13

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AÇIK RİEMANN YÜZEYLERİNİN BOŞ OLMAYAN HERHANGİ ALTCÜMLELERİNİN KONFORM EŞDEĞERLİLİĞİNİN BİR CEBİRSEL KARAKTERİZASYONU

Ayhan ŞERBETÇİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

1987

MALATYA

Bu konuyu bana seçerek, çalışmalarım süresince yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Doç.Dr. İ.Kaya ÖZKIN'a en derin saygı ve teşekkürlerimi arzederim.

Ayhan ŞERBETÇİ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Kompleks düzlemde bir bölgenin veya bir Riemann yüzeyinin konform yapısının, onun üzerindeki analitik fonksiyonların halkalarının cebirsel yapısı yardımıyla belirlenebileceği bilinmektedir. Konform eşdeğerlik için kullanılan bu yöntem kompleks analiz yöntemlerinden daha kullanışlı olup, ilk defa L. Bers tarafından kompleks düzlemin iki altbölgesinin konform eşdeğerliliğini göstermek için kullanılmıştır. Daha sonra W. Rudin, H. L. Royden ve M. Nakai aynı problemi açık Riemann yüzeylerine genişletmişlerdir. L. P. Su, Kompleks düzlemin herhangi altcümleleri için aynı yöntemi kullanarak konform eşdeğerliliği gösterdi. Bu çalışmada ise, açık Riemann yüzeylerinin herhangi altcümlelerinin konform eşdeğerliliği problemi üzerinde durulmuştur.

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Bölüm I de metin içinde kullanılan terminoloji ve gösterimler tanıtılmış olup, diğer bölümlere temel oluşturacak cebirsel, topolojik ve kompleks analiz kavramları üzerinde durularak bir dizi özellikler verilmiştir.

Bölüm II, iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, kompleks düzlemin boş olmayan herhangi altcümleleri üzerinde tanımlı fonksiyonların analitikliği için gerekli koşullar verilmiştir. İkinci kısımda ise X ve Y nin C nin herhangi iki altcümlesi olması durumunda, X ve Y üzerinde tanımlı tüm tek-değerli analitik fonksiyonların H(X) ve H(Y) halkaları arasında bir izomorfizm varsa, bu durumda X ve Y nin konform eşdeğer olduğu gösterilmiştir.

Bölüm III de ise, R_1 ve R_2 nin iki açık Riemann yüzeyi ve X, Y nin de sırası ile R_1, R_2 nın boş olmayan herhangi iki

altcümlesi olması durumunda, H(X) ve H(Y) halkaları arasında bi izomorfizm varsa, X ve Y nin konform eşdeğer olduğu gösterilmiştir. Böylece iki açık Riemann yüzeyinin boş olmayan altcümlelerinin bi cebirsel karakterizasyonu elde edilmiş olur.

GÖSTERİMLER

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Cümlesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Cümlesi
R/I	Bölüm Cümlesi
Im	Görüntü Cümlesi
Ker	Çekirdek
$\subset$	Altcümle
$\in$	Eleman
$>$	Büyük
$\geqslant$	Büyük eşit
$<$	Küçük
$\leqslant$	Küçük eşit
$\lvert\ \rvert$	Mutlak değer
$\sum$	Toplam
$\int$	İntegral
lim	Limit
$\underline{a}$	a sabit fonksiyonu
$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter koşul

1. TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Halka ve idealler

Tanım 1.1.1 : Boş olmayan bir R cümlesi verilsin. Bir $f: R \times R \longrightarrow R$ dönüşümüne, R üzerinde bir <u>ikili-işlem</u> denir.

Tanım 1.1.2 : R boş olmayan bir cümle olmak üzere, R üzerinde $+ : (a,b) \longrightarrow a + b$, $. : (a,b) \longrightarrow a . b$ şeklinde tanımlı toplama ve çapma ikili-işlemleri verilmiş olsun. Eğer

(1) her $a,b \in R$ için $a + b = b + a$,

(2) her $a,b,c \in R$ için $(a + b) + c = a + (b + c)$,

(3) her $a \in R$ için $a + 0 = a$ olacak biçimde bir $0 \in R$ vardır,

(4) her $a \in R$ için $a + (-a) = 0$ olacak biçimde bir $-a \in R$ vardır,

(5) her $a,b,c \in R$ için $(a . b) . c = a . (b . c)$,

(6) her $a,b,c \in R$ İçin

$$a . (b + c) = a . b + a . c$$

$$(b + c) . a = b . a + c . a$$

özellikleri sağlanıyorsa $(R, +, .)$ üçlüsüne <u>halka</u> denir ve kısaca R ile gösterilir.

Eğer, ayrıca her $a,b \in R$ için $a . b = b . a$ oluyorsa, R halkasına <u>değişmeli halka</u> denir. Üstelik, eğer R nin her a elemanı için $1 . a = a . 1 = a$ koşulunu sağlayan bir $1 \in R$ elemanı varsa, bu durumda R ye <u>özdeş elemanlı değişmeli halka</u> denir.

Teorem 1.1.1 : R bir halka olsun. Bu durumda her $a \in R$ için a . 0 = 0 . a = 0 dır.

Bu teoremden halkalardaki şu önemli özellik görülür: Bi halkada çarpanlardan biri sıfır ise, bu durumda iki elemanın çarpım sıfırdır. Bunun karşıtı her zaman doğru değildir.

Tanım 1.1.3 : R bir halka olsun. Eğer R de sıfırdan farkl a,b gibi iki eleman için a . b = 0 ise, bu durumda R halkasını sıfır bölenleri vardır denir.

Tanım 1.1.4 : Sıfır bölenleri bulunmayan özdeş elemanlı değişmeli bir halkaya tamlık bölgesi denir.

Tanım 1.1.5 : R özdeş elemanlı, değişmeli bir halka olsun. Eğer R nin herhangi bir a elemanının çarpma işlemine göre invers varsa, bu durumda a ya birim (veya tersine çevrilebilir eleman denir.

Tanım 1.1.6 : R özdeş elemanlı bir halka olsun. Eğer R ni sıfırdan farklı her elemanı birim ise, bu durum da R ye bölenler halkası denir. Değişmeli bir bölenler halkasına cisim adı verilir.

O halde bir tamlık bölgesinin ve bir bölenler halkasının e az iki elemanı vardır. Üstelik her cisim bir tamlık bölgesidir.

Tanım 1.1.7 : R bir halka olsun. Eğer R nin boş olmayan bi S altcümlesi R nin işlemlerine göre bir halka ise, bu durumda S ye nin bir althalkası denir

Teorem 1.1.2 : R bir halka ve S, R nin boş olmayan bi altcümlesi olsun. Bu durumda S nin R nin bir althalkası olması içi gerek ve yeter koşul her a,b $\in$ S için a - b $\in$ S ve a . b $\in$ olmasıdır.

Şimdi bir halkanın önemli bir altyapısı olan ideal kavramını tanımlayacağız. ideal özel bir althalkadır.

Tanım 1.1.8 : R bir halka ve I, R nin boş olmayan bir altcümlesi olsun. Eğer

(i) $a, b \in I$ ise $a - b \in I$,

(ii) her $r \in R$ ve $a \in I$ için $r \cdot a \in I$ ve $a \cdot r \in I$

özellikleri sağlanıyorsa, bu durumda I ye R nin bir <u>ideali</u> denir.

I, R nin bir ideali olmak üzere eğer $I \neq R$ ise, bu durumda I ye R nin bir <u>gerçek ideali</u> denir. R nin aşikar olan iki ideali R ve R nin sıfır elemanından meydana gelen $\{0\}$ idealidir. Bu ideallere <u>aşikar ideal</u> veya gerçek olmayan idealler denir.

Teorem 1.1.3 : R özdeş elmanlı bir halka olsun. Bu durumda R nin herhangi bir gerçek ideali birim içermez.

İspat : I, R nin bir gerçek ideali olsun. İddiamızın aksine I nin birim içerdiğini kabul edelim; yani, I nin bir a elemanı birim olsun. Bu durumda $a^{-1} \in I$ dir. Buradan $a \cdot a^{-1} \in I$ dir. Burada 1, çarpmaya göre özdeş elemandır. O halde her $r \in R$ için $1 \cdot r = r \in I$ olurki bu $R \subset I$ demektir. I, R nin bir gerçek ideali olduğundan bu bir çelişkidir.

Teorem 1.1.4 : R özdeş elemanlı, değişmeli bir halka olsun. Bu durumda R nin bir cisim olması için gerek ve yeter koşul R nin hiçbir gerçek idealinin bulunmamasıdır.

İspat : İlk olarak R nin bir cisim olduğunu kabul edelim. R nin hiçbir gerçek idealinin bulunmadığını göstereceğiz. I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Bu durumda $a \neq 0$ olacak biçimde bir $a \in I$ vardır. R bir cisim olduğundan $a^{-1} \in R$ dir. Buradan

$a \cdot a^{-1} = 1 \in I$ dir. Dolayısıyla her $r \in R$ için $r \cdot 1 \in I$ dir. Bu ise $I = R$ demektir.

Karşıt olarak R nin hiçbir gerçek idealinin bulunmadığını kabul edelim. R nin bir cisim olduğunu göstereceğiz. Bunun için R nin sıfırdan farklı bir a elemanını ve $I = \{ r \cdot a : r \quad R \}$ cümlesini gözönüne alalım. Açık olarak I bir idealdir. $1 \cdot a = a \in I$ olduğundan $I \neq \{0\}$ dır. O halde $I \subset R$ ve $1 \in I$ dir. Dolayısıyla R de öyle bir r elemanı vardırki $r \cdot a = 1$ dir. Bu a nın inversinin bulunduğunu gösterir. Böylece R bir cisimdir.

R bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. Toplama işlemi değişmeli olduğundan (I,+) sistemi (R,+) sisteminin bir normal altgrubudur. Bu durumda R/I toplamsal bölüm grubu tanımlıdır. $R/I = \{ a + I : a \quad R \}$ olmak üzere R/I üzerinde toplama işlemi

$$+ : R/I \times R/I \longrightarrow R/I$$

her $a + I,\ b + I \quad R/I$ için

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$

şeklinde tanımlıdır. Toplama işlemi iyi-tanımlıdır. Gerçekten, eğer

$$a + I = a' + I \text{ ve } b + I = b' + I$$

ise $a - a' = i$, $i \in I$ ve $b - b' = j$, $j \in I$ olduğundan

$$(a - a') + (b - b') = i + j$$

dir. Dolayısıyla

$$(a + b) - (a' + b') = i + j \in I$$

dir. O halde

$$(a + b) + I = (a' + b') + I$$

olur ki, bu toplama işleminin iyi-tanımlı olduğunu gösterir. (R/I, +) sisteminin bir değişmeli grup olduğu kolayca görülür.

Teorem 1.1.5 : R bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. Bu durumda R/I toplamsal bölüm grubu . : $R/I \times R/I \longrightarrow R/I$, her $a + I$, $b + I \in R/I$ için $(a + I) . (b + I) = a . b + I$ şeklinde tanımlı çarpma işlemine göre bir halkadır. R değişmeli veya özdeş elemanlı ise aynı özellik R/I de de sağlanır.

İspat : Daha önce belirtildiği gibi R/I toplama işlemine göre bir değişmeli gruptur. Şimdi çarpma işleminin iyi-tanımlı olduğunu gösterelim. Bunun için

$$a + I = a' + I \text{ ve } b + I = b' + I$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$a - a' = i, \ i \in I \text{ ve } b - b' = j, \ j \in I$$

olduğundan

$$ab - a'b' = a(b - b') + (a - a')b'$$

$$= aj + ib' \in I$$

dir. O halde

$$(a . b) + I = (a' . b') + I$$

dir. Bu nedenle çarpma işlemi iyi-tanımlıdır. Kalan halka şartları R/I de sağlanır çünkü; R/I nin işlemleri, R nin işlemleri yardımıyla tanımlıdır. Bu şekilde tanımlanan R/I halkasına R nin I ye göre bölüm halkası denir.

Tanım 1.1.9 : R ve R' iki halka ve $f : R \longrightarrow R'$ içine bir fonksiyon olsun. Eğer her $a, b \in R$ için

(i) $f(a + b) = f(a) + f(b)$,

(ii) $f(a . b) = f(a) . f(b)$

özellikleri sağlanıyorsa f ye R den R' içine bir halka homomorfizmi denir. Ayrıca f bire-bir ise ,f ye bir halka monomorfizmi, f üzerine ise f ye bir halka epimorfizmi ve f aynı anda hem bire-bir hemde üzerine ise, f ye bir <u>halka izomorfizmi</u> denir.

Teorem 1.1.6 : R ve R' iki halka ve f, R den R' ye bir izomorfizm olsun. Bu durumda f^{-1} de R' den R ye bir izomorfizmdir.

İspat : Her $a' \in R'$ için, f bire-bir ve üzerine olduğundan $f(a) = a'$ olacak biçimde R nin bir tek a elemanı vardır ve $f^{-1}(a')=a$ dır. f^{-1} in bir izomorfizm olduğunu göstereceğiz. $a',b' \in R'$ için

$$f^{-1}(a' + b') = f^{-1}(f(a) + f(b)) = f^{-1}(f(a + b)) = a + b$$
$$= f^{-1}(a') + f^{-1}(b')$$

ve

$$f^{-1}(a' \,.\, b') = f^{-1}(f(a) \,.\, f(b)) = f^{-1}(f(a \,.\, b)) = a \,.\, b$$
$$= f^{-1}(a') \,.\, f^{-1}(b')$$

olduğundan f^{-1} bir homomorfizmdir. Şimdi f^{-1} in bire-bir ve üzerine olduğunu gösterelim. $a',b' \in R$ icin $f^{-1}(a') = f^{-1}(b')$ olsun. Bu durumda

$$f(f^{-1}(a')) = f(f^{-1}(b'))$$

ve buradan $a' = b'$ olur. Böylece f bire-birdir. f^{-1} in üzerine olduğunu göstermek için, R nin her a elemanına karşılık $f^{-1}(a) = a$ olacak şekilde R' de bir a' elemanının var olduğunu göstermeliyiz. Her $a \in R$ için $f(a) = a' \in R$ olduğundan $f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(a')$ ve buradan $a = f^{-1}(a')$ olurki böylece f^{-1}üzerinedir. O halde f^{-1}, R' den R ye bir izomorfizmdir.

Teorem 1.1.7 : R ve R' iki halka ve f, R den R' ye bir izomorfizm olsun. Bu durumda

(i) Eğer I, R nin bir ideali ise, bu durumda f(I) de R' nün bir idealidir.

(ii) Eğer I', R' nün bir ideali ise, bu durumda $f^{-1}(I')$ de R nin bir idealidir.

