tablo 5.1’ de, $\Delta t = 0.001$, $t = 1$, $\gamma = 1.50$ için farklı N değerlerinde hesaplanan sonuçlardan N bölüntü sayısı arttıkça, Tablo 5.2’ de ise $N = 30$, $t = 1$, $\gamma = 1.50$ ve farklı Δt zaman adımları için Δt zaman adımı azaldıkça L_2 ve L_∞ hata normlarında azaldığı görülmektedir. Şekil 5.1’ de $\Delta t = 0.001$, $N = 30$, $t = 1$ ve farklı γ değerlerinde Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçlar için mutlak hata grafikleri verildi. Kuadratik B-spline Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin mutlak hata grafiği ile radyal baz fonksiyonları yardımıyla elde edilen nümerik çözümlerin Ref. [53]’ de verilen mutlak hata grafiği karşılaştırıldığında, Galerkin yöntemi ile elde edilen çözümlerin daha iyi olduğu görülmektedir. Ayrıca gözönüne alınan γ değerlerinde en büyük hata $x = 0.8$ noktası civarında olduğu grafiklerden görülmektedir. $N = 40$, $\Delta t = 0.00025$, $v = 1$, $\gamma = 1.5$ ve farklı t değerleri için problemin tam ve nümerik çözümleri grafiksel olarak Şekil 5.2’ de gösterildi. Şekilden, Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümler ile tam çözümler ayırt edilemeyecek kadar uyum içerisinde olduğu görülmektedir.

Tablo 5.1 Problem 1' in $\gamma = 1.50$, $\Delta t = 0.001$, $t = 1$ ve farklı N değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

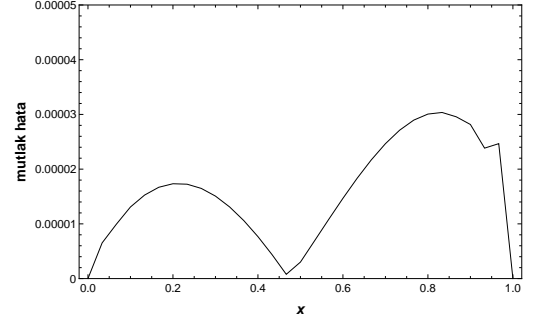
x	$N = 5$	$N = 10$	$N = 15$	$N = 20$	$N = 25$	$N = 30$	Tam Çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.041720	0.040264	0.039766	0.039587	0.039503	0.039458	0.039470
0.4	0.156498	0.152743	0.152054	0.151815	0.151706	0.151646	0.151647
0.6	0.323209	0.319810	0.319190	0.318984	0.318891	0.318842	0.318821
0.8	0.519529	0.515261	0.514853	0.514718	0.514662	0.514634	0.514600
1.0	0.708073	0.708073	0.708073	0.708073	0.708073	0.708073	0.708073
$L_2 \times 10^3$	3.798931	0.822230	0.304328	0.130208	0.053079	0.020029	
$L_\infty \times 10^3$	4.929548	1.096321	0.408051	0.171718	0.070520	0.033970	

Tablo 5.2 Problem 1' in $\gamma = 1.50$, $N = 30$, $t = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

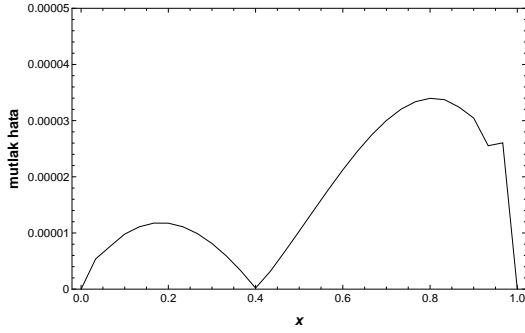
x	$\Delta t = 0.1$	$\Delta t = 0.05$	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.005$	$\Delta t = 0.001$	Tam Çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.028322	0.033896	0.038426	0.038998	0.039458	0.039470
0.4	0.139094	0.145346	0.150470	0.151121	0.151646	0.151647
0.6	0.311016	0.314865	0.318088	0.318505	0.318842	0.318821
0.8	0.512849	0.513668	0.514437	0.514544	0.514634	0.514600
1.0	0.708073	0.708073	0.708073	0.708073	0.708073	0.708073
$L_2 \times 10^3$	8.338473	4.188691	0.781645	0.347984	0.020029	
$L_\infty \times 10^3$	12.975162	6.501840	1.215807	0.545445	0.033970	



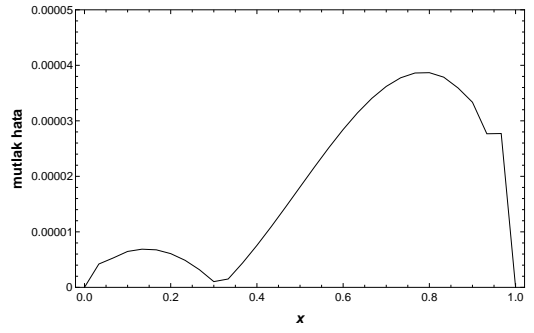
(a) $\gamma = 1.10$



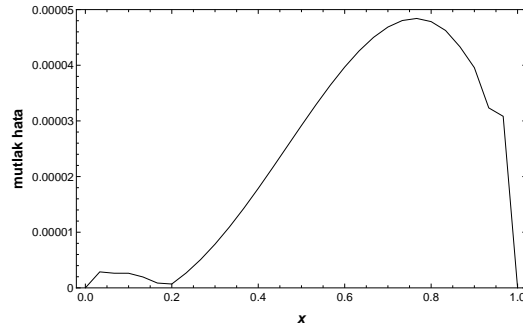
(b) $\gamma = 1.30$



(c) $\gamma = 1.50$

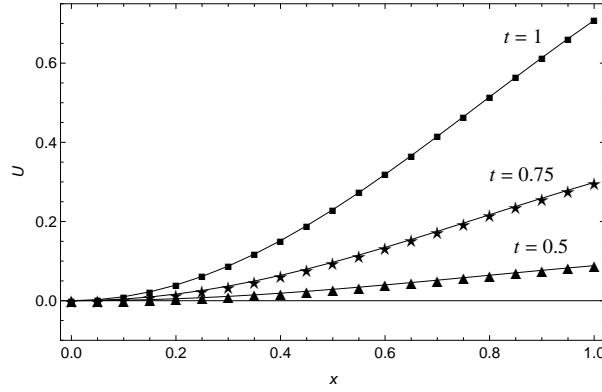


(d) $\gamma = 1.70$



(e) $\gamma = 1.90$

Şekil 5.1 Problem 1' in $\Delta t = 0.001$, $N = 30$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.



Şekil 5.2 Problem 1' in $\gamma = 1.5$, $\Delta t = 0.001$, $N = 30$ ve artan t zamanları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

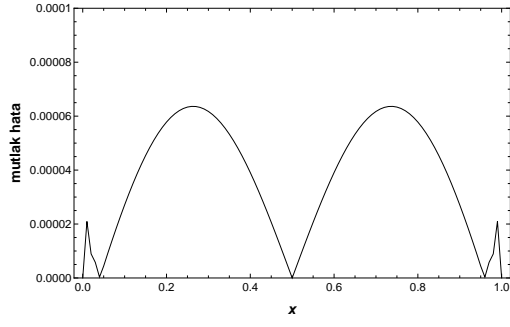
Problem 2 için elde edilen sonuçlar Tablo 5.3 ve Tablo 5.4' de sunuldu. Tablo 5.3' de $\Delta t = 0.0005$, $t = 1$, $\gamma = 1.50$ değerlerinin sabit tutularak N bölüntü sayısının değiştirilmesiyle elde edilen nümerik çözümler ile tam çözüm verildi. Tablodan, N sayısının artırılmasıyla elde edilen sonuçların tam çözüme daha yakın olduğu hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarındaki azalmadan açıkça görülmektedir. Ayrıca Tablo 5.4' de $N = 100$, $t = 1$, $\gamma = 1.50$ değerlerinin sabit tutulup Δt zaman adımlarının azaltılmasıyla da L_2 ve L_∞ hata normlarında azaldığı görüldü. $\Delta t = 0.0005$, $N = 100$, $t = 1$, $v = 1$ ve farklı γ değerlerinde Galerkin yöntemi ile hesaplanan nümerik sonuçlar ile tam çözümlerin mutlak hataları Şekil 5.3' de grafiksel olarak verildi. Gözönüne alınan γ değerlerinde $x = 0.25$ ve $x = 0.75$ noktaları civarında hata dağılımlarının büyük olduğu grafiklerden görülmektedir. Ayrıca sınırlar ve $x = 0.5$ noktası civarlarında mutlak hataların düşük olduğu grafiklerden görülmektedir. Şekil 5.4' de ise $N = 100$, $\Delta t = 0.0005$, $\gamma = 1.5$ ve artan t değerleri için gözönüne alınan yöntemle hesaplanan problemin nümerik çözümleri ve tam çözümleri grafiksel olarak gösterildi. Kuadratik B-spline Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümler ile tam çözümler ayırt edilemeyecek kadar uyum içerisinde olduğu grafikten görülmektedir.

Tablo 5.3 Problem 2' nin $\gamma = 1.50$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 1$ ve farklı N değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

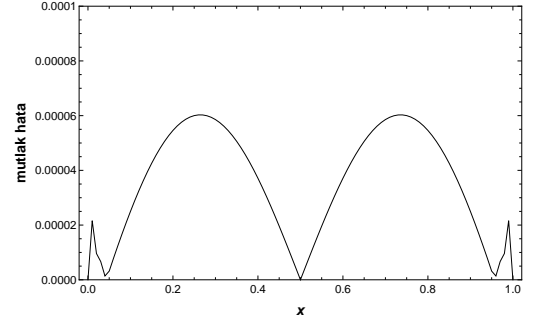
x	$N = 20$	$N = 40$	$N = 60$	$N = 80$	$N = 100$	Tam Çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.934891	0.947667	0.949956	0.950746	0.951108	0.951057
0.4	0.578182	0.585743	0.587121	0.587600	0.587821	0.587785
0.6	-0.578182	-0.585743	-0.587121	-0.587600	-0.587821	-0.587785
0.8	-0.934891	-0.947667	-0.949956	-0.950746	-0.951108	-0.951057
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	12.085033	2.525247	0.819583	0.231901	0.038947	
$L_\infty \times 10^3$	16.707587	3.523310	1.144868	0.321781	0.057156	

Tablo 5.4 Problem 2' nin $\gamma = 1.50$, $N = 100$, $t = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

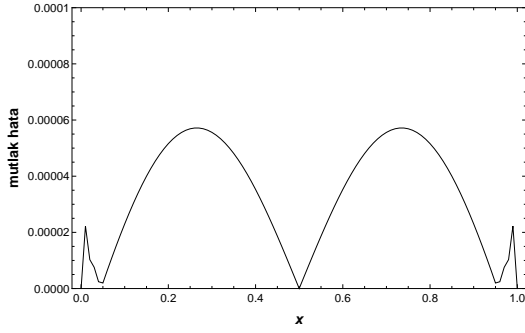
x	$\Delta t = 0.005$	$\Delta t = 0.0025$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	Tam Çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.957316	0.953865	0.951797	0.951108	0.951057
0.4	0.591658	0.589524	0.588246	0.587821	0.587785
0.6	-0.591658	-0.589524	-0.588246	-0.587821	-0.587785
0.8	-0.957316	-0.953865	-0.951797	-0.951108	-0.951057
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	4.65406	2.088014	0.550343	0.038947	
$L_\infty \times 10^3$	6.584694	2.955737	0.781081	0.057156	



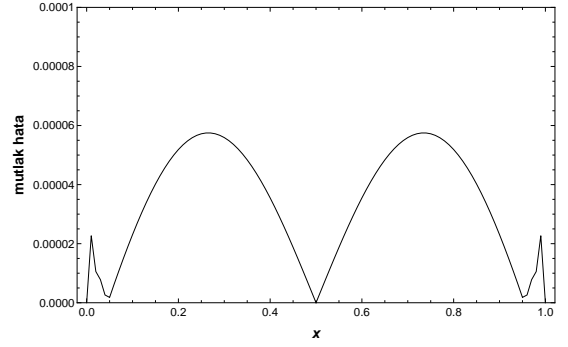
(a) $\gamma = 1.10$



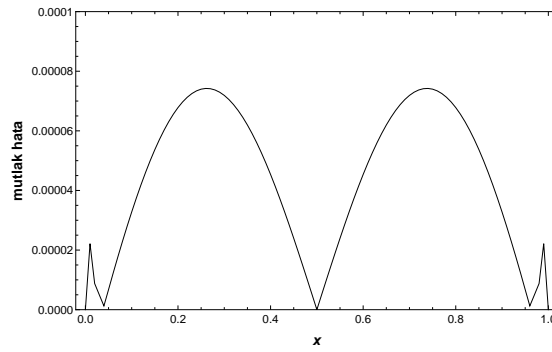
(b) $\gamma = 1.30$



(c) $\gamma = 1.50$

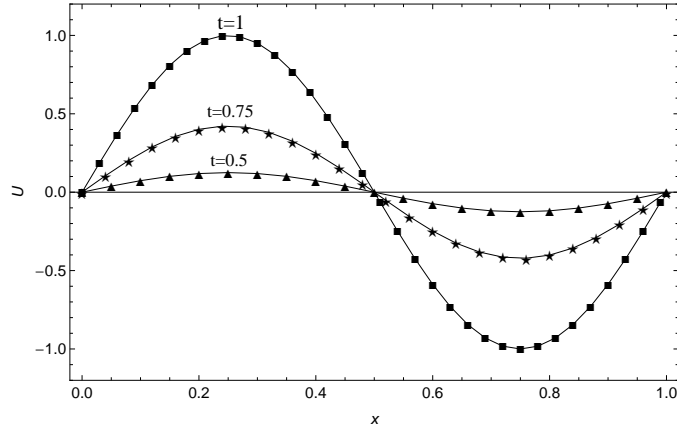


(d) $\gamma = 1.70$



(e) $\gamma = 1.90$

Şekil 5.3 Problem 2' nin $\Delta t = 0.0005$, $N = 100$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.



Şekil 5.4 Problem 2' nin $\gamma = 1.5$, $\Delta t = 0.0005$, $N = 100$ ve artan t zamanları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

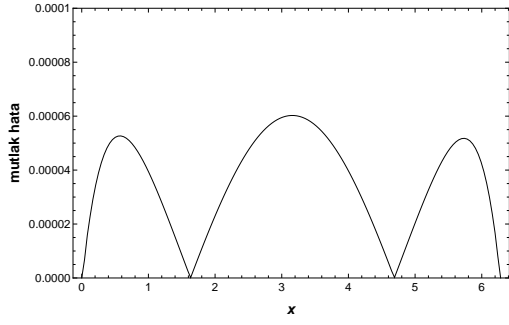
Son olarak, kuadratik B-spline Galerkin yönteminin Problem 3' e uygulanmasıyla elde edilen nümerik çözümler ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 5.5 ve Tablo 5.6' da verildi. Tablo 5.5' de $\Delta t = 0.0002$, $t = 1$, $\gamma = 1.50$ sabit değerlerinde farklı N bölüntü sayıları için hesaplanan hata normlarında N değerinin arttırılmasıyla önemli ölçüde azalma görüldü. Tablo 5.6' da $N = 150$, $t = 1$, $\gamma = 1.50$ ve farklı Δt zaman adımları için elde edilen hata normlarının da Δt zaman adımı azaldıkça, küçüldüğü açıkça görülmektedir. Problemin farklı γ değerleri için $\Delta t = 0.0002$, $t = 1$, $N = 150$ parametrelerinde hesaplanan sonuçların mutlak hataları grafiksel olarak Şekil 5.5' de sunuldu. $\gamma = 1.20$ ve $\gamma = 1.40$ değerlerinde en büyük mutlak hata $x = 3.141593$ noktasında meydana gelirken grafiklerde verilen diğer γ değerlerinde en büyük hata sınırlar civarında meydana gelmektedir. Şekil 5.6' da problemin Galerkin yöntemi ile $N = 150$, $\Delta t = 0.0002$, $\gamma = 1.5$ ve farklı t değerleri için hesaplanan nümerik çözümleri ve tam çözümleri grafiksel olarak gösterildi. Yöntem ile elde edilen nümerik çözümler ile tam çözümlerin ayırt edilemediği görüldü.

