T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

s-DEMETLER (s-SHEAVES)

Hatice TAŞBOZAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2011

Tezin Başlığı: **s-DEMETLER (s-SHEAVES)**

Tezi Hazırlayan: **Hatice TAŞBOZAN**

Sınav Tarihi: 15 Ağustos 2011

Yukarıda adı geçen tez, Jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç.Dr. Yılmaz YILMAZ	(İnönü Üniv.)	________________
Prof.Dr. İlhan İÇEN	(İnönü Üniv.)	________________
Y.Doç.Dr. Mustafa Habil GÜRSOY	(İnönü Üniv.)	________________

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof.Dr. Asım KÜNKÜL

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "*s-Demetler (s-sheaves)*" başlıklı bu çalışmamın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Hatice TAŞBOZAN

Anneme, Babama , kardeşlerime ve eşime ...

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

s-DEMETLER (s-SHEAVES)

Hatice TAŞBOZAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

55+iv sayfa

2011

Danışman: Prof. Dr. İlhan İÇEN

Üç bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde, kategori teori ve grupoid kavramı tanımlar teoremler ve örnekler verildi.

İkinci bölümde, öndemet ve demet teorisi tanımlandıktan sonra aralarındaki ilişki verildi.

Son bölümde ise lokal denklik bağıntısı ve lokal altgrupoidler teorisi yardımıyla dahili kategoriden bahsedildi. s-demet kavramı tanımlandı. Holonomy grupoid yapısından bahsedilerek s-demetlere örnek verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Kategori, Grupoid, Funktor, Demet, Lokal Denklik Bağıntısı, Lokal Altgrupoidler

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

s-SHEAVES

Hatice TAŞBOZAN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

55+iv pages

2011

Supervisor: Prof. İlhan İÇEN

In the first chapter of this thesis consisting of three chapters, the definitions of category theory and groupoids are given with examples.

In the second chapter, after introducing presheaves and sheaf theory, the relationship between them is given.

In the last chapter, internal category is mentioned with the help of local equivalence relation and local subgroupoids. The concept of s-sheaves is defined. Then by explaining holonomy groupoids structure, examples are given for s-sheaves.

KEY WORDS: Category, Groupoid, Functor, Sheaf, Local Equivalence Relations, Local Subgroupoids

TEŞEKKÜR

Beni bu konuda çalışmaya teşvik ederek, bilgi ve tecrübeleriyle yönlendiren tez danışmanım Sayın Prof. Dr. İlhan İÇEN'e ve Bölüm Başkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık Keleş'e zaman zaman karşılaştığım problemleri tartışmak için bana değerli zamanını ve bilgilerini sunan sevgili hocalarım Y.Doç.Dr.Kemal ÖZDEMİR'e, Y.Doç. Dr.A.Fatih Özcan'a, Y.Doç.Dr.M.Habil GÜRSOY'a ve Arş.Gör. Fulya ŞAHİN'e, manevi desteklerinden dolayı anneme, babama, kardeşlerime ve eşime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Üç bölümden oluşan bu tezin ilk bölümünde; tez boyunca kullanılacak olan kategori, grupoid, demet ve funktor kavramlarının temel tanım ve teoremleri verildi.

İkinci bölümde; demet ve öndemet kavramları tanımlanarak aralarındaki ilişki incelendi .

Üçüncü bölümde ise $\mathcal{O}(X)^{op}$, X in açık altkümelerinin ailesinin dual kategorisi olmak üzere;

$$E : O\,(X)^{op} \to Set$$
$$U_i \to E\,(U_i) = \{R \mid R, U_i \text{ üzerinde denklik bağıntısı}\}$$

şeklinde tanımlı $E = \{E(U_i), E_{UV}, X\}$ öndemetine karşılık gelen $\mathcal{E}$ demetinin r-global kesitinin X topolojik uzayı üzerinde bir **lokal denklik bağıntısı** tanımlandı.

$$Ob(G) = X$$

olacak şekilde bir G grupoidi ve U, X topolojik uzayının açık bir altkümesi olmak üzere; $L_G(U)$, $G\mid_U$ tam altgrupoidinin U-geniş altgrupoidlerinin ailesi olsun. Yani

$$G\mid_U = \alpha^{-1}(U) \cap \beta^{-1}(U)$$

olsun. $V \subseteq U$ olacak şekilde $V, U \subseteq X$ açık kümeleri alınsın. Eğer H, $G\mid_U$' nun U-geniş altgrupoidi ise $H\mid_V$ de $G\mid_V$' nin geniş altgrupoididir. Dolayısıyla

$$L_{UV} : L_G\,(U) \to L_G\,(V)$$
$$H \mapsto H\mid_V$$

şeklinde bir kısıtlama dönüşümü vardır. Buradan

$$L_G : \mathcal{O}(X)^{op} \to \mathbf{Set}$$

kontravaryant funktoru elde edilir. Dolayısıyla X uzayı üzerinde elde edilen L_G öndemetinden

$$\mathcal{L}_G = \bigcup_{x\in X} \mathcal{L}_x^G = \bigcup_{x\in X} \{(U_i, H_i)_x : x \in U_i \subseteq X \text{ açık },\ H_i \in L_G(U_i)\}$$

$$p : \mathcal{L}_G \to X,\ p(\mathcal{L}_x) = x$$

lokal homeomorfizmiyle $\mathcal{L}_G$ demeti elde edilebilir. $U \subseteq X$ açık kümesini ve U üzerinde tanımlı $\mathcal{L}_G$ demetinin bir

$$s : U \to \mathcal{L}_G$$

kesiti alınsın. Bu tür kesitlerin oluşturduğu $\Gamma(U, \mathcal{L}_G)$ kümesi bir öndemet belirtir:

$$\Gamma : \mathcal{O}(X)^{op} \to \mathbf{Set}$$

$\mathcal{L}_G$ demetinin global kesitlerinin kümesi de $\Gamma(X, \mathcal{L}_G)$ olur. Ayrıca her $H \in L_G(U)$ elemanı bir $s \in \Gamma(U, \mathcal{L}_G)$ kesiti ile ilişkilidir. Eğer $x \in X$ ve $\sigma \in \mathcal{L}_x$ ise o zaman

$$\sigma = (U, H)_x = germ_x H = s(x) = s_x$$

olacak şekilde bir $x \in U \subseteq X$ açık komşuluğu ve $s \in (U, \mathcal{L}_G)$ vardır. Bir X uzayı üzerindeki G grupoidinin bir **lokal altgrupoidi**, L_G öndemetinden elde edilen $\mathcal{L}_G$ demetinin global kesitidir. Bir G grupoidinin lokal altgrupoidi

$$p \circ s = I_X$$

olacak şekilde , X uzayından $\mathcal{L}_G$ demetine tanımlı sürekli fonksiyonlardır. **s-demeti** ise; s, G grupoidinin bir lokal altgrupoidi yani $\mathcal{L}_G$ demetinin global kesiti, $\mathcal{F}$, X uzayı üzerinde bir demet ve

$$\begin{tikzcd}
X \times \mathcal{F} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathcal{F} \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "\beta"'] & X
\end{tikzcd}$$

s dönüşümü $\mathcal{F}$ üzerinde X yönünde bir s-transport olmak üzere; $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ demetinin bir t-global kesiti,

$$p(t) = s$$

olacak şekilde $\mathcal{F}$ demeti üzerinde bir s-transportudur. Dolayısıyla X uzayı üzerinde bir s-demet, s-transportu ile birlikte X üzerinde bir demettir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Kategori

Tanım 2.1.1. *Nesnelerin kümesi* $Ob(\mathcal{C})$, *morfizmlerin kümesi* $Mor(\mathcal{C})$ *olmak üzere;*

$$Mor(\mathcal{C})_{\alpha} \times_{\beta} Mor(\mathcal{C}) = \{(f,g) \in Mor(\mathcal{C}) \times Mor(\mathcal{C}) \mid \alpha(g) = \beta(f)\}$$

morfizmlerin kompozisyon işlemi $\mu(f,g) = g.f$,

kaynak ve hedef dönüşümleri sırasıyla $\alpha, \beta : Mor(\mathcal{C}) \longrightarrow Ob(\mathcal{C})$ *ve*

nesne dönüşümü $\varepsilon : Ob(\mathcal{C}) \longrightarrow Mor(\mathcal{C}), X \mapsto \varepsilon(X) = I_X$ *olsun.*

Aşağıdaki şartları sağlayan $(\mathcal{C}, Ob(\mathcal{C}), \alpha, \beta, \varepsilon, \mu)$ *altılısına kategori denir.*

KAT1) $\forall (f,g) \in Mor(\mathcal{C})_{\alpha} \times_{\beta} Mor(\mathcal{C})$ *için* $\alpha(g.f) = \alpha(f)$ *ve* $\beta(g.f) = \beta(g)$

KAT2) $\forall f,g,h \in Mor(\mathcal{C})$ *ile* $\alpha(h) = \beta(g)$ *ve* $\alpha(g) = \beta(f)$ *için*

$$h.(g.f) = (h.g).f$$

KAT3) $\forall x \in Ob(\mathcal{C})$ *için* $\alpha(I_x) = x = \beta(I_x)$

KAT4) $\forall f \in Mor(\mathcal{C})$ *için* $f.I_{\alpha(f)} = f$ *ve* $I_{\beta(f)}.f = f$

dır [1].