İspat : (i) I, R nin bir ideali ve $a', b' \in f(I)$ olsun. Bu durumda $f(a) = a'$ ve $f(b) = b'$ olacak biçimde $a, b \in I$ vardır. Ayrıca her r' . R' için $f(r) = r'$ olacak biçimde bir $r \in R$ vardır. Şimdi

$$a' - b' = f(a) - f(b) = f(a - b)$$

ve $a - b \in I$ ise $f(a - b) \in f(I)$ olduğundan $a' - b' \in f(I)$ dir.

$$r' . a' = f(r) . f(a) = f(r . a)$$

ve $r . a \in I$ ise $f(r . a) \in f(I)$ olduğundan $r' . a' \in f(I)$ dir.

$$a' . r' = f(a) . f(r) = f(a . r)$$

ve $a . r \in I$ ise $f(a . r) \in f(I)$ olduğundan $a' . r' \in f(I)$ dir.

Dolayısıyla $f(I)$, R' nün bir idealidir.

(ii) I' R' nün bir ideali ve $a, b \in f^{-1}(I')$olsun. Bu durumda $f(a) = a'$ ve $f(b) = b'$ olacak biçimde $a', b' \in I$ elemanları vardır. Ayrıca her $r \in R$ için $f(r) = r' \in R'$ dür.

$$a' - b' = f(a) - f(b) = f(a - b) \in I'$$

olduğundan $a - b \in f^{-1}(I')$ dür.

$$a' . r' = f(a) . f(r) = f(a . r) \in I'$$

olduğundan $a . r \in f^{-1}(I')$ dür.

$$r' . a' = f(r) . f(a) = f(r . a) \in I'$$

olduğundan $r . a \in f^{-1}(I')$ dür. O halde $f^{-1}(I')$, R nin bir idealidir.

Tanım 1.1.10 : $f : R \longrightarrow R'$ bir halka homomorfizmi, o ve o' sırasıyla r ve r' nün toplamaya göre özdeşlik elemanları olsun. Bu durumda

$$Ker(f) = \{ r \in R : f(r) = o' \}$$

cümlesine f nin çekirdeğidenir.

Teorem 1.1.8 : $f : R \longrightarrow R'$ bir halka homomorfizmi olsun. Bu durumda $Ker(f)$, R nin bir idealidir.

İspat : $o \in Ker(f)$ olduğundan $Ker(f) \neq \emptyset$ dir. $a,b \in Ker(f)$ ve $r \in R$ olsun. Bu durumda

$$f(a - b) = f(a) - f(b) = o' - o' = o',$$

$$f(a \,.\, r) = f(a) \,.\, f(r) = o'.f(r) = o'$$

ve

$$f(r \,.\, a) = f(r) \,.\, f(a) = f(r) \,.\, o' = o'$$

olduğundan $Ker(f)$, R nin bir idealidir.

Teorem 1.1.9 : (Esas Homomorfizm Teoremi) $f : R \longrightarrow R'$ bir halka homomorfizmi ve I, R nin $Ker(f)$ içinde içerilen bir ideali olsun. Bu durumda R/I den R' ye tanımlı bir tek $\bar{f}$ homomorfizmi vardır öyleki, her a R için $\bar{f}(a + I) = f(a)$ dır. $\bar{f}$ nin bir izomorfizm olması için gerek ve yeter koşul $Ker(f) = I$ ve $Im(f) = R'$ olmasıdır.

İspat :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & R' \\ R/I \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Önce $\bar{f}$ nin iyi-tanımlı olduğunu gösterelim. $a + I = a' + I$ olsun. $a - a' = i$ I, i I olduğundan,

$$f(a - a') = f(i) \Rightarrow f(a) - f(a') = o' \Rightarrow f(a) = f(a')$$

yani,

$$\bar{f}(a + I) = \bar{f}(a' + I)$$

dir. Dolayısıyla $\bar{f}$ iyi-tanımlıdır.

$\bar{f}$ nin bir homomorfizm olduğunu gösterelim.

$$\bar{f}((a + I) + (b + I) = \bar{f}((a + b) + I) = f(a + b)$$
$$= f(a) + f(a) + f(b) = \bar{f}(a + I) + \bar{f}(b + I)$$

ve

$$\bar{f}((a + I) \,.\, (b + I)) = \bar{f}((a \,.\, b) + I) = f(a \,.\, b)$$
$$= f(a) \,.\, f(b) = \bar{f}(a + I) \,.\, \bar{f}(b + I)$$

dir. O halde $\bar{f}$ bir homorfizmdir.

Şimdi $\bar{f}$ nin bir tek olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim. $g(a + I) = f(a)$ olsun. Bu durumda

$$\bar{f}(a + I) = f(a) = g(a + I)$$

olduğundan $\bar{f} = g$ olur. Buradan $\bar{f}$ bir tektir. Son olarak

$$\bar{f} \text{ bir izomorfizm} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(\bar{f}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f/I) = 0$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = I$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 1.1.1 : $f : R \longrightarrow R'$ bir halka homomorfizmi olsun. Bu durumda $R/\mathrm{Ker}(f) \cong R'$ dür.

İspat : Yukarıdaki teoremde $I = \mathrm{Ker}(f)$ ve $R' = \mathrm{Im}(f)$ alınırsa, f homomorfizmi $R/\mathrm{Ker}(f)$ den $\mathrm{Im}(f)$ ye bir izomorfizm olur.

Tanım 1.1.11 : R özdeş elemanlı, değişmeli bir halka ve a R nin bir elemanı olsun. Bu durumda $(a) = \{r \cdot a : r \in R\}$ idealine R nin a tarafından üretilen <u>esas ideali</u> denir.

Tanım 1.1.12 : R özdeş elemanlı, değişmeli bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. Eğer $I \neq R$ ve R nin $I \subset J$ koşulunu sağlayan her J ideali için $I = J$ veya $J = R$ oluyorsa, bu durumda I ye R nin bir <u>maksimal ideali</u> denir.

Teorem 1.1.10 : R ve R' iki halka ve f, R den R' ye bir izomorfizm olsun. Bu durumda

(i) Eğer I, R nin bir maksimal ideali ise $f(I)$ de R' nün bir maksimal idealidir.

(ii) Eğer I', R' nün bir maksimal ideali ise $f^{-1}(I')$ de R nin bir maksimal idealidir.

İspat : (i) I, R nin bir maksimal ideali olsun. $f(I)$ nin R' nün bir maksimal ideali olmadığını kabul edelim. Bu durumda öyle bir

J' ideali vardır ki $f(I) \subset J' \subset R'$ dür. f^{-1} bir izomorfizm olduğundan $f^{-1}(J') \subset R$ bir idealdir ve $I \subset f^{-1}(J')$ dür. I maksimal olduğundan ya $I = f^{-1}(J')$ yada $f^{-1}(J') = R$ dir. Böylece $J' = f(I)$ veya $J' = R'$ dür. Dolayısıyla $f(I)$, R' nün bir maksimal idealidir.

(ii) I', R' nün bir maksimal ideali olsun. $f^{-1}(I')$ nün R nin bir maksimal ideali olmadığını kabul edelim. Bu durumda öyle bir J ideali vardır ki $f^{-1}(I') \subset J \subset R$ dir. f bir izomorfizm olduğundan $f(J) \subset R'$ bir ideal ve $I' \subset f(I)$ dir. I' maksimal olduğundan ya $f(I) = I'$ yada $f(J) = R'$ dür. Böylece $J = f^{-1}(I')$ veya $J = R$ dir. Dolayısıyla $f^{-1}(I')$, R nin bir maksimal idealidir.

Tanım 1.1.13 : R özdeş elemanlı, değişmeli bir halka ve $(a) \neq R$, R nin bir esas ideali olsun. Eğer $(a) \subset (b) \subset R$ için $(b) = R$ veya $(a) = (b)$ oluyorsa, bu durumda (a) ya R nin a tarafından üretilen <u>maksimal esas ideali</u> denir.

Teorem 1.1.11 : R özdeş elemanlı, değişmeli bir halka ve $I \neq R$, R nin bir ideali olsun. Bu durumda I nin R halkasının maksimal ideali olması için gerek ve yeter koşul R/I nin bir cisim olmasıdır.

İspat : I, R nin bir maksimal ideali olsun. R özdeş elemanlı ve değişmeli olduğundan R/I de özdeş elemanlı ve değişmelidir. O halde R/I nin cisim olduğunu göstermek için R/I nin sıfırdan farklı her elemanının çarpma işlemine göre inversinin varlığını göstermek yeterlidir. Bunun için $a + I$ yancümlesinin $0 + I = I$ yancümlesinden farklı olduğunu kabul edelim. Bu durumda $a \in I$ dir. $J = \{i + r \cdot a : i \quad I, r \quad R\}$ cümlesini gözönüne alalım. J, R halkasının bir idealidir. Gerçekten, eğer $i + r.a$, $i + r.a \in J$ ise, bu durumda

$$(i_1 + r_1 a) - (i_2 + r_2 a) = (i_1 - i_2) + (r_1 - r_2).a \in J$$

dir. Üstelik $i + r.a \in J$ ve herhangi bir $x \in R$ için

$$x.(i + r.a) = x.i + x.r.a \in J$$

dir. R değişmeli olduğundan $(i + r.a).x \in J$ dir. Dolayısıyla J, R nin bir idealidir. $a = 0 + 1.a$ ve $i = i + 0.a$ olarak yazılabileceğinden $a, i \in J$ dir. Dolayısıyla $I \subset J \subset R$ dir. Fakat I maksimal olduğundan $J = R$ dir ve R nin özdeş elemanı olan 1, J ninde elemanıdır. O halde öyle bir $i_1 \in I$ ve $r_1 \in R$ vardır ki $i_1 + r_1 a = 1$ dir. Buradan $1 - r_1 a \in I$ elde edilir. Dolayısıyla

$$1 + I = r_1 a + I = (r_1 + I).(a + I)$$

ve $r_1 + I = (a + I)^{-1}$ olur. Böylece R/I bir cisimdir.

Karşıt olarak R/I nin bir cisim olduğunu kabul edip I nin maksimal olduğunu gösterelim. Bunun için R de herhangi bir J idealini gözönüne alalım öyleki $I \subset J \subset R$ olsun. $J = R$ olduğunu göstermeliyiz. $I \subset J$ olduğundan öyle bir $a \in J$ vardır ki a, I nin elemanı değildir. Dolayısıyla $a + I \neq 0 + I$ dir. R/I bir cisim olduğundan $a + I$ nin çarpmaya göre inversi vardır. Yani, öyle bir $b + I \in R/I$ vardır ki $(a + I).(b + I) = 1 + I$ dir. Buradan $1 - ab \in I \subset J$ dir. Fakat a, J idealine ait olduğundan $a, b \in J$ olup $1 \in J$ dir. O halde $J = R$ dir. Böylece I maksimal idealdir.

1.2. Analitik Fonksiyonlar

Tanım 1.2.1 D, kompleks düzlemde bir bölge (açık irtibatlı cümle) ve f(z), D üzerinde tanımlı bir kompleks fonksiyon olsun. $r > 0$ bir reel sayı olmak üzere z nin D de kapsanan r-komşuluğu

$$U_r(z) = \{ w : |w - z| < r \}$$

olsun. $0 < |h| < r$ olmak koşuluyla eğer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

değeri varsa, bu durumda f(z) fonksiyonuna z de <u>diferansiyellenebilirdir</u> denir. Bu limite f(z) nin z deki türevi denir ve $f'(z)$ ile gösterilir. Diferansiyellenebilen fonksiyonlar süreklidirler.

Tanım 1.2.2 : f(z), D bölgesi üzerinde tanımlı bir kompleks fonksiyon olsun. Eğer f(z), D nin her noktasında diferansiyellenebilir ve $f'(z)$ sürekli ise, yani f(z), D de sürekli olarak diferansiyellenebiliyorsa, bu durumda f(z) ye D de <u>analitiktir</u> denir

Teorem 1.2.1 : Bir D bölgesinde tanımlı olan bir $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonunun D de analitik olması için gerek ve yeter koşul onun reel ve imajiner kısımlarının sürekli olarak diferansiyellenebilmesi ve $u_x = v_y$; $u_y = -v_x$ Cauchy-Riemann denklemlerini sağlamasıdır.

Şimdi kompleks analizde çok önemli bir yeri olan kuvvet serilerini inceleyelim.

Tanım 1.2.3 : z bir kompleks değişken ve z_0, $a_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

şeklindeki bir seriye z_0 etrafında bir <u>kuvvet serisi</u> ve a_n sayılarına kuvvet serisinin <u>katsayıları</u> denir.

Teorem 1.2.2 : (Cauchy-Hadamard) Her $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ kuvvet serisinin bir r yakınsaklık yarıçapı vardır. Eğer $0 < r < \infty$ ise, seri $|z - z_0| < r$ için mutlak yakınsak, $|z - z_0| > r$ için ıraksaktır. Eğer $r = 0$ ise seri sadece $z = z_0$ için yakınsak, $r = o$ için kompleks düzlemin tamamında yakınsaktır. Burada r sayısı

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}$$

ile verilir.

Tanım 1.2.4 : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı r olsun. Bu durumda $|z - z_0| = r$ çemberine kuvvet serisinin yakınsaklık çemberi denir. Bu çemberin içini

$$U_r(z_0) = \{z : |z - z_0| < r\}$$

ile göstereceğiz.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ herhangi bir kuvvet serisi olsun. O zaman bu kuvvet serisini

$$R_N(z) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{N-1} a_n(z - z_0)^n + R_N(z)$$

şeklinde yazmak daima mümkündür. Sabit bir N için R_N, $U_r(z_0)$ üzerinde z nin bir fonksiyonudur. $N \to \infty$ iken her z $\overline{U_r(z_0)}$ için $R_N(z) \to 0$ dır. Yani, her $\varepsilon > 0$, öyle bir $M(\varepsilon, z) > 0$ sayısı vardır ki

$$N \geq M(\varepsilon, z) \quad \text{için} \quad |R_N(z)| < \varepsilon$$

dur. Burada $M(\varepsilon, z)$ sembolü M sayısının hem ε a hemde z ye bağlı olduğunu göstermektedir.

Tanım 1.2.5 : Herhangi bir $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ kuvvet serisi ve bir S nokta cümlesi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $z \in S$ için $N > M(\varepsilon)$ olduğunda $|R_N(z)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $M(\varepsilon) > 0$ tamsayısı bulunabiliyorsa, bu durumda verilen kuvvet serisine S cümlesinde uniform yakınsaktır denir.

Teorem 1.2.3 : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı R , $0 < R < +\infty$ olsun. Bu durumda r, $0 < r < R$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ kuvvetserisi r yarıçaplı, z_0 merkezli C_r çemberinin üzerinde ve içinde uniform yakınsaktır.

$a_n(z - z_0)^n$ nin bütün terimleri $U_r(z_0)$ üzerinde z nin sürekli fonksiyonları olduğundan burada serinin

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

toplamıda $U_r(z_0)$ üzerinde süreklidir. Bu $0 < r < R$ olacak biçimde her r için doğru olduğundan f(z) nin $U_R(z_0)$ üzerinde sürekli olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 1.2.4 : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıcapı r, $0 < r < +\infty$ olsun. Bu durumda

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

$U_r(z_0)$ üzerinde z nin bir analitik fonksiyonudur.