Tablo 5.5 Problem 3' ün $\gamma = 1.50$, $\Delta t = 0.0002$, $t = 1$ ve farklı N değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

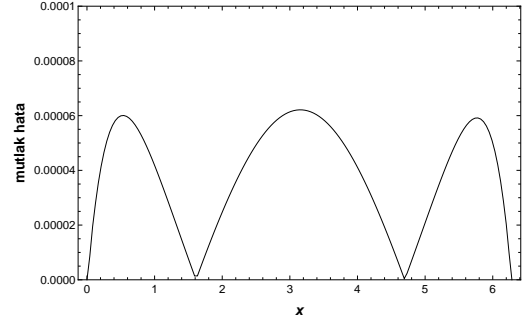
N	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
40	5.769971	3.878308
50	3.594891	2.399985
80	1.210711	0.797248
100	0.656364	0.427206
120	0.354776	0.226167
150	0.109013	0.063129

Tablo 5.6 Problem 3' ün $\gamma = 1.50$, $N = 150$, $t = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

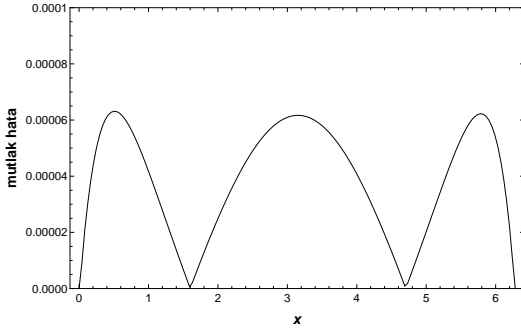
x	$\Delta t = 0.005$	$\Delta t = 0.002$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	$\Delta t = 0.0002$	Tam Çözüm
0.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1.005310	0.538393	0.536747	0.536209	0.535943	0.535785	0.535827
2.010619	-0.428229	-0.426667	-0.426156	-0.425904	-0.425754	-0.425779
3.015929	-0.997787	-0.994167	-0.992985	-0.992401	-0.992054	-0.992115
4.021239	-0.641059	-0.638738	-0.637980	-0.637606	-0.637384	-0.637424
5.026548	0.310615	0.309593	0.309259	0.309093	0.308995	0.309017
6.283185	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
$L_2 \times 10^3$	8.266163	2.981214	1.255229	0.403046	0.109013	
$L_\infty \times 10^3$	5.716179	2.067697	0.876479	0.288036	0.063129	



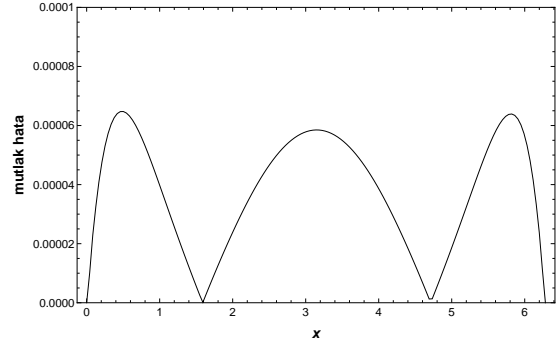
(a) $\gamma = 1.20$



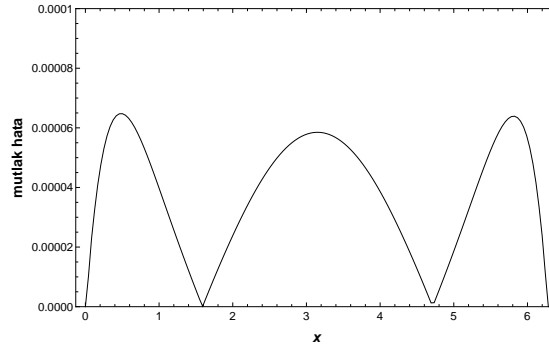
(b) $\gamma = 1.40$



(c) $\gamma = 1.50$

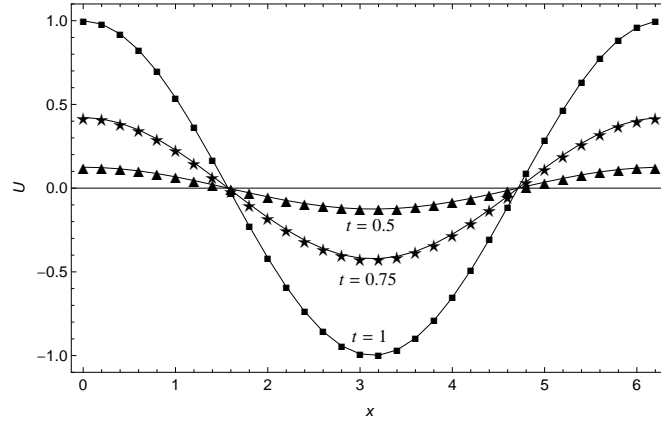


(d) $\gamma = 1.60$



(e) $\gamma = 1.80$

Şekil 5.5 Problem 3' ün $\Delta t = 0.0002$, $N = 150$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.



Şekil 5.6 Problem 3' ün $\gamma = 1.5$, $\Delta t = 0.0002$, $N = 300$ ve artan t zamanları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

5.3 Kübik B-spline Kollokasyon Çözümleri

Bu kısımda, (5.1) ve (5.2) ile verilen kesirli mertebeden telegraf denklemlerinin çözümleri kübik B-spline kollokasyon yöntemi ile çözüldü.

İlk olarak (5.1) ile verilen denklemi gözönüne alalım. Bu denklemde (3.20) yaklaşımları yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_{m-1} + 4\ddot{\delta}_m + \ddot{\delta}_{m+1} + s_1(\dot{\delta}_{m-1} + 4\dot{\delta}_m + \dot{\delta}_{m+1}) \\ + s_2(\delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}) - s_3 \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) = \tilde{f}_1(\xi, t) \end{aligned} \quad (5.16)$$

elde edilir. (5.16) denkleminde δ , $\dot{\delta}$ ve $\ddot{\delta}$ yerlerine sırasıyla (3.15) ile verilen Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı, (5.10) ile verilen $L1$ ve (5.11) ile verilen $L2$ formülü yazılırsa denklemin genelleştirilmiş satırı $m = 0(1)N$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (1 + s_1\Delta t + s_2h^2\alpha - 6s_3\alpha) \delta_{m-1}^{n+1} + (4 + 4s_1\Delta t + 4s_2h^2\alpha + 12s_3\alpha) \delta_m^{n+1} \\ + (1 + s_1\Delta t + s_2h^2\alpha - 6s_3\alpha) \delta_{m+1}^{n+1} = (2 + s_1\Delta t - s_2h^2\alpha + 6s_3\alpha) \delta_{m-1}^n \\ + (8 + 4s_1\Delta t - 4s_2h^2\alpha - 12s_3\alpha) \delta_m^n + (2 + s_1\Delta t - s_2h^2\alpha + 6s_3\alpha) \delta_{m+1}^n \\ - \sum_{k=1}^n [(k+1)^{2-\gamma} - k^{2-\gamma}] \left[(\delta_{m-1}^{n-k+1} - 2\delta_{m-1}^{n-k} + \delta_{m-1}^{n-k-1}) + 4(\delta_m^{n-k+1} - 2\delta_m^{n-k} + \delta_m^{n-k-1}) \right. \\ \left. + (\delta_{m+1}^{n-k+1} - 2\delta_{m+1}^{n-k} + \delta_{m+1}^{n-k-1}) \right] - (\delta_{m-1}^{n-1} + 4\delta_m^{n-1} + \delta_{m+1}^{n-1}) + 2h^2\alpha \tilde{f}_1(\xi, t_n) \\ - s_1\Delta t \sum_{k=1}^n [(k+1)^{2-\gamma} - k^{2-\gamma}] \left[(\delta_{m-1}^{n-k+1} - \delta_{m-1}^{n-k}) + 4(\delta_m^{n-k+1} - \delta_m^{n-k}) + (\delta_{m+1}^{n-k+1} - \delta_{m+1}^{n-k}) \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

olarak bulunur. Burada

$$\alpha = \frac{(\Delta t)^\gamma \Gamma(3 - \gamma)}{2h^2}$$

dır.

Benzer olarak (5.2) denkleminde de (3.20) yaklaşımları yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\ddot{\delta}_{m-1} + 4\ddot{\delta}_m + \ddot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m-1} + 4\dot{\delta}_m + \dot{\delta}_{m+1} + \frac{3\lambda}{h}(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}) - \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) = \tilde{f}_2(\xi, t) \quad (5.18)$$

bulunur. (5.18) denkleminde yine δ , $\dot{\delta}$ ve $\ddot{\delta}$ yerlerine sırasıyla (3.15) ile verilen Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı, (5.10) ile verilen $L1$ ve (5.11) ile verilen $L2$ formülü yazılırsa denklemin genelleştirilmiş satırı $m = 0(1)N$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & (1 + \Delta t - 3\lambda h\alpha - 6\alpha) \delta_{m-1}^{n+1} + (4 + 4\Delta t + 12\alpha) \delta_m^{n+1} + (1 + \Delta t + 3\lambda h\alpha - 6\alpha) \delta_{m+1}^{n+1} \\ & = (2 + \Delta t + 3\lambda h\alpha + 6\alpha) \delta_{m-1}^n + (8 + 4\Delta t - 12\alpha) \delta_m^n + (2 + \Delta t - 3\lambda h\alpha + 6\alpha) \delta_{m+1}^n \\ & - \sum_{k=1}^n [(k+1)^{2-\gamma} - k^{2-\gamma}] [(\delta_{m-1}^{n-k+1} - 2\delta_{m-1}^{n-k} + \delta_{m-1}^{n-k-1}) + 4(\delta_m^{n-k+1} - 2\delta_m^{n-k} + \delta_m^{n-k-1}) \\ & + (\delta_{m+1}^{n-k+1} - 2\delta_{m+1}^{n-k} + \delta_{m+1}^{n-k-1})] - (\delta_{m-1}^{n-1} + 4\delta_m^{n-1} + \delta_{m+1}^{n-1}) + 2h^2\alpha \tilde{f}_2(\xi, t_n) \\ & - \Delta t \sum_{k=1}^n [(k+1)^{2-\gamma} - k^{2-\gamma}] [(\delta_{m-1}^{n-k+1} - \delta_{m-1}^{n-k}) + 4(\delta_m^{n-k+1} - \delta_m^{n-k}) + (\delta_{m+1}^{n-k+1} - \delta_{m+1}^{n-k})] \end{aligned} \quad (5.19)$$

elde edilir. Burada

$$\alpha = \frac{(\Delta t)^\gamma \Gamma(3 - \gamma)}{2h^2}$$

dır.

(5.17) ve (5.19) sistemleri her ikisi de $(N+3) \times (N+1)$ tipindeki cebirsel denklem sistemlerinden oluşur. (3.20) denklemindeki U_m ve U_m'' yaklaşımlarının sınırdaki değerleri kullanılarak δ_{-1} ve δ_{N+1} parametreleri sistemlerden yok edilirse $(N+1) \times (N+1)$ tipinde cebirsel denklem sistemlerine ulaşılır. (5.17) ve (5.19) sistemlerinde $n = 0$ veya $k = n$ için δ^{-1} bilinmeyen değerleri ortaya çıkmaktadır. Problemlerde verilen $U_t(x, 0) = g_2(x)$ ikinci başlangıç koşulunda türev ifadesi yerine merkezi fark yaklaşımı kullanılarak $\delta^{-1} = \delta^1 - 2\Delta t g_2(x)$ olarak alınabilir. İterasyonlara başlamada δ^0 başlangıç parametreleri önceki bölümlerde verilen kübik B-spline kollokasyon yöntemlerinde olduğu gibi hesaplandıktan

sonra (5.17) ve (5.19) sistemlerinde kullanılarak istenilen t zamanına kadar iterasyon yardımıyla elde edilen δ parametreleri bulunur. (3.20) ile verilen U_N yaklaşımında bu değerler yerine yazılarak t zamandaki nümerik çözümler elde edilir.

Nümerik Çözümler

Bu kısımda, ele alınan model problemlerin kübik B-spline kollokasyon yöntemi kullanılarak nümerik çözümleri hesaplandı. Problem 1 için hesaplanan nümerik çözümler ile birlikte L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 5.7 ve Tablo 5.8’ de verildi. Tablo 5.7’ de $\Delta t = 0.001$, $t = 1$, $\gamma = 1.50$ değerlerinde farklı N bölüntü sayıları için hesaplanan sonuçlar verildi. Tablodan seçilen değerler için N bölüntü sayısının artırılmasıyla hata normlarında azalma görüldü. $N = 30$, $t = 1$, $\gamma = 1.50$ değerlerinde farklı Δt zaman adımları için elde edilen sonuçlardan Δt zaman adımı azaldıkça L_2 ve L_∞ hata normlarının da azaldığı açıkça Tablo 5.8’ de görülmektedir.

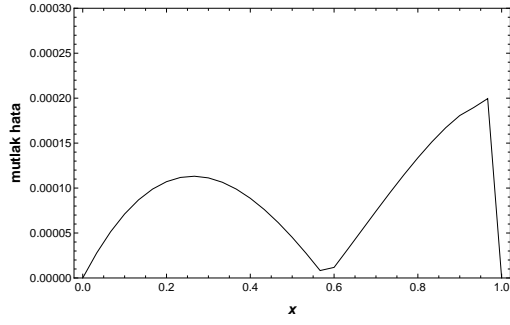
Tablo 5.7 Problem 1’ in $\gamma = 1.50$, $\Delta t = 0.001$, $t = 1$ ve farklı N değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

x	$N = 5$	$N = 10$	$N = 15$	$N = 20$	$N = 25$	$N = 30$	Tam Çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.039787	0.039625	0.039593	0.039582	0.039577	0.039574	0.039470
0.4	0.151265	0.151630	0.151695	0.151717	0.151728	0.151733	0.151647
0.6	0.316970	0.318397	0.318658	0.318749	0.318791	0.318814	0.318821
0.8	0.510822	0.513656	0.514175	0.514356	0.514440	0.514486	0.514600
1.0	0.708073	0.708073	0.708073	0.708073	0.708073	0.708073	0.708073
$L_2 \times 10^3$	1.894523	0.554442	0.263317	0.159778	0.114398	0.092419	
$L_\infty \times 10^3$	3.778103	1.205608	0.580308	0.340983	0.224789	0.159680	

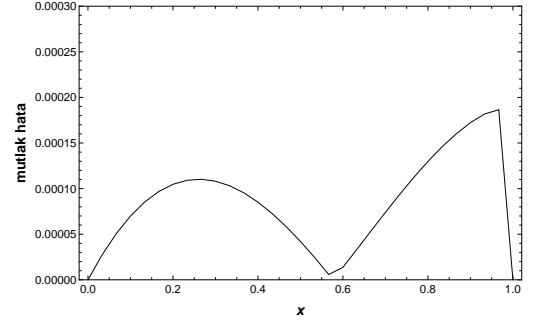
Tablo 5.8 Problem 1' in $\gamma = 1.50$, $N = 30$, $t = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

x	$\Delta t = 0.1$	$\Delta t = 0.05$	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.005$	$\Delta t = 0.001$	Tam Çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.049593	0.044497	0.040468	0.039970	0.039574	0.039470
0.4	0.162152	0.156814	0.152645	0.152136	0.151733	0.151647
0.6	0.323943	0.321250	0.319234	0.318998	0.318814	0.318821
0.8	0.514051	0.514182	0.514407	0.514448	0.514486	0.514600
1.0	0.708073	0.708073	0.708073	0.708073	0.708073	0.708073
$L_2 \times 10^3$	6.951937	3.425623	0.670527	0.336863	0.092419	
$L_\infty \times 10^3$	11.324459	5.603793	1.101630	0.548225	0.159680	

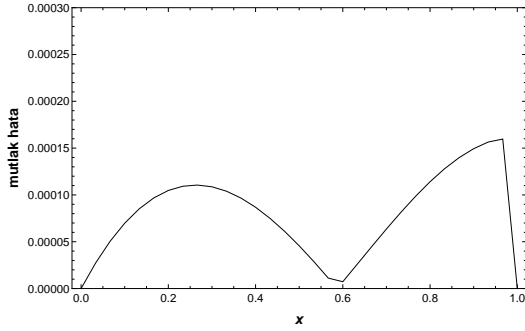
Problemin, kübik B-spline kollokasyon yöntemi ile $\Delta t = 0.001$, $t = 1$, $N = 30$ ve farklı γ değerleri için hesaplanan nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin mutlak hataları Şekil 5.7' de verildi. Kübik B-spline kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin mutlak hata grafiği ile radyal baz fonksiyonları yardımıyla elde edilen nümerik çözümlerin Ref. [53]' de verilen mutlak hata grafiği karşılaştırıldığında, kollokasyon yöntemi ile elde edilen çözümlerin daha iyi olduğu görülmektedir. Ayrıca $\gamma = 1.10$, $\gamma = 1.30$ ve $\gamma = 1.50$ değerlerinde en büyük mutlak hata sağ sınır civarında meydana gelirken $\gamma = 1.70$ ve $\gamma = 1.90$ değerlerinde ise en büyük hata $x = 0.3$ noktası civarında meydana gelmektedir.