Tanım 2.1.2. *Bir* $\mathcal{C}$ ***small (küçük) kategori****sinde nesnelerin kümesi* $Ob(\mathcal{C})$ *ve morfizmlerin kümesi* $Mor(\mathcal{C})$ *birer kümedir. Aksi taktirde kategoriye* ***large kategori*** *denir. Eğer kategorideki her* X, Y *nesnesi için* $Mor(X,Y)$ *morfizmleri bir küme ise bu kategoriye* ***yerel small kategori*** *ya da* ***homset*** *denir [1].*

Tanım 2.1.3. *Morfizmleri birim morfizmler olan kategoriye* ***diskret kategori*** *denir. Bir* I *kümesi üzerindeki diskret kategori; nesneleri* I*'nın elemanları, morfizmleri ise birim morfizmler olan bir small kategoridir [1].*

Örnek 2.1.1. $(P, \leq)$ *düzenli kümesi small kategoridir. Nesneleri* P*'nin elemanları ve morfizmleri* $f : X \longrightarrow Y$ *oklar,* $X \leq Y$ *ile verilmiştir. İki nesne arasında bir morfizm vardır. Birim morfizmlerin varlığı ve morfizmlerin birleşme özelliği düzenli kümenin yansıma ve geçişliliğinden kolayca görülebilir. Kısmi sıralı kümeler ve denklik bağıntıları da small kategoridir.*

Örnek 2.1.2. *Bir kategori verildiğinde bu kategoriden elde edilen bazı kategori örneklerini ve onların nesneleri ile morfizmlerini inceleyelim.*

KATEGORİ	NESNELERİ	MORFİZMLERİ
Grp	Gruplar	Grup morfizmleri
Ab	Abel gruplar	Grup morfizmleri
$R\dot{I}NG(SGP)$	Halkalar	Halka morfizmleri
Set	Kümeler	Kümeler arası dönüşümler
$FSet$	Sonlu Kümeler	Kümeler arası dönüşümler
Diskret kategori	X kümesi	Birim morfizmler
Cat	Kategoriler	Funktorlar
$Vekt$	Vektör uzayları	Lineer dönüşümler
Met	Metrik uzaylar	Kısa dönüşümler
Top	Topolojik uzaylar	Sürekli fonksiyonlar
Funktor kategorisi	Funktorlar	Doğal dönüşümler
Gpd	Tüm grupoidler	Grupoid morfizmleri

Tanım 2.1.4. *Bir $\mathcal{C}$ kategorisindeki her X nesnesi için $Mor\,(B,X)$ morfizmler kümesi tek elemana sahipse B nesnesine* ***başlangıç(initial) nesne*** *denir. Eğer $Mor\,(X,S)$ morfizmler kümesi tek elemana sahipse S nesnesine* ***varış(terminal) nesne*** *denir. Başlangıç veya varış nesnelere genel olarak* ***evrensel nesne*** *denir [2].*

Örnek 2.1.3. *$\{1\}$ birim elemanı Grp kategorisinde, $\{0\}$ birim elemanı Ring kategorisinde hem başlangıç hemde varış nesnedir.*

Örnek 2.1.4. *Set kategorisinde $U = \emptyset$ alınırsa; her $X \in Ob(Set)$ için $U : \emptyset \to X$ olup $\emptyset$ başlangıç nesnedir. $\{\emptyset\}$ kümesi tek elemanlı bir küme olarak alınırsa;*

$$f : X \to \emptyset$$

olup $\{\emptyset\}$, varış nesnedir.

Tanım 2.1.5. *$\mathcal{C}$ bir aşikar monoid (1birimli yarı-grup) ise küçük kategori olarak düşünülebilir. Çünkü nesneleri birimler olup morfizmleri birimi koruyan dönüşümlerdir. Bu dönüşümlerin kompozisyonu da yarı-grup işlemidir. Böylece her monoid bir nesneli bir küçük kategoridir [1].*

Tanım 2.1.6. *Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde aşağıda verilen diyagramın başlangıç nesnesinden varış nesnesine kadar olan morfizmleri korunmasına* ***kategorinin değişimliliği*** *denir.*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & X \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

$$g \circ \beta = f \circ \alpha$$

[1]

Örnek 2.1.5. ***Set*** *kategorisi; nesneleri tüm kümeler ve morfizmleri de bu kümeler arasındaki fonksiyonlar olan bir kategoridir. Gerçekten;*

1. Nesnelerin kümesi,

$$Ob(Set) = \{X \mid X \text{ bir küme}\}$$

2. Morfizmlerin kümesi,

$$Mor(Set) = \{f \mid f : X \longrightarrow Y \text{ fonksiyon, } X, Y \text{ birer küme}\}$$

3. Kompozisyon işlemi, fonksiyonların bileşke işlemidir.

$$\begin{aligned} Mor(X,Y) \times Mor(Y,Z) &\longrightarrow Mor(X,Z) \\ (f,\ g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

Ayrıca kaynak ve hedef dönüşümleri,

$$\alpha, \beta :\ Mor(Set) \to Ob(Set),\ \alpha(f) = X,\ \beta(f) = Y$$

ve nesne dönüşümü ise

$$\varepsilon : Ob(Set) \to Mor(Set),\ \varepsilon(X) = I_X$$

ile tanımlıdır.

KAT1)

$$\begin{aligned} Mor(X,Y) \times Mor(Y,Z) \times Mor(Z,T) &\longrightarrow Mor(X,T) \\ (f,\ g,\ h) &\longmapsto (h \circ g) \circ f : X \longrightarrow T \\ h \circ (g \circ f) &: X \longrightarrow T \end{aligned}$$

KAT2)

$$\begin{aligned} Mor(X,X) \times Mor(X,Y) &\longrightarrow Mor(X,Y) \\ (1_X,\ g) &\longmapsto g \circ 1_X = g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Mor(Y,X)\times Mor(X,X) &\longrightarrow Mor(Y,X) \\ (f\ ,1_X) &\longmapsto 1_X\circ f=f \end{aligned}$$

Örnek 2.1.6. *Grupların* ***Grp*** *kategorisinde;*

1. *Nesneler kümesi*
$$Ob(Grp)=\{X : X \ grup\}\,,$$
2. *Morfizmler kümesi*
$$Mor(Grp)=\{f \mid f:X\longrightarrow X' \ grup\ morfizmi\ ,\ \ X,X' \ gruplar\}\,,$$
3. *Kompozisyon işlemi*
$$\begin{aligned} Mor(X,X')\times Mor(X',X'') &\to Mor(X,X'') \\ (f,g) &\mapsto gof, \end{aligned}$$
4. *kaynak ve hedef dönüşümleri*
$$\alpha(f)=X,\beta(f)=X'$$
ve
5. *nesne dönüşümü ise*
$$\varepsilon(X)=I_X$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek 2.1.7. *Topolojik uzayların* ***Top*** *kategorisi aşağıdaki gibi tanımlıdır.*

1. *Nesneler kümesi*
$$Ob(Top)=\{X :\ \ X \ topolojik\ uzay\}\,,$$
2. *Morfizmler kümesi*
$$Mor(Top)=\{f \mid f:X\longrightarrow Y \ \ \text{sürekli dönüşüm},\ X,Y \ topolojik\ uzaylar\}\,,$$
3. *Kompozisyon işlemi*
$$\begin{aligned} Mor(X,Y)\times Mor(Y,Z) &\longrightarrow Mor(X,Z) \\ (f,g) &\longmapsto g\circ f \end{aligned}$$

4. kaynak ve hedef dönüşümleri

$$\alpha(f) = X, \beta(f) = Y$$

ve

5. nesne dönüşümü ise

$$\varepsilon(X) = I_X$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.1.7. *$\mathcal{C}$ bir kategori olsun. Bir $\mathcal{C}^{op}$ kategorisi;*

$$Ob(\mathcal{C}) = Ob(\mathcal{C}^{op})$$

ve $\forall X, Y \in Ob(\mathcal{C}^{op})$ için

$$Mor_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = Mor_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

*şartlarını sağlayan kategoridir. Bu kategoriye $\mathcal{C}$ kategorisinin **dual (veya zıt) kategorisi** denir [8].*

Örnek 2.1.8. *X bir topolojik uzay ve X in bütün açıklarını nesne kümesi ve*

$$O(X) = \{f : U \to V| \quad U, V \subset X \text{ açık } \}$$

kümesinin dualini de morfizm kabul eden $O(X)^{op}$ kategorisi aşağıdaki gibi tanımlıdır.

1. Nesneler kümesi

$$Ob(O(X)^{op}) = \{U : U, X \text{ uzayının açık altkümesi } \},$$

2. Morfizmler kümesi

$$Mor(O(X)^{op}) = \{f \mid f : U' \longrightarrow U \text{ sürekli dönüşüm }, \ U, U' \subset X \text{ açık}\},$$

3. Kompozisyon işlemi

$$\begin{aligned} Mor(U', U) \times Mor(U'', U') &\to Mor(U'', U) \\ (f, g) &\mapsto gof, \end{aligned}$$

4. Kaynak ve hedef dönüşümleri

$$\alpha(f) = U', \qquad \beta(f) = U$$

ve

5. Nesne dönüşümü ise

$$\varepsilon(U) = I_U$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek 2.1.9. *$\mathcal{C}$ bir kategori olsun.*

1. *Nesnelerin kümesi; $\mathcal{C}$ kategorisinin morfizmleri kümesi*

$$Ob(\mathcal{C}) = \{f \mid f : X \longrightarrow Y \quad , \quad X, Y \in Ob\mathcal{C}\},$$

2. *Morfizmlerin kümesi; α, β kaynak, hedef dönüşümleri ve*

$$X \xrightarrow{f} Y, \; Z \xrightarrow{g} T \text{ olmak üzere;}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ Z \arrow[r, "g"] & T \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramlarıdır.
Morfizmlerin kompozisyon işlemi ise;

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ Z \arrow[r, "g"] & T \end{tikzcd}$$

ve

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\alpha'"] & Y' \arrow[d, "\beta'"] \\ Z' \arrow[r, "g'"] & T' \end{tikzcd}$$

morfizmleri için $X' = Y$ ve $Z' = T$ olmak üzere işlem;

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'f"] \arrow[d, "\alpha"] & Y' \arrow[d, "\beta'"] \\ Z \arrow[r, "g'g"] & T' \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramı ile tanımlıdır. Bu kategoriye ***ok(arrow) kategori*** *denir [3].*

Tanım 2.1.8. *$\mathcal{C}$ bir kategori, $f : X \longrightarrow Y$ bir morfizm olsun.*

1. *$\mathcal{C}$ kategorisindeki her bir $g_1, g_2 : S \longrightarrow X$ çifti için*

$$fg_1 = fg_2 \text{ iken } g_1 = g_2$$

   ise f dönüşümüne ***monik(monomorfizm)*** *denir. Morfizmlerin monik olması için morfizm bire-bir olmalıdır.*

2. *$\mathcal{C}$ kategorisindeki her bir $g_1, g_2 : Y \longrightarrow S$ morfizmleri için*

$$g_1 f = g_2 f \text{ iken } g_1 = g_2$$

   ise f dönüşümüne ***epik(epimorfizm)*** *denir. Epik morfizmler örten dönüşümlerdir.*