Teorem 1.2.5 : (Taylor) Herhangi bir f fonksiyonunun bir $C_R = z : |z - z_0| = R$ çemberi içinde analitik olduğunu kabul edelim. Bu durumda C_R içindeki her z noktasında

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

dir. Yani, C_R içindeki her z için kuvvet serisi f(z) ye yakınsar. Üstelik, $0 < r < R$ olmak üzere kuvvet serisi C_r çemberinin üzerinde ve içinde uniform yakınsaktır.

Teorem 1.2.6 : f(z), D bölgesi üzerinde analitik bir fonksiyon ve z , D nin herhangi bir noktası olsun. Bu durumda f(z),

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n (z - z_o)^n$$

kuvvet serisine açılabilir. Bu seri $U_R(z_o)$ üzerinde yakınsaktır.

Burada $n = 0,1,2,\ldots$ için

$$a_n = \frac{1}{2!\, i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

dir.($0 < r < R$ ve C_r, z_o noktasını çevreleyen basit kapalı bir eğri- dir.)

Sonuç 1.2.1 : Bir D bölgesi üzerinde tanımlı bir f(z) fonksiyonunun analitik olması için gerek ve yeter koşul her $z_o \in D$ için bir $U_R(z_o) \subset D$ komşuluğu var ve f(z) nin $U_R(z_o)$ üzerinde yakınsak olan

$$f(z) = \sum_{n=n}^{\infty} a_n (z - z_o)^n$$

serisine açılabilir olmasıdır.

Tanım 1.2.6 : f(z) fonksiyonu bir D bölgesinde tanımlı ve z D nin bir noktası olsun. Eğer $f'(z_o)$ mevcut değilse bu durumda z_o a f(z) nin <u>singüler noktası</u> denir. Eğer f(z), z_o da analitik değil fakat z_o ın delinmiş bir komşuluğunda analitik ise, bu durumda z_o a <u>ayrık singüler nokta</u> denir.

Teorem 1.2.7 : $D - \{z_o\}$ bölgesi üzerinde analitik olan bir f(z) fonksiyonu $U_r(z_o) - \{z_o\}$ üzerinde mutlak yakınsak bir

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_o)^n$$

kuvvet serisine açılabilir. Bu açılıma f(z) nin z_o etrafında <u>Laurent serisine açılımı</u> denir. Burada a_n katsayıları $0 < r < R$ olmak üzere

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw, \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots)$$

ile verilmiştir.

Bir $f(z)$ fonksiyonunun z_0 ın bir komşuluğunda, z_0 hariç tek-değerli ve analitik olduğunu kabul edelim. Bu durumda z_0 ayrık singüler noktasında Laurent serisine açılabilir. Bu açılımda serinin negatif kuvvetlerden meydana gelen kısmına $f(z)$ nin z_0 daki esas kısmı denir. $f(z)$ nin z_0 daki singülerliğinin çeşitini bulmak için bu nokta etrafındaki Laurent açılımından faydalanabiliriz. Başlıca üç durum ortaya çıkar.

1.Durum : Serinin esas kısmı mevcut değildir. Bu durumda $f(z)$, $z = z_0$ hariç $|z - z_0| < r$ de analitik olan bir $f_1(z)$ fonksiyonuna eşittir. $z = z_0$ noktasına <u>kaldırılabilir singüler nokta</u> denir.

2. Durum : Esas kısımdaki terimler sonlu sayıdadır. Yani,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{m} a_{-n}(z - z_0)^{-n}, \quad a_{-m} \neq 0$$

dır. Bu durumda $z = z_0$ noktasına $f(z)$ nin <u>kutup noktası</u> denir.

3. Durum : Esas kısımda sonsuz sayıda terim vardır. Yani,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

dir. Bu durumda $z = z_0$ a $f(z)$ nin <u>esas singüler noktası</u> denir.

Teorem 1.2.8 : (Kuvvet Serilerinin Özdeşlik Teoremi)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ kuvvet serileri z_0 etrafında, yakınsak iki kuvvet serisi olsun. Eğer bu iki kuvvet serisi yığılma noktası z_o olan bir cümle üzerinde eşit iseler, bu durumda özdeş olarak eşittirler.

İspat : Verilen kuvvet serileri yakınsak olduğundan

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n(z - z_o)^n \text{ ve } g(z) = \sum_{n=o}^{\infty} b_n(z - z_o)^n$$

yazabiliriz. f(z) ve g(z) sürekli olduğundan $f(z_o) = g(z_o)$ dır. Yani $a_1 = b_1$ dir. Tümevarım metodunu kullanacağız. Kabul edelimki

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \ldots,\ a_{r-1} = b_{r-1}$$

dir. $a_r = b_r$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\frac{f(z) - |a_o + a_1(z-z_o) + \ldots + a_{r-1}(z-z_o)^{r-1}|}{(z - z_o)^r} = a_r + a_{r+1}(z-z_o) + \ldots$$

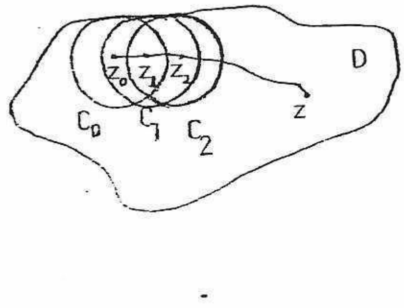
ve

$$\frac{g(z) - |b_o + b_1(z-z_o) + \ldots + b_{r-1}(z-z_o)^{r-1}|}{(z - z_o)^r} = b_r + b_{r+1}(z-z_o) + \ldots$$

diyelim. Bu durumda sol taraftaki ifadeler z_o da yığılan noktalarda eşit olduğundan sağ taraftaki serilerde bu noktalarda eşittirler. Yani, $a_r = b_r$ dir. Dolayısıyla her n için $a_n = b_n$ olur ki bu durumda verilen seriler özdeş olarak eşittirler.

Teorem 1.2.9 : (Analitik Fonksiyonların Özdeşlik Teoremi) f(z) ve g(z) bir D bölgesinde analitik iki fonksiyon olsun. Eğer bu iki fonksiyon yığılma noktası $z_o \in D$ olan bir nokta cümlesinde eşit iseler, bu durumda D nin her noktasında f(z) = g(z) dir.

İspat :



D nin herhangi bir z noktasında $f(z) = g(z)$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için, şekilde görüldüğü gibi z_0 ı z ye, tamamen D ye ait olan bir Jordan eğrisi ile birleştirelim. Bu eğri parçası üzerinde $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n = z$ noktalarını öyle seçelimki z_i, merkezi z_{i-1} de olan D ye ait en büyük dairenin içinde kalsın. $f(z)$ ve $g(z)$ limiti z_0 olan bir nokta cümlesinde eşit olduklarından, Teorem 1.2.8 e göre z_0 merkezli D nin en büyük C_0 dairesinde eşittirler. O halde bu dairede bulunan, özel olarak limiti z_1 olan bir nokta cümlesinde de eşittirler. Aynı düşünceyle $f(z)$ ve $g(z)$ merkezi z_1 de bulunan en büyük C_1 dairesinde eşittirler. Ardışık z_i noktaları için aynı şekilde devam edilerek z noktasında $f(z) = g(z)$ bulunur. z noktası herhangi bir nokta olduğundan bütün D de $f(z) = g(z)$ bulunur.

Teorem 1.2.10 : $f(z)$ özdeş olarak sıfır değil ve $f(z)$, z_0 noktasının bir komşuluğunda analitik olsun. Eğer $f(z_0) = 0$ ise, bu durumda $z = z_0$ noktasının delinmiş bir komşuluğunda $f(z)$ nin başka hiçbir sıfırı yoktur. Yani analitik bir fonksiyonun sıfır yerleri ayrıktır.

Tanım 1.2.7 : Kompleks düzlemin tamamında analitik olan bir fonksiyona <u>tam fonksiyon</u> denir.

Teorem 1.2.11 : (Liouville) Sınırlı bir tam fonksiyon sabittir.

İspat : $f(z)$ herhangi bir sınırlı tam fonksiyon olsun. Bu durumda $f(z)$ sınırlı olduğundan kompleks düzlemin her z noktası için $|f(z)| \leqslant M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Bir z_0 noktası için $C_r = \left\{ z : |z - z_0| = r \right\}$ çemberini gözönüne alalım. Cauchy eşitsizliğinden

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}$$

dir. Bu durumda $r \to \infty$ için $f'(z_0) = 0$ dır. z_0 herhangi bir nokta olduğundan kompleks düzlemin her z noktasında $f'(z_0) = 0$ dır. Dolayısıyla f(z) sabittir.

1.3. Genel Topoloji

Tanım 1.3.1 : X, boş olmayan bir cümle ve X in altcümlelerinin bir kolleksiyonu $\mathcal{T}$ olsun. Eğer

(i) $\emptyset$ ve X, $\mathcal{T}$ ya aittir,

(ii) $\mathcal{T}$ ya ait herhangi sayıda elemanların birleşimi yine $\mathcal{T}$ ya aittir,

(iii) $\mathcal{T}$ ya ait sonlu sayıda elemanların kesişimi yine ya aittir

özellikleri sağlanıyorsa $\mathcal{T}$ ya X için bir <u>topoloji</u> ve $(X,\mathcal{T})$ ikilisinede bir <u>topolojik uzay</u> denir. Bu uzay kısaca X ile gösterilir

Tanım 1.3.2 : $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Bu durumda nun elemanlarına X topolojik uzayının <u>açık cümleleri</u> denir. Buna göre,

(i) $\emptyset$ ve X açıktır,

(ii) açık cümlelerin herhangi birleşimi açıktır,

(iii) açık cümlelerin sonlu kesişimi açıktır.

Tanım 1.3.3 : X bir topolojik uzay olsun. X in farklı herhangi iki x ve y elemanı için $x \in U$, $y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde X de U ve V açık cümleleri varsa, bu durumda X e Hausdorff uzayı denir.

Tanım 1.3.4 : X bir topolojik uzay olsun. X in bir A altcümlesinin kapalı olması için X-A nın açık olması gerekir. Buna göre

(i) $\emptyset$ ve X kapalıdır,

(ii) kapalı cümlelerin sonlu birleşimi kapalıdır,

(iii) kapalı cümlelerin herhangi sayıdaki kesişimi kapalıdır.

Tanım 1.3.5 : X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ herhangi bir alt cümle olsun. Bu durumda A yı kapsayan en küçük kapalı cumleye A nın kapanışı denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir. A nın kapalı olması için gerek ve yeter koşul $A = \bar{A}$ olmasıdır.

Teorem 1.3.1 : X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $x \in \bar{A}$ olması için gerek ve yeter koşul x i içeren bir U açık cümlesi için $U \cap A \neq \emptyset$ olmasıdır.

Tanım 1.3.6 : X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $x \in A$ için $x \in U \subset A$ olacak biçimde bir U açık cümlesi varsa, bu durumda A ya x in bir komşuluğu denir.

Tanım 1.3.7 : X bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. Eğer A cümlesi x in bir komşuluğu ise, bu durumda x e A nın bir iç noktası denir. A nın tüm iç noktalarının cümlesine A nın içi denir ve A° ile gösterilir. Buna göre A° cümlesi A nın kapsadığı en büyük açık cümledir. Ayrıca A nın açık olması için gerek ve yeter koşul $A = A^{\circ}$ olmasıdır.

Tanım 1.3.8 : X bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. Eğer V, x in bir komşuluğu ise, bu durumda $V-\{x\}$ cümlesine x in bir <u>delinmiş komşuluğu</u> denir. A, X in herhangi bir altcümlesi olmak üzere eğer x in delinmiş her komşuluğu A dan en az bir nokta içeriyorsa, bu durumda x e A nın bir <u>yığılma noktası</u> denir. Yığılma noktalarının cümlesine A nın <u>türetilen cümlesi</u> denir ve A' ile gösterilir. A nın yığılma noktası olmayan noktalarına <u>ayrık nokta</u> denir.

Teorem 1.3.2 : X bir topolojik uzay ve A, X in herhangi bir altcümlesi olsun. Bu durumda

(i) $\bar{A} = A \cup A'$,

(ii) A nın kapalı olması için gerek ve yeter koşul $A' \subset A$ olmasıdır. Yani, kapalı bir cümle tüm yığılma noktalarını içerir.

Tanım 1.3.9 : (X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{B}$, X in açık altcümlelerinin bir kolleksiyonu, yani $\mathcal{B} \subset \tau$ olsun. Eğer τ nun her elemanı $\mathcal{B}$ nin elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa, bu durumda $\mathcal{B}$ ye τ topolojisi için bir <u>taban</u> denir.

Tanım 1.3.11 : (X,τ) bir topolojik uzay ve Y , X in bir altcümlesi olsun. Bu durumda

$$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$$

kolleksiyonu Y üzerinde bir topolojidir, bu topolojiye <u>altuzay topolojisi</u> veya <u>rölatif topoloji</u> denir. (Y,τ_Y) ikilisine (X,τ) nun altuzayı denir.

Tanım 1.3.11 : X bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. x i içeren açık cümlelerin kolleksiyonunu $\mathcal{B}_x$ ile gösterelim. Eğer x i içeren her açık cümle $\mathcal{B}_x$ in en az bir elemanını kapsıyorsa, bu durumda $\mathcal{B}_x$ e x için lokal taban denir.

Tanım 1.3.12 : X ve Y iki topolojik uzay olsun. Bu iki topolojik uzayın toplamı $X \cup Y$ ile gösterilir. $X \cup Y$ nin açık cümlelerinin X ve Y ile arakesitleri açık cümlelerdir. X ve Y nin topolojik çarpımı ise $X \times Y$ ile gösterilir. Bu çarpım uzayının noktaları $x \in X$ ve $y \in Y$ olmak üzere (x,y) sıralı çiftleridir. $X \times Y$ nin açık cümleleri için bir taban, $U \subset X$, $V \subset Y$ açık cümleler olmak üzere $U \times V$ biçimindeki cümlelerden meydana gelir.

Tanım 1.3.13 : X bir topolojik uzay olsun. Eğer X kendisinden ve boştan farklı ayrık ve açık iki cümlenin birleşimi olarak yazılamıyorsa, bu durumda X uzayına irtibatlıdır denir.

Teorem 1.3.3 : Bir X topolojik uzayının irtibatlı olması için gerek ve yeter koşul kendisinden ve boştan farklı hem açık hemde kapalı hiçbir altcümlesinin bulunmamasıdır.

Teorem 1.3.4 : X bir topolojik uzay A_0, $\{A_i\}_{i \in I}$, X in irtibatlı altcümleleri olsunlar. Eğer her $i \in I$ için $A_0 \cap A_i \neq \emptyset$ oluyorsa, bu durumda $A_0 \cup (\bigcup_{i \in I} A_i)$ cümlesi irtibatlıdır.

Tanım 1.3.14 : X bir topolojik uzay olsun. Eğer X irtibatlı cümlelerden meydana gelen bir tabana sahip ise, bu durumda X e <u>lokal irtibatlıdır</u> denir. Yani, X in herbir noktası irtibatlı bir cümleye aittir.