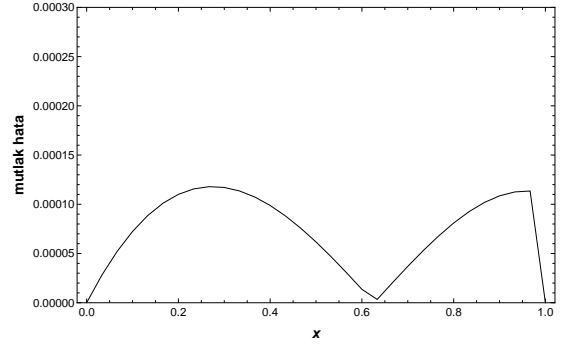
(a) $\gamma = 1.10$



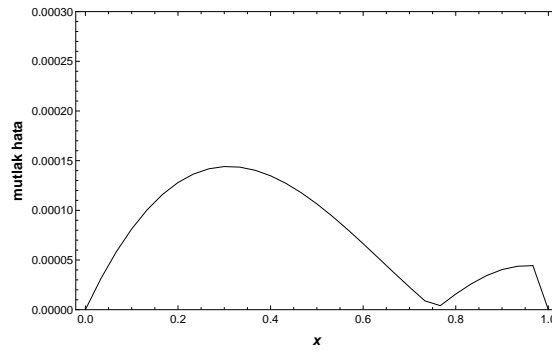
(b) $\gamma = 1.30$



(c) $\gamma = 1.50$



(d) $\gamma = 1.70$



(e) $\gamma = 1.90$

Şekil 5.7 Problem 1' in $\Delta t = 0.001$, $N = 30$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.

Tablo 5.9 ve Tablo 5.10’ da, kübik B-spline kollokasyon yönteminin uygulanmasıyla Problem 2 için elde edilen sayısal çözümler ile bu çözümlerden hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları verildi. $\Delta t = 0.0002$, $t = 1$, $\gamma = 1.50$ değerlerinin alınmasıyla farklı N bölüntü sayıları için hesaplanan nümerik çözümlerin artan N bölüntü sayısında, daha düşük L_2 ve L_∞ hata normlarının elde edildiği Tablo 5.9’ de görüldü. Tablo 5.10’ da ise $N = 80$, $t = 1$, $\gamma = 1.50$ değerleri sabit tutularak farklı Δt zaman adımları için elde edilen sonuçlar ile hesaplanan hata normları verildi. Tablodan Δt zaman adımı büyüklüğü azaldıkça L_2 ve L_∞ hata normlarının da azaldığı açıkça görülmektedir.

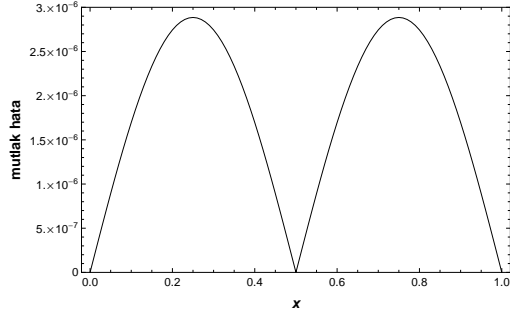
Tablo 5.9 Problem 2’ nin $\gamma = 1.50$, $\Delta t = 0.0002$, $t = 1$ ve farklı N değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

x	$N = 20$	$N = 40$	$N = 60$	$N = 80$	$N = 100$	Tam Çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.944683	0.949665	0.950591	0.950915	0.951065	0.951057
0.4	0.583846	0.586925	0.587497	0.587698	0.587790	0.587785
0.6	-0.583846	-0.586925	-0.587497	-0.587698	-0.587790	-0.587785
0.8	-0.944683	-0.949665	-0.950591	-0.950915	-0.951065	-0.951057
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	4.738734	1.034566	0.346355	0.105316	0.006280	
$L_\infty \times 10^3$	6.701583	1.463097	0.489819	0.148939	0.008881	

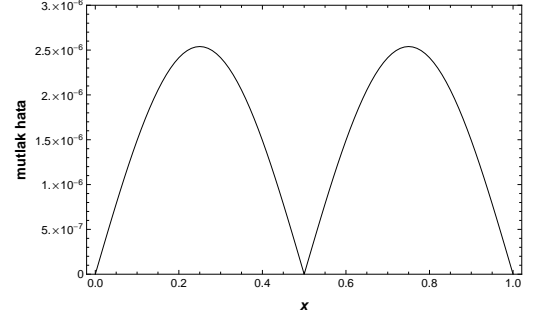
Tablo 5.10 Problem 2’ nin $\gamma = 1.50$, $N = 80$, $t = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

x	$\Delta t = 0.0025$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	$\Delta t = 0.0004$	$\Delta t = 0.00025$	Tam Çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.954086	0.952017	0.951328	0.951190	0.950984	0.951057
0.4	0.589657	0.588379	0.587953	0.587868	0.587740	0.587785
0.6	-0.589657	-0.588379	-0.587953	-0.587868	-0.587740	-0.587785
0.8	-0.954086	-0.952017	-0.951328	-0.951190	-0.950984	-0.951057
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	2.252061	0.714013	0.201818	0.099421	0.054139	
$L_\infty \times 10^3$	3.184895	1.009767	0.285414	0.140602	0.076565	

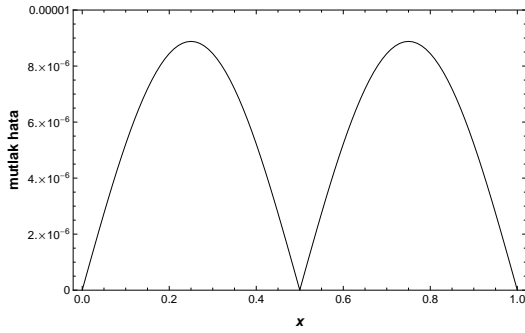
Kübik B-spline kollokasyon yöntemi ile nümerik çözümleri için hesaplanan mutlak hataları Şekil 5.8’ de grafiksel olarak sunuldu. En büyük hata dağılımları $x = 0.25$ ve $x = 0.75$ noktaları civarında meydana gelirken, en düşük hatalar ise sınırlar ve orta nokta civarında meydana geldiği grafiklerden görülmektedir.



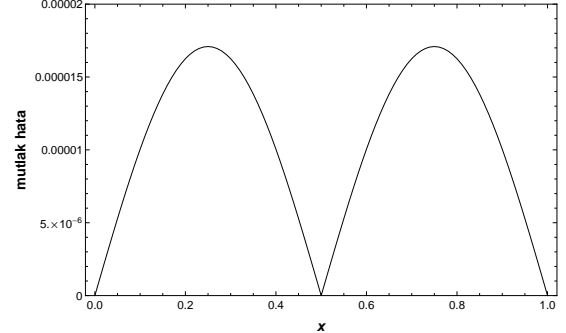
(a) $\gamma = 1.10$



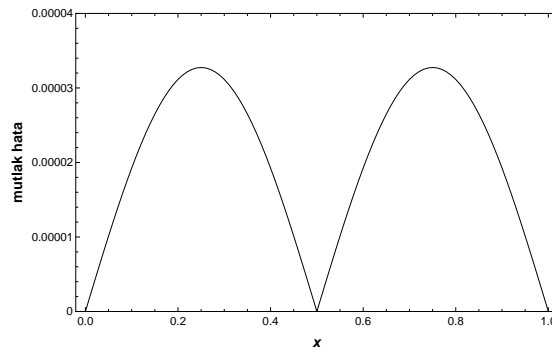
(b) $\gamma = 1.30$



(c) $\gamma = 1.50$



(d) $\gamma = 1.70$



(e) $\gamma = 1.90$

Şekil 5.8 Problem 2’ nin $\Delta t = 0.0002$, $N = 100$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.

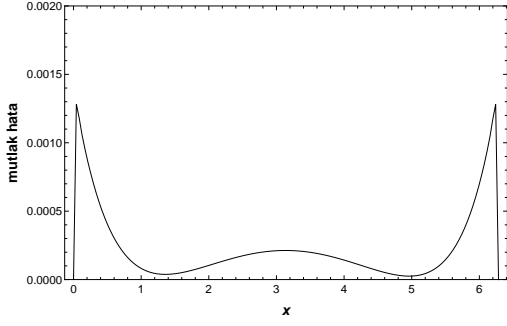
Tablo 5.11 ve Tablo 5.12’ de Problem 3’ ün kübik B-spline kollokasyon yöntemi ile hesaplanan sonuçları ve L_2 , L_∞ hata normları sunuldu. $\Delta t = 0.0005$, $t = 1$, $\gamma = 1.50$ değerlerinde N bölüntü sayısı arttıkça L_2 ve L_∞ hata normlarında azaldığı Tablo 5.11’ den görülmektedir. $N = 150$, $t = 1$, $\gamma = 1.50$ ve farklı Δt zaman adımları için elde edilen hata normları incelendiğinde Δt zaman adımı azaldıkça hata normlarının da azaldığı Tablo 5.12’ den açıkça görülmektedir. Bu problem için de gözönüne alınan yöntem ile hesaplanan nümerik çözümlerinin mutlak hataları grafiksel olarak Şekil 5.9’ da verildi. En büyük hata dağılımları sol ve sağ sınırları civarında olduğu grafiklerden görülmektedir.

Tablo 5.11 Problem 3’ ün $\gamma = 1.50$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 1$ ve farklı N değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

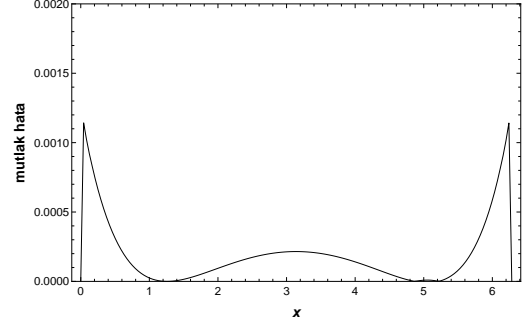
N	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
50	5.699266	7.724568
80	2.290747	3.281995
100	1.522934	2.154594
120	1.147764	1.519031
150	0.906620	0.984022
160	0.868792	0.866786

Tablo 5.12 Problem 3’ ün $\gamma = 1.50$, $N = 150$, $t = 1$ ve farklı Δt zaman adımları için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

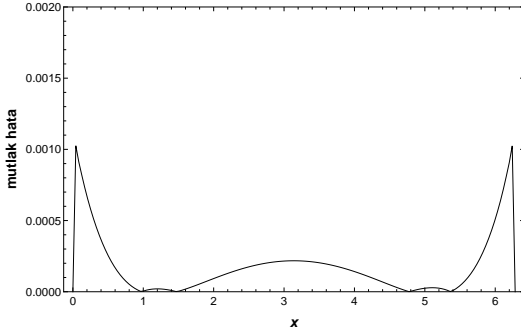
x	$\Delta t = 0.005$	$\Delta t = 0.002$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	Tam Çözüm
0.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1.005310	0.538443	0.536795	0.536257	0.535990	0.535827
2.010619	-0.428349	-0.426787	-0.426276	-0.426024	-0.425779
3.015929	-0.998063	-0.994444	-0.993262	-0.992678	-0.992115
4.021239	-0.641236	-0.638916	-0.638159	-0.637785	-0.637424
5.026548	0.310666	0.309642	0.309307	0.309142	0.309017
6.283185	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
$L_2 \times 10^3$	8.491451	3.250779	1.603498	0.906620	
$L_\infty \times 10^3$	5.993929	2.347207	1.155916	0.984022	



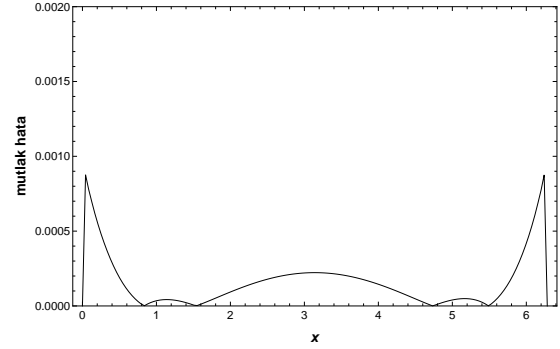
(a) $\gamma = 1.20$



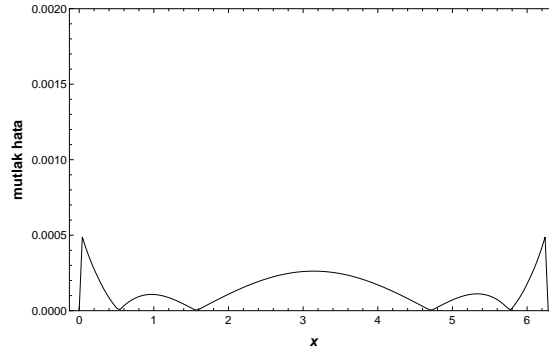
(b) $\gamma = 1.40$



(c) $\gamma = 1.50$



(d) $\gamma = 1.60$



(e) $\gamma = 1.80$

Şekil 5.9 Problem 3' ün $\Delta t = 0.0002$, $N = 150$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.

Problem 1' in $\Delta t = 0.001$, $N = 30$, farklı γ değerleri ve artan t zamanları için gözönüne alınan yöntemler ile elde edilen nümerik çözümleri için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 5.13' de verildi. Seçilen değerler için hesaplanan nümerik çözümler için genel olarak kuadratik B-spline Galerkin yöntemiyle elde edilen sonuçların kübik B-spline kollokasyonla elde edilen sonuçlara göre daha iyi olduğu tablolardan görülmektedir.