3. *Bir morfizm aynı zamanda hem epik hem de monik ise* ***bimorfizm*** *denir.*

4. *Bir* $f : X \longrightarrow Y$ *morfizminin*

$$gf = I_X, fg = I_Y \text{ iken } g : Y \longrightarrow X$$

   olacak şekilde f *morfizminin bir* g *ters morfizmi varsa* f *ye bir* ***izomorfizm*** *denir.*

5. $X = Y$ *ise* $f : X \longrightarrow Y$ *bir* ***endomorfizm*** *denir.*

6. *Bir morfizm aynı zamanda hem endomorfizm hem de isomorfizm ise* ***otomorfizm*** *denir. [3].*

Tanım 2.1.9. $\mathcal{C}$ *ve* $\mathcal{D}$ *iki kategori olmak üzere;* $\forall X \in Ob(\mathcal{D})$ *için*

i $Ob(\mathcal{D}) \subset Ob(\mathcal{C})$

ii $Mor_{\mathcal{D}}(X, Y) \subset Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$

iii $\mathcal{D}$ *ve* $\mathcal{C}$ *kategorilerinde tanımlı kompozisyon kuralları aynı*

iv $Mor_{\mathcal{D}}(X, X)$ *ve* $Mor_{\mathcal{C}}(X, X)$ *in birim elemanları aynı*

özelliklerini sağlayan $\mathcal{D}$ *kategorisine* $\mathcal{C}$ *kategorisinin bir* ***altkategorisi*** *denir [3].*

Tanım 2.1.10. $\mathcal{D}$ *kategorisi* $\mathcal{C}$ *kategorisinin* ***altkategorisi*** *olmak üzere;*

1. $\mathcal{D}$ *kategorisinden seçilen* X, Y *nesneleri için*

$$Mor_{\mathcal{D}}(X, Y) = Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

   ise $\mathcal{D}$ *kategorisine* $\mathcal{C}$ *kategorisinin* ***tam(full)altkategorisi*** *denir.*

2. $\mathcal{D}$ *kategorisinin nesneleriyle* $\mathcal{C}$ *kategorisinin nesneleri eşitse, yani*

$$Ob(\mathcal{D}) = Ob(\mathcal{C})$$

   ise $\mathcal{D}$ *kategorisine* $\mathcal{C}$ *kategorisinin* ***geniş(wide) altkategorisi*** *denir [3].*

Örnek 2.1.10. *Sonlu kümelerin* ***FSet*** *kategorisi, kümelerin* ***Set*** *kategorisinin tam altkategorisidir.*

Örnek 2.1.11. *Abel gruplarının* ***Ab*** *kategorisi grupların* ***Grp*** *kategorisinin tam altkategorisidir.*

Örnek 2.1.12. ***Top*** *kategorisi kümelerin* ***Set*** *kategorisinin tam altkategorisidir.*

Tanım 2.1.11. *X, Y birer küme ve $f, g : X \to Y$ fonksiyonlar olsun. f ve g nin **eşitleyicisi(equalizer)***

$$Eq(f,g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

*ile tanımlıdır. Kategori teoride ise X, Y, E, O nesneler ve $f, g : X \longrightarrow Y$ morfizmler olmak üzere f ve g nin **eşitleyicisi**;*

$$f \circ eq = g \circ eq$$

eşitliğini doğrulayan

$$eq : E \longrightarrow X$$

morfizmidir. Burada $m : O \longrightarrow X$ morfizmi verildiğinde $f \circ m = g \circ m$ iken bir tek $u : O \to E$ morfizmi için $eq \circ u = m$ şartı sağlanmalıdır.

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "m"'] & E \arrow[d, "eq"] & \\
& X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Kümelerin kategorisinde E, X'in altkümesi olarak alındığında eq dönüşümü, dahil etme fonksiyonu kabul edilen $i : T \longrightarrow X$ dönüşümüdür [4].

Örnek 2.1.13. ***Set** veya **Grp** kategorilerinde $f, g : X \longrightarrow Y$ morfizmleri verilsin.*

$$T = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

bir altküme veya altgrup olarak düşünülsün. Bu taktirde $i : T \longrightarrow X$ dahil etme dönüşümü f ve g nin bir eşitleyicisidir. T nin tanımından $f \circ i = g \circ i$ bulunur. Kabul edelim ki $f \circ eq = g \circ eq$ olacak şekilde $eq : E \longrightarrow X$ morfizmi varolsun. O halde $\forall x \in E$ için $f(eq(x)) = g(eq(x))$ elde edilir. Yani $\forall x \in E$ için $eq(x) \in T$ ve $\operatorname{Im} eq \subseteq T$ elde edilir.

$$l_1 : \operatorname{Im} eq \to X \text{ ve } l_2 : \operatorname{Im} eq \to T$$

kanonik dahil etme dönüşümleri olsun. Eğer;

$$\begin{aligned} eq' : E &\longrightarrow \operatorname{Im} eq \\ x &\to eq'(x) = eq(x) \end{aligned}$$

eq ile örten morfizm oluyorsa

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "eq'"] \arrow[dr, "eq"'] & Imeq \arrow[r, "l2"] \arrow[d, "l1"] & T \arrow[dl, "i"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişimlidir. Dolayısıyla $i \circ \gamma = eq$ ve $\gamma = l_2 \circ eq'$ elde edilir.

i monik olduğundan γ

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "eq"'] & T \arrow[d, "i"] & \\ & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

diyagramını değişimli yapan tek morfizmdir. Sonuç olarak $i : T \longrightarrow X$, f ile g nin bir eşitleyicisidir.

Teorem 2.1.1. *Eşitleyiciler moniktir.*

İspat. $eq : E \longrightarrow X$, $f, g : X \longrightarrow Y$ nin bir eşitleyicisi olsun. Kabul edelim ki $\alpha, \beta : O \longrightarrow E$ öyle ki $eq \circ \alpha = eq \circ \beta$ olsun.

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r, "\alpha{,}\beta"] \arrow[dr, "m"'] & E \arrow[d, "eq"] & \\ & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

diyagramı değişimli olup

$$m = eq \circ \alpha = eq \circ \beta$$

bulunur. Fakat $f \circ eq = g \circ eq$ olup $f \circ m = g \circ m$ bulunur. Böylece $eq : E \longrightarrow X$ bir eşitleyici olduğundan bir tek $u : O \longrightarrow E$ vardır ve $m = eq \circ u$ olur. Bu ise

$$\alpha = \beta$$

demektir. Buradan eq moniktir [4]. $\square$

Tanım 2.1.12. *$\mathcal{C}$ bir kategori ve $f : X \longrightarrow Z$ ile $g : Y \longrightarrow Z$ birer morfizm olsun. P nesnesi ve $p_1 : P \longrightarrow X$ ile $p_2 : P \longrightarrow Y$ morfizmleriyle elde edilen*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p2"] \arrow[d, "p1"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramından oluşan (P, p_1, p_2) üçlüsüne f, g morfizmlerinin ***pullbacki (geri çekilmesi)*** *denir. Bir kategorideki başlangıç nesneye f, g için bir* ***pullback*** *ya da f, g' nin bir* ***lif çarpımı*** *veya bir* ***kartezyen karesi*** *de denilir. Bunun dualine de bir* ***pushout*** *denir. Ortak bir varış nesnesiyle morfizmlerin her çifti için bir pullback varsa $\mathcal{C}$ kategorisine* ***pullback****lere* ***sahiptir*** *denir [1].*

Örnek 2.1.14. *Set kategorisinde X, Y, Z birer nesne,*

$$f : X \to Z \ , \ g : Y \to Z$$

iki morfizm ve π_1 ile π_2 izdüşüm dönüşümleri olmak üzere;

$$X \times Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$$

olsun. Bu taktirde $X \times Y$ f ile g'nin bir pullback'idir.

$$X \times Y = \cup g^{-1}[\{f(x)\}] = \cup f^{-1}[\{g(x)\}]$$

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

diyagramı değişimli olup

$$f\pi_1 = g\pi_2$$

dir [1].

Tanım 2.1.13. *Pullbackin dual kategorideki gösterimi pushouttur [1].*

Tanım 2.1.14. *$\mathcal{C}$ keyfi bir kategori ve P de, f ile g nin pullbacki olsun. $f : Y \longrightarrow X$ dönüsümünün pullbacki*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"] & Y \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

kendinin bir izomorfizmi ise f ye monomorfizmdir denir [1].

2.2 Funktor

Tanım 2.2.1. *$\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ iki kategori ve $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ olmak üzere; $\mathcal{C}$ kategorisinin bir X nesnesi ve bir f morfizmi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa; $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ kategorileri arasındaki bu F dönüşümüne bir* ***kovaryant funktor*** *denir.*

1) $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$ *için* $F(X) \in Ob(\mathcal{D})$

2) $f : X \longrightarrow Y \in Mor(\mathcal{C})$ *morfizmine karşılık* $F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y) \in Mor(\mathcal{D})$

3) $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$ *için* $1_{F(X)} = F(1_X)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "1_X"] & F(X) \arrow[d, "1_{F(X)}"] \\ X \arrow[r, "F"] & F(X) \end{tikzcd}$$

4) $\forall f, g \in Mor(\mathcal{C})$ *için* $g \circ f$ *işlemi* $\mathcal{D}$ *kategorisinde* $F(g) \circ F(f) = F(g \circ f)$ *ise yani;*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "f"] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\ Y \arrow[r, "F"] \arrow[d, "g"] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\ Z \arrow[r, "F"] & F(Z) \end{tikzcd}$$

diyagramı değişimlidir [5].