Tanım 1.3.15 : X bir topolojik uzay, I bir indis cümlesi ve $\{U_i\}_{i\in I}$, X in açık cümlelerinin bir kolleksiyonu olsun. Eğer $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ oluyorsa, bu durumda $\{U_i\}_{i\in I}$ kolleksiyonuna X in bir <u>açık örtüsü</u> denir. Yani, X in herbir noktası en az bir U_i açık cümlesinde bulunur.

Tanım 1.3.16 : X bir topolojik uzay olsun. Eğer X in her açık örtüsü sonlu bir altörtü içeriyorsa, bu durumda X uzayına <u>kompakttır</u> denir. Yani, her $\{U_i\}_{i\in I}$ açık örtüsü için $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ olacak biçimde $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \{U_i\}_{i\in I}$ açık cümleleri vardır.

Teorem 1.3.5 : Bir Hausdorff uzayının herbir kompakt altcümlesi kapalıdır.

Teorem 1.3.6 : Bir kompakt uzayın herbir kapalı altcümlesi kompakttır.

Teorem 1.3.7 : X bir kompakt uzay ve A, X in sonsuz sayıda nokta içeren bir altcümlesi olsun. Bu durumda $A' \neq \emptyset$ dir. Yani, X in herbir sonsuz altcümlesinin X de bir yığılma noktası vardır.

Tanım 1.3.17 : X bir topolojik uzay olsun. Eğer her X in herbir x noktasının bir kompakt komşuluğu varsa, bu durumda X uzayına <u>lokal kompakttır</u> denir.

Tanım 1.3.18 : $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Eğer X in herbir noktası sayılabilir bir lokal tabana sahip ise, bu durumda X uzayına <u>birinci sayılabilirdir</u> denir. Eğer $\mathcal{T}$ topolojisi için sayılabilir bir taban varsa, bu durumda X uzayına <u>ikinci sayılabilirdir</u> denir.

Teorem 1.3.8 : Eğer bir topolojik uzay ikinci sayılabilir ise, bu durumda birinci sayılabilirdir.

Tanım 1.3.19 : X ve Y iki topolojik uzay, $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $x \in X$ için $f(x) = y \in Y$ noktasının herbir V komşuluğuna karşılık x in bir U komşuluğu var ve $f(U) \subset V$ oluyorsa, bu durumda f fonksiyonuna x noktasında <u>süreklidir</u> denir. Eğer f,X in her noktasında sürekli ise, bu durumda X üzerinde süreklidir denir.

Teorem 1.3.9 : $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f nin X üzerinde sürekli olması için gerek ve yeter koşul Y deki her açık cümlenin ters görüntüsünün X de açık olmasıdır.

Teorem 1.3.10 : X, birinci sayılabilir bir topolojik uzay ve Y herhangi bir topolojik uzay olsun. Bu durumda X den Y içine bir f fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşul X de $x_n \longrightarrow x$ olacak şekilde her (x_n) dizisi için Y de $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ olmasıdır.

Tanım 1.3.20 : X ve Y iki topolojik uzay, $f : X \longrightarrow Y$ içine bir fonksiyon olsun. Eğer f bire-bir, üzerine, f ve f^{-1} ters fonksiyonu sürekli iseler, bu durumda f ye <u>topolojik dönüşüm</u> veya <u>homeomorfizm</u> denir.

Teorem 1.3.11 : X ve Y iki topolojik uzay ve f, X den Y içine bir sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda f altında irtibatlı bir cümlenin görüntüsü irtibatlıdır.

Teorem 1.2.12 : X ve Y iki topolojik uzay ve f, X den Y içine sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f altında kompakt bir cümlenin görüntüsü kompakttır.

Tanım 1.3.21 : X ve Y iki topolojik uzay ve f, X den Y içine bir fonksiyon olsun. Eğer f altında açık bir cümlenin görüntüsü açık ise, bu durumda f ye <u>açık dönüşüm</u> denir.

Tanım 1.3.22 : X ve Y iki topolojik uzay ve f, X den Y içine bir fonksiyon olsun. Eğer f altında kompakt bir cümlenin görüntüsünün kapanışı kompakt ise, bu durumda f ye <u>kompakt dönüşüm</u> denir.

Tanım 1.3.23 : X bir topolojik uzay olsun. Eğer $f : [0,1] \longrightarrow X$ fonksiyonu sürekli ise, bu durumda f ye X üzerinde bir <u>eğri</u> denir. f(0) ve f(1) noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir. Eğer f, bir homeomorfizm ise, bu durumda f ye <u>Jordan eğrisi</u> denir.

Tanım 1.3.24 : X bir topolojik uzay olsun. Eğer X in herhangi iki noktası, tamamen X de kalan bir eğri ile birleştirilebiliyorsa, bu durumda X e <u>eğrisel irtibatlıdır</u> denir.

Teorem 1.3.13 : X bir topolojik uzay olsun. Eğer X eğrisel irtibatlı ise, bu durumda irtibatlıdır.

Tanım 1.3.25 : $X \neq \emptyset$ bir cümle ve $d: X \times X \longrightarrow R$ reel-değerli uzaklık fonksiyonu olsun. Eğer her $x,y,z \in X$ için

(i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$,

(iii) $d(x,z) \leqq d(x,y) + d(y,z)$

özellikleri sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve (X,d) ikilisine bir metrik uzay denir.

Tanım 1.3.26 : (X,d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve $r > 0$ bir sabit olsun. Bu durumda $B(x,r) = \{ y \in X : d(x,y) < r \}$ cümlesine bir açık yuvar denir.

Tanım 1.3.27 : (X,d) bir metrik uzay ve $G \subset X$ olsun. Eğer G nın her x noktası için $B(x,r) \subset G$ olacak biçimde bir $r > 0$ varsa, bu durumda G ye açık cümle denir.

Tanım 1.3.28 : M irtibatlı bir Hausdorff uzayı olsun. Eğer M nin her noktası R^2 öklid düzleminde bir açık cümleye homeomorf olacak biçimde bir açık cümle tarafından kapsanırsa, bu durumda M ye iki-boyutlu manifold adı verilir.

Tanım 1.3.29 : M iki-boyutlu bir manifold olsun. Eğer

i) bir I indeks cümlesi için $\{ U_i : i \quad I \}$, M nin bir açık örtüsü ve θ_i, U_i den z-kompleks düzleminde bir açık cümle üzerine bir homeomorfizm olmak üzere bir $\{ (U_i, \theta_i) : i \quad I \}$ kolleksiyonu bulunabilirse

ve

(ii) U_i, U_j açık cümlelerinin birbirini kısmen örtmeleri durumunda $\theta_j o \theta_i^{-1}$, $\theta_i(U_i \cap U_j)$ den $\theta_j(U_i \cap U_j)$ üzerine yön-koruyan bir konform dönüşüm, yani $w = (\theta_j o \theta_i^{-1})(z) = f(z)$, $\theta_i(U_i \cap U_j)$ üzerinde z nin bir analitik fonksiyonu ise

bu durumda M ye (kompleks) analitik manifold veya (soyut) Riemann yüzeyi denir. Burada $\{(U_i, \theta_i) : i \in I\}$ kolleksiyonu M manifoldu üzerinde bir analitik yapı tanımlar deriz. Ayrıca yukarıdaki (i) ve (ii) koşullarının sağlandığı bir başka $\{V_j : j \in J\}$ açık örtüsü ve j J için V_j den z-kompleks düzlemi içine ψ_j homeomorfizmler sistemi verildiğinde M manifoldu üzerinde bir diğer analitik yapı tanımlanmış olacaktır. Eğer $\{U_i : i \in I\}$ ve $\{V_j : j \in J\}$ deki tüm açık cümlelerin birleşimi ile elde edilen, M nin açık örtüsü ve üzerindeki açık cümlelere karşı gelen θ_i, ψ_j dönüşümleri yukarıdaki (i) ve (ii) koşullarını sağlarsa, bu durumda bu iki analitik yapı aynıdır veya aynı Riemann yüzeyini tanımlar denir.

Tanım 1.3.30 : Kompakt olmayan bir Riemann yüzeyine açık Riemann yüzeyi denir.

Tanım 1.3.31 : M bir Riemann yüzeyi olsun. Eğer M üzerinde $(U, \theta) \in \{(U_i, \theta_i) : i \in I\}$ ve $p_0 \in U$ ise, bu durumda $z = \theta(p)$, U daki p_0 komşuluğunda bir lokal parametredir denir. Fakat p_0 birden çok U_i cümleleri tarafından içerilebileceğinden p_0 komşuluğunda birçok farklı lokal parametreler bulunabilir. Ayrıca şu şekilde yeni lokal parametreler de elde etmek mümkündür : $\theta(p) = z$, U daki p_0 ın komşuluğunda bir lokal parametre ve $w = f(z)$, $\theta(U)$ dan w-düzleminde bulunan bir açık cümle üzerine herhangi bir bire-bir konform dönüşüm olsun. Bu durumda $f(\theta(p)) = w$, p_0 komşuluğunda bir lokal parametredir. Özel olarak eğer $\theta(p_0) = z_0$ ise, bu durumda yeteri kadar küçük bir r pozitif sayısı için $|z - z_0| \leq r$ dairesi $\theta(U)$ tarafından içerilir ve $w = \frac{z-z_0}{r}$ alındığında $\psi(p_0) = 0$, $|w| \leq 1$ olacak biçimde yeni bir $w = \psi(p)$ lokal parmetresi elde edilmiş olur. Böylece M nin yapısı değişmemiş olacaktır.

Tanım 1.3.32 : M bir Riemann yüzeyi ve f, M üzerinde bir kompleks fonksiyon olsun. Eğer $z = \theta(p)$, $\theta(p_0) = 0$, lokal parametresi cinsinden $f(\theta^{-1}(z))$ fonksiyonu bir $r > 0$ ve $|z| < r$ için z nin bir analitik fonksiyonu, yani

$$f(\theta^{-1}(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ise, bu durumda f fonksiyonuna p_0 noktasında analitik veya holomorfiktir denir.

Farklı bir lokal koordinat sistemine geçildiğinde yeni parametre z ve bir analitik fonksiyon yardımı ile bağlı bulunacağından ve her analitik fonksiyonun analitik fonksiyonu (yani analitik fonksiyonların bileşkesi) yine bir analitik fonksiyon olacağından, yukarıdaki tanım lokal koordinat sisteminin seçiminde değişmez olacaktır.

Tanım 1.3.33 : Bir M Riemann yüzeyinin her noktasında holomorfik olan komleks-değerli bir f fonksiyonuna M üzerinde holomorfiktir denir.

Buraya kadar bir Riemann yüzeyi üzerinde tanımlı kompleks-değerli fonksiyonları gözönüne aldık; yani bunlar bir Riemann yüzeyini kompleks düzlem içine dönüştüren fonksiyonlardı.

Şimdi ise, bir M_1 Riemann yüzeyi üzerinde tanımlı olan ve değerlerini bir başka M_2 Riemann yüzeyi üzerinde alan fonksiyonları gözönüne alacağız.

Tanım 1.3.34 : M_1 ve M_2 iki Riemann yüzeyi ve f, M_1 den M_2 içine bir fonksiyon olsun. $P_o \in M_1$ ve $f(P_o) = Q_o$ olmak üzere $z = \theta(P)$ yi P_o komşuluğunda bir lokal parametre ve $w = \psi(Q)$ yu Q_o komşuluğunda bir lokal parametre olarak alabiliriz. Eğer

$$w = \psi(f(\theta^{-1}(z))) = g(z)$$

bileşke fonksiyonu her $P_o \in M_1$, için z nin bir analitik fonksiyonu ise bu durumda f ye <u>M_1 üzerinde analitiktir</u> denir.

Tanım 1.3.35 : M_1 ve M_2 herhangi iki Riemann yüzeyi olsun. Eğer M_1 den M_2 üzerine bir f bire-bir analitik dönüşümü varsa, bu durumda M_1 ve M_2 ye <u>konform eşdeğerdir</u> denir.

Teorem 1.3.14 : M bir Riemann yüzeyi olsun. Bu durumda her p M için, birtek basit sıfır noktası p olan ve M- p de sıfırdan farklı, M üzerinde analitik bir f fonksiyonu vardır|4|.

Teorem 1.3.15 : Herbir Riemann yüzeyi bir sayılabilir tabana sahiptir.

2. KOMPLEKS DÜZLEMİN HERHANGİ ALTCÜMLESİ ÜZERİNDE ANALİTİK FONKSİYONLARIN HALKALARI

Çalışmamızın bu bölümü iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda kompleks düzlemin açık olmayan herhangi bir altcümlesi üzerinde analitik fonksiyonların nasıl tanımlandığı Minda'nın |8| makalesinden yararlanılarak incelenecektir. İkinci kısımda Su'nun |13| makalesi ışığında, kompleks düzlemin herhangi altcümlesi üzerinde tanımlı tüm tek-değerli analitik fonksiyonların halkaları vasıtasıyla konform eşdeğerliliğin cebirsel karekterizasyonu verilecektir.

2.1. Kompleks Düzlemin Açık Olmayan Altcümleleri Üzerinde Analitik Fonksiyonlar

İlk olarak tanım bölgesi, $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde bir açık cümle olan bir analitik fonksiyonun tanımını hatırlayalım.

Tanım 2.1.1 : $\mathbb{C}$ de bir U açık altcümlesi ve $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bir $a \in U$ noktası için eğer a nın bir komşuluğunda toplamı f ye eşit olan, yakınsaklık yarıçapına sahip bir $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ kuvvet serisi varsa, bu durumda f ye <u>a da analitiktir</u> denir. Eğer f, U nun herbir noktasında analitik ise, bu durumda f ye <u>U üzerinde analitiktir</u> denir.

Herhangi bir $A \subset \mathbb{C}$ cümlesi için analitikliği tanımlamada biri lokal diğeri global olmak üzere iki yol vardır :

Tanım 2.1.2 : Herhangi bir $A \subset \mathbb{C}$ cümlesi ve $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda

(i) eğer bir $U \supset A$ açık cümlesi ve U üzerinde analitik olan bir F fonksiyonu var ve $F|A = f$ ise bu durumda f ye A üzerinde <u>analitik</u> veya <u>global analitiktir</u> denir.

(ii) eğer her a A için a nın bir N_a komşuluğu ve a da analitik olan bir $F_a : N_a \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu var öyleki F_a ve f, $N_a \cap A$ üzerinde eşit oluyorsa, bu durumda f fonksiyonuna A üzerinde <u>lokal analitiktir</u> denir.

Uyarı 2.1.1 : Yukarıdaki tanımın (i) kısmındaki analitiklik kavramı, bir $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu için alışılmış yoldan tanımlanmıştır. (ii) ise, A nın açık olması durumunda tanımlanan analitiklik kavramına benzerdir. Ayrıca (ii) tanımı "a nın bir V_a açık komşuluğu ve V_a üzerinde öyle bir F_a analitik fonksiyonu vardır ki

$$F_a|(V_a \cap A) = f|(V_a \cap A)$$

dır" gerektirmesine eşdeğerdir.

Teorem 2.1.1 : Herhangi bir $A \subset \mathbb{C}$ cümlesi ve $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda f nin A üzerinde global analitik olması için gerek ve yeter koşul f nin A üzerinde lokal analitik olmasıdır.