Tablo 5.13 Problem 1' in $\Delta t = 0.001$, $N = 30$, farklı γ değerleri ve artan t zamanları için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

γ	t	Galerkin		Kollokasyon	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
1.10	0.2	0.002726	0.004627	0.005393	0.008966
	0.4	0.005124	0.007240	0.015897	0.029011
	0.6	0.010180	0.015995	0.034766	0.067107
	0.8	0.015001	0.022935	0.063585	0.119948
	1.0	0.018487	0.026904	0.104122	0.199510
1.30	0.2	0.005150	0.008011	0.008145	0.012741
	0.4	0.006806	0.011728	0.019730	0.034415
	0.6	0.009440	0.014600	0.036993	0.069318
	0.8	0.013768	0.020241	0.063241	0.119794
	1.0	0.018555	0.030357	0.100311	0.186480
1.50	0.2	0.008370	0.012504	0.010835	0.016573
	0.4	0.012226	0.019189	0.024315	0.039799
	0.6	0.011809	0.020221	0.037913	0.068024
	0.8	0.014553	0.024510	0.059503	0.107258
	1.0	0.020029	0.033970	0.092419	0.159680
1.70	0.2	0.012571	0.019014	0.011859	0.018601
	0.4	0.023153	0.033320	0.027691	0.043015
	0.6	0.020455	0.031922	0.035919	0.061551
	0.8	0.018021	0.030397	0.051071	0.082833
	1.0	0.023193	0.038674	0.083002	0.117892
1.90	0.2	0.020575	0.033000	0.007638	0.012798
	0.4	0.047111	0.065949	0.019750	0.031556
	0.6	0.050993	0.071965	0.023275	0.038919
	0.8	0.036689	0.056599	0.042641	0.067573
	1.0	0.030144	0.048409	0.089850	0.144062

Tablo 5.14- Tablo 5.16’ da sırasıyla $\gamma = 1.10, 1.50, 1.90$ değerlerinde Problem 2’ nin $t = 1$ zamanı için her iki yöntemle elde edilen hata normları ile Ref.[54]’ de lokal süreksiz Galerkin yöntemi ile elde edilen hata normlarının karşılaştırılması verildi. Kuadratik B-spline Galerkin ve kübik B-spline kollokasyon yöntemlerinin herikisi de N bölüntü sayısının artmasıyla sonuçların düzeldiği gözönünde tutularak Ref. [54]’ de lokal süreksiz Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçlar ile karşılaştırıldı. Seçilen değerler için sunulan yöntemler ile elde edilen sonuçların daha iyi olduğu görüldü. Tablo 5.17’ de Problem 2’ nin $\Delta t = 0.0005, N = 100$ ve artan t zamanları için her iki yöntem ile elde edilen nümerik çözümleri ile birlikte L_2 ve L_∞ hata normları $\gamma = 1.30, 1.70$ değerlerinde sunuldu. Seçilen değerler için kuadratik B-spline Galerkin yöntemiyle elde edilen sonuçların kübik B-spline kollokasyonla elde edilen sonuçlara göre daha iyi olduğu tablolardan görülmektedir.

Tablo 5.14 Problem 2’ nin $\gamma = 1.10, t = 1$ için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ve Ref. [54] ile karşılaştırılması.

		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
Δt	N	Galerkin	
0.0005	40	2.521600	3.519602
	60	0.815189	1.139078
	80	0.227318	0.315484
	100	0.043470	0.063614
Δt	N	Kollokasyon	
0.0002	40	1.096714	1.550988
	60	0.372934	0.527408
	80	0.119416	0.168880
	100	0.002040	0.002885
Δt	N	Lokal süreksiz Galerkin[54]	
0.0001	5	6.673112	28.898901
	10	0.850425	3.619321
	15	0.252957	1.113519
	20	0.107022	0.466429

Tablo 5.15 Problem 2' nin $\gamma = 1.50$, $t = 1$ için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ve Ref. [54] ile karşılaştırılması.

		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
Δt	N	Galerkin	
0.0005	40	2.525247	3.523310
	60	0.819583	1.144868
	80	0.231901	0.321781
	100	0.038947	0.057156
Δt	N	Kollokasyon	
0.0002	40	1.034566	1.463097
	60	0.346355	0.489819
	80	0.105316	0.148939
	100	0.006280	0.008881
Δt	N	Lokal süreksiz Galerkin[54]	
0.0001	5	6.664801	28.859369
	10	0.850155	3.617969
	15	0.252878	1.112768
	20	0.106908	0.466393

Tablo 5.16 Problem 2' nin $\gamma = 1.90$, $t = 1$ için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ve Ref. [54] ile karşılaştırılması.

		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
Δt	N	Galerkin	
0.0005	40	2.512071	3.502994
	60	0.807289	1.126972
	80	0.219846	0.304544
	100	0.050839	0.074229
Δt	N	Kollokasyon	
0.0002	40	0.951505	1.345631
	60	0.307015	0.434185
	80	0.081327	0.434185
	100	0.023155	0.032746
Δt	N	Lokal süreksiz Galerkin[54]	
0.0001	5	6.655422	28.818707
	10	0.849887	3.616425
	15	0.252905	1.113337
	20	0.107050	0.466334

Tablo 5.17 Problem 2' nin $\Delta t = 0.0005$, $N = 100$, farklı γ değerleri ve artan t zamanları için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

γ	t	Galerkin		Kollokasyon	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
1.30	0.2	0.016756	0.023727	0.019677	0.027828
	0.4	0.051551	0.073104	0.071468	0.101070
	0.6	0.082180	0.116837	0.144446	0.204278
	0.8	0.086102	0.123110	0.227702	0.322019
	1.0	0.041127	0.060271	0.310282	0.438805
1.70	0.2	0.018367	0.026023	0.021806	0.030838
	0.4	0.052087	0.073898	0.075658	0.106996
	0.6	0.080411	0.114386	0.149920	0.212019
	0.8	0.083776	0.119878	0.234943	0.332259
	1.0	0.039161	0.057480	0.319619	0.452010

Problem 3' ün kuadratik B-spline Galerkin ve kübik B-spline kollokasyon yöntemleri ile $\gamma = 1.20, 1.40, 1.50, 1.60, 1.80$ değerlerinde $\Delta t = 0.0005$, $N = 150$ ve artan t zamanları için elde edilen nümerik çözümler için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 5.18' de verildi. Alınan değerlerde hesaplanan nümerik çözümler için kuadratik B-spline Galerkin yöntemiyle elde edilen sonuçların kübik B-spline kollokasyonla elde edilen sonuçlara göre daha iyi olduğu tablolardan görülmektedir.

Tablo 5.18 Problem 3' ün $\Delta t = 0.0005$, $N = 150$, farklı γ değerleri ve artan t zamanları için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

γ	t	Galerkin		Kollokasyon	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
1.20	0.2	0.041495	0.025901	0.044825	0.039037
	0.4	0.133497	0.087758	0.165240	0.168032
	0.6	0.240438	0.164333	0.359473	0.404420
	0.8	0.335955	0.236827	0.639374	0.757060
	1.0	0.398555	0.288291	1.025607	1.252589
1.40	0.2	0.043156	0.026271	0.047409	0.045639
	0.4	0.138303	0.088489	0.171185	0.174295
	0.6	0.246892	0.164841	0.359947	0.388377
	0.8	0.340361	0.236083	0.615109	0.692230
	1.0	0.396508	0.284946	0.946638	1.099388
1.50	0.2	0.044477	0.026798	0.048864	0.046823
	0.4	0.142332	0.089946	0.174201	0.169042
	0.6	0.253471	0.167219	0.360056	0.363594
	0.8	0.348014	0.239072	0.602644	0.632077
	1.0	0.403046	0.288036	0.906620	0.984022
1.60	0.2	0.046647	0.027855	0.050811	0.045427
	0.4	0.149223	0.093220	0.178894	0.155636
	0.6	0.265801	0.173271	0.363968	0.323725
	0.8	0.364920	0.248023	0.597246	0.549337
	1.0	0.422630	0.299679	0.878078	0.838269
1.80	0.2	0.057658	0.033925	0.060518	0.036193
	0.4	0.187825	0.114909	0.212190	0.133427
	0.6	0.342626	0.217998	0.426610	0.280312
	0.8	0.485282	0.321428	0.685300	0.468119
	1.0	0.587497	0.405786	0.976894	0.689826

6. KESİRLİ MERTEBEDEN SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, $0 < \gamma \leq 1$ olmak üzere

$$i \frac{\partial^\gamma U}{\partial t^\gamma} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + |U|^2 U = f(x, t), \quad t \geq 0 \quad (6.1)$$

kesirli mertebeden Schrödinger denklemi

$$U(0, t) = it^2, \quad U(1, t) = it^2, \quad t \geq 0 \quad (6.2)$$

sınır şartları ve

$$U(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (6.3)$$

başlangıç şartı ile birlikte ele alındı [63]. Burada $i = \sqrt{-1}$ ve

$$f(x, t) = -\frac{2t^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} \cos(2\pi x) + (t^6 - 4\pi^2 t^2) \sin(2\pi x) \\ + i \left(\frac{2t^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} \sin(2\pi x) + (t^6 - 4\pi^2 t^2) \cos(2\pi x) \right)$$

dir. Bu problemin tam çözümü

$$U(x, t) = t^2 (\sin(2\pi x) + i \cos(2\pi x))$$

dir [63].

Kesirli mertebeden Schrödinger denkleminin analitik ve nümerik çözümleri üzerine çeşitli çalışmalar bulunmaktadır. Örneğin; Rida vd. [64] Adomian ayrışım yöntemini, Khan vd. [65] ise homotopi analiz yöntemini kullanarak

$$i \frac{\partial^\alpha U}{\partial t^\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + |U|^2 U = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

$$i \frac{\partial^\alpha U}{\partial t^\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - U \cos^2 x - |U|^2 U = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

denklemlerinin analitik ve yaklaşık çözümlerini bulmuşlardır. Wei vd. [66] lokal süreksiz Galerkin yöntemini, Mohebbi [63] ise radyal baz fonksiyonlarını kullanarak (6.1) ile verilen kesirli mertebeden Schrödinger denklemini nümerik olarak çözmüşlerdir. Liu vd. [67] sonlu fark yöntemini

$$i \frac{\partial^\alpha U}{\partial t^\alpha} = -\mu \frac{\partial^\beta U}{\partial |x|^\beta} - \gamma |U|^2 U + f(x, t), \quad 0 < \alpha < 1 < \beta < 2$$

denklemine uygulayıp sayısal çözümler elde etmişlerdir. Hamed vd. [68] ise

$$i \frac{\partial^\alpha U}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial^\beta U}{\partial x^\beta} + 2|U|^2 U = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, 1 < \beta \leq 2$$

tipindeki denkleme homotopi perturbasyon sumudu dönüşüm yöntemini uygulayarak analitik ve yaklaşık çözümler elde etmişlerdir. Hong ve Lu [69] modifiye edilmiş kesirli varyasyonel iterasyon yöntemini kullanarak

$$i \frac{\partial^\alpha U}{\partial t^\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial^{2\beta} U}{\partial x^{2\beta}} + |U|^2 U = 0, \quad 0 < \alpha, \beta \leq 1,$$

$$i \frac{\partial^\alpha U}{\partial t^\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial^{2\beta} U}{\partial x^{2\beta}} - U \cos^2 x - |U|^2 U = 0, \quad 0 < \alpha, \beta \leq 1$$

şeklindeki denklemleri yaklaşık olarak çözmüşlerdir.

(6.1) ile verilen kesirli mertebeden Schrödinger denkleminde, $U(x,t)$ fonksiyonu kompleks değerli bir fonksiyon olduğundan, $U(x,t)$ fonksiyonunun reel kısmı $R(x,t)$ ve sanal kısmı $S(x,t)$ olmak üzere

$$U(x,t) = R(x,t) + iS(x,t) \quad (6.4)$$

olarak yazılabilir. (6.4) ifadesi (6.1)-(6.3) probleminde yerine yazılırsa, problem

$$f_r(x,t) = -\frac{2t^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} \cos(2\pi x) + (t^6 - 4\pi^2 t^2) \sin(2\pi x),$$

$$f_I(x,t) = \frac{2t^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} \sin(2\pi x) + (t^6 - 4\pi^2 t^2) \cos(2\pi x)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\gamma S}{\partial t^\gamma} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - (R^2 + S^2) R &= -f_r(x,t) \\ \frac{\partial^\gamma R}{\partial t^\gamma} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + (R^2 + S^2) S &= f_I(x,t) \end{aligned} \quad (6.5)$$

kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{aligned} R(0,t) = 0, \quad R(1,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ S(0,t) = t^2, \quad S(1,t) = t^2, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

sınır şartları ve

$$R(x,0) = 0, \quad S(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (6.7)$$

başlangıç şartına bağlı olarak elde edilir. Bu sistemin tam çözümleri ise

$$R(x,t) = t^2 \sin(2\pi x), \quad S(x,t) = t^2 \cos(2\pi x) \quad (6.8)$$

şeklindedir.

Bu bölümde (6.5)-(6.7) ile verilen problemin nümerik çözümleri kuadratik B-spline Galerkin ve kübik B-spline kollokasyon yöntemleri yardımıyla elde edildi.

6.1 Kuadratik B-spline Galerkin Çözümleri

Bu kısımda, yöntemin uygulanması için (6.5) ile verilen denklemler ilk olarak W ağırlık fonksiyonu ile çarpılır ve bölge üzerinden integralleri alınırsa sistemin ağırlıklı integral formu

$$\begin{aligned} \int_0^1 W \left[\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - (R^2 + S^2)R \right] dx &= - \int_0^1 W f_r(x,t) dx, \\ \int_0^1 W \left[\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + (R^2 + S^2)S \right] dx &= \int_0^1 W f_l(x,t) dx \end{aligned} \quad (6.9)$$

olarak elde edilir. Kısmi integrasyon uygulanarak tek bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde (6.5) sisteminin zayıf formu

$$\begin{aligned} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \left(W \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial x} - (R^2 + S^2)WR \right) dx &= W \frac{\partial R}{\partial x} \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} - \int_{x_m}^{x_{m+1}} W f_r(x,t) dx, \\ \int_{x_m}^{x_{m+1}} \left(W \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + (R^2 + S^2)WS \right) dx &= - W \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} + \int_{x_m}^{x_{m+1}} W f_l(x,t) dx \end{aligned} \quad (6.10)$$

şeklinde bulunur. Bölüm 3' de (3.7) ile verilen Q_m kuadratik B-spline fonksiyonları kullanılırsa problemin $R(x,t)$ tam çözümüne bir $R_N(x,t)$ ve $S(x,t)$ tam çözümüne bir $S_N(x,t)$ yaklaşımı (3.7) kuadratik B-spline fonksiyonlar cinsinden

$$R_N(\xi, t) = \sum_{j=m-1}^{m+1} \delta_j(t) Q_j(\xi), \quad S_N(\xi, t) = \sum_{j=m-1}^{m+1} \sigma_j(t) Q_j(\xi) \quad (6.11)$$

olarak yazılabilir. R_N ve S_N ' nin x_m noktalarındaki kendilerinin ve x' e göre birinci türevlerinin noktasal değerleri, $m = 0(1)N$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} R_N(x_m) &= R_m = \delta_{m-1} + \delta_m, \\ S_N(x_m) &= S_m = \sigma_{m-1} + \sigma_m, \\ R'_N(x_m) &= R'_m = 2(-\delta_{m-1} + \delta_m)/h, \\ S'_N(x_m) &= S'_m = 2(-\sigma_{m-1} + \sigma_m)/h \end{aligned} \quad (6.12)$$