Tanım 2.2.2. *$\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori ve $\mathcal{D}^{op}$, $\mathcal{D}$ nin dual kategorisi olsun.*

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}^{op}$$

tanımlı kovaryant funktora ***kontravaryant funktor*** *denir. Burada $F(g) \circ F(f) = F(g \circ f)$ işlemi korunmaz yani ;*

$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) \text{ ise kovaryant}$$
$$F(g) \circ F(f) = F(f) \circ F(g) \text{ ise kontravaryanttır}[5].$$

Tanım 2.2.3. *Bir $\mathcal{C}$ kategorisindeki her X nesnesi ve her f morfizmi için*

$$1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$1_{\mathcal{C}}(X) = X$$
$$1_{\mathcal{C}}(f) = f$$

şeklinde tanımlı $1_{\mathcal{C}}$ funktoruna ***birim funktor*** *denir [6].*

Tanım 2.2.4. *$\mathcal{D}$ kategorisi $\mathcal{C}$ kategorisinin* ***altkategorisi*** *olmak üzere;*

$$i : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$i(X) = X$$
$$i(f) = f$$

şeklinde tanımlanan i funktoruna ***dahil etme funktoru*** *denir [6].*

Tanım 2.2.5. *$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ve $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ birer funktor olsun. $GF : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ birleşimide bir funktordur. Ayrıca $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ birim dönüşümü de bir funktordur. O halde nesneleri kategoriler, morfizmleri funktorlar olan bir kategori oluşturulabilir. Bu kategori* ***Cat kategorisi*** *olarak adlandırılır [7].*

Örnek 2.2.1. U : **Grp** $\to$ **Set** *funktoruna unutkan funktor denir. Bu funktor* ***Grp*** *kategorisindeki grup yapısını unutarak* ***Set*** *kategorisine dönüştürür. Burada her G grubunu onun grup yapısının ihmal edildiği UG kümesine ve her $f : G \longrightarrow H$ dönüşümünü $Uf : UG \longrightarrow UH$ dönüşümüne götürür.*

Tanım 2.2.6. *F, $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funktorlar olsun. $\mathcal{C}$ deki her X nesnesini $\mathcal{D}$ de $p_X : F(X) \longrightarrow G(X)$ dönüşümüne ve $\mathcal{C}$ deki her $f : X \longrightarrow Y$ morfizmine*

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "p_X"] & F(Y) \arrow[d, "p_Y"] \\
G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

değişimli diyagramını karşılık getiren

$$p : F \longrightarrow G$$

dönüşümüne ***doğal dönüşüm (natural transformation)*** *denir. p_X e $\mathcal{C}$'de p'nin bileşeni denir. Eğer p nin her bileşeni izomorfizm ise yani $p : F \longrightarrow G$ ve $r : G \longrightarrow F$ iken $p \circ r = I_G$ ve $r \circ p = I_F$ varsa p ye* ***doğal izomorfizmdir*** *denir [1].*

Örnek 2.2.2. *$\mathcal{C}$ bir kategori ise bir funktor aşağıdaki gibi tanımlanabilir.*

$$
\begin{aligned}
Mor_{\mathcal{C}}(\_,\_) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} &\longrightarrow \boldsymbol{Set} \\
A, B &\longrightarrow Mor_{\mathcal{C}}(\_,\_)(A,B) = Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \\
f, g &\longrightarrow Mor_{\mathcal{C}}(\_,\_)(f,g) = Mor_{\mathcal{C}}(f,g)
\end{aligned}
$$

Burada

$$Mor_{\mathcal{C}}(f,g) : Mor_{\mathcal{C}}(A',A) \longrightarrow Mor_{\mathcal{C}}(B,B')$$

ile tanımlıdır.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\upsilon"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A' \arrow[r, "g \circ \upsilon \circ f"'] & B'
\end{tikzcd}
$$

Bu funktora ***morfizm bifunktoru*** *denir.*

$F : A \times B \longrightarrow C$ bifunktor olsun. Öyleyse;

$\forall A$ nesnesi için $F(A,\_) : B \longrightarrow C$ için sağ birleşimli funktor

$$F(A,\_)(B) = F(A,B)$$

$$ve$$

$$F(A,\_)(f) = F(1_A, f)$$

şeklinde tanımlıdır.

$\forall B$ nesnesi için $F(\_,B) : A \longrightarrow C$ için sol birleşimli funktor ise;

$$F(\_,B)(A) = F(A,B)$$

$$ve$$

$$F(\_,B)(f) = F(f, 1_B)$$

şeklinde tanımlıdır. Her iki funktor kovaryant funktordur. Özel olarak; $\mathcal{C}$' nin her C nesnesi için **sağ birleşimli funktor**

$$Mor_{\mathcal{C}}(C,\_) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

$$
\begin{aligned}
Mor_{\mathcal{C}}(C,\_)(X) &\longrightarrow Mor_{\mathcal{C}}(C,X) \\
Mor_{\mathcal{C}}(C,\_)(f) &\longrightarrow Mor_{\mathcal{C}}(1_{\mathcal{C}}, f) : \nu \longrightarrow f \circ \upsilon
\end{aligned}
$$

ve **sol birleşimli funktor**

$$Mor_{\mathcal{C}}(C, \_) : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

$$Mor_{\mathcal{C}}(\_, C)(X) \longrightarrow Mor_{\mathcal{C}}(X, C)$$

$$Mor_{\mathcal{C}}(\_, C)(f) \longrightarrow Mor_{\mathcal{C}}(g, 1_{\mathcal{C}}) : \nu \longrightarrow v \circ g$$

vardır.

Bu $\mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ funktoru bir kontravaryant funktordur [6].

Tanım 2.2.7. *$\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ birer kategori olsun. $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ kategorileri arasındaki iki funktor $F : \mathcal{C} \leftarrow \mathcal{D}$ ve $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ olmak üzere; X, Y nesnelerinin birebir örten doğal dönüşümlerinde*

$$Mor_{\mathcal{C}}(FY, X) \simeq Mor_{\mathcal{D}}(Y, GX)$$

denkliği vardır. $\mathcal{C}$ kategorisindeki her X nesnesi ve $\mathcal{D}$ kategorisindeki G_0X nesnesi için

$$\varepsilon_X : F(G_0X) \rightarrow X$$

*morfizmi bir varış morfizmi ise $F : \mathcal{C} \leftarrow \mathcal{D}$ funktoruna **sol ek(adjoint) funktor** denir. $\mathcal{C}$ deki $f : X \rightarrow X^{'}$ morfizmi için*

$$GX = G_0X$$
$$\varepsilon_{X'}FG(f) = f\varepsilon_X$$

şartlarını sağlayan bir tek $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funktoru vardır. Böylece F ye G nin sol ek funktoru denir [4].

Tanım 2.2.8. *$\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ birer kategori olsun. $\mathcal{D}$ kategorisindeki her Y nesnesi ve $\mathcal{C}$ kategorisindeki F_0Y nesnesi için*

$$\eta_Y : Y \rightarrow G(F_0Y)$$

*morfizmi bir başlangıç morfizm ise $F : \mathcal{C} \leftarrow \mathcal{D}$ funktoruna **sağ ek(adjoint) funktor** denir. $\mathcal{D}$ deki $g : Y \rightarrow Y'$ morfizmi için*

$$FY = F_0Y$$
$$GF(g)\eta_Y = \eta_Y g$$

şartlarını sağlayan bir tek $F : \mathcal{C} \leftarrow \mathcal{D}$ funktoru vardır. Böylece G ye F nin sağ ek funktoru denir [4].

Tanım 2.2.9. *$\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ kategorileri arasındaki iki funktor $F : \mathcal{C} \leftarrow \mathcal{D}$ ve $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ olsun.*

$$\varepsilon : FG \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$$

$$\eta : 1_{\mathcal{D}} \rightarrow GF$$

*dönüşümlerine sırasıyla **counit** ve **unit** denir. Bu dönüşümlerin birleşimleri*

$$F \to^{F\eta} FGF \to^{\varepsilon F} F$$
$$G \to^{\eta G} GFG \to^{G\varepsilon} G$$

olup F, G nin sol ek(adjointi)idir ya da G, F nin sağ ek(adjointi)idir denir. $F \dashv G$ ile gösterilir. $1_F, 1_G$ birim dönüşümleri;

$$1_F = \varepsilon F \circ F\eta$$
$$1_G = G\varepsilon \circ \eta G$$

ile verilir. Sonuç olarak $\mathcal{C}$ deki her X ve $\mathcal{D}$ deki her Y için

$$1_{FY} = \varepsilon_{FY} \circ F\eta_Y$$
$$1_{GX} = G\varepsilon_X \circ \eta_{GX}$$

eşitlikleri vardır [4].

Tanım 2.2.10. *$\mathcal{C}$ small kategori ve $\mathcal{D}$ keyfi bir kategori olsun. Nesneleri $\mathcal{C}$ den $\mathcal{D}$ ye funktorlar ve morfizmleri doğal transformasyonlar olan bir kategori vardır. F, G, H funktorları $\mathcal{C}$ den $\mathcal{D}$ ye tanımlı ve $p : F \longrightarrow G$ ve $r : G \longrightarrow H$ doğal dönüşümler olmak üzere; bu kategorinin kompozisyonu $r \circ p$ olup $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$ için*

$$(r \circ p)_x = r_{G(x)} \circ p_x$$

*dir. Bu kategoriye $\mathcal{C}$ den $\mathcal{D}$ ye **funktorların kategorisi** denir. $Funct(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ veya $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ ile gösterilir [2].*

Tanım 2.2.11. *$\mathcal{C}$ kategorisindeki J (small kategori) tipindeki diyagramın funktoru*

$$F : J \to \mathcal{C}$$

*olmak üzere; J kategorisine **index kategori** ya da F diyagramının şeması denir. F diyagramı J ye göre düzenlenen $\mathcal{C}$ deki morfizmler ve nesnelerin koleksiyonu olarak düşünülebilir. Kategorideki şema, funktorlarda diyagram olduğundan $\mathcal{C}$ kategorisinde J tipindeki diyagramların morfizmi funktorlar arasındaki doğal dönüşümlerdir. $\mathcal{C}$ deki J tipindeki diyagramların kategorisini $\mathcal{C}^J$ funktor kategorisi olarak yorumlayabiliriz. Bu kategoride diyagram nesnedir [4].*

Tanım 2.2.12. *$\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ lokal küçük kategoriler, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funktor ve $\forall X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ için*

$$F_{XY} : Mor_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Mor_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

dönüşümüne

- birebir(injective) ise faithfull(tamamen) funktor,
- örten(surjective) ise full(tam) funktor,

. birebir ve örten(bijective) ise fully-faithfull funktor denir [8].