İspat : f, A üzerinde global analitik olsun. bu durumda bir $U \supset A$ açık cümlesi ve U da analitik olan öyle bir F fonksiyonu vardır ki $F|A = f$ dir. U açık olduğundan U nun herbir noktası bir iç noktadır. Dolayısıyla her a A için bir $V_a \subset U$ açık altcümlesi vardır. F, U üzerinde analitik olduğundan V_a üzerinde de analitiktir. Yani, V_a üzerinde bir $F_a : V_a \longrightarrow \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu vardır ve $F|V_a = F_a$ dır. Buradan

$$F|(V_a \cap A) = F_a|(V_a \cap A) = f|(V_a \cap A)$$

dır. Bu f nin a da analitik olduğunu göstermektedir. A nın her elemanı için bu yazılabileceğinden f, A üzerinde lokal analitiktir.

Şimdi, bunun karşıtının ispatında gerekecek olan "$\mathbb{C}$ nin herhangi bir A altcümlesi için A', A nın türetilen cümlesi olmak üzere, eğer W, $\mathbb{C}$ de $A \cap A' \subset W$ olacak şekilde bir açık cümle ise, bu durumda öyle bir $V \subset W$ açık cümlesi vardır ki $A \cap A' \subset V$ ve $A \cap \partial V = \emptyset$ dir" önermesini ispatlayalım.

Eğer $A \cap \partial W = \emptyset$ ise basit olarak $V = W$ alırız, böylece iddia sağlanır. $A \cap \partial W \neq \emptyset$ olsun. $A = (A \cap A') \cup (A - A')$ ve $A \cap A' \subset W$ olduğundan $A \cap \partial W = (A - A') \cap \partial W$ dir. $A - A'$ cümlesi sayılabilirdir çünkü $A - A'$ nün herbir noktası ayrıktır. Ayrıca herbir $a \in A - A'$ için öyle bir $r_a > 0$ vardır ki $B(a, r_a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r_a\}$ cümleleri çiftsel ayrıktır ve $\overline{B(a, r_a)} \cap A = \{a\}$ dır. $(A - A') \cap \partial W = a_i : i \; I$ olsun. Burada I indeks cümlesi ya sonludur yada $I = \mathbb{N}$ dir. İkinci durumda $r_i = r_{a_i}$ seçeriz böylece $i \longrightarrow \infty$ iken $r_i \longrightarrow 0$ dır.

$B_i = B(a_i, r_i)$, $B = \bigcup_{i \in I} B_i$ ve $V = W - \overline{B}$ koyalım. Bu durumda V bir açık cümledir.

Şimdi $a \in A$ ise $a \notin \partial B$ olması gerektiğini gösterelim. Eğer a hem A nın hemde ∂B nin elemanı ise, bu durumda B de öyle bir $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisi vardır ki $z_n \longrightarrow a$ dır. Eğer n nin sonsuz çokluktaki değerleri için $z_n \in B_i$ olacak şekilde bir $i \in I$ varsa, bu durumda $a \in \overline{B}_i$ tır. Bu ise $a = a_i$ olmasını gerektirir. a_i, B nin bir iç noktası olduğundan bu mümkün değildir. Aksi halde I sonsuz olmalı ve herbir B_i diziden sadece sonlu sayıda terim içermelidir. Bu durumda öyle bir $(z_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ altdizisi bulabiliriz ki $z_{n_j} \in B_{i_j}$ ve $i_j < i_{j+1}$ dir. $r_i \longrightarrow 0$ olduğundan bu $z_{n_j} - a_{i_j} \longrightarrow 0$ ve $a_{i_j} \longrightarrow a$ olmasını gerektirir. Buradan $a \in A'$ olur. Bütün a_i ler ∂W kapalı cümlesine ait olduğundan a, ∂W nin elemanıdır. Dolayısıyla $a \in \partial W \cap A \cap A' = \emptyset$ dir. Bu çelişkiden dolayı $A \cap \partial B = \emptyset$ dir. Sonuç olarak $A \cap \bar{B} = \{a_i : i \in I\}$ dir ve bu da $A \cap A \subset V$ olduğunu gösterir. Şimdi $A \cap \partial V = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $\partial V \subset \partial W \cup \partial B$ ve $A \cap \partial B = \emptyset$ olduğundan $A \cap \partial V \subset \{a_i : i \in I\}$ dir. Fakat herbir $a_i \in B$ idi böylece $a_i \notin \partial V$ dir. Dolayısıyla $A \cap \partial V = \emptyset$ dir.

Şimdi teoremin ispatını tamamlamak için f nin A üzerinde lokal analitik olduğunu kabul edelim. Bu durumda herbir $a \in A$ için bir $r_a > 0$ ve $B(a,r_a)$ üzerinde analitik olan öyle bir F_a fonksiyonu vardır ki her $z \in B(a,r_a) \cap A$ için $F_a(z) = f(z)$ dir.

$$W = \bigcup_{a \in A \cap A'} B(a, \tfrac{1}{2} r_a)$$

olsun. Bu durumda W bir açık cümle ve $A \cap A' \subset W$ dir. $G : W \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunu şöyle tanımlayalım : Herbir $z \in W$ için bir $a \in A \cap A'$ vardır öyleki $z \in B(a,\frac{1}{2} r_a)$ dır; $G(z) = F_a(z)$ koyalım. G fonksiyonu iyi-tanımlıdır: $a,b \in A \cap A'$ ve $z \in B(a,\frac{1}{2} r_a) \cap B(b,\frac{1}{2} r_b)$ olsun $r_a \leq r_b$ olduğunu kabul etmemiz genelliği bozmaz. Bu durumda $a \in B(b,r_b)$ dir. $a \in A'$ ve a nın bir komşuluğunda A üzerinde F_a ve F_b aynı olduğundan, analitik fonksiyonların özdeşlik teoreminden (Teorem 1.2.9) dolayı F_a ve F_b, $B(a,r_a) \cap B(b,r_b)$ üzerinde çakışırlar.Özel olarak $F_a(z) = F_b(z)$ dir. Böylece G iyi tanımlıdır. G, W üzerinde analitiktir : $z \in W$ olsun. Bu durumda öyle bir $a \in A \cap A'$ vardır ki $z \in B(a,\frac{1}{2} r_a)$ ve $F_a(z) = G(z)$ dir. Açık olarak $G|B(a,\frac{1}{2} r_a) = F_a$ dır. Dolayısıyla G,z de analitiktir. Ayrıca $G|(W \cap A) = f|(W \cap A)$ dır.

Yukarıda ispatladığımız önermeden dolayı öyle bir V açık cümlesi bulabiliriz ki $A \cap A' \subset V \subset W$ ve $A \cap \partial V = \emptyset$.A nın herbir noktası ya V de yada $\mathbb{C} - \bar{V}$ da bulunur ve A nın $\mathbb{C} - \bar{V}$ daki herbir noktası ayrıktır. $\mathbb{C} - \bar{V}$ açık olduğundan herbir $a \in A \cap (\mathbb{C} - \bar{V})$ için öyle bir

$R_a > 0$ bulabiliriz ki $B(a,R_a) \subset \mathbb{C} - \bar{V}$ ve $B(a,R_a)$ cümleleri çiftsel ayrıktır. Herbir $a \in A \cap (\mathbb{C} - \bar{V})$ için $F_a(a) = f(a)$ olacak şekilde $B(a,R_a)$ üzerinde analitik olan F_a fonksiyonu bulunur.

$U = V \cup \bigcup_{a \in A \cap (\mathbb{C} - \bar{V})} B(a,R_a)$ olsun ve $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunu $F|V = G|V$ ve $a \in A \cap (\mathbb{C} - \bar{V})$ için $F|B(a,R_a) = F_a$ ile tanımlayalım. Bu durumda F, U üzerinde analitik ve $F|(U \cap A) = f$ dir. Dolayısıyla f, A üzerinde global analitiktir.

2.2. Kompleks Düzlemin Herhangi Altcümlesi Üzerinde Analitik Fonksiyonların Halkaları

Tanım 2.2.1 : X ve Y, $\mathbb{C}$ kompleks düzleminin herhangi iki altcümlesi ve τ, X den Y içine bir dönüşüm olsun. Eğer τ, X üzerinde analitik ve değerlerini Y de alan bir fonksiyon ise, bu durumda τ ya analitik dönüşüm denir. Eğer τ analitik, bire-bir ve üzerine ise, bu durumda τ ya konform dönüşüm denir. $\mathbb{C}$ nin herhangi iki X ve Y altcümleleri için, eğer X den Y üzerine bir bire-bir konform dönüşüm varsa, bu durumda X ve Y konform eşdeğerdir denir.

Lemma 2.2.1 : X, $\mathbb{C}$ nin herhangi bir altcümlesi ve $H(X)$, X üzerinde tanımlı tüm tek-değerli analitik fonksiyonların cümlesi olsun. Bu durumda $H(X)$, üzerinde tanımlanan noktasal toplama ve çarpma işlemlerine göre bir tamlık bölgesidir.

İspat : $H(X)$ üzerinde noktasal toplama ve çarpma işlemlerini $f,g \in H(X)$ ve $z \in X$ olmak üzere

$$(f + g)(z) = f(z) + g(z)$$

ve

$$(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z)$$

biçiminde tanımlayalım. Ayrıca $0 \in H(X)$ ve $1 \in H(X)$ sırasıyla X üzerinde sıfır ve bire özdeş olan fonksiyonlardır; yani, her $z \in X$ için $0(z) = 0$ ve $1(z) = 1$ dir. $\mathbb{C}$ bir cisim olduğundan $H(X)$, özdeş elemanlı, değişmeli bir halkadır. Üstelik $H(X)$ in hiçbir sıfır böleni olmadığından bir tamlık bölgesidir. Gerçekten,

$$(f \, . \, g)(z) = f(z) \, . \, g(z) = 0$$

olması için gerek ve yeter koşul $f(z) = 0$ veya $g(z) = 0$ olmasıdır.

Tanım 2.2.2 : X, $\mathbb{C}$ nin herhangi bir altcümlesi ve $H(X)$, X üzerinde tanımlı tüm tek-değerli analitik fonksiyonların halkası ve $f \in H(X)-\{0\}$ olsun. Bu durumda $S(f) = \{ z \in X : f(z) = 0 \}$ cümlesine <u>f nin sıfır cümlesi</u> denir. $S(f)$ bir cebirsel çümle olarak alınır, yani f nin herbir sıfırı $S(f)$ de, katlılığının sayısı kadar gözükür. f nin herbir sıfırı ayrık (böylece sayılabilir) olduğundan, $y_i \in \mathbb{N}$ ve [illegible] olmak üzere

$$S(f) = \sum_{i=1}^{N} y_i z_i$$

yazabiliriz. Eğer $f \in H(X)$ ve $S(f) = \emptyset$ ise, bu durumda f ye <u>birim</u> denir. f birim ise $1/_f$ $H(X)$ dir.

Tanım 2.2.3 : I, $H(X)$ in bir ideali (Tanım 1.1.8) olsun. Eğer $\bigcap_{f \in I} S(f) \neq \emptyset$ ise, yani I ideali en az bir ortak noktada sıfır yeri olan fonksiyonların meydana getirdiği bir ideal ise, bu durumda I ye <u>sabit ideal</u> denir. Aksi halde I ye <u>serbest ideal</u> denir.

Lemma 2.2.2 : Her $p \in X$ için $M_p = \{ f \in H(X) : f(p) = 0 \}$ cümlesi, $H(X)$ in $f_0(z) = z - p$ fonksiyonu tarafından üretilen maksimal esas idealidir.

İspat : İlk olarak M_p nin $H(X)$ in bir ideali olduğunu gösterelim. $f, g \in M_p$ olsun. Bu durumda $p \in X$ için

$$(f - g)(p) = f(p) - g(p) = 0$$

olduğundan $f - g \in M_p$ dir. $f \in M_p$ ve $h \in H(X)$ olsun. Bu durumda

$$(f \,.\, h)(p) = f(p) - g(p) = 0 \,.\, h(p) = 0$$

olduğundan $f \,.\, h \in M_p$ dir. Dolayısıyla M_p, $H(X)$ in bir idealidir. Şimdi X üzerinde tanımlı $f_o(p) = z - p$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $f_o(p) = 0$ olduğundan $f_o \in M_p$ dir. M_p nin her f elemanı için $g \in H(X)$ olmak üzere

$$f(z) = (z - p) \,.\, g(z)$$

biçiminde yazılabileceğinden $f = f_o . g$ dir. Dolayısıyla f_o fonksiyonu M_p idealini üretir. Yani $M_p = (f_o)$ ve buradan M_p bir esas idealdir. Son olarak M_p esas idealinin maksimal olduğunu gösterelim. $M_p = (f_o)$ idealinin maksimal olmadığını kabul edelim. Bu durumda $(f_o) \subset (g) \neq H(X)$ olacak şekilde bir (g) ideali vardır. $(g) \neq H(X)$ olduğundan g nin X de sıfırı bulunmalıdır. Aksi halde $1/g \in H(X)$ olur ki bu durumda (g) ideali $1 = (1/g)g$ sabitini içerir ve buradan $(g) = H(X)$ olur. Bu bir çelişkidir. $(f_o) \subset (g)$ den dolayı $f_o \in (g)$ dir. Yani öyle bir $h \in H(X)$ vardır ki $f_o = g \,.\, h$ dır. Ancak f_o ın X de p den başka sıfırı olmadığından $g(p) = 0$ dır. Buradan $g \in (f_o)$ dır. Yani $(g) \subset (f_o)$ dır. O halde $(f_o) = (g)$ ve dolayısıyla $M_p = (f_o)$ ideali maksimal esas idealdir.

Lemma 2.2.3 : $p \in X$ için öyle bir $f \in M_p$ fonksiyonu vardır ki $S(f) = \{ p \}$ ve f, M_p den başka hiçbir maksimal ideale ait değildir.

İspat : $f(z) = z - p$ olsun. Bu durumda Lemma 2.2.2 den dolayı $f \in M_p$ ve f nin M_p den başka hiçbir sabit ideale ait olmadığı açıktır. Şimdi M nin $f \in M$ olacak biçimde bir serbest maksimal ideal olduğunu kabul edelim. M serbest olduğundan $g(p) \neq 0$ olacak biçimde bir $g \in M$ fonksiyonu vardır. Böylece $z \in X$ ve $|z - p| < R$ için

$$g(z) = a_o + \sum_{j=o}^{\infty} a_{k-j} (z - p)^{k+j}$$

yazabiliriz. Burada $R > 0$, $a_o \neq 0$, $a_k \neq 0$ ve $k \geq 1$ dir. Böylece bir $h \in H(X)$ için

$$\underline{a_o} = g(z) - (z-p)^{k-1}_{-} \cdot f(z) \cdot h(z)$$

dir. Şimdi $f,g \in M$ ve M bir ideal olduğundan $\underline{a_o} \in M$ dir. Bu ise $a_o \neq 0$ olduğundan mümkün değildir. Dolayısıyla iddia sağlanır.