şeklindedir. Burada üst indis x' e göre türevi göstermektedir. Ağırlık fonksiyonları yerine (3.7) ile verilen kuadratik B-spline fonksiyonlar alındıktan sonra (6.10) sisteminde (6.11) yaklaşımları yerlerine yazılırsa, $Z_m = R^2 + S^2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h Q_i Q_j d\xi \right) \dot{\sigma}_j^e + \sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h Q'_i Q'_j d\xi \right) \delta_j^e - Z_m \sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h Q_i Q_j d\xi \right) \delta_j^e \\ & - \sum_{j=m-1}^{m+1} (Q_i Q'_j) \Big|_0^h \delta_j^e = - \int_0^h Q_i \tilde{f}_r(\xi, t) d\xi, \quad i = m-1, m, m+1 \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h Q_i Q_j d\xi \right) \dot{\delta}_j^e - \sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h Q'_i Q'_j d\xi \right) \sigma_j^e + Z_m \sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h Q_i Q_j d\xi \right) \sigma_j^e \\ & + \sum_{j=m-1}^{m+1} (Q_i Q'_j) \Big|_0^h \sigma_j^e = \int_0^h Q_i \tilde{f}_I(\xi, t) d\xi, \quad i = m-1, m, m+1 \end{aligned} \quad (6.14)$$

bulunur. Burada $\dot{\delta}$ ve $\dot{\sigma}$ ifadelerindeki üst indis t' ye göre γ mertebeden kesirli türevi göstermektedir. (6.13)- (6.14) sisteminde

$$A_{ij}^e = \int_0^h Q_i Q_j d\xi, \quad B_{ij}^e = \int_0^h Q'_i Q'_j d\xi, \quad C_{ij}^e = Q_i Q'_j \Big|_0^h,$$

$$D_i^e = - \int_0^h Q_i \tilde{f}_r(\xi, t) d\xi, \quad E_i^e = \int_0^h Q_i \tilde{f}_I(\xi, t) d\xi$$

alınırsa, $\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1})$ ve $\sigma^e = (\sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1})$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A^e \dot{\sigma}^e + B^e \delta^e - Z_m A^e \delta^e - C^e \delta^e &= D^e, \\ A^e \dot{\delta}^e - B^e \dot{\sigma}^e + Z_m A^e \sigma^e + C^e \sigma^e &= E^e \end{aligned} \quad (6.15)$$

matris formunda yazılabilir. Kuadratik B-spline fonksiyonlar kullanılarak yukarıda elde edilen integraller hesaplandığında, $i, j, k = m-1, m, m+1$ için A_{ij}^e, B_{ij}^e ve C_{ij}^e eleman matrisleri

$$A_{ij}^e = \int_0^h Q_i Q_j d\xi = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{bmatrix},$$

$$B_{ij}^e = \int_0^h Q_i' Q_j' d\xi = \frac{2}{3h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C_{ij}^e = Q_i Q_j' \Big|_0^h = \frac{2}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Ayrıca D_i^e ve E_i^e eleman matrisleri

$$D_i^e = - \int_0^h Q_i \tilde{f}_r(\xi, t) d\xi = \begin{bmatrix} - \int_0^h Q_{m-1} \tilde{f}_r(\xi, t) d\xi \\ - \int_0^h Q_m \tilde{f}_r(\xi, t) d\xi \\ - \int_0^h Q_{m+1} \tilde{f}_r(\xi, t) d\xi \end{bmatrix},$$

$$E_i^e = \int_0^h Q_i \tilde{f}_I(\xi, t) d\xi = \begin{bmatrix} \int_0^h Q_{m-1} \tilde{f}_I(\xi, t) d\xi \\ \int_0^h Q_m \tilde{f}_I(\xi, t) d\xi \\ \int_0^h Q_{m+1} \tilde{f}_I(\xi, t) d\xi \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. $Z_m = R_N^2 + S_N^2$ eşitliğinden

$$Z_m = (\delta_{m-1} + \delta_m)^2 + (\sigma_{m-1} + \sigma_m)^2$$

noktasal değerleri (6.15) ile verilen eleman denklemlerinde yerlerine yazılırsa, $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N-1}, \delta_N)$ ve $\sigma = (\sigma_{-1}, \sigma_0, \dots, \sigma_{N-1}, \sigma_N)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A\delta + B\sigma - A(Z_m)\delta - C\sigma &= D, \\ A\dot{\delta} - B\dot{\sigma} + A(Z_m)\sigma + C\sigma &= E \end{aligned} \quad (6.16)$$

sistemi bulunur. A , B , C ve $A(Z_m)$ matrislerinin genelleştirilmiş satırları $m = 1(1)N - 2$ için

$$Z_{m1} = (\delta_{m-2} + \delta_{m-1})^2 + (\sigma_{m-2} + \sigma_{m-1})^2,$$

$$Z_{m2} = (\delta_{m-1} + \delta_m)^2 + (\sigma_{m-1} + \sigma_m)^2,$$

$$Z_{m3} = (\delta_m + \delta_{m+1})^2 + (\sigma_m + \sigma_{m+1})^2$$

olmak üzere

$$A : \frac{h}{30}(1, 26, 66, 26, 1), \quad B : \frac{2}{3h}(-1, -2, 6, -2, -1), \quad C : (0, 0, 0, 0, 0),$$

$$A(Z_m) : \frac{h}{30}(Z_{m1}, 13Z_{m1} + 13Z_{m2}, 6Z_{m1} + 54Z_{m2} + 6Z_{m3}, 13Z_{m2} + 13Z_{m3}, Z_{m3})$$

şeklinde yazılabilir. (6.16) sisteminde δ ve σ yerine

$$\delta = \frac{\delta^n + \delta^{n+1}}{2}, \quad \sigma = \frac{\sigma^n + \sigma^{n+1}}{2} \quad (6.17)$$

Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımları, $\dot{\delta}_m$ ve $\dot{\sigma}_m$ yerine de

$$\dot{\delta} = \frac{d^\gamma \delta}{dt^\gamma} = \frac{(\Delta t)^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{1-\gamma} - k^{1-\gamma}] [\delta^{n-k} - \delta^{n-k-1}], \quad (6.18)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{d^\gamma \sigma}{dt^\gamma} = \frac{(\Delta t)^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{1-\gamma} - k^{1-\gamma}] [\sigma^{n-k} - \sigma^{n-k-1}] \quad (6.19)$$

L1 formülleri yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{A}{(\Delta t)^\gamma \Gamma(2-\gamma)} \sigma^{n+1} + \frac{1}{2} [B - A(Z_m) - C] \delta^{n+1} &= \frac{A}{(\Delta t)^\gamma \Gamma(2-\gamma)} \sigma^n - \frac{1}{2} [B - A(Z_m) - C] \delta^n \\ &- \frac{A}{(\Delta t)^\gamma \Gamma(2-\gamma)} \sum_{k=1}^n [(k+1)^{1-\gamma} - k^{1-\gamma}] [\sigma^{n-k} - \sigma^{n-k-1}] + D, \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{(\Delta t)^\gamma \Gamma(2-\gamma)} \delta^{n+1} - \frac{1}{2} [B - A(Z_m) - C] \sigma^{n+1} &= \frac{A}{(\Delta t)^\gamma \Gamma(2-\gamma)} \delta^n + \frac{1}{2} [B - A(Z_m) - C] \sigma^n \\ &- \frac{A}{(\Delta t)^\gamma \Gamma(2-\gamma)} \sum_{k=1}^n [(k+1)^{1-\gamma} - k^{1-\gamma}] [\delta^{n-k} - \delta^{n-k-1}] + E \end{aligned} \quad (6.21)$$

biçiminde $(2N+4) \times (2N+4)$ tipinde cebirsel denklem sistemi elde edilir. Problem ile verilen sınır şartları yardımıyla δ_{-1} , δ_N , σ_{-1} ve σ_N parametreleri sistemden yok edilirse $(2N \times 2N)$ -boyutlu karesel cebirsel sistemi bulunur.

İterasyona başlanabilmesi için δ^0 ve σ^0 başlangıç parametrelerinin bilinmesi gerekmektedir. δ^0 ve σ^0 başlangıç parametreleri Bölüm 3' de kuadratik B-spline Galerkin yönteminde olduğu gibi hesaplandıktan sonra (6.20)-(6.21) sisteminde kullanılarak istenilen t zamanına kadar iterasyon yardımıyla elde edilen δ ve σ parametreleri bulunur. Sırasıyla R_N ve S_N yaklaşımında bu değerler yerine yazılarak istenilen zamandaki nümerik çözümler elde edilir.

Sonuçların iyileştirilmesinde (6.20)-(6.21) sistemindeki lineer olmayan terimlere, her bir zaman adımında, R_N ve S_N yaklaşık çözümlerini iyileştirmek için

$$\delta_m^* = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n), \quad \sigma_m^* = \sigma_m^n + \frac{1}{2}(\sigma_m^{n+1} - \sigma_m^n)$$

şeklinde tanımlanan iterasyon formülleri bir kaç kez uygulandı.

Nümerik Çözümler

Bu kısımda, ele alınan problem Galerkin sonlu eleman yöntemi kullanılarak nümerik olarak çözüldü. $\Delta t = 0.005$, $\gamma = 0.50$, $t = 1$ ve farklı N değerleri için reel ve sanal kısımların nümerik çözümleri ile birlikte hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları sırasıyla Tablo 6.1 ve Tablo 6.2' de verildi. Her iki tablodan, Galerkin yöntemi ile bulunan çözümlerde N bölüntü sayısının arttırılmasıyla elde edilen hata normlarında düşüş görülmektedir. Tablo 6.3 ve Tablo 6.4' de ise problemin $\gamma = 0.50$, $N = 40$, $t = 1$ ve farklı Δt değerleri için sırasıyla reel ve sanal kısımlarının sayısal çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablolardan Δt zaman adımının azalan değerlerinde hata normlarında azaldığı görülmektedir. Şekil 6.1 ve Şekil 6.2' de ise problemin sırasıyla reel ve sanal kısımları için farklı γ değerlerinde seçilen parametrelerde hesaplanan sonuçların mutlak hataları grafiksel olarak sunuldu. Reel kısım için seçilen $\gamma = 0.10$ ve $\gamma = 0.30$ değerlerinde $x = 0.35$ noktası civarında, $\gamma = 0.50$ değerinde sol sınır civarında, $\gamma = 0.70$ ve $\gamma = 0.90$ değerlerinde ise $x = 0.70$ noktası civarında hata dağılımlarının büyük olduğu görülmektedir. Sanal kısım için ise seçilen γ değerlerinde $x = 0.50$ noktası civarında hata dağılımlarının büyük olduğu grafiklerden görülmektedir.

Tablo 6.1 Problemin reel kısmının $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.005$, $t = 1$ ve farklı N değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

x	$N = 25$	$N = 30$	$N = 35$	$N = 40$	Tam Çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.942844	0.947022	0.949524	0.951150	0.951057
0.4	0.581600	0.584759	0.586665	0.587916	0.587785
0.6	-0.585850	-0.586937	-0.587577	-0.587970	-0.587785
0.8	-0.945695	-0.948541	-0.950228	-0.951298	-0.951057
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	5.338936	2.598532	0.966275	0.170855	
$L_\infty \times 10^3$	9.117853	4.239642	1.331924	0.562147	

Tablo 6.2 Problemin sanal kısmının $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.005$, $t = 1$ ve farklı N değerleri için

Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

x	$N = 25$	$N = 30$	$N = 35$	$N = 40$	Tam Çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.2	0.314710	0.311708	0.309935	0.308792	0.309017
0.4	-0.795690	-0.802782	-0.807021	-0.809772	-0.809017
0.6	-0.795791	-0.802899	-0.807144	-0.809898	-0.809017
0.8	0.314552	0.311525	0.309739	0.308586	0.309017
1.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
$L_2 \times 10^3$	8.643806	4.248708	1.583606	0.311933	
$L_\infty \times 10^3$	14.545977	6.790519	2.133489	0.911772	

Tablo 6.3 Problemin reel kısmının $\gamma = 0.50$, $N = 40$, $t = 1$ ve farklı Δt değerleri için Galerkin

yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

x	$\Delta t = 0.0125$	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.008$	$\Delta t = 0.005$	Tam Çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.959018	0.956395	0.954297	0.951150	0.951057
0.4	0.594085	0.592028	0.590383	0.587916	0.587785
0.6	-0.590194	-0.589454	-0.588861	-0.587970	-0.587785
0.8	-0.956777	-0.954952	-0.953491	-0.951298	-0.951057
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	5.305685	3.575290	2.191628	0.170855	
$L_\infty \times 10^3$	10.472901	7.168726	4.524940	0.562147	

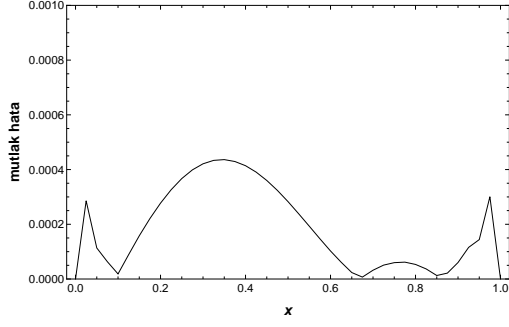
Tablo 6.4 Problemin sanal kısmının $\gamma = 0.50$, $N = 40$, $t = 1$ ve farklı Δt değerleri için Galerkin

yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

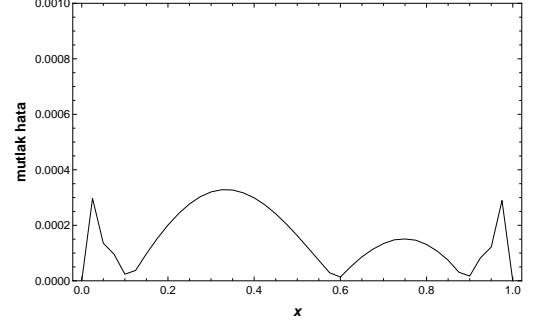
x	$\Delta t = 0.0125$	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.008$	$\Delta t = 0.005$	Tam Çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.2	0.303001	0.304932	0.306476	0.308792	0.309017
0.4	-0.824177	-0.819376	-0.815534	-0.809772	-0.809017
0.6	-0.824501	-0.819635	-0.815741	-0.809898	-0.809017
0.8	0.302458	0.304500	0.306134	0.308586	0.309017
1.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
$L_2 \times 10^3$	8.706987	5.860150	3.582478	0.311933	
$L_\infty \times 10^3$	16.864538	11.544108	7.286787	0.911772	

Şekil 6.3' de problemin reel ve sanal kısımlarının Galerkin yöntemi ile $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.005$, $N = 40$ ve farklı t zamanları için hesaplanan nümerik çözümleri ve tam çözümleri grafiksel olarak gösterildi. Yöntem ile elde edilen nümerik çözümlerin

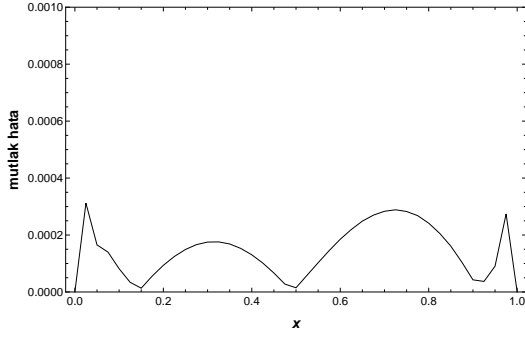
tablolarında olduğu gibi grafiksel olarak da tam çözümlerle uyum içerisinde olduğu şekilden görülmektedir.



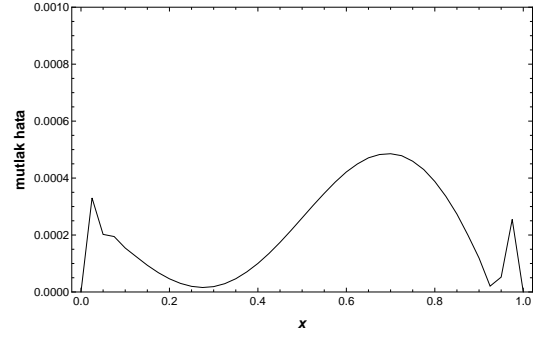
(a) $\gamma = 0.10$



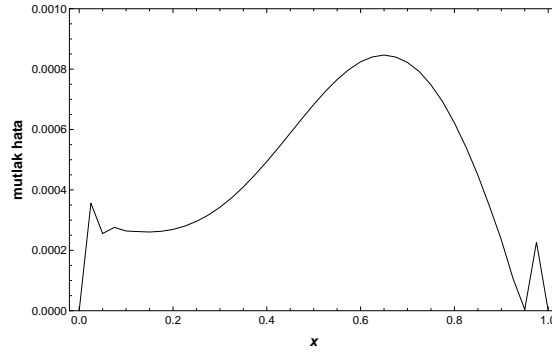
(b) $\gamma = 0.30$



(c) $\gamma = 0.50$

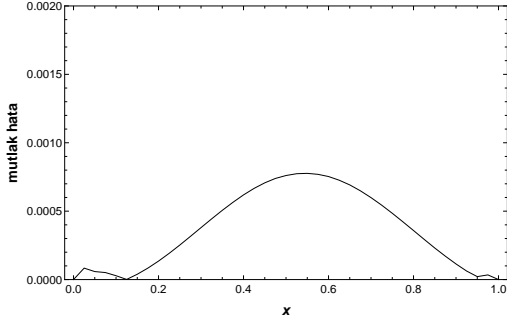


(d) $\gamma = 0.70$

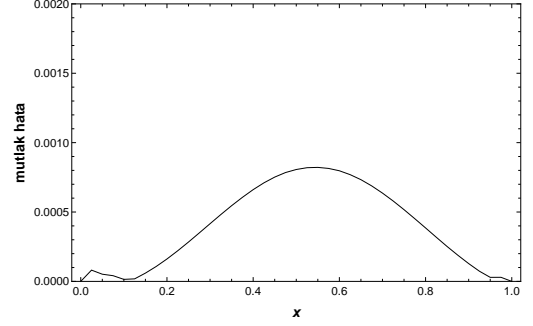


(e) $\gamma = 0.90$

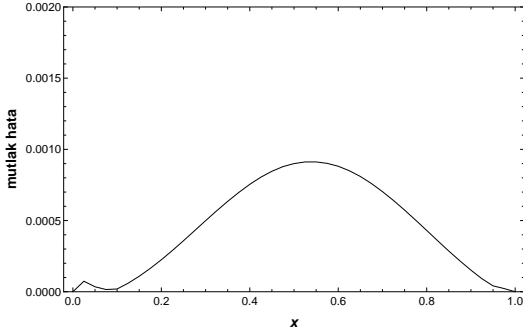
Şekil 6.1 Problemin reel kısmının $\Delta t = 0.005$, $N = 40$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.