Tanım 2.2.13. *Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde herhangi bir X nesnesi için $X \times X$ çarpımı tanımlıdır ve*

$$\delta_X : X \to X \times X$$

$\pi_k \circ \delta_X = id_X$ $\forall k \in \{1, 2\}$ için diagonal morfizmdir. π_k, k yıncı elemanın kanonik izdüşümü olmak üzere; kategorilerin kategorisi bir çarpım olduğundan ***diagonal funktor***

$$\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$$

$$\Delta(X) =< X, X >$$

olarak verilmiştir. Genel olarak $\mathcal{C}^J$ funktor kategorisinde $\mathcal{C}$ deki her X nesnesi için sabit funktor

$$X = \Delta(X) \in \mathcal{C}^J$$

nesnesiyle tanımlıdır. Diagonal funktor $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^J$ $\mathcal{C}$ deki her X nesnesini $\Delta(X)e$ götürür. Ve $\mathcal{C}$ deki her $f : X \to Y$ morfizmini $\mathcal{C}^J$ de doğal dönüşümüne götürür. J nin iki nesneli diskret kategori olduğu bilinirse de diagonal funktor $\mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ ile verilir [4].

Tanım 2.2.14. *$\mathcal{I}$ small kategori ve $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori olsun. Her $X \in Ob(\mathcal{I})$ için*

$$K_A X = A$$

ve $f \in \mathcal{I}$ için

$$K_A f = 1_A$$

alarak $\mathcal{C}$ kategorisinin bir A nesnesi için $K_A : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ funktoru tanımlanabilir. Bu funktora A nesnesine bağlı ***sabit funktor*** *denir [9].*

2.3 Grupoid

Tanım 2.3.1. *Bir G kategorisinde herbir morfizmin tersi varsa ya da herbir morfizm bir izomorfizm ise G kategorisine* ***grupoid*** *denir. Bir grupoid çok nesneli bir grup olarak düşünüleceğinden gruptan daha genel bir kavramdır. Bir $\mathcal{G}$ grupoidi sırasıyla*

1. *nesnelerin sınıfı(taban) $Ob(\mathcal{G})$*
2. *morfizmlerin kümesi $Mor(\mathcal{G})$*
3. *kaynak ve hedef dönüşümleri*

$$\alpha, \beta : Mor(\mathcal{G}) \longrightarrow Ob(\mathcal{G})$$

4. *nesne dönüşümü*

$$\varepsilon : Ob(\mathcal{G}) \longrightarrow Mor(\mathcal{G})$$

5. *ters dönüşüm*

$$\begin{aligned} i : Mor\,(\mathcal{G}) &\longrightarrow Mor\,(\mathcal{G}) \\ f &\mapsto i\,(f) = f^{-1} \end{aligned}$$

6. *morfizmlerin kompozisyonu*

$$\mu = Mor\,(\mathcal{G})_{\alpha} \times_{\beta} Mor\,(\mathcal{G}) = \{(f,g) \in Mor\,(\mathcal{G}) \times Mor\,(\mathcal{G}) \mid \alpha\,(g) = \beta\,(f)\}$$

üzerinde tanımlı "." kısmi çarpma işleminden oluşur. Bu dönüşümler aşağıdaki şartları sağlar:

GRP1) $\forall\,(f,g) \in Mor\,(\mathcal{G})\,\alpha \times \beta Mor\,(\mathcal{G})$ *için* $\alpha\,(g.f) = \alpha\,(f)$ *ve* $\beta\,(g.f) = \beta\,(g)$

GRP2) $\forall f,g,h \in Mor\,(\mathcal{G})$ *ile* $\alpha\,(h) = \beta\,(g)$ *ve* $\alpha\,(g) = \beta\,(f)$ *için*

$$h.\,(g.f) = (h.g)\,.f$$

GRP3) $\forall X \in Ob\,(\mathcal{G})$ *için* $\alpha\,(I_X) = X = \beta\,(I_X)$

GRP4) $\forall f \in Mor\,(\mathcal{G})$ *için* $f.I_{\alpha(f)} = f$ *ve*$I_{\beta(f)}.f = f$

GRP5) $\forall f \in Mor\,(\mathcal{G})$*bir çift taraflı* f^{-1} *tersine sahiptir öyle ki* $\alpha\,(f) = \beta\,(f^{-1})$, $\beta\,(f) = \alpha\,(f^{-1})$ *ve* $f^{-1}.f = I_{\alpha(f)}$ *ile* $f.f^{-1} = I_{\beta(f)}$ *sağlanır [10].*

$Ob(\mathcal{G})$' nin elemanlarına, $\mathcal{G}$ gruboidinin **nesneleri**; $Mor(\mathcal{G})$' nin elemanlarına $\mathcal{G}$ gruboidinin **okları (morfizmleri);** $X \in Ob(\mathcal{G})$' ye karşı gelen $Mor(\mathcal{G})$' de I_X elemanına X elemanının **birim** veya **özdeşliği** denir. $(Mor\,(\mathcal{G})\,, Ob(\mathcal{G}), \alpha, \beta, \varepsilon, i, \mu)$ yedilisine grupoid denir.

Tanım 2.3.2. *$\mathcal{G}$ bir grupoid ve $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa; $\mathcal{H}$ grupoidine $\mathcal{G}$grupoidinin* ***altgrupoidi*** *denir [10].*

AGRP1) α, β *$\mathcal{G}$ grupoidinin kaynak ve hedef dönüşümleri olmak üzere;*

$$\alpha\,(\mathcal{H}) \subseteq Ob\,(\mathcal{H})\ ve\ \beta\,(\mathcal{H}) \subseteq Ob\,(\mathcal{H})$$

AGRP2) *Her* $X \in Ob\,(\mathcal{G})$ *için* $1_X \in \mathcal{H}$

AGRP3) *$\mathcal{H}$ kısmi çarpım altında kapalıdır.*

Tanım 2.3.3. *$\mathcal{H}, \mathcal{G}$ grupoidinin altgrupoidi olsun.*

a) *Eğer $Ob\,(\mathcal{H}) = Ob\,(\mathcal{G})$ ise $\mathcal{H}$ grupoidine $\mathcal{G}$ grupoidinin* ***geniş(wide) altgrupoidi*** *denir.*

b) *Eğer herbir* $X, Y \in Ob\,(\mathcal{H})$ *için*

$$Mor_{\mathcal{H}}\,(X, Y) = Mor_{\mathcal{G}}\,(X, Y)$$

ise $\mathcal{H}$ *grupoidine* $\mathcal{G}$ *grupoidinin* ***tam(full) altgrupoidi*** *denir.*

c) *Eğer* $\mathcal{H}$ *geniş altgrupoid ve herbir* $X, Y \in Ob\,(\mathcal{H})\,, \lambda \in Mor_{\mathcal{H}}\,(X, X)$ *ve* $g \in Mor_{\mathcal{G}}\,(X, Y)$ *için* $g\lambda g^{-1} \in Mor_{\mathcal{H}}\,(Y, Y)$ *ise* $\mathcal{H}$ *grupoidine* $\mathcal{G}$ *grupoidinin* ***normal altgrupoidi*** *denir .*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] & Y \arrow[d, "g^{(-1)}"] \\ & X \arrow[ul, "\lambda"] \end{tikzcd}$$

d) *Bir* $\mathcal{G}$ *grupoidi için*

$$Mor\,(\mathcal{G})_{\alpha} \times_{\beta} Mor\,(\mathcal{G}) = \{(f, g) \in Mor\,(\mathcal{G}) \times Mor\,(\mathcal{G}) \mid \alpha\,(f) = \beta\,(g)\}$$

olmak üzere

$$\delta : Mor\,(\mathcal{G})_{\alpha} \times_{\beta} Mor\,(\mathcal{G}) \to Mor\,(\mathcal{G})\,,\ (f, g) \mapsto fg^{-1}$$

fark dönüşümü ve

$$\pi = (\beta, \alpha) : Mor\,(\mathcal{G}) \to Ob(\mathcal{G}) \times Ob(\mathcal{G}),\ f \mapsto (\beta(f), \alpha(f))$$

dönüşümü vardır. $X, Y \in Ob(G)$ *için* X *de* G *nin* ***starı*** *denilen* α *lifi*

$$\alpha^{-1}(X) = St\ G^X = \{f \mid \alpha(f) = X\}$$

ile , Y *de* G *nin* ***costarı*** *denilen* β *lifi*

$$\beta^{-1}(Y) = Cost\ G^X = \{f \mid \beta(f) = Y\}$$

ile gösterilir.

e) G *bir grupoid* $X, Y \in Ob(\mathcal{G})$ *ve* W, G *nin bir altkümesi olmak üzere;* $W \cap \alpha^{-1}(X)$ *ve* $W \cap \beta^{-1}(Y)$ *için sırasıyla* $W_X = St\ W^X$ *ve* $W^Y = CostW^Y$ *yazlabilir.*

$$G(X, Y) = \{f \mid f : X \to Y\}, G(X, Y) = St\ G^X \cap Cost\ G^X$$

şartını sağlar. Ayrıca X *den* X *e tüm morfizmlerin grubuna* $G\{X\} = \{f \mid f : X \to X\}$ *e* ***verteks grup ya da*** X *noktasındaki* ***nesne grubu*** *denir [11].*

Tanım 2.3.4. $\mathcal{G}$ *ve* $\mathcal{H}$ *iki grupoid olmak üzere;*

$$\mu : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$$

1) $\mathcal{G}$ *grupoidinin herbir* X *nesnesini* $\mathcal{H}$ *grupoidinin bir* $\mu(X)$ *nesnesine götürür.*

2) *Herbir* $f \in Mor_{\mathcal{G}}(X,Y)$ *morfizmini* $\mu(f) \in Mor_{\mathcal{H}}(\mu(X),\mu(Y))$ *morfizmine götürür.*

3) $X \in \mathcal{G}$ *de* $I_x \in \mathcal{G}(X)$ *özdeş morfizm ise* $\mu(I_X) = I_{\mu(X)}$, $\mu(X) \in \mathcal{H}$*' da özdeş morfizmdir.*

4) $f : X \to Y$ *ve* $g : Y \to Z$, $\mathcal{G}$ *de morfizm ise*

$$\mu(gf) = \mu(g).\mu(f)\, dir.$$

Grupoidler arasında yukarıdaki şartları sağlayan morfizme ***grupoid morfizmi*** *denir [5].*

Örnek 2.3.1. *Nesneleri tüm grupoidler ve morfimleri ise grupoid morfizmleri olan bir grupoidlerin kategorisi elde edilebilir ve bu kategori* ***Gpd*** *ile gösterilir.*

Örnek 2.3.2. *Bir* X *kümesi kendi üzerinde bir grupoid olarak düşünülebilir. Burada*

$$\alpha = \beta = I_X$$

ve her elemanı birim dönüşümdür. Bütün elemanları birim olan bu tür grupoidlere ***boş(null)grupoid*** *denir. Herbir* $x \in X$ *için sadece bir* 1_X *dönüşümü vardır.Bu dönüşümlerin bileşkesi de*

$$1_X.1_X = 1_X$$

olacağından başka bir işlemi de yoktur.