Lemma 2.2.4 : Eğer ϕ , $H(X)$ den $H(Y)$ üzerine bir izomorfizm ise, bu durumda $\phi(M_p)$ bir sabit maksimal idealdir.

İspat : ϕ bir izomorfizm ve M_p maksimal ideal olduğundan Teorem1.1.10 dan dolayı $\phi(M_p)$ bir maksimal idealdir. Lemma2.2.3 den dolayı öyle bir $f_o \in M_p$ vardır ki $S(f_o) = \{p\}$ ve f_o başka hiçbir maksimal ideale ait değildir. $S(\phi(f_o))$ yi gözönüne alalım. Eğer $S(\phi(f_o)) = \emptyset$ ise, bu durumda $\phi(f_o)$ bir birimdir ve $\phi(M_p)$, $H(Y)$ halkasından başka birşey değildir. Bu mümkün değildir Çünkü; $\phi(M_p)$ maksimal ideal olduğundan $\phi(M_p) \subset H(Y)$ dır ve eşit olamaz. Buradan $S(\phi(f_o)) \neq \emptyset$ dir. Amacımız $S(\phi(f_o))$ ın tek elemandan oluştuğunu göstermektir. Aksine, eğer $S(\phi(f_o))$ birden fazla nokta içeriyorsa, örneğin q_1 ve q_2 gibi, bu durumda $\phi(f_o) \in M_{q_1}$ ve $\phi(f_o) \in M_{q_2}$ dir. Böylece f_o en az iki maksimal ideale ait olacaktır ki bu yine mümkün değildir. Buradan bir $q \in Y$ için $S(\phi(f_o)) = \{q\}$ olur. Dolayısıyla $\phi(M_p) = M_q$ sabit idealdir.

Lemma 2.2.5 : $p_1, p_2 \in X$ olmak üzere $M_{p_1} = M_{p_2}$ olması için gerek ve yeter koşul $p_1 = p_2$ olmasıdır.

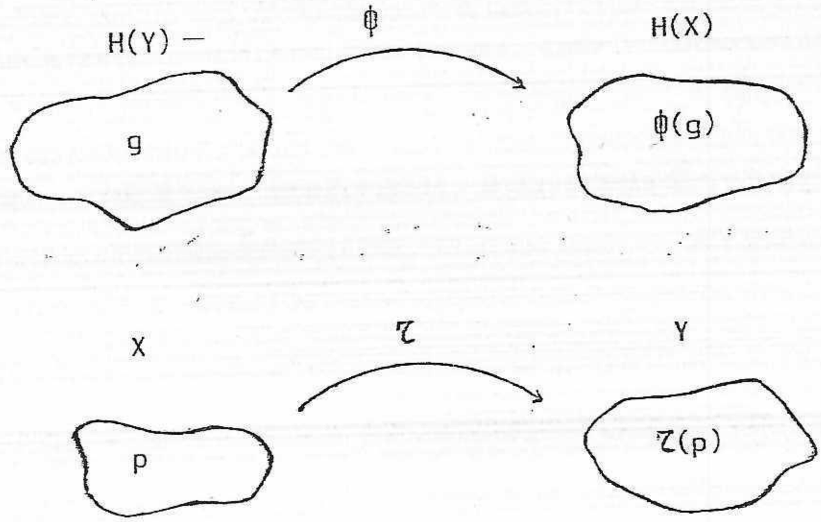
İspat : $p_1 = p_2$ ise $M_{p_1} = M_{p_2}$ olduğu açıktır. Karşıt olarak $M_{p_1} = M_{p_2}$ olsun ve $p_1 \neq p_2$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda öyle bir $f \in H(X)$ fonksiyonu vardır ki $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ ve $a_1 \neq a_2$ için $f(p_1) = a_1$ ve $f(p_2) = a_2$ dir. Buradan $f - a_1 \in M_{p_1}$ dir. Çünkü;

$$(f - a_1)(p_1) = f(p_1) - a_1(p_1) = a_1 - a_1 = 0$$

dır. Fakat $f - a_1 \notin M_p$ dir. $M_{p_1} = M_{p_2}$ aldığımızdan bu bir çelişki-dir. O halde $p_1 = p_2$ dir.

Teorem 2.2.1 : X ve Y, $\mathbb{C}$ nin herhangi iki alt cümlesi ve ϕ, $H(Y)$ den $H(X)$ üzerine, sabitleri sabitlere dönüştüren bir izomorfizm olsun. Bu durumda ϕ, $g \in H(Y)$ olmak üzere $\phi(g) = g \circ \tau$ ile tanımlı bir $\tau : X \longrightarrow Y$ dönüşümü belirtir ve τ, X den Y üzerine bir konform dönüşümdür.

İspat :



Bir $\tau : X \longrightarrow Y$ dönüşümünü $p \in X$ için

$$\tau(p) = \bigcap S[\phi^{-1}(M_p)]$$

ile tanımlayalım. Teorem 1.1.6 dan dolayı ϕ^{-1}, $H(X)$ den $H(Y)$ üzerine bir izomorfizmdir. Lemma 2.2.4 den dolayı $\phi^{-1}(M_p)$, $H(Y)$ de bir sabit maksimal idealdir. Böylece τ tek-değerli bir dönüşümdür ve açık olarak $M_{\tau(p)} = \phi^{-1}(M_p)$ dir. τ bire-birdir. Gerçekten, $p_1, p_2 \in X$ ve $\tau(p_1) = \tau(p_2)$ olsun. Bu durumda $M_{\tau(p_1)} = M_{\tau(p_2)}$ dir. Buradan

$$\phi(M_{\tau(p_1)}) = \phi(M_{\tau(p_2)}) \Longrightarrow M_{p_1} = M_{p_2} \Longrightarrow p_1 = p_2$$

dir Dolayısıyla bire-birdir. τ üzerinedir. Bunu göstermek için

$q \in Y$ alalım. Bu durumda M_q, $H(Y)$ de bir maksimal esas idealdir. Lemma 2.2.4 den dolayı $\phi(M_q)$, $H(X)$ de bir maksimal esas idealdir ve $\phi(M_q) = M_p$ olacak biçimde bir $p \in X$ vardır. Böylece τ nun tanımından $\tau(p) = q$ olur ve dolayısıyla τ üzerinedir. Şimdi herbir $g \in H(Y)$ ve $p \in X$ için $\phi(g)(p) = a$ $(a \in C)$ olsun. Bu durumda $\phi(g) - \underline{a} \in M_p$ ve $g - \phi^{-1}(\underline{a}) \in M_{\tau(p)}$ dir. Böylece

$$g(\tau(p)) = \phi^{-1}(\underline{a})(\tau(p)) = a = \phi(g)(p)$$

ve buradan $\phi(g) = g \circ \tau$ olur. Benzer şekilde herbir $f \in H(X)$ ve $q \in Y$ için $\tau^{-1} : Y \longrightarrow X$ dönüşümü

$$\tau^{-1}(q) = \cap S[\phi(M_q)]$$

ile tanımlıdır ve $\phi^{-1}(f) = f \circ \tau^{-1}$ dir. Eğer Y üzerinde $g(w) = w$ ve X üzerinde $f(z) = z$ seçersek, bu durumda $\tau(p) = g \circ \tau(p)$ ve $\tau^{-1}(q) = f \circ \tau^{-1}(q)$ analitiktir. Dolayısıyla τ, X den Y üzerine bir konform dönüşümdür.

Sonuç Teorem : 2.2.1 : X ve Y, $\mathbb{C}$ nin herhangi iki altcümlesi ve ϕ, $H(Y)$ den $H(X)$ üzerine reel sabitleri reel sabitlere dönüştüren bir izomorfizm olsun. Bu durumda X ve Y sırasıyla $X_1 \cup X_2$ ve $Y_1 \cup Y_2$ biçiminde parçalanabilir öyleki X_1 ve X_2, X de açık ve ayrık, Y_1 ve Y_2, Y de açık ve ayrıktır. Bu durumda X_1, Y_1 ile konform ve X_2, Y_2 ile indirekt konformdur. Burada X_1, X_2, Y_1 ve Y_2 lerden biri boş olabilir.

İspat : Teorem 2.2.1 de olduğu gibi, $p \in X$ için

$$\tau(p) = \cap S[\phi^{-1}(M_p)]$$

ile tanımlı dönüşümü bire-bir ve üzerinedir.

$$|\phi(\underline{i})|^2 = \phi(-1) = -\phi(1) = -1$$

olduğundan $\phi(\underline{i}) = \underline{i}, -\underline{i}$ veya X in hem açık hemde kapalı bir altcümlesi üzerinde, örneğin X_1 üzerinde $\underline{i}$ ve $X_2 = X - X_1$ (bu durumda X_2 de hem açık hemde kapalıdır) üzerinde $-\underline{i}$ dir. Sırasıyla $\phi(\underline{i}) = i$ ve $\phi(\underline{i}) = -i$ ye göre $X_1 = X$ ve $X_2 = X$ koyacağız. Dolayısıyla herhangi bir a sabiti için X_1 üzerinde $\phi(\underline{a}) = \underline{a}$ ve X_2 üzerinde $\phi(\underline{a}) = \overline{\underline{a}}$ dir. Teorem 2.2.1 de kullanılan metoda benzer bir düşünceyle, herbir $g \in H(Y)$ ve $p \in X$ için $\phi(g)(p) = a$ olsun. Bu durumda $\phi(g) - \underline{a} \in M_p$ ve $g - \phi^{-1}(\underline{a}) \in M_{\tau(p)}$ dir. Böylece

$$g(\tau(p)) = \phi^{-1}(\underline{a})(\tau(p)) = a = \phi(g)(p)$$

ve buradan X_1 üzerinde $\phi(g) = g \circ \tau$ olur. Ayrıca herbir $g \in H(Y)$ ve $p \in X_2$ için $\phi(g)(p) = a$ olsun. Bu durumda $\phi(g) - \underline{a} \in M_p$ ve $g - \phi^{-1}(\underline{a}) \in M_{\tau(p)}$ dir. Böylece

$$g(\tau(p)) = \phi^{-1}(\underline{a})(\tau(p)) = \bar{a}$$

ve buradan $\overline{g(\tau(p))} = a = \phi(g)(p)$ dir. O halde X_2 üzerinde $\phi(q) = \overline{g \circ \tau}$ olur. Benzer şekilde herbir $f \in H(X)$ için X_1 üzerinde $\phi^{-1}(f) = f \circ \tau^{-1}$ ve X_2 üzerinde $\phi^{-1}(f) = \overline{f \circ \tau^{-1}}$ olduğunu gösterebiliriz. Eğer X üzerinde $f(z) = z$ ve Y üzerinde $g(w) = w$ seçersek $\tau(p) = g \circ \tau(p)$ ve $\tau^{-1}(q) = f \circ \tau^{-1}(q)$ fonksiyonları $X = X_1$ için analitik, $\tau(p) = \overline{g \circ \tau(p)}$ ve $\tau^{-1}(q) = \overline{g \circ \tau^{-1}(q)}$ fonksiyonları $X = X_2$ için indirekt-analitiktir. Birinci halde konform, ikinci halde ise indirekt-konformdur. Buradan iddia sağlanır.

Teorem 2.2.2 : X ve Y, $\mathbb{C}$ nin herhangi iki altcümlesi ve τ, X den Y üzerine bir konform dönüşüm olsun. Bu durumda τ, $H(Y)$ den $H(X)$ üzerine, herbir $g \in H(Y)$ için $\phi(g) = g \circ \tau$ ile tanımlı, sabitleri sabitlere dönüştüren bir ϕ izomorfizmi belirtir.

İspat : Bir $g \in H(Y)$ için $g \circ \tau$ nun X üzerinde analitik olduğu bilinen bir gerçektir. Yani, $g \circ \tau \in H(X)$ dir. $\phi(g) = g \circ \tau$ ile tanımlı ϕ fonksiyonu $H(Y)$ halkasından $H(X)$ halkası içine bir homomorfizmdir. Gerçekten, herhangi $z \in X$ ve $f,g \in H(Y)$ için

$$\phi(f + g)(z) = (f + g)(\tau(z)) = f(\tau(z)) + g(\tau(z)) =$$

$$\phi(f)(z) + \phi(g)(z) = (\phi(f) + \phi(g))(z)$$

ve

$$\phi(f \,.\, g)(z) = (f \,.\, g)(\tau(z)) = f(\tau(z)) \,.\, g(\tau(z)) =$$

$$\phi(f)(z) \,.\, \phi(g)(z) = (\phi(f) \,.\, \phi(g))(z)$$

olduğundan ϕ, $H(Y)$ ve $H(X)$ üzerinde tanımlı noktasal toplama ve çarpma işlemlerini korumaktadır. Ayrıca ϕ, bire-bir ve üzerinedir. Gerçekten f,g $H(Y)$ için $\phi(f) = \phi(g)$ ise, bu durumda $z \in X$ için $\phi(f)(z) = \phi(g)(z)$ ve buradan $f(\tau(z)) = g(\tau(z))$ dir. Dolayısıyla $f = g$ elde edilir ki bire-birdir. ϕ nin tanımından herbir g $H(Y)$ için X üzerindeki analitik fonksiyonlar $g \circ \tau$ biçiminde yazılabilir, τ konform olduğundan $g \circ \tau$ her $z \in X$ için tanımlıdır. Yani, $H(X)$ deki herbir analitik fonksiyon için öyle bir $g \in H(Y)$ fonksiyonu bulabiliriz ki $\phi(g) = g \circ \tau \in H(X)$ dir. Dolayısıyla ϕ üzerine üzeridir. Böylece ϕ, $H(Y)$ den $H(X)$ üzerine bir izomorfizmdir. Eğer a, Y üzerinde bir sabit fonksiyon ise, bu durumda $\phi(a) = a \circ \tau = a$ olacağı için, ϕ sabitleri kendi üzerine dönüştürür.

3. BİR AÇIK RİEMANN YÜZEYİNİN HERHANGİ ALTCÜMLESİ ÜZERİNDE ANALİTİK FONKSİYONLARIN HALKALARI

Bu bölümde R_1 ve R_2 iki açık Riemann yüzeyi ve X, Y sırasıyla R_1 ve R_2 nin boş olmayan herhangi altcümleleri olmak üzere, X ve Y üzerinde tanımlı tüm tek-değerli analitik fonksiyonların H(X) ve H(Y) halkaları arasında bir izomorfizm varsa, bu durumda X ve Y nin konform eşdeğer olduğunu ispatlayacağız. Bu ispat ilk olarak L. Bers |3| tarafından X ve Y nin açık, düzlem bölgeler olması durumunda yapıldı. X ve Y nin açık Riemann yüzeyleri olması durumunda W. Rudin |11| ve H.L. Royden|10| verilen izomorfizmin kompleks sabitleri değişmez bıraktığını kabul ederek ispatı yaptılar. Nakai|9| ise sabitler için bir önkabul yapmaksızın ispatı yaptı. Bu çalışmada da kompleks sabitler için bir önkabul yapılmayacaktır.