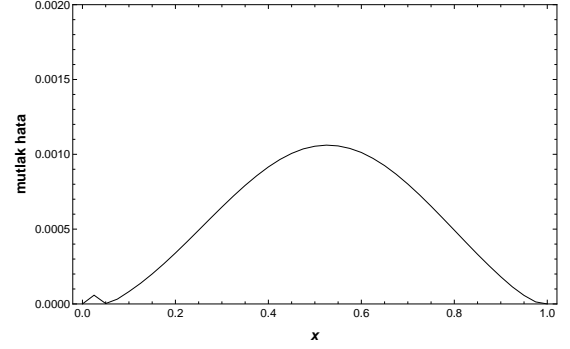
(a) $\gamma = 0.10$



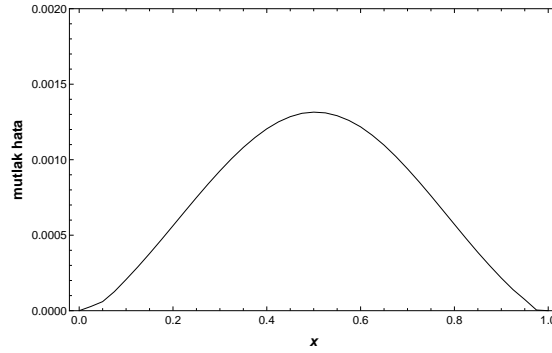
(b) $\gamma = 0.30$



(c) $\gamma = 0.50$

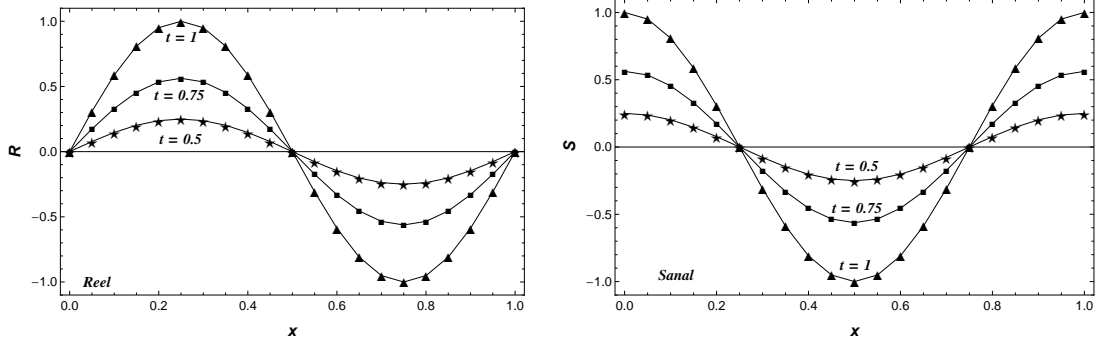


(d) $\gamma = 0.70$



(e) $\gamma = 0.90$

Şekil 6.2 Problemin sanal kısmının $\Delta t = 0.005$, $N = 40$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.



Şekil 6.3 Problemin reel ve sanal kısımlarının $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.005$, $N = 40$ ve artan t zamanları için Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

6.2 Kübik B-spline Kollokasyon Çözümleri

Bu kısımda, (6.5)-(6.7) ile verilen probleme kübik B-spline kollokasyon yöntemi uygulandı. Burada $R(x,t)$ tam çözümüne bir $R_N(x,t)$ yaklaşımı ve $S(x,t)$ tam çözümüne bir $S_N(x,t)$ yaklaşımı (3.18) kübik B-spline fonksiyonlar cinsinden δ_j ve σ_j zamana bağlı parametreler olmak üzere $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerinde $R_N(x,t)$ ve $S_N(x,t)$ yaklaşık çözümleri

$$R_N(\xi, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j(t) \phi_j(\xi), \quad S_N(\xi, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \sigma_j(t) \phi_j(\xi) \quad (6.22)$$

olarak yazılabilir. (3.18) B-spline değerleri (6.22) yaklaşımlarında yerlerine yazılırsa x_m noktasında R_N ve S_N ifadelerinin kendilerinin ve x' e göre birinci ve ikinci mertebeden türevleri δ_m ve σ_m parametrelerine göre noktasal değerleri, $m = 0(1)N$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} R_m &= R_N(x_m, t) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\ S_m &= S_N(x_m, t) = \sigma_{m-1} + 4\sigma_m + \sigma_{m+1}, \\ R'_m &= R'_N(x_m, t) = \frac{3}{h}(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}), \\ S'_m &= S'_N(x_m, t) = \frac{3}{h}(-\sigma_{m-1} + \sigma_{m+1}), \\ R''_m &= R''_N(x_m, t) = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}), \\ S''_m &= S''_N(x_m, t) = \frac{6}{h^2}(\sigma_{m-1} - 2\sigma_m + \sigma_{m+1}) \end{aligned} \quad (6.23)$$

olarak bulunur. Yukarıdaki ifadelerdeki üst indis x' e göre türevi göstermektedir. (6.23) yaklaşımları (6.5) sisteminde yerlerine yazılırsa, $Z_m = R^2 + S^2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{m-1} + 4\dot{\sigma}_m + \dot{\sigma}_{m+1} - \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) - Z_m(\delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}) &= -\tilde{f}_r(\xi, t) \\ \dot{\delta}_{m-1} + 4\dot{\delta}_m + \dot{\delta}_{m+1} + \frac{6}{h^2}(\sigma_{m-1} - 2\sigma_m + \sigma_{m+1}) + Z_m(\sigma_{m-1} + 4\sigma_m + \sigma_{m+1}) &= \tilde{f}_l(\xi, t)\end{aligned}\quad (6.24)$$

elde edilir. (6.24) sisteminde δ ve σ yerine (6.17) ile verilen Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımları, $\dot{\delta}_m$ ve $\dot{\sigma}_m$ yerine sırasıyla (6.18) ve (6.19) $L1$ formülleri yazılırsa sistemlerin genelleştirilmiş satırları

$$Z_m = (\delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1})^2 + (\sigma_{m-1} + 4\sigma_m + \sigma_{m+1})^2$$

ve

$$\alpha = \frac{(\Delta t)^\gamma \Gamma(2 - \gamma)}{2h^2}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\sigma_{m-1}^{n+1} + 4\sigma_m^{n+1} + \sigma_{m+1}^{n+1} + (-6\alpha - Z_m h^2 \alpha) \delta_{m-1}^{n+1} + (12\alpha - 4Z_m h^2 \alpha) \delta_m^{n+1} + (-6\alpha - Z_m h^2 \alpha) \delta_{m+1}^{n+1} \\ = \sigma_{m-1}^n + 4\sigma_m^n + \sigma_{m+1}^n + (6\alpha + Z_m h^2 \alpha) \delta_{m-1}^n + (-12\alpha + 4Z_m h^2 \alpha) \delta_m^n + (6\alpha + Z_m h^2 \alpha) \delta_{m+1}^n \\ - \sum_{k=1}^n b_k^\gamma \left[(\sigma_{m-1}^{n-k+1} - \sigma_{m-1}^{n-k}) + 4(\sigma_m^{n-k+1} - \sigma_m^{n-k}) + (\sigma_{m+1}^{n-k+1} - \sigma_{m+1}^{n-k}) \right] - 2h^2 \alpha \tilde{f}_r(\xi, t_n) \\ \delta_{m-1}^{n+1} + 4\delta_m^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1} + (6\alpha + Z_m h^2 \alpha) \sigma_{m-1}^{n+1} + (-12\alpha + 4Z_m h^2 \alpha) \sigma_m^{n+1} + (6\alpha + Z_m h^2 \alpha) \sigma_{m+1}^{n+1} \\ = \delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n + (-6\alpha - Z_m h^2 \alpha) \sigma_{m-1}^n + (12\alpha - 4Z_m h^2 \alpha) \sigma_m^n + (-6\alpha - Z_m h^2 \alpha) \sigma_{m+1}^n \\ - \sum_{k=1}^n b_k^\gamma \left[(\delta_{m-1}^{n-k+1} - \delta_{m-1}^{n-k}) + 4(\delta_m^{n-k+1} - \delta_m^{n-k}) + (\delta_{m+1}^{n-k+1} - \delta_{m+1}^{n-k}) \right] + 2h^2 \alpha \tilde{f}_l(\xi, t_n)\end{aligned}\quad (6.25)$$

olarak bulunur. $(2N + 6) \times (2N + 2)$ tipinde oluşan bu denklem sisteminde (6.23) ile verilen R_N , S_N , R_N'' ve S_N'' yaklaşımlarının sınırlardaki değerleri kullanılarak δ_{-1} , σ_{-1} , δ_{N+1} ve σ_{N+1} parametreleri sistemden yok edilirse $(2N + 2) \times (2N + 2)$ tipinde cebirsel denklem sistemi elde edilir.

δ^0 ve σ^0 başlangıç parametreleri Bölüm 3' de verilen kübik B-spline kollokasyon yönteminde olduğu gibi hesaplandıktan sonra (6.25) sisteminde kullanılarak istenilen t zamanına kadar iterasyon yardımıyla elde edilen δ ve σ parametreleri bulunur. R_N ve S_N yaklaşımında bu değerler yerine yazılarak istenilen zamandaki nümerik çözümler elde edilir.

Sonuçların iyileştirilmesinde (6.25) sisteminde bulunan lineer olmayan terimlere,

her bir zaman adımında, R_N ve S_N yaklaşık çözümleri iyileştirmek için

$$\delta_m^* = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n), \quad \sigma_m^* = \sigma_m^n + \frac{1}{2}(\sigma_m^{n+1} - \sigma_m^n)$$

şeklinde tanımlanan iterasyon formülleri bir kaç kez uygulandı.

Nümerik Çözümler

Bu kısımda, kübik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi kullanılarak ele alınan problemin nümerik çözümleri elde edildi. Tablo 6.5 ve Tablo 6.6' da $\gamma = 0.50$, $\Delta t = 0.004$, $t = 1$ ve farklı N değerleri için sırasıyla reel ve sanal kısımların nümerik çözümleri ile birlikte hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablolardan, gözönüne alınan yöntem ile hesaplanan çözümlerde N bölüntü sayısının arttırılmasıyla elde edilen hata normlarında azalma görülmektedir. Tablo 6.7 ve Tablo 6.8' de ise problemin $N = 30$, $t = 1$, $\gamma = 0.50$ ve farklı Δt değerleri için sırasıyla reel ve sanal kısımlarının sayısal çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Δt zaman adımının azalan değerlerinde hata normlarında düşüş her iki tablodan görülmektedir. Şekil 6.4 ve Şekil 6.5' de ise problemin sırasıyla reel ve sanal kısımları için farklı γ değerlerinde seçilen parametrelerde hesaplanan sonuçların mutlak hataları grafiksel olarak sunuldu. Reel kısım için seçilen γ değerlerinde $x = 0.25$ noktasında, sanal kısım için ise seçilen γ değerlerinde $x = 0.50$ noktası civarında hata dağılımlarının büyük olduğu grafiklerden görülmektedir.

Tablo 6.5 Problemin reel kısmının $\Delta t = 0.004$, $\gamma = 0.50$, $t = 1$ ve farklı N değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

x	$N = 20$	$N = 25$	$N = 30$	Tam Çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.944669	0.948582	0.950719	0.951057
0.4	0.582181	0.585478	0.587281	0.587785
0.6	-0.587592	-0.588080	-0.588340	-0.587785
0.8	-0.948207	-0.950322	-0.951472	-0.951057
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	4.014765	1.558924	0.418593	
$L_\infty \times 10^3$	6.507160	2.174895	0.196728	

Tablo 6.6 Problemin sanal kısmının $\Delta t = 0.004$, $\gamma = 0.50$, $t = 1$ ve farklı N değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

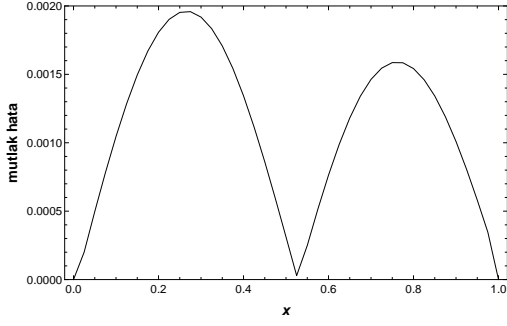
x	$N = 20$	$N = 25$	$N = 30$	Tam Çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.2	0.312605	0.310158	0.308821	0.309017
0.4	-0.799597	-0.805880	-0.809310	-0.809017
0.6	-0.799337	-0.805755	-0.809259	-0.809017
0.8	0.313078	0.310385	0.308914	0.309017
1.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
$L_2 \times 10^3$	6.998381	2.755472	0.558593	
$L_\infty \times 10^3$	10.532891	3.534264	0.294974	

Tablo 6.7 Problemin reel kısmının $N = 30$, $t = 1$, $\gamma = 0.50$ ve farklı Δt değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

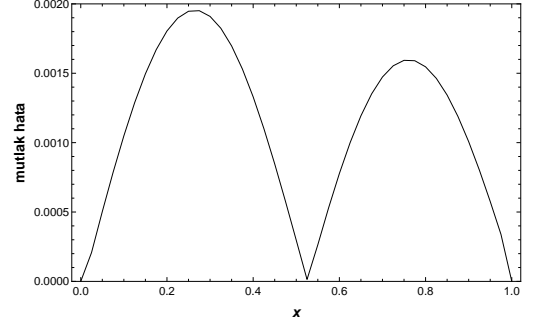
x	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.008$	$\Delta t = 0.005$	Tam Çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.957508	0.955242	0.951848	0.951057
0.4	0.592691	0.590883	0.588180	0.587785
0.6	-0.590045	-0.589481	-0.588627	-0.587785
0.8	-0.955999	-0.954493	-0.952228	-0.951057
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	4.363534	2.890913	0.759184	
$L_\infty \times 10^3$	8.565373	5.770296	1.585488	

Tablo 6.8 Problemin sanal kısmının $N = 30$, $t = 1$, $\gamma = 0.50$ ve farklı Δt değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

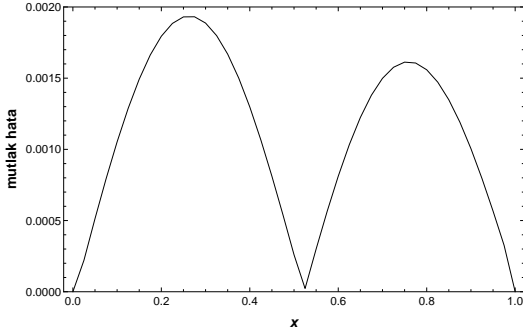
x	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.008$	$\Delta t = 0.005$	Tam Çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.2	0.303949	0.305577	0.308011	0.309017
0.4	-0.821476	-0.817415	-0.811334	-0.809017
0.6	-0.821595	-0.817478	-0.811312	-0.809017
0.8	0.303733	0.305463	0.308052	0.309017
1.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
$L_2 \times 10^3$	6.993066	4.524306	1.237798	
$L_\infty \times 10^3$	13.772004	9.270540	2.529752	