Örnek 2.3.3. X *bir küme olsun. Nesneler kümesi* X *ve morfizmler kümesi* $X \times X$ *olacak şekilde bir grupoid elde edilebilir. Yani* $X \times X$, X *üzerinde bir grupoiddir. Burada* (x,y) *ikilisi* $x \to y$ *morfizmini göstermek üzere; kısmi çarpım işlemi*

$$(x,y)(y,z) = (x,z)$$

olarak verilir. Bu grupoidi ele alarak bir R *grupoidi elde edelim.* R , $X \times X$ *in altgrupoidi ve* X *üzerinde tam ise;* $R \subset X \times X$, X *üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Burada kısmi çarpım işlemi ise;* $(x,y)(y,z) \in R \subset X \times X$ *olup* $(x,z) \in R$ *bulunur. Ayrıca bu denklik bağıntısı* X *kümesi üzerinde bir grupoiddir. Gerçekten;*

. *nesneler kümesi* $Ob(R) = X$,

. *morfizmlerin kümesi* $Mor(R) = R = \{(x,y) \mid x,y \in X\}$,

. *hedef ve kaynak dönüşümleri*

$$\alpha : R \to X$$
$$(x,y) \mapsto \alpha(x,y) = x$$

$$\beta : R \to X$$
$$(x,y) \mapsto \beta(x,y) = y,$$

. *ters dönüşüm*

$$\begin{aligned} i : R &\to R \\ (x, y) &\mapsto (x, y)^{-1} = (y, x)\,, \end{aligned}$$

. *nesne dönüşümü*

$$\begin{aligned} \varepsilon : X &\to R \\ x &\mapsto I_x, \end{aligned}$$

. *kısmi çarpım işlemi*

$$\begin{aligned} m : R \times R &\to R \\ ((x, y)\,, (y, z)) &\mapsto (x, z) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı olup her denklik bağıntısı bulunduğu küme üzerinde bir grupoiddir.

Örnek 2.3.4. *Topolojik uzaylar ve bu uzaylar arasındaki homeomorfizmler kategorisi bir grupoid oluşturur. Gerçekten,*

. *nesneler kümesi ; topolojik uzaylar*

$$Ob\,(\mathcal{G}) = \{X \mid X \text{ topolojik uzay}\}$$

. *morfizmlerin kümesi; topolojik uzaylar arası homeomorfizmler*

$$Mor\,(\mathcal{G}) = G = \{f \mid f : X \to Y \text{ homeomorfizm,} X, Y \text{ nesneler}\}$$

. *hedef ve kaynak dönüşümleri;*

$$\begin{aligned} \alpha : G &\to X \\ f &\mapsto \alpha\,(f) = X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta : G &\to X \\ f &\mapsto \beta\,(f) = Y \end{aligned}$$

. *Nesne dönüşümü;*

$$\begin{aligned} \varepsilon : X &\to G \\ x &\mapsto I_x \end{aligned}$$

. *Ters dönüşüm;*

$$\begin{aligned} i : G &\to G \\ f &\mapsto i(f) = (f)^{-1} \end{aligned}$$

. *kısmi çarpım işlemi*

$$m : G \times G \to G$$

$$m = Mor\left(\mathcal{G}\right)_{\alpha} \times_{\beta} Mor\left(\mathcal{G}\right) = \{(f,g) \in Mor\left(\mathcal{G}\right) \times Mor\left(\mathcal{G}\right) \mid \alpha\left(f\right) = \beta\left(g\right)\}$$

olmak üzere; $\left(Mor\left(\mathcal{G}\right), Ob(\mathcal{G}), \alpha, \beta, \varepsilon, i, \mu\right)$ *yedilisi bir grupoiddir.*

Örnek 2.3.5. *X bir küme ve G bir grup olsun. Nesneler kümesi $Ob(R) = X$, morfizmler kümesi $Mor(R) = R = X \times G \times X$ olmak üzere; R, X kümesi üzerinde aşağıdaki gibi bir aşikar grupoid denilen yapıyı oluşturur:*

* *Kaynak ve hedef dönüşümleri*

$$\alpha, \beta : X \times G \times X \to X$$

$$\alpha(x,g,y) = x$$
$$\beta(x,g,y) = y$$

* *Ters dönüşüm g^{-1}, g'nin G grubundaki tersi olmak üzere;*

$$i : X \times G \times X \to X \times G \times X$$
$$(x,g,y) \mapsto i(x,g,y) = (x,g,y)^{-1} = (y, g^{-1}, x)$$

* *Nesne dönüşümü 1, G grubunun birim elemanı olmak üzere;*

$$\varepsilon : X \to X \times G \times X$$
$$x \mapsto \varepsilon(x,g,y) = (x,1,y)$$

* *kısmi çarpım işlemi*

$$\mu : (X \times G \times X) \times (X \times G \times X) \to X \times G \times X$$
$$(x,h,y) \times (y,g,z) \to (x,h,y).(y,g,z) = (x,hg,z)$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$(X \times G \times X, X, \alpha, \beta, i, \varepsilon, \mu)$$

*bir **aşikar grupoid**dir.*

Örnek 2.3.6. *A boştan farklı bir küme ve R , A üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Nesneleri (X, f) çifti olan bir $\mathcal{C}$ kategorisi oluşturalım: X boştan farklı bir küme ve $f : A \to X$ bir dönüşüm olsun.*

$$xRy \Longrightarrow f(x) = f(y)$$

bağıntısı verilsin.Başka bir ifadeyle R, f ile birleştirilmiş A üzerinde bir denklik bağıntısı olan Rf anlamındadır. Morfizmler kümesi $Mor((X,f),(Y,g))$ ise $h \circ f = g$ şartını sağlayan $\mathcal{C}$ deki bütün $h : X \to Y$ dönüşümlerin kümesidir.

3. DEMETLER

3.1 Öndemetler

Tanım 3.1.1. *X bir topolojik uzay, C bir kategori olsun. C deki değerleriyle X üzerinde F* ***öndemeti*** *aşağıdaki şartları sağlayan bir sistemdir:*

1) *Her $U \subseteq X$ açık kümesine bir $F(U)$ kümesi karşılık gelir.*

2) *Her $U, V \subseteq X$ açık kümeler , $V \subseteq U$ olmak üzere;*

$$F_{UV} : F(U) \rightarrow F(V)$$

dönüşümü vardır.

i) $F_{UU} = I_{F(U)}$

ii) $F_{VW} \circ F_{UV} = F_{UW}, (W \subseteq V \subseteq U)$*dir.*

Şu halde $\{F(U), F_{UV}, X\}$, X üzerinde bir öndemettir [12].

Bu tanım kategori teoride aşağıdaki gibi ifade edilebilir.
X bir topolojik uzay, $O(X)$; X in açık altkümelerinin ailesi ve i dahil etme dönüşümü olsun. X in açık altkümeleriyle bir kategori

$$Ob(O(X)) = \{U \mid U \subset X \text{ açık}\}$$
$$Mor(O(X)) = \{i \mid i : U \rightarrow V\}$$

ile tanımlanır. Aynı nesnelerle fakat tüm morfizmlerin yönünün değiştirilmesi ve kompozisyon işleminin sırasının değiştirilmesiyle $O(X)^{op}$ kategorisini elde edilir. X topolojik uzayıüzerinde F öndemeti, X in açık altkümelerinin ve onların dahil etme dönüşümlerinin $O(X)$ kategorisinin $O(X)^{op}$ dual kategorisinden kümelerin ve fonksiyonların Set kategorisine bir funktordur.

$$F : O(X)^{op} \rightarrow Set$$

Bu taktirde $F = \{F(U), F_{UV}, X\}$ sistemine X üzerinde kümelerin bir öndemeti denir. X üzerinde Abel grupların öndemetinde $F(U)$ Abel grup özelliklerini sağlamalı ve F_{UV} kısıtlama dönüşümü bir grup homomorfizması olmalıdır.

Örnek 3.1.1. *X bir topolojik uzay ve A herhangi bir küme olsun. X uzayı üzerinde bir A_X öndemeti;*

i) *X uzayı üzerindeki bir U açık kümesi için $A_X(U) = A$ ve*

ii) *X uzayı üzerindeki $V \subseteq U$ açıkları için*

$$F_{UV} = I_A : A_X(U) \rightarrow A_X(V)$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek 3.1.2. *X ve Y topolojik uzaylar olsun. X topolojik uzayı üzerindeki Y-değerli sürekli fonksiyonların C^Y öndemeti;*

i) *X uzayı üzerindeki bir U açık kümesi için*

$$C^Y(U) = \{f \mid f : U \to Y\}$$

sürekli dönüşümlerin kümesidir.

ii) *X uzayı üzerindeki her U, V açığı ve $V \subseteq U$ olmak üzere;*

$$F_{UV} : C^Y(U) \to C^Y(V); \quad f \mapsto f\mid_V$$

ile tanımlıdır [12].

Örnek 3.1.3. *X topolojik uzay ve U, V kümeleri X 'te açık; U üzerindeki tüm denklik bağıntılarının kümesi $E(U)$ ve*

$$\begin{aligned} E_{UV} : E(U) &\to E(V) \\ R &\mapsto R\mid_V = R \cap (V \times V) \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$E = \{E(U), E_{UV}, X\} \text{öndemeti}$$

* $E_{UU}(R) = R\mid_U = R = I_{E(U)}$

* $(E_{VW} \circ E_{UV})(R) = E_{VW}(R\mid_V) = (R\mid_V)\mid_W = R\mid_W$

şartlarıyla tanımlıdır.

Tanım 3.1.2. *F ve G, X üzerinde öndemetler ve $f : F \to G$ morfizmi $f(U) : F(U) \to G(U)$, $V \subset U \subset X$ için*

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, "f(U)"] \arrow[d, "F_{UV}"] & G(U) \arrow[d, "G_{UV}"] \\ F(V) \arrow[r, "f(V)"] & G(V) \end{tikzcd}$$

$$G_{UV}(f(U)) = f(V)(F_{UV})$$

şeklindedir. Eğer $F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H$ ise $(g \circ f)(U) = g(U) \circ f(U)$ morfizmlerin bileşkesidir. $f : F \to G$ abel grupların ya da kümelerin öndemetlerinin izomorfizmleriyse $g : G \to F$ morfizmi vardır. Dolayısıyla $f \circ g = id_G$ ve $g \circ f = id_F$ yazılır. Burada $id_F : F \to F$, X teki U açığı için $id_F(U) = id_{F(U)}$ ile verilir.