Tanım 3.1.1 : R bir açık Riemann yüzeyi, X, R nin boş olmayan herhangi altcümlesi ve f, X üzerinde tanımlı bir kompleks fonksiyon olsun. Eğer bir $U \supset X$ açık cümlesi ve $F : U \longrightarrow C$, $F|X = f$ olacak şekilde, U üzerinde analitik olan bir F fonksiyonu varsa, bu durumda f ye X üzerinde <u>analitiktir</u> denir. Bu tanıma eşdeğer olarak, her $p \in X$ noktası için p nin bir U_p açık komşuluğu ve $U_p \cap X$ üzerinde f ile çakışık, p de analitik olan bir $F_p : U_p \longrightarrow C$ fonksiyonu varsa, bu durumda f ye X üzerinde analitiktir denir.

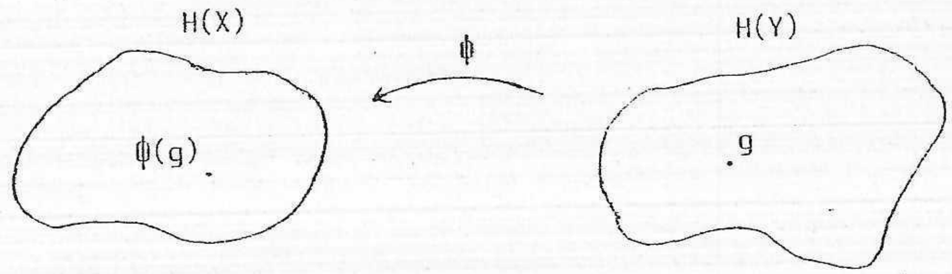
Tanım 3.1.2 : R_1 ve R_2 iki açık Riemann yüzeyi, X ve Y sırasıyla R_1 ve R_2 nin boş olmayan herhangi altcümleleri olsun. Bir $\tau : X \longrightarrow Y$ dönüşümünü gözönüne alalım. Eğer bir $U \supset X$ açık cümlesi ve $F : U \longrightarrow Y$, $F|X = \tau$ olacak şekilde, U üzerinde analitik olan bir F fonksiyonu varsa, bu durumda τ ya X den Y ye bir analitik dönüşüm denir. Bu tanıma eşdeğer olarak eğer her $p \in X$ için p nin bir U_p açık komşuluğu ve $U_p \cap X$ üzerinde τ ile çakışık, p de analitik olan bir $F_p : U_p \longrightarrow Y$ fonksiyonu varsa, bu durumda τ ya analitik dönüşüm denir. Eğer τ analitik, bire-bir ve üzerine ise τ ya konform dönüşüm denir. X ve Y arasında bir konform dönüşüm varsa X ve Y ye konform eşdeğerdir denir.

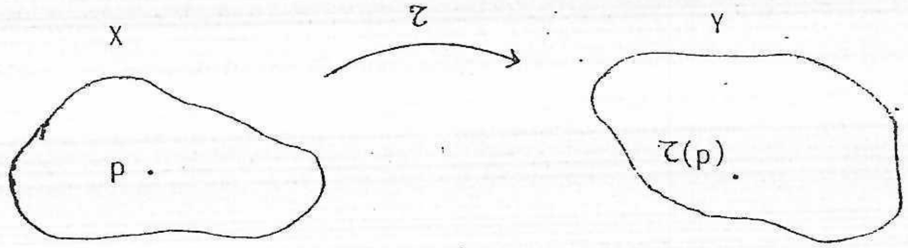
R bir açık Riemann yüzeyi ve X, R nin boş olmayan herhangi bir altcümlesi olmak üzere, X üzerinde tanımlı tüm tek-değerli analitik fonksiyonların cümlesini H(X) ile gösterelim. H(X), üzerinde tanımlı noktasal toplama ve çarpma işlemleri altında bir tamlık bölgesidir. ϕ, H(X) den H(Y) üzerine bir halka izomorfizmi olsun. Bu durumda Teorem 1.1.6 dan dolayı ϕ^{-1} de H(Y) den H(X) üzerine bir halka izomorfizmidir, dolayısıyla $\phi(1) = 1$ olduğu açıktır. Ayrıca $[\phi(i)]^2 = \phi(i).\phi(i) = \phi(-1) = -\phi(1) = -1$ olduğundan $\phi(i) = \pm i$ dir Eğer $\phi(i) = i$ ise, bu durumda ϕ ye direkt halka izomorfizmi, $\phi(i) = -i$ ise indirekt halka izomorfizmi denir.

Bundan böyle X ve Y, sırası ile, R_1 ve R_2 açık Riemann yüzeylerinin boş olmayan herhangi altcümlelerini gösterecektir.

Teorem 3.1.1 : X den Y üzerine bir bire-bir, direkt konform τ dönüşümü varsa, bu durumda τ , H(Y) den H(X) üzerine her $g \in H(Y)$ için $\phi(g) = g \circ \tau$ ile tanımlı ϕ, direkt halka izomorfizmi belirtir. Eğer τ indirekt konform ise ϕ, $\phi(g) = g \circ \bar{\tau}$ ile tanımlı indirekt halka izomorfizmidir.

İspat :





Bir $g \in H(Y)$ için $g \circ \tau$, X üzerinde bir analitik fonksiyondur yani, $g \circ \tau \in H(X)$ dir. Teoremi τ nun direkt olduğu durum için ispatlayalım. τ 'nun indirekt olduğu durum için ispat benzer şekildedir. ϕ bir homomorfizmdir. Gerçekten herhangi $p \in X$ ve $f,g \in H(Y)$ için

$$\phi(f+g)(p) = (f+g)(\tau(p)) = f(\tau(p)) + g(\tau(p)) =$$
$$\phi(f)(p) + \phi(g)(p) = (\phi(f) + \phi(g))(p)$$

ve

$$\phi(fg)(p) = (fg)(\tau(p)) = f(\tau(p))g(\tau(p)) =$$
$$\phi(f)(p)\ \phi(g)(p) = (\phi(f)\ \phi(g))(p)$$

olduğundan ϕ, H(Y) ve H(X) üzerinde tanımlı noktasal toplama ve çarpma işlemlerini korumaktadır. Ayrıca ϕ bire-bir ve üzerinedir. Gerçekten, $f,g \in H(Y)$ için $\phi(f) = \phi(g)$, bu durumda her $p \in X$ için $\phi(f)(p) = \phi(g)(p)$ ve buradan $f(\tau(p)) = g(\tau(p))$ dir. Böylece $f = g$ elde edilir, dolayısıyla τ bire-birdir. ϕ nin tanımından herbir $g \in H(Y)$ için X üzerindeki analitik fonksiyonlar $g \circ \tau$ şeklinde yazılabilir, τ konform olduğundan $g \circ \tau$, her $p \in X$ için tanımlıdır. Yani, H(X) deki herbir analitik fonksiyon için öyle bir $g \in H(Y)$ fonksiyonu bulabiliriz ki $\phi(g) = g \circ \tau \in H(X)$ dir. Buradan ϕ üzerinedir. Dolayısıyla ϕ, $H(Y)$ den $H(X)$ üzerine bir izomorfizmdir. Ayrıca, eğer $\underline{a}$ Y üzerinde bir sabit fonksiyon ise, bu durumda $p \in X$ için

$$\phi(\underline{a})(p) = \underline{a}(\tau(p)) = \underline{a}$$

olacağı için, ϕ sabitleri sabitlere dönüştürür.

Aşağıdaki teorem, Teorem 3.1.1 in karşıtı olup, konform eşdeğerliliğin cebirsel bir karakterizasyonunu vermesi bakımından önemlidir.

Teorem 3.1.2 : R_1 ve R_2 iki açık Riemann yüzeyi ve X,Y sırasıyla R_1 ve R_2 nin boş olmayan herhangi altcümleleri olsun. Eğer $\phi : H(Y) \longrightarrow H(X)$ bir direkt (veya indirekt) halka izomorfizmi ise, bu durumda $\phi(g) = g \circ \tau$ ile tanımlı bir tek bire-bir $\tau : X \longrightarrow Y$ direkt (veya indirekt) konform dönüşümü vardır.

Bu teoremin ispatı aşağıdaki lemmalara dayanır. Bundan böyle kompleks sayılar cismini $\mathbb{C}$ ve kompleks rasyonel sayılar cismini $\mathbb{C}_r$ ile göstereceğiz. Kompleks rasyonel sayı diye, reel ve imajiner kısımları rasyonel sayılar olan kompleks sayılara denir. H(X) ve H(Y) sabit fonksiyonları içerdiğinden $\mathbb{C}_r$ ve $\mathbb{C}$ yi althalka olarak kapsarlar.

Lemma 3.1.3 : Eğer ϕ, H(Y) den H(X) e bir direkt (veya indirekt) halka izomorfizmi ise, bu durumda herhangi bir $a \in \mathbb{C}_r$ için

$$\phi(a) = \phi^{-1}(a) = a \text{ (veya } \bar{a})$$

dir.

İspat : $\phi(1) = \phi^{-1}(1) = 1$ ve $\phi(i) = \phi^{-1}(i) = i$ (veya $-i$) olduğunu biliyoruz. Üstelik $\mathbb{C}_r$ nin herbir elemanı 1 ve i nin bir bileşimi olduğundan her $a \in \mathbb{C}_r$ için

$$\phi(a) = \phi^{-1}(a) = a \quad (\text{veya } \bar{a})$$

elde edilir.

Lemma 3.1.2 : $f \in H(X)$ olsun. Bu durumda $f \in \mathbb{C}$ olması için gerek ve yeter koşul bir $f_a \in H(X)$ ve $a \in \mathbb{C}$ için $f - a = f_a^2$ olmasıdır.

İspat : $f \in \mathbb{C}$ ise açık olarak $f - a = f_a^2$ olacak şekilde bir $f_a^2 \in H(X)$ fonksiyonu bulunabilir. Karşıt olarak $f \notin \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda f nin bire-bir ve analitik olduğu bir $U \subset X$ bölgesi bulunabilir. $f(U)$, $\mathbb{C}$ de açık ve $\bar{\mathbb{C}}_r = \mathbb{C}$ yani $\mathbb{C}_r$, $\mathbb{C}$ de yoğun olduğundan bir $p \in U$ ve $a \in \mathbb{C}_r$ için $f(p) = a$ dır. Halbuki hipotezden dolayı $f = a + f_a^2$ olacak biçimde bir $f_a \in H(X)$ vardır. Dolayısıyla f, p komşuluğunda bire-ikidir ve bu f nin bire-birliğine aykırıdır. Bu çelişki lemmayı ispatlar.

Lemma 3.1.3 : $\phi(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ ve $\phi^{-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ dir, yani ϕ, kompleks sabitleri koruyan bir izomorfizmdir.

İspat : Lemma 3.1.1 den dolayı Lemma 3.1.2 deki özellik ϕ ve ϕ^{-1} tarafından korunur. Gerçekten; eğer $f \in \mathbb{C}$ ise, bu durumda $f - a = f_a^2$ olacak biçimde bir $a \in \mathbb{C}_r$ vardır. Bu durumda

$$\phi(f - a) = \phi(f_a^2) \Longrightarrow \phi(f) - \phi(a) = [\phi(f_a)]^2$$

olup, buradan

$$\phi(f) - a = [\phi(f_a)]^2$$

dir. Lemma 3.1.2 ye göre, $\phi(f) \in \mathbb{C}$ olmalıdır. Dolayısıyla

$$\phi(\mathbb{C}) = \phi^{-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$$

elde edilir.

Şimdi $H(X)$ halkasının ideal yapısını inceleyelim.

Tanım 3.1.3 : Bir $f \in H(X) - \{0\}$ fonksiyonu için $S(f) = \{p \in X : f(p) = 0\}$ cümlesine f nin <u>sıfır cümlesi</u> denir. $S(f)$

bir cebirsel cümledir yani, f nin herbir sıfırı $S(f)$ de katlılığının sayısı kadar gözükür. f nin sıfır yerleri ayrık (böylece sayılabilir) olduğundan $\nu_i \in \mathbb{N}$ ve $n \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ olmak üzere

$$S(f) = \sum_{i=1}^{N} \nu_i p_i$$

yazabiliriz. Eğer $f \in H(X)$ ve $S(f) = \emptyset$ ise, bu durumda f ye <u>birim</u> denir ve $1/f \in H(X)$ olur |7|.

Lemma 3.1.4 : Herhangi bir $p \in X$ için $M_p = \{ f \in H(X) : f(p)=0 \}$ cümlesi, $H(X)$ in bir idealidir.

İspat : $f,g \in H(X)$ olsun. Bu durumda herhangi bir $p \in X$ için $(f - g)(p) = f(p) - g(p) = 0$ olduğundan $f - g \in M_p$ dir. $f \in M_p$ ve $h \in H(X)$ olsun. Bu durumda $p \in X$ için $(f.h)(p) = f(p).h(p) = 0.h(p) = 0$ olduğundan $f.h \in M_p$ dir. Dolayısıyla M_p, $H(X)$ in bir idealidir.

Lemma 3.1.5 : R bir açık Riemann yüzeyi ve X, R nin boş olmayan herhangi bir altcümlesi olsun. Bu durumda

(a) $H(X)$ deki herhangi bir (f) maksimal esas ideali için $(f) = M_p$ olacak biçimde bir $p \in X$ noktası vardır.

(b) Herhangi bir $p \in X$ noktası için $H(X)$ in $M_p = (f)$ olacak biçimde bir (f) maksimal esas ideali vardır.

İspat : (a) (f), $H(X)$ in bir maksimal esas ideali olsun. f foksiyonu X in bir noktasında sıfır olmalıdır. Aksi halde $1/f \in H(X)$ olur. Bu durumda (f) ideali $1 = (1/f).f$ sabitini içerir ve (f) ideali $H(X)$ halkasına eşit olur. Bu bir çelişkidir. f nin sıfırlarından biri p olsun. Florack'ın teoreminden |4| dolayı p de sadece bir basit sıfırı bulunan bir $g \in H(R)$ fonksiyonu vardır. Bu durumda açık olarak $(g|X)$, $H(X)$ de bir esas ideal ve $(f) \subset (g|X)$ dır. Fakat (f)

ideali maksimal olduğundan $(f) = (g|X)$, yani $g|X \in (f)$ dir. Böylece bir $h \in H(X)$ için $g|X = f.h$ biçiminde olup, p de sadece bir basit sıfırı vardır. Buradan $(f) = M_p$ dir.

(b) Yine Florack teoreminden dolayı p de yalnız bir basit sıfırı bulunan bir $f \in H(X)$ fonksiyonu vardır. Şimdi $(f|X)$ nın, $H(X)$ halkasının bir maksimal esas ideali olduğunu göstereceğiz. Böyle olmadığını varsayalım. Bu durumda $(f|X) \subset (g) \neq H(X)$ olacak biçimde $H(X)$ in bir (g) ideali vardır. $(g) \neq H(X)$ olduğundan g nin X de sıfırı bulunmalıdır. $(f|X) \subset (g)$ den $f|X \in (g)$ dir. O halde bir $h \in H(X)$ için $f|X = g.h$ yazabiliriz. $f|X$ fonksiyonunun X de p den başka sıfırı bulunmadığından $g(p) = 0$ dır. Bu durumda $g \in (f|X)$ olur yani, $(g) \subset (f|X)$ dır. Dolayısıyla $(f|X) = (g)$ olup $(f|X)$, $H(X)$ in bir maksimal esas idealidir ve $M_p = (f|X)$ dir.