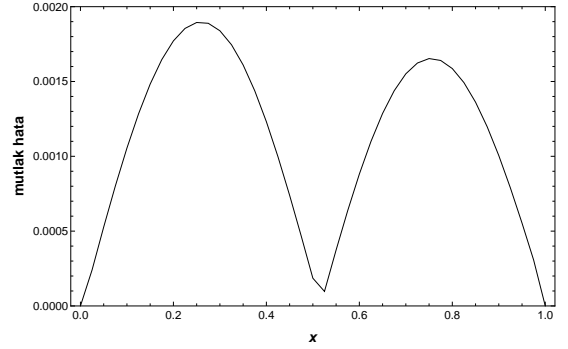
(a) $\gamma = 0.10$



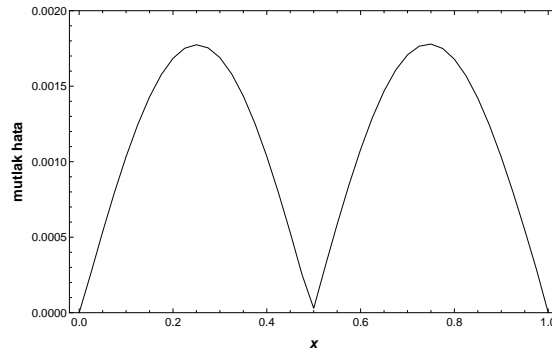
(b) $\gamma = 0.30$



(c) $\gamma = 0.50$

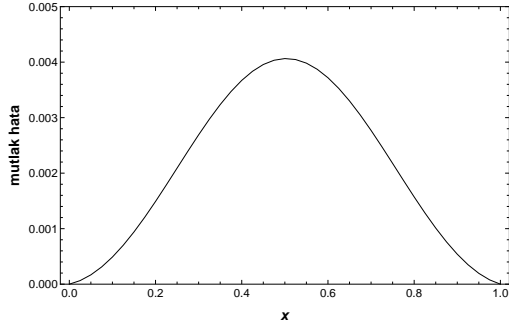


(d) $\gamma = 0.70$

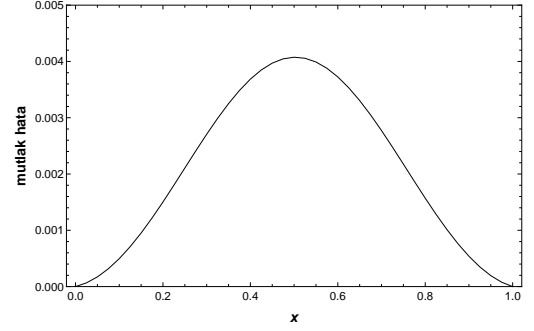


(e) $\gamma = 0.90$

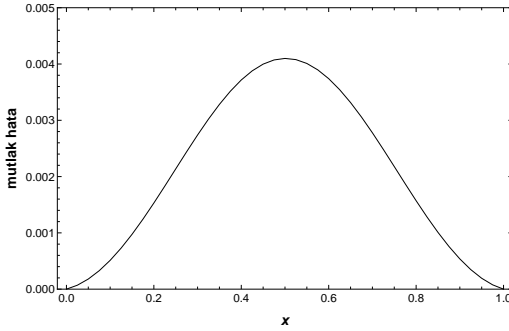
Şekil 6.4 Problemin reel kısmının $\Delta t = 0.004$, $N = 30$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.



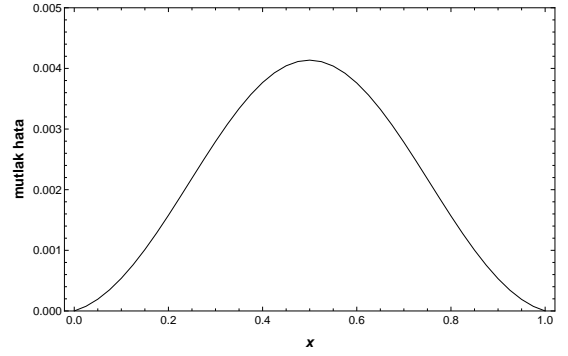
(a) $\gamma = 0.10$



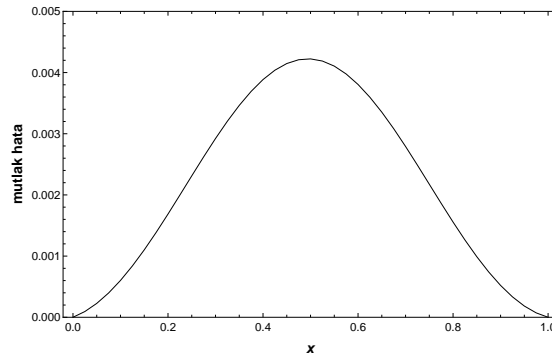
(b) $\gamma = 0.30$



(c) $\gamma = 0.50$



(d) $\gamma = 0.70$



(e) $\gamma = 0.90$

Şekil 6.5 Problemin sanal kısmının $\Delta t = 0.004$, $N = 30$, $t = 1$ ve farklı γ değerleri için kollokasyon yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hata grafikleri.

Gözönüne alınan problemin reel ve sanal kısımlarının $N = 30$ bölüntü sayısı ve $t = 1$ zamanı için kuadratik B-spline Galerkin ve kübik B-spline kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerinin L_2 ve L_∞ hata normları ve radyal baz fonksiyonları yardımı ile Ref. [63]' de verilen L_∞ hata normları $\gamma = 0.10$ ve $\gamma = 0.30$ değerlerinde Tablo 6.9' da verildi. $\Delta t = 0.008$ zaman adımı seçimi ile kuadratik B-spline Galerkin ve $\Delta t = 0.004$ seçimi ile kübik B-spline kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin L_∞ hata normları, [63]' de verilen L_∞ hata normlarından daha düşüktür.

Tablo 6.9 Problemin $N = 30$, $t = 1$ için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ve Ref. [63] ile karşılaştırılması.

	Reel Kısım		Sanal Kısım	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
$\gamma = 0.1$				
$\Delta t = 0.008$ (Galerkin)	0.5442	0.4981	0.8560	0.7526
$\Delta t = 0.004$ (Kollokasyon)	0.2495	0.0919	0.3048	0.1401
[63]	—	2.8536	—	2.1753
	Reel Kısım		Sanal Kısım	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
$\gamma = 0.3$				
$\Delta t = 0.008$ (Galerkin)	0.5254	0.4382	0.8846	0.6685
$\Delta t = 0.004$ (Kollokasyon)	0.3257	0.1321	0.4153	0.1986
[63]	—	2.8610	—	2.1771

Problemin reel ve sanal kısımlarının $\Delta t = 0.005$, $N = 30$ ve farklı t zamanları için kuadratik B-spline Galerkin ve kübik B-spline kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin L_2 ve L_∞ hata normları farklı γ değerlerinde Tablo 6.10 ve Tablo 6.11' de verildi. Seçilen değerler için hesaplanan nümerik çözümler için genel olarak kuadratik B-spline Galerkin yöntemiyle elde edilen sonuçların kübik B-spline kollokasyon yöntemiyle elde edilen sonuçlara göre daha iyi olduğu tablolardan görülmektedir.

Tablo 6.10 Problemin reel kısmının $\Delta t = 0.005$, $N = 30$, farklı γ değerleri ve artan t zamanları için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

γ	t	Galerkin		Kollokasyon	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.50	0.2	0.523902	0.820179	0.641973	1.003052
	0.4	0.552131	0.971584	1.021496	1.711634
	0.6	0.147640	0.369984	1.188215	2.075310
	0.8	0.871154	1.175248	1.116954	2.078105
	1.0	2.598532	4.239642	0.759184	1.585488
0.70	0.2	0.557520	0.844143	0.680105	1.016619
	0.4	0.546918	1.007871	1.026960	1.734634
	0.6	0.150826	0.417696	1.186069	2.104631
	0.8	0.927887	1.093060	1.116919	2.115419
	1.0	2.721373	4.026448	0.792385	1.660798
0.90	0.2	0.703742	0.751264	0.827616	0.893579
	0.4	0.527424	1.268234	1.009645	1.977602
	0.6	0.313918	0.358895	1.178809	2.027875
	0.8	1.009461	0.950085	1.119861	2.189894
	1.0	2.931805	3.710960	0.891969	1.788823

Tablo 6.11 Problemin sanal kısmının $\Delta t = 0.005$, $N = 30$, farklı γ değerleri ve artan t zamanları için Galerkin ve kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması.

γ	t	Galerkin		Kollokasyon	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.50	0.2	0.892729	1.346044	1.079641	1.644361
	0.4	0.921704	1.593113	1.636817	2.796709
	0.6	0.239918	0.619203	1.826387	3.381293
	0.8	1.363993	1.880229	1.618910	3.365843
	1.0	4.248708	6.790519	1.237798	2.529752
0.70	0.2	0.971925	1.379944	1.176801	1.663806
	0.4	0.901103	1.645446	1.660707	2.830335
	0.6	0.264168	0.689477	1.805818	3.423927
	0.8	1.526773	1.760602	1.582132	3.419954
	1.0	4.596114	6.483734	1.344213	2.637841
0.90	0.2	1.239926	1.246504	1.461332	1.486823
	0.4	0.786752	2.022296	1.566896	3.180029
	0.6	0.528067	0.599951	1.660174	3.313448
	0.8	1.697004	1.556575	1.615376	3.526487
	1.0	5.043626	5.043626	1.564205	2.821317

7. SONUÇLAR

Bu çalışmada, Caputo anlamındaki zamana göre kesirli mertebeden gaz, Burgers, telegraf ve Schrödinger denklemlerinin L_1 ve L_2 yaklaşımları yardımıyla kuadratik B-spline Galerkin ve kübik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemleri ile nümerik çözümleri elde edildi. Elde edilen nümerik çözümler ile bu çözümlerin doğruluğunu test etmek için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları tablolar halinde verildi. Ayrıca nümerik ve tam çözümlerin uyumlu olduğu grafikler yardımıyla sunuldu.

Bölüm 3' de zamana göre kesirli mertebeden gaz denklemi uygun başlangıç ve sınır şartları ile birlikte ele alındı. Bu bölümde verilen sonuçlar incelendiğinde, Galerkin yönteminin kollokasyon yöntemine göre daha iyi sonuçlar verdiği görüldü.

Bölüm 4' de zamana göre kesirli mertebeden Burgers denklemi üç farklı model problem ile gözönüne alındı. Kuadratik B-spline Galerkin ve kübik B-spline kollokasyon yöntemlerini karşılaştırmak için her bir model problemin seçilen değerlerde elde edilen nümerik çözümleri ve hesaplanan hata normları farklı γ değerlerinde ve artan t zamanlarında verildi. Problem 1 için küçük t zamanlarında kuadratik B-spline Galerkin yöntemi daha iyi sonuç verirken, artan t zamanları için ise kübik B-spline kollokasyon yönteminin daha iyi sonuçlara ulaştığı görüldü. Problem 2 ve Problem 3 için ise kuadratik B-spline Galerkin yöntemiyle, kübik B-spline kollokasyon yöntemine göre daha iyi sonuçlar elde edildi.

Bölüm 5' de üç farklı model problem ile ele alınan zamana göre kesirli mertebeden telegraf denklemi kuadratik B-spline Galerkin ve kübik B-spline kollokasyon yöntemleri ile nümerik olarak çözüldü. Her bir model problemin seçilen değerlerde, Galerkin ve kollokasyon yöntemleriyle hesaplanan hata normları yardımıyla oluşturulan tablolardan, Galerkin yönteminin kübik B-spline kollokasyon yöntemine göre daha iyi sonuçlar elde edildi. Ayrıca Problem 1 için her iki yöntemle elde edilen sonuçların Ref. [53]'de radyal baz fonksiyonların yardımı ile elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu görüldü. Problem 2 de ise sunulan yöntemler ile edilen sonuçlar Galerkin yöntemi ile Wei[54] tarafından lokal süreksiz Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçlardan iyi olduğu görüldü.

Bölüm 6' da zamana göre kesirli mertebeden Schrödinger denklemi uygun başlangıç ve sınır şartları ile birlikte ele alındı. Zamana göre kesirli mertebeden Schrödinger denklemine, $U(x,t)$ fonksiyonunun reel kısmı $R(x,t)$ ve sanal kısmı $S(x,t)$ olmak üzere

$$U(x,t) = R(x,t) + iS(x,t)$$

şeklinde dönüşüm uygulandıktan sonra denklem kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklem sistemine dönüştürüldü. Ele alınan problemin reel ve sanal kısımlarının yöntemlerle elde edilen nümerik çözümleri ve hata normları ile oluşturulan tablolardan küçük t zamanlarında kuadratik B-spline Galerkin yöntemi daha iyi sonuç verirken artan t zamanları için kübik B-spline kollokasyon yönteminin daha iyi sonuç verdiği görüldü. Ayrıca, her iki yöntem ile elde edilen nümerik çözümlerin L_∞ normları Ref. [63]' de verilen L_∞ hata normlarında daha düşük olduğu ve böylece ele alınan yöntemlerle hesaplanan çözümlerin Ref. [63]' de radyal baz fonksiyonları yardımıyla elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu görüldü.

Sonuç olarak, bu tezde gözönüne alınan Caputo anlamındaki zamana göre kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin kuadratik B-spline Galerkin ve kübik B-spline kollokasyon yöntemleri ile elde edilen nümerik sonuçlarından, her iki yöntemde lineer ve lineer olmayan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerine alternatif yöntemler olarak kullanılabilceği söylenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] K.S. Miller ve B. Ross, *An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, J. Wiley-Sons, Canada, 1993.
- [2] K.B. Oldham ve J. Spainer, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.
- [3] L. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, London, 1999.
- [4] J.A.T. Machado, M.F. Silva, R.S. Barbosa, I.S. Jesus, C.M. Reis, M.G. Marcos ve A.F. Galhano, *Some Applications of Fractional Calculus in Engineering*, **Math. Probl. Eng.**, Volume 2010, Article ID 639801, 34 pages, doi:10.1155/2010/639801.
- [5] N.T. Shawagfeh, *Analytical approximate solutions for nonlinear fractional differential equations*, **Appl. Math. Comput.**, 131 (2002), 517-529.
- [6] S. Momani ve Z. Odibat, *Numerical comparison of methods for solving linear differential equations of fractional order*, **Chaos Soliton. Fract.**, 31 (2007) 1248-1255.
- [7] T. Bakkyaraj ve R. Sahadevan, *An approximate solution to some classes of fractional nonlinear partial differential-difference equation using Adomian decomposition method*, **J. Fract. Calc. Appl.**, 5 (2014) 37-52.
- [8] S. Momani ve Z. Odibat, *Analytical approach to linear fractional partial differential equations arising in fluid mechanics*, **Phys. Lett. A**, 355 (2006) 271-279.
- [9] G.C. Wua ve D. Baleanu, *Variational iteration method for the Burgers flow with fractional derivatives New Lagrange multipliers*, **Appl. Math. Model.**, 37 (2013) 6183-6190.
- [10] G.C. Wua ve D. Baleanu, *Variational iteration method for fractional calculus-a universal approach by Laplace transform*, **Adv. Differ. Equ.-NY**, 18 (2013) 1-9.