Önerme 3.1.1. *X yönlendirilmiş kümesi üzerinde yansıma ve geçişme özellikleriyle birlikte $\leq$ sıralama bağıntısı ($x \leq x$ ve $x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z$) verilsin. Aşağıdakiler sağlanır.*

a) *Kümelerin yönlendirilmiş (direkt) sistemi; X yönlendirilmiş kümesi ve $(U_x)_{x\in X}$ kümeler ailesiyle birlikte $\forall\, x, y \in X$, $\exists\, z \in X \ni x \leq z$ ve $y \leq z$ için*

$$X_1 = \{(x, y) \in X \times X : x \leq y\}$$

şeklindedir. Burada her $(x, y) \in X_1$ için

$$F_{xy} : U_x \to U_y$$

kümelerin dönüşümü vardır.

b) *$\forall\, x \in X$ için $F_{xx} = id_{U_x}$*

c) *$\forall\, x, y, z \in X$ için $x \leq y \leq z$ ise*

$$\begin{tikzcd} U_x \arrow[r, "F_{xy}"] \arrow[dr, "F_{xz}"'] & U_y \arrow[d, "F_{yz}"] \\ & U_z \end{tikzcd}$$

üçgeni değişimlidir ve $F_{xz} = F_{yz} \circ F_{xy}$ dir [12].

Örnek 3.1.4. *X topolojik uzay ve T kümesi $U \leq V \Leftrightarrow V \supseteq U$ bağıntısıyla oluşturulmuş açık kümeler ailesi olsun. Burada $U \cap V$ de açıktır ve U, V nin içinde kalır. X üzerindeki F öndemeti için $F_{UV} = F_V^U$ kısıtlama dönüşümü olsun. $(F(U))_{U\in T}$, F_{UV} dönüşümüyle birlikte kümelerin direkt sistemi olur.*

Direkt sistem verildiğinde hedef sistem V kümesidir ve koleksiyon dönüşümü

$$(\sigma_x : U_x \to V)_{x\in X}$$

ile uyumludur. $\forall\, x \leq y$ için

$$\begin{tikzcd} U_x \arrow[r, "F_{xy}"] \arrow[dr, "\sigma_x"'] & U_y \arrow[d, "\sigma_y"] \\ & V \end{tikzcd}$$

üçgeni değişimlidir ve

$$\sigma_x = \sigma_y \circ F_{xy}$$

dir.

Fakat herhangi bir V hedefi için üzerindeki σ_x dönüşümüyle bir tek $f : U \to V$ var ve $\forall\, x \in X$ için

$$\begin{tikzcd} U_x \arrow[r, "\tau_x"] \arrow[dr, "\sigma_x"'] & U \arrow[d, "f"] \\ & V \end{tikzcd}$$

üçgeni değişimli ise $(\tau_x : U_x \to U)_{x \in X}$ ile direkt sistemin limitinin U hedefi olduğu tanımlanabilir [12].

Önerme 3.1.2. *Direkt limit en son hedeftir. Direkt sistemdeki iki direkt limit doğal izomorfiktir. Yani τ_x ler arasında birebir, örten bir dönüşüm vardır [12].*

Teorem 3.1.1. *U, $((U_x)_{x\in X}, (F_{xy})_{(x,y)\in X_1})$ direkt sisteminin limiti ve $(\tau_x : U_x \to U)_{x\in X}$ olsun.*

1. $\forall u \in U$ için $\exists x \in X \ni u \in \mathrm{Im}(\tau_x)$

2. $x, y, z \in X$ ve $u_x \in U_x$ ve $u_y \in U_y$ olduğundan

$$\tau_x(U_x) = \tau_y(U_y) \Leftrightarrow \exists z \in X \ \ni x \leq z,\ y \leq z \text{ ve } F_{xz}(U_x) = F_{yz}(U_y)$$

dir. Buradan U direkt sistemin limitidir.

İspat. Kabul edelim ki V, $(\tau_x)_{x\in X}$ te bir başka hedef olsun. Eğer $f : U \to V$ ve

$$\begin{tikzcd} U_x \arrow[r, "\tau_x"] \arrow[dr, "\sigma_x"'] & U \arrow[d, "f"] \\ & V \end{tikzcd}$$

eşitliği doğrulanıyorsa; $u \in$ U için $x \in X$ vardır öyle ki $u \in \mathrm{Im}\ (\tau_x)$ ve $u = \tau_x(U_x)$ yazılabilir. Buradan $f(u) = \tau_x(U_x)$ elde edilir. Böylece eğer f varsa tektir. $y \in X$ seçersek $u \in \mathrm{Im}(\tau_y)$ dir.$u = \tau_y(U_y)$ denebilir. Buradan $\exists z \in X$ vardır

$$F_{xz}(U_x) = F_{yz}(U_y)$$

yazılır ve

$$\begin{aligned} \tau_x(U_x) &= \tau_z(F_{xz}(U_x)) \\ &= \tau_z(F_{yz}(U_y)) \\ &= \tau_y(U_y) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece f iyi tanımlıdır. $f(u) = \tau_x(U_x)$,

$$\begin{tikzcd} U_x \arrow[r, "\tau_x"] \arrow[dr, "\sigma_x"'] & U \arrow[d, "f"] \\ & V \end{tikzcd}$$

'i doğrular [12]. □

Tanım 3.1.3. *X topolojik uzayı üzerinde F öndemeti olsun. $\forall U \subset X$ açık kümesine $F(U)$ karşılık gelip $V \subseteq U$ için $F_{UV} : F(U) \to F(V)$ kısıtlama dönüşümü vardır. Buradaki öndemetin X teki sapı*

$$F_x = \lim_{\substack{\to \\ U \in X}} F(U)$$

*dir ve $F(U) \to F_x$; $s \to s_x$, $U \in X$ dönüşümüyle verilir. F_x ler **hücre** ya da **F'nin kesiti** olarak adlandırılır [13].*

Tanım 3.1.4. *X topolojik uzay olmak üzere $x \in X$ noktasını içeren iki açık küme U ve V olsun. F bir öndemet olmak üzere; $s \in F(U)$ ve $t \in F(V)$ için*

$$M = \{(U, s) \mid U \subseteq X \text{ açık küme }, s \in F(U)\} \text{ alalım.}$$

M üzerinde bir denklik bağıntısı ya da X' te aynı hücreye sahip olma bağıntısı

$$s \backsim_x t \iff \exists W \subseteq U \cap V \ni s|_W = t|_W \in F(W)$$

*şeklinde tanımlansın. s'nin x noktasındaki denklik sınıfına **s'nin hücresi** denir ve $germ_x s$ ile gösterilir. Burada $[s]_x = germ_x s = (U, s)_x$ ile gösterilebilir.*

$$\mathcal{F}_x = \{(U, s)_x = germ_x s \mid s \in F(U), x \in U \subseteq X \text{ açık küme }\}$$

*kümesi, X uzayı üzerindeki bütün hücrelerin kümesidir. Bu $\mathcal{F}_x$ kümesine **x noktasındaki saplar kümesi** denir. Böylece*

$$\mathcal{F} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

bir demet tanımlar [13].

Tanım 3.1.5. *X ve Y topolojik uzaylar olmak üzere; X teki her x noktasını içeren U açık kümesinin Y deki görüntüsü $f(U)$ olsun. Eğer*

$$f|_U : U \to f(U)$$

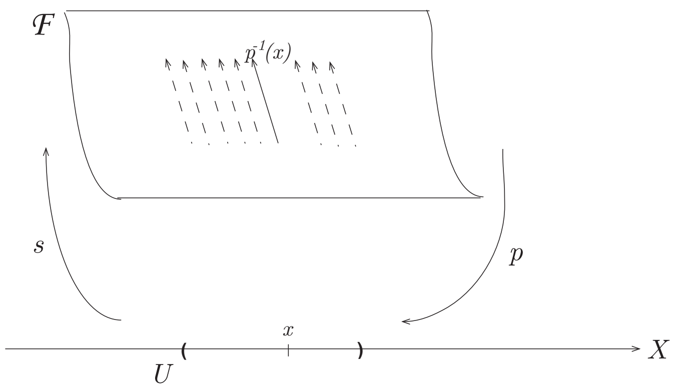
*homeomorfizm ise $f : X \to Y$ **lokal homeomorfizm**dir. Her lokal homeomorfizm sürekli ve açık dönüşümdür [12].*

3.2 Demetler

Tanım 3.2.1. *X topolojik uzayı üzerinde bir demet (sheaf);*

1. $\mathcal{F}$ topolojik uzay,

2. $p : \mathcal{F} \to X$ lokal homeomorfizm



şartlarını sağlayan $(\mathcal{F},\, p)$ çiftidir [11].

Tanım 3.2.2. *X topolojik uzayı üzerinde bir $\mathcal{F}$ demetini ve $x \in X$ olmak üzere; x noktasını içeren X uzayında bir U açık kümesini alalım. U kümesi üzerinde bir* ***kesit(section)****; $p \circ s = I_U$ şartını sağlayan*

$$s : U \to \mathcal{F}$$

dönüşümüdür [9].

$\mathcal{F}$ demetinin global kesitlerinin kümesi

$$\Gamma\left(X, \mathcal{F}\right) = \{s \mid s : X \to \mathcal{F}, p \circ s = I_X\}$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer $U \subseteq X$ alınırsa, lokal kesitlerin kümesi

$$\Gamma\left(U, \mathcal{F}\right) = \{s' \mid s' : U \to \mathcal{F}, p \circ s' = I_U\}$$

şeklindedir. Böylece $\Gamma\left(U, \mathcal{F}\right)$ yardımıyla bir öndemet tanımlanır.Daha net bir şekilde $V \subseteq U$ açık kümeler olmak üzere;

$$\begin{aligned} \Gamma_{UV} : \Gamma\left(U, \mathcal{F}\right) &\to \Gamma\left(V, \mathcal{F}\right) \\ s' &\mapsto \Gamma_{UV}\left(s'\right) = s' \mid_V \end{aligned}$$

dönüşümü ile birlikte Γ bir öndemettir. Γ dönüşümünün bir funktor olduğu

i) $\Gamma\left(s'\right) = s' \mid_V = I_{\Gamma(U)},\ V \subseteq U$

ii) $\left(\Gamma_{VW} \circ \Gamma_{UV}\right)\left(s'\right) = \Gamma_{VW}\left(s' \mid_V\right) = \left(s' \mid_V\right) \mid_W = s' \mid_W$

özellikleri ile kolayca görülür.