Lemma 3.1.6 : ϕ,$H(Y)$ den $H(X)$ üzerine bir direkt (veya indirekt) halka izomorfizmi olsun. Bu durumda X (veya Y) den Y (veya X) üzerine $\phi^{-1}(M_p) = M_{\tau(p)}$ (veya $\phi(M_q) = M_{\tau'(q)}$) olacak biçimde bir bire-bir τ (veya τ') dönüşümü vardır. Üstelik $\tau' = \tau^{-1}$ dir.

İspat : Lemma 3.1.5 den dolayı X deki herbir p noktası için $M_p = (f)$ olacak şekilde $H(X)$ in bir (f) maksimal esas ideali vardır. Açık olarak $\phi^{-1}(M_p) = (\phi^{-1}(f))$ dir. Teorem 1.1.10 dan dolayı $(\phi^{-1}(f))$, $H(Y)$ de bir maksimal esas idealdir. Tekrar, Lemma 3.1.5 den dolayı $(\phi^{-1}(f)) = M_q$ olacak şekilde bir $q \in Y$ noktası vardır. τ yu $\tau(p) = q$ biçiminde tanımlarsak, bu durumda $\phi^{-1}(M_p) = M_{\tau(p)}$ elde ederiz. τ' dönüşümünü benzer biçimde tanımlayabiliriz. Şimdi τ nun bire-bir ve üzerine olduğunu gösterelim: Bunun için $p_1, p_2 \in X$ ve $\tau(p_1) = \tau(p_2)$ olsun. Bu durumda $M_{\tau(p_1)} = M_{\tau(p_2)}$ ve buradan

$$\phi(M_{\tau(p_1)}) = \phi(M_{\tau(p_2)}) \Rightarrow \phi(\phi^{-1}(M_{p_1})) = \phi(\phi^{-1}(M_{p_2})) \Rightarrow$$

$$M_{p_1} = M_{p_2} \Rightarrow p_1 = p_2$$

olduğundan τ bire-birdir. $q \in Y$ olsun. Bu durumda M_q, $H(Y)$ nin bir maksimal esas idealidir. Ayrıca $\phi(M_q) = M_p$ olacak şekilde bir $p \in X$ vardır. τ nun tanımından $\tau(p) = q$ olur ki buda τ nun üzerine olduğunu gösterir. Üstelik,

$$M_{\tau'\tau(p)} = \phi(M_{\tau(p)}) = \phi(\phi^{-1}(M_p)) = M_p$$

olduğundan X üzerinde $\tau'\tau(p) = p$ dir. Benzer biçimde Y üzerinde $\tau\tau'(q) = q$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla $\tau' = \tau^{-1}$ dir.

Lemma 3.1.7 : $\tau : X \longrightarrow Y$ dönüşümü Lemma 3.1.6 daki gibi tanımlanmış olsun. Bu durumda

$$\phi(g)(p) = \phi(g(\tau(p))) \qquad (g \in H(Y),\ p \in X)$$

ve

$$\phi^{-1}(f)(q) = \phi^{-1}(f(\tau^{-1}(q))) \qquad (f \in H(X),\ q \in Y)$$

dir.

İspat : $g - g(\tau(p)) \in M_{\tau(p)}$ olduğundan

$$\phi(g) - \phi(g(\tau(p))) \in \phi(M_{\tau(p)}) = M_p$$

dir. Buradan

$$\phi(g)(p) = \phi(g(\tau(p)))$$

elde edilir. Benzer biçimde

$$\phi^{-1}(f)(q) = \phi^{-1}(f(\tau^{-1}(q)))$$

olduğu gösterilebilir.

Lemma 3.1.8 : Lemma 3.1.7 deki τ (veya τ^{-1}) dönüşümü kompakt dönüşümdür.

İspat : $K \subset X$ herhangi bir kompakt cümle olsun. $\overline{\tau(K)}$ cümlesinin Y de kompakt olduğunu göstermek yeterlidir(Tanım 1.3.22). $\overline{\tau(K)}$ cümlesinin kompakt olmadığını kabul edelim. Bu durumda $\tau(K)$ daki farklı noktalardan oluşan öyle bir (q_n) sonsuz dizisi vardır ki, R_2 de (q_n) dizisinin yığılma noktası yoktur. $p_n = \tau^{-1}(q_n)$ diyelim. Bu durumda (p_n), K kompakt cümlesinde farklı noktalardan oluşan bir dizidir. K kompakt olduğundan, (p_n) dizisinin uygun bir alt dizisinin seçimiyle (p_n) in kendisinin K daki bir p_o noktasına yakınsadığını kabul edebiliriz. Florack'ın |4| bir teoreminden $H(R_2)$ de öyle bir g fonksiyonu bulabiliriz ki $n = 1,2,\ldots$ için $g(q_n) = n$ dir. Bu durumda Lemma 3.1.5 ve 3.1.7 den, $n = 1,2,\ldots$ için

$$\phi(g|Y)(p_n) = \phi(g|Y)(\tau(p_n))) = \phi((g|Y)(q_n)) = \phi(n) = n$$

dir. Buradan

$$\phi(g|Y)(p_o) = \lim_{n\to\infty} \phi(g|Y)(p_n) = \infty$$

olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\overline{\tau(K)}$ kompakt bir cümle ve τ da kompakt bir dönüşümdür. Benzer şekilde τ^{-1} dönüşümünün de kompakt olduğu gösterilebilir.

Lemma 3.1.9 : ϕ ve ϕ^{-1} dönüşümleri $\mathbb{C}$ üzerindeki alışılmış düzlem topolojisine göre süreklidir.

İspat : ϕ ve ϕ^{-1} in sürekliliğinin ispatı tamamen birbirinin benzeri olduğundan, yalnız ϕ^{-1} in sürekli olduğunu göstereceğiz. Bunu göstermek için $a_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere $a_n \longrightarrow 0 \Rightarrow \phi^{-1}(a_n) \longrightarrow 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak $(\phi^{-1}(a_n))$ dizisinin sınırlı olduğunu gösterelim : Bir $p \in X$ ve $g \in H(Y)$ seçelim öyle ki $\phi(g)(p) = 0$ ve $\phi(g)$, p nin bir U açık komşuluğunda bire-bir olsun. $\overline{U}$ cümlesinin kompakt olduğunu varsayalım. $\phi(g)(U)$, $\mathbb{C}$ de açık olduğundan, öyle bir n_o pozitif tamsayısı vardır ki, $n \geqslant n_o$ için $a_n \in \phi(g)(U)$ dur. Bu durumda U daki noktaların öyle bir (p_n) dizisini bulabiliriz ki, $n > n_o$ için $\phi(g)(p_n) = a_n$ dir. $q_n = \tau(p_n)$ olsun. Bu durumda (q_n) dizisi,

$K = \overline{\tau(U)}$ kompakt cümlesinde içerilir. $\sup\{|g(q)| : q \in K\} = \rho < \infty$

ve

$$\phi^{-1}(a_n) = \phi^{-1}(\phi(g)(p_n)) = \phi^{-1}(\phi(g(\tau(p_n)))) = g(q_n)$$

olduğundan $n \geqslant n_0$ için $|\phi^{-1}(a_n)| \leqslant \rho$ yani, $(\phi^{-1}(a_n))$ dizisi sınırlıdır.

Nihayet $\phi^{-1}(a_n) \longrightarrow 0$ olduğunu gösterelim: Aksini kabul edelim. Bu durumda $(\phi^{-1}(a_n))$ sınırlı olduğundan uygun bir altdizi seçimiyle $\phi^{-1}(a_n) \longrightarrow \phi^{-1}(a) \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Böylece $\dfrac{1}{\phi^{-1}(a_n)} \longrightarrow \dfrac{1}{\phi^{-1}(a)}$, yani, $\phi^{-1}(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}) \longrightarrow 0$ dır. Fakat Bu durumda $(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a})$ ve böylece $(\frac{1}{a_n})$ dizisi sınırlıdır. Bu bir çelişkidir. O halde $\phi^{-1}(a_n) \longrightarrow 0$ olmalıdır. Dolayısıyla ϕ^{-1} süreklidir.

Lemma 3.1.10 : Eğer ϕ bir direkt (veya indirekt) halka izomorfizmi ise, bu durumda her $a \in \mathbb{C}$ için $\phi(a) = \phi^{-1}(a) = a$ (veya $\bar{a}$) dır.

İspat : Herhangi bir $a \in \mathbb{C}$ için, $\mathbb{C}_r$ de öyle bir (a_n) dizisi bulabiliriz ki, $a_n \longrightarrow a$ dır. Lemma 3.1.1 ve 3.1.9 dan $\phi(a_n) = a_n$ ve ϕ sürekli olduğundan $\phi(a) = a$ (veya $\bar{a}$) olur. Benzer şekilde $\phi^{-1}(a) = a$ (veya $\bar{a}$) dir.

Lemma 3.1.11 : ϕ direkt (veya indirekt) halka izomorfizmi ise, bu durumda her $p \in X$ ve $g \in H(Y)$ için

$$\phi(g)(P) = g(\tau(p)) \quad (\text{veya } \phi(g)(p) = \overline{g(\tau(p))})$$

dir.

İspat : Bir a kompleks sabiti için $g(\tau(p)) = a$ olsun. Bu durumda Lemma 3.1.7 den dolayı

$$\phi(g)(p) = \phi(g(\tau(p))) = \phi(a) = a \text{ (veya } \bar{a})$$

olduğundan $\phi(g)(p) = g(\tau(p))$ (veya $\phi(g)(p) = \overline{g(\tau(p))}$) dir.

Lemma 3.1.12 : Lemma 3.1.7 de tanımlı τ (veya τ^{-1}) dönüşümü süreklidir.

İspat : ϕ nin indirekt halka izomorfizmi olduğu durum için ispat edeceğiz. ϕ nin indirekt halka izomorfizmi olması durumunda ispat benzer şekildedir. τ nun sürekli olduğunu göstermek için, R_1 ve R_2 Riemann yüzeyleri ikinci sayılabilme aksiyomunu sağladıklarından (Teorem 3.1.15), X üzerinde $p_n \longrightarrow p \Rightarrow \tau(p_n) \longrightarrow \tau(p)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Böyle olmadığını kabul edelim. Bu durumda ya (p_n) dizisinin bir (p_n') altdizisini seçeriz öyleki $\tau(p_n') \longrightarrow q \neq \tau(p)$ dir veya $\tau(p_n)$ dizisinin bir diskret altdizisini gözönüne alırız. Birinci halde Florack'ın |4| teoreminden dolayı öyle bir $g \in H(R_2)$ fonksiyonu bulabiliriz ki g, $\tau(p)$ de bir basit sıfıra sahip ve q da sıfırdan farklıdır. Bu durumda $g(\tau(p_n')) \longrightarrow g(q) \neq 0$ iken $\phi(g|Y)(p_n') \longrightarrow \phi(g|Y)(p) = 0$ olur. $\phi(g|Y) = (g|Y) \circ \tau$ olduğundan bu bir çelişkidir. İkinci durum için, Florack'ın |4| teoreminden her $\tau(p_n)$ noktasında 1 ve $\tau(p)$ de 0 olan bir $g \in H(R_2)$ fonksiyonu bulabiliriz. Bu durumda aynı çelişki ortaya çıkar. Dolayısıyla τ süreklidir. Benzer şekilde τ^{-1} inde sürekli olduğu gösterilebilir.

Lemma 3.1.13 : $\tau : X \longrightarrow Y$ dönüşümü analitiktir.

İspat : $p \in X$ herhangi bir nokta ve $g \in H(R_2)$, $\tau(p)$ de bir basit sıfırı bulunan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\tau(p)$ nin basit irtibatlı bir U açık komşuluğunda g bire-bir ve analitiktir. τ sürekli olduğundan p nin basit irtibatlı öyle bir V açık komşuluğu vardır ki, $\tau(V \cap X) \subset U$ ve $\phi(g|Y)(V \cap X) \subset g(U)$ olur. Böylece

$V \cap X$ de, $\tau(V \cap X) = [g(U \cap Y)]^{-1} \circ \phi(g|Y)(V \cap X)$ dir. Yani,

$\tau = g^{-1} \circ \phi(g|Y)$ (veya $\tau = \bar{g}^{-1} \circ \phi(g|Y)$) dir. Buradan τ direkt (veya indirekt) konform dönüşümdür.

Lemma 3.1.14 : $\tau : X \longrightarrow Y$ dönüşümü birtektir.

İspat : Aksini varsayalım. τ', X den Y üzerine bir direkt (veya indirekt konform dönüşüm ve her $p \in X$ ve $g \in H(Y)$ için

$$\phi(g)(p) = g(\tau(p)) = g(\tau'(p)) \quad (\text{veya } \phi(g)(p) = g(\tau(p)) = \overline{g(\tau'(p))})$$

olsun. Eğer $\tau \neq \tau'$ ise bu durumda bir $p \in X$ için $\tau(p) \neq \tau'(p)$ dir. Floraçk'ın |4| bir teoreminden öyle bir $g \in H(Y)$ fonksiyonu bulabiliriz ki $g(\tau(p)) \neq g(\tau'(p))$ dir. Fakat $g(\tau(p)) = g(\tau'(p))$ aldığımızdan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla τ birtektir.

Böylece bu bölümün başında ifade etmiş olduğumuz Teorem 3.1.2 ispat edilmiş olur.

KAYNAKLAR

|1| AHLFORS, L.V., Complex Analysis, Second Edition, Mc Graw Hill, 1966.

|2| AHLFORS, L.V.- SARIO, L., Riemann Surfaces, Princeton University Press, New Jersey, 1960.

|3| BERS, L.,On rings of analytic functions, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948),311-315.

|4| FLORACK, H., Reguläre und meromorphe Funktionen auf nicht geschlossenen Riemannschen Flachen, Math. Inst. Univ. Münster no. 1 (1948).

|5| FRALEIGH, J.B., A first course in abstract algebra, second edition, Addison-Wesley, Reading, Mass.,1976.

|6| KODAIRA, K., Introduction to complex analysis, Cambridge University press, 1984.

|7| Kra, I., Conformal structure and algebraic structure, Doctoral dissertation, Columbia Univ.,New York, 1966.

|8| MINDA, C.D., Analytic functions on nonopen sets, Mathematics Magazine, (1973), 223-224.

|9| NAKAI, M., On Rings of Analytic Functions on Riemann Surfaces, Proc. Japan Acad. 39 (1963),79-84.

|10| ROYDEN, H.L., Rings of analytic and meromorphic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956), 269-276.

|11| RUDIN, W., An algebraic characterization of conformal equivalence, Bull. Amer. Math. Soc. 61 (1955), 543.

|12| SPRINGER, G.,Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.

|13| SU, L.P., Rings of analytic functions on any subset of the complex plane, Pacific J. Math. 43 (1972), 535-538.