- [11] Z. Odibat ve S. Momani, *A generalized differential transform method for linear partial differential equations of fractional order*, **Appl. Math. Lett.**, 21 (2008) 194-199.
- [12] V.S. Ertürk ve S. Momani, *Solving systems of fractional differential equations using differential transform method*, **J. Comput. Appl. Math.**, 215 (2008) 142-151.
- [13] A.K. Alomari, *A new analytic solution for fractional chaotic dynamical systems using the differential transform method*, **Comput. Math. Appl.**, 61 (2011) 2528-2534.
- [14] H. Jafari ve S. Momani, *Solving fractional diffusion and wave equations by modified homotopy perturbation method*, **Phys. Lett. A**, 370 (2007) 388-396.
- [15] Q. Wang, *Homotopy perturbation method for fractional KdV-Burgers equation*, **Chaos Soliton. Fract.**, 35 (2008) 843-850.
- [16] P.K. Gupta ve M. Singh, *Homotopy perturbation method for fractional Fornberg-Whitham equation*, **Comput. Math. Appl.**, 61 (2011) 250-254.
- [17] M. Dehghan, M. Jalil ve S. Abbas, *Solving nonlinear fractional partial differential equations using the homotopy analysis method*, **Numer. Meth. Part. D. E.**, 26 (2010) 448-479.
- [18] A. Esen, N.M. Yagmurlu ve O. Tasbozan, *Approximate Analytical Solution to Time-Fractional Damped Burger and Cahn-Allen Equations*, **Appl. Math. Inf. Sci.**, 7 (2013) 1951-1956.
- [19] M.G. Sakar ve F. Erdoğan, *he homotopy analysis method for solving the time-fractional FornbergWhitham equation and comparison with Adomians decomposition method*, **Appl. Math. Model.**, 37 (2013) 8876-8885.
- [20] S.B. Yuste ve L. Acedo, *An explicit finite difference method and a new von Neumann-type stability analysis for fractional diffusion equations*, **SIAM J. Numer. Anal.**, 42 (2005) 1862-1874.

- [21] S.B. Yuste, *Weighted average finite difference methods for fractional diffusion equations*, **J. Comput. Phys.**, 216 (2006) 264-274.
- [22] J.Q. Murillo ve S.B. Yuste, *An Explicit Difference Method for Solving Fractional Diffusion and Diffusion-Wave Equations in the Caputo Form*, **J. Comput. Nonlinear Dynam.**, 6 (2011) 021014.
- [23] A. Esen, Y. Ucar, N.M. Yagmurlu ve O. Tasbozan, *A Galerkin Finite Element Method to Solve Fractional Diffusion and Fractional Diffusion-Wave Equations*, **Math. Model. Anal.**, 18 (2013) 260-273.
- [24] O. Tasbozan, A. Esen, N.M. Yagmurlu ve Y. Ucar, *A Numerical Solution to Fractional Diffusion Equation for Force-Free Case*, **Abstr. Appl. Anal.**, Volume 2013, Article ID 187383, 6 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2013/187383>.
- [25] B. Jin, R. Lazarov ve Z. Zhou, *Error estimates for a semidiscrete finite element method for fractional order parabolic equations*, **SIAM J. Numer. Anal.**, 51 (2013) 445-466.
- [26] W. Bu, Y. Tang ve J. Yang, *Galerkin finite element method for two-dimensional Riesz space fractional diffusion equations*, **J. Comput. Phys.**, 276 (2014) 26-38.
- [27] A. Altın, *Uygulamalı Matematik*, Gazi Kitabevi, Ankara, 2011.
- [28] D.A. Murio, *Implicit finite difference approximation for time fractional diffusion equations*, **Comput. Math. Appl.**, 56 (2008) 1138-1145.
- [29] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics (Sixth Edition)*, J. Wiley-Sons, New York, 1998.
- [30] W. Cheney ve D. Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing (Sixth Edition)*, Thomson, 2008.
- [31] İ. Dağ, “*Studies of B-spline Finite Elements*”, Ph. D. Thesis, University College of North Wales, Bangor, Gwynedd (UK), 1994.

- [32] P.M. Prenter, *Splines and variational methods*, Wiles, New York, 1975.
- [33] N.M. Yagmurlu, “2-Boyutlu kısmi diferansiyel denklemlerin B-spline sonlu eleman yöntemleri ile nümerik çözümleri ”, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, 2011.
- [34] N. Otteson ve H. Pettorson, *Introduction to The Finite Element Method*, Prentice Hall International (UK) Ltd., 1992.
- [35] D.L. Logan, *A First Course in the Finite Element Method (Fourth Edition)*, Thomson, 2007.
- [36] J.N. Reddy, *An introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press Inc., New York, 2004.
- [37] Y. Ucar, “B-spline sonlu eleman yöntemleri ile coupled diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri”, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, 2011.
- [38] F.L. Stasa, *Applied Finite Element Analysis for Engineers*, CBS College Publishing, New York, 1985.
- [39] S. Das ve R. Kumar, *Approximate analytical solutions of fractional gas dynamic equations*, **Appl. Math. Comput.**, 217 (2011) 9905-9915.
- [40] J. Singh, D. Kumar ve A. Kılıçman, *Homotopy Perturbation Method for Fractional Gas Dynamics Equation Using Sumudu Transform*, **Abstr. Appl. Anal.**, Volume 2013, Article ID 934060, 8 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/934060>.
- [41] M.S. Mohamed, F. Al-Malki ve M. Al-Humyani, *Homotopy Analysis Transform Method for Time-Space Fractional Gas Dynamics Equation*, **Gen. Math. Notes**, 24 (2014) 1-16.
- [42] S. Kumar ve M.M. Rashidi, *New analytical method for gas dynamics equation arising in shock fronts*, **Comput. Phys. Commun.**, 185 (2014) 1947-1954.

- [43] A.S. Abedl-Rady, S.Z. Rida, A.A.M. Arafa ve H.R. Abedl-Rahim, *Variational Iteration Sumudu Transform Method for Solving Fractional Nonlinear Gas Dynamics Equation*, **International Journal of Research Studies in Science, Engineering and Technology**, 1 (2014) 82-90.
- [44] A. Esen, “*Termistör probleminin B-Spline sonlu eleman yöntemleri ile çözümleri*”, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, 2003.
- [45] S. Momani, *Non-perturbative analytical solutions of the space- and time-fractional Burgers equations*, **Chaos Soliton. Fract.**, 28 (2006) 930-937.
- [46] M. Inc, *The approximate and exact solutions of the space- and time-fractional Burgers equations with initial conditions by variational iteration method*, **J. Math. Anal. Appl.**, 345 (2008) 476-484.
- [47] C.Li ve Y. Wang, *Numerical algorithm based on Adomian decomposition for fractional differential equations*, **Comput. Math. Appl.**, 57 (2009) 1672-1681.
- [48] T.S. El-Danaf ve A.R. Hadhoud, *Parametric spline functions for the solution of the one time fractional Burgers equation*, **Appl. Math. Model.**, 36 (2012) 4557-4564.
- [49] A. Bekir, Ö. Güner ve A.C. Cevikel, *Fractional Complex Transform and exp-Function Methods for Fractional Differential Equations*, **Abstr. Appl. Anal.**, Volume 2013, Article ID 426462, 8 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/426462>.
- [50] Q.M.U. Hassan ve S.T. Mohyud-Din, *Exp-function method using modified Riemann-Liouville derivative for Burgers equations of fractional-order*, **QScience Connect**, 19 (2013) 1-8.
- [51] A.A. Elbeleze, A. Kılıçman ve B.M. Taib, *Fractional Variational Iteration Method and Its Application to Fractional Partial Differential Equation*, **Math. Probl. Eng.**, Volume 2013, Article ID 543848, 10 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/543848>.
- [52] M. Younis ve A. Zafar, *Exact Solution to Nonlinear Differential Equations of Fractional Order via (G'/G)-Expansion Method*, **Appl. Math.**, 5 (2014) 1-6.

- [53] V. R. Hosseini, W. Chen ve Z. Avazzadeh, *Numerical solution of fractional telegraph equation by using radial basis functions*, **Eng. Anal. Bound. Elem.**, 38 (2014) 31-39.
- [54] L. Wei, H. Dai, D. Zhang ve Z. Si, *Fully discrete local discontinuous Galerkin method for solving the fractional telegraph equation*, **Calcolo**, 51 (2014) 175-192.
- [55] E. Orsingher ve L. Beghin, *Time-fractional telegraph equations and telegraph processes with brownian time*, **Probab. Theory Relat. Fields**, 128 (2004) 141-160.
- [56] S. Momani, *Analytic and approximate solutions of the space- and time-fractional telegraph equations*, **Appl. Math. Comput.**, 170 (2005) 1126-1134.
- [57] J. Chen, F. Liu ve V. Anh, *Analytical solution for the time-fractional telegraph equation by the method of separating variables*, **J. Math. Anal. Appl.**, 338 (2008) 1364-1377.
- [58] F. Huang, *Analytical Solution for the Time-Fractional Telegraph Equation*, **J. Appl. Math.**, Volume 2009, Article ID 890158, 9 pages, doi:10.1155/2009/890158.
- [59] W. Jiang ve Y. Lin, *Representation of exact solution for the time-fractional telegraph equation in the reproducing kernel space*, **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.**, 16 (2011) 3639-3645.
- [60] A. Sevimlican, *An Approximation to Solution of Space and Time Fractional Telegraph Equations by Hes Variational Iteration Method*, **Math. Probl. Eng.**, Volume 2010, Article ID 290631, 10 pages, doi:10.1155/2010/290631.
- [61] M. Garg, P. Manohar ve S.L. Kalla, *Generalized Differential Transform Method to Space-Time Fractional Telegraph Equation*, **International Journal of Differential Equations**, Volume 2011, Article ID 548982, 9 pages, doi:10.1155/2011/54898.
- [62] A. Ansari, *Fractional exponential operators and time-fractional telegraph*, **Bound. Value Probl.**, 125 (2012) 1-6.

- [63] A. Mohebbi, M. Abbaszadeh ve M. Dehghan, *The use of a meshless technique based on collocation and radial basis functions for solving the time fractional nonlinear Schrödinger equation arising in quantum mechanics*, **Eng. Anal. Bound. Elem.**, 37 (2013) 475-485.
- [64] S.Z. Rida, H.M. El-Sherbinyb ve A.A.M. Arafa, *On the solution of the fractional nonlinear Schrödinger equation*, **Phys. Lett. A**, 372 (2008) 553-558.
- [65] N.A. Khan, M. Jamil ve A. Ara, *Approximate Solutions to Time-Fractional Schrödinger Equation via Homotopy Analysis Method*, **ISRN Mathematical Physics**, Volume 2012, Article ID 197068, 11 pages, doi:10.5402/2012/197068.
- [66] L. Wei, Y. He, X. Zhang ve S. Wang, *Analysis of an implicit fully discrete local discontinuous Galerkin method for the time-fractional Schrödinger equation*, **Finite Elem. Anal. Des.**, 59 (2012) 28-34.
- [67] Q. Liu, F. Zeng ve C. Li, *Finite difference method for time-space-fractional Schrödinger equation*, **Int. J. Comput. Math.**, 2014, <http://dx.doi.org/10.1080/00207160.2014.945440>.
- [68] S.H.M. Hamed, E.A. Yousif ve A.I. Arbab, *Analytic and Approximate Solutions of the Space-Time Fractional Schrödinger Equations by Homotopy Perturbation Sumudu Transform Method*, **Abstr. Appl. Anal.**, Volume 2014, Article ID 863015, 13 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2014/863015>.
- [69] B. Hong ve D. Lu, *Modified Fractional Variational Iteration Method for Solving the Generalized Time-Space Fractional Schrödinger Equation*, **The Scientific World Jo.**, Volume 2014, Article ID 964643, 6 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2014/964643>.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Orkun TAŞBOZAN

Doğum Yeri ve Tarihi: Bandırma/ 04.09.1986

Adres:Mustafa Kemal Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü HATAY

E-Posta: orkun.tasbozan@gmail.com, otasbozan@mku.edu.tr

Lisans: 2004-2008 Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans: 2010-2011 İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı

Doktora: 2011-2015 İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı

Mesleki Deneyim:

2009-2014 İnönü Üniversitesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi

2014-Halen Mustafa Kemal Üniversitesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi

Ödüller:

2008-2010 Tubitak Yurt İçi Yüksek Lisans Bursu

2011-2015 Tubitak Yurt İçi Doktora Bursu

2010 Tubitak Ulakbim Bilimsel Yayınları Teşvik Programı

Yayın Listesi

SCI ve SCI-Expanded Kapsamındaki Dergilerdeki Yayınlar:

1. S. Kutluay, A. Esen, **O. Tasbozan**, The (G'/G) -expansion method for some nonlinear evolution equations, Applied Mathematics and Computation, 217 (1) (2010) 384-391.
2. A. Esen, **O. Tasbozan**, S. Kutluay, Applications of the Exp-Function method for the MKdV-sine-Gordon and Boussinesq-double sine-Gordon equations, World Applied Sciences Journal, 22 (1) (2013) 147-151.
3. A. Esen, Y. Ucar, N.M. Yagmurlu, **O. Tasbozan**, A Galerkin Finite Element Method to Solve Fractional Diffusion and Fractional Diffusion-Wave Equations, Mathematical Modelling and Analysis, 18 (2) (2013) 260-273.

4. A. Esen, N.M. Yagmurlu, **O. Tasbozan**, Approximate Analytical Solution to Time-Fractional Damped Burger and Cahn-Allen Equations, *Applied Mathematics Information Sciences*, 7 (5) (2013) 1951-1956.
5. **O. Tasbozan**, A. Esen, N.M. Yagmurlu, Y. Ucar, A Numerical Solution to Fractional Diffusion Equation for Force-Free Case, *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2013 (2013), Article ID 187383, 6 pages, doi.org/10.1155/2013/187383.
6. A. Esen, N. M. Yagmurlu, **O. Tasbozan**, Double Exp-Function Method for Multisoliton Solutions of The Tzitzeica-Dodd-Bullough Equation, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series* (Kabul Edildi).

Diğer Uluslararası Hakemli Dergilerdeki Yayınlar:

1. **O. Tasbozan**, A. Esen, N.M. Yagmurlu, Approximate analytical solutions of fractional coupled mKdV equation by homotopy analysis method, *Open Journal of Applied Science*, 2 (3) (2012) 193-197.
2. **O. Tasbozan**, N.M. Yagmurlu, A. Esen, The functional variable method for some nonlinear (2+1)-dimensional equations, *Selcuk Journal of Applied Mathematics*, 14 (1) (2013) 37-45.
3. A. Esen, Y. Ucar, N.M. Yagmurlu, **O. Tasbozan**, Solving Fractional Diffusion and Fractional Diffusion-Wave Equations by Petrov-Galerkin Finite Element Method, *Turkic World Mathematical Society Journal of Applied Engineering Mathematics*, 4 (2) (2014) 155-168.
4. A. Kurt, **O. Tasbozan**, Approximate analytical solution of the time fractional Whitham-Broer-Kaup equation using the Homotopy Analysis method, *International Journal of Pure and Applied Mathematics* (Kabul Edildi).

Yurt İçi Hakemli Dergilerdeki Yayınlar:

1. A. Esen, **O. Tasbozan**, N.M. Yagmurlu, Approximate Analytical Solutions of the Fractional Sharmo-Tasso-Olver Equation Using Homotopy Analysis Method and a Comparison with Other Methods, *Çankaya University Journal of Science and Engineering*, 9 (2) (2012) 139-147.
2. A. Esen, **O. Tasbozan**, S. Kutluay, Approximate analytical solutions of the damped

Burgers and Boussinesq-Burgers equations *Çankaya University Journal of Science and Engineering*, 11 (1) (2014) 65-76.

Uluslararası Bildiriler:

1. **O. Tasbozan**, N.M. Yagmurlu, Y. Ucar, A. Esen, Numerical Solutions of the Sine-Gordon Equation by Collocation Method, International Workshop on Boundary Value Problems, Dicle University, Diyarbakır, Turkey (12 March 2014).
2. M. Yagmurlu, **O. Tasbozan**, Y. Ucar, A. Esen, Numerical Solutions of the Combined KdV-MKdV Equation by a Quintic B-spline Collocation Method, International Conference on Nonlinear Differential and Difference Equations: Recent Developments and Applications (ICNDDE 2014), Antalya, Turkey (27-30 May 2014).
3. S. Kutluay, N.M. Yagmurlu, Y. Ucar, **O. Tasbozan**, A finite element method to solve the system of two-dimensional Burgers' equations, International Conference on Nonlinear Differential and Difference Equations: Recent Developments and Applications (ICNDDE 2014), Antalya, Turkey (27-30 May 2014).