Teorem 3.2.1. *Bir X topolojik uzayı üzerinde tanımlanan her demet bir öndemet belirler [9].*

Tanım 3.2.3. *X topolojik uzay, F, X üzerinde bir öndemet olsun. U, X te açık küme ve $U = \bigcup\limits_{x \in X} U_x$, Unun açık kümelerinin örtüsü*

a) $s, s' \in F(U), F$ nin iki kesiti olsun. $\forall x \in X$ için

$$F_{UU_x}(s) = F_{UU_x}(s')$$

iken $s = s'$ durumunu sağlarsa Fye monodemet(parçalanmış öndemet) denir.

b) $\forall x \in X$ ve $s_x \in F(U_x)$ ile birlikte Fnin kesitlerinin $(s_x)_{x \in X}$ ailesi verilsin. $\forall x, y \in X$ için

$$F_{(Ux)(Ux \cap U_y)}(s_x) = F_{(Uy)(Ux \cap U_y)}(s_y)$$

için $s \in F(U)$ vardır ki $F_{UU_x}(s) = s_x$ dir. Bu duruma glueing (yapıştırma) durumu denir [11].

Örnek 3.2.1. *Öndemetlerin demet olmadığını aşağıdaki örneklerle görebiliriz:*

1. X diskret topolojiyle iki noktalı topolojik uzay olsun. $F(\emptyset) = \emptyset$, $F(\{x\}) = R$, $F(\{y\}) = R, F(\{x,y\}) = R \times R \times R$ ile tanımlı F öndemeti verilsin. $F(\{x,y\}) \to F(\{x\})$ ve $F(\{x,y\}) \to F(\{y\})$ birinci ve ikinci izdüşüm fonksiyonları olmak üzere; F öndemeti parçalanmamıştır. Global kesit üç sayıyla verilmiş fakat sadece $\{x\}, \{y\}$ üzerindeki kesitlerin değeri belirlidir. Böylece biz $\{x\}, \{y\}$ üzerindeki kesitleri yapıştırabilirken hepsini birtek şekilde yapıştıramayız.

2. X reel sayılar kümesi, U, X te açık küme ve $F(U)$, U üzerindeki sınırlı sürekli fonksiyonların kümesi olsun. F demet değildir; çünkü yapıştırılması mümkün değildir. Örneğin U_i ler her x için $\mid x \mid < i$ kümeleri olsun. $f(x) = x$ birim fonksiyon U_i üzerinde sınırlıdır. Sonuç olarak U_i üzerinde s_i kesiti alabiliriz. Fakat bu kesit yapıştırılamaz. Çünkü f fonksiyonu reel sayılarda sınırlı değildir. Sonuç olarak F öndemettir fakat demet değildir. Aslında F bölünmüştür çünkü sürekli fonksiyonların demetinin altdemetidir [4].

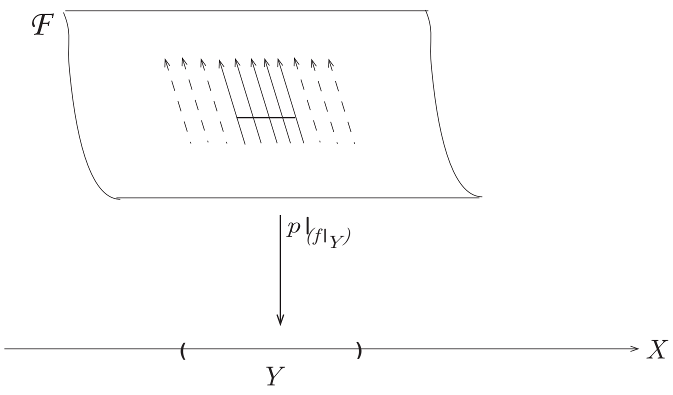
Tanım 3.2.4. *F öndemetini alarak yeni bir aF* ***demetleştirmesi(sheafification)*** *elde edilebilir. Herhangi bir $\mathcal{G}$ demeti,*

$$k : F \to aF$$

öndemetlerin doğal morfizmi ve herhangi bir $f : F \to G$ öndemet morfizmi için birtek

$$f' : aF \to \mathcal{G}$$

demet morfizmi var ve $f'k{=}f$ oluyorsa a' ya ***demet funktoru, demetleştirilmiş funktor(sheaving funktor)*** *denir. Burada a demetlerin kategorisinden öndemetlerin kategorisine dahil etme funktoru, k ise birleşmenin birimidir [11].*



Tanım 3.2.5. *$\mathcal{F}$, X topolojik uzayıüzerinde bir demet ve $p : \mathcal{F} \to X$ olsun. $Y \subseteq X$ ise $p^{-1}(Y) = \mathcal{F}\mid_Y$ de Y üzerinde bir demet olur.Bu demete $\mathcal{F}$ demetinin* ***alt demeti*** *denir [14].*

Tanım 3.2.6. *$p_1 : \mathcal{F}_1 \longrightarrow X$ ve $p_2 : \mathcal{F}_2 \longrightarrow X$ iki demet olsun. Eğer*

$$p_2 \circ \mu = p_1$$

ise $\mu : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ dönüşümüne ***sapları koruyor*** *denir . Burada $\mathcal{F}_1 = \bigcup_{x\in X} (\mathcal{F}_1)_x$ ve $\mathcal{F}_2 = \bigcup_{x\in X} (\mathcal{F}_2)_x$ olmak üzere;*

$$\mu\left((\mathcal{F}_1)_x\right) \subseteq (\mathcal{F}_2)_x$$

dir [9].

Tanım 3.2.7. *Sapları koruyan sürekli dönüşüme bir* ***demet morfizmi*** *denir. Sapları koruyan homeomorfizme de bir* ***demet izomorfizmi*** *denir [9].*

Örnek 3.2.2. *C^Y ve C^r öndemetleri aynı zamanda birer demettir. Burada tanımlanan uygun bir dönüşüm (sürekli, differensiyellenebilir) için demet olma özelliklerinin bir noktanın bir komşuluğunda sağlaması yeterlidir [12].*

Tanım 3.2.8. *X, Y topolojik uzaylarını ve $f : X \to Y$ sürekli dönüşümünü alalım. X uzayı üzerindeki $\mathcal{F}$ demeti, Y uzayı üzerinde bir $f_*\mathcal{F}$ demetini tanımlar. $V \subseteq Y$ açık kümesi için*

$$(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

olur. Bu demete $\mathcal{F}$ demetinin ***direkt görüntü demeti*** *denir. Burada $f : X \to Y$ sürekli fonksiyonu,*

$$f_* : Sh(X) \to Sh(Y)$$

funktorunu tanımlar [9].

Tanım 3.2.9. *$\mathcal{F}$ demeti Y uzayı üzerinde tanımlı bir demet olsun. $\mathcal{F}$ demetinin X uzayı üzerindeki $f^*\mathcal{F}$* ***ters görüntü demeti***

$$f^*\mathcal{F} = \{(x, \sigma) \in X \times \mathcal{F} : f(x) = p(\sigma)\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $p : \mathcal{F} \to Y$ lokal homeomorfizmdir. $f^*\mathcal{F}$ üzerinde bir izdüşüm

$$\begin{aligned} p^* &: f^*\mathcal{F} \to X \\ (x, \sigma) &\to x \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Benzer şekilde, $f : X \to Y$ sürekli dönüşümü

$$f^* : Sh(Y) \to Sh(X)$$

funktorunu verir. Y uzayı üzerinde bir $\mathcal{F}$ demeti için bu funktorun $f^*\mathcal{F} \in Sh(X)$ değerine $\mathcal{F}$ demetinin f altındaki ***ters görüntüsü*** *denir [9].*

Tanım 3.2.10. *$\mathcal{F}$, X topolojik uzayı üzerinde bir öndemet olsun. F öndemetinde bir* ***atlas*** *(veya F öndemetine karşılık gelen $\mathcal{F}$demetinin* ***global kesiti)***

$$\mathcal{U} = \{(U_i, s_i) \,|s_i \in F(U_i), i \in I\}$$

şeklinde tanımlanır öyle ki

i) $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ *, $U_i \subseteq X$ açık*

ii) *Her $i, j \in I$, $U_i \cap U_j$ kümesinin her açık örtüsü için en az bir $W \subseteq (U_i \cap U_j)$ vardır öyle ki $s_i|_W = s_j|_W$ dir.*

$\mathcal{U}$ atlasındaki herbir (U_i, s_i) elemanına ***harita*** *denir [9].*

Önerme 3.2.1. *F öndemetine karşı gelen $\mathcal{F}$ demetinin her $s-$global kesiti bir atlas ile verilebilir. Tersine; F öndemetinde her atlas $\mathcal{F}$ demetinde bir global kesit tanımlar [14].*

İspat. $F : \mathcal{O}(X)^{op} \to$ **Set** öndemetinin bir atlası

$$\mathcal{U} = \{(U_i, s_i) : i \in I, s_i \in F(U_i)\}$$

olsun. Göstereceğiz ki $\mathcal{U}$ atlası yukarıdaki öndemetten elde edilen $\mathcal{F}$ demetinin bir global kesitini verir. $\mathcal{U}$ atlası üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlayabiliriz. Bunun için bir $x \in X$ alalım. $x \in U_i \cap U_j$ olacak şekilde $\mathcal{U}$ atlasının iki (U_i, s_i) ve (U_j, s_j) elemanı olsun. (U_i, s_i) ve (U_j, s_j) ' nin denk olması için gerek ve yeter şart $x \in W \subseteq U_i \cap U_j$ ve $s_i \mid_W = s_j \mid_W$ olacak şekilde bir W komşuluğunun olmasıdır. $(U_i, s_i)_x$ ile (U_i, s_i) ' nin denklik sınıflarını gösterelim. Böylece bildiğimiz sapları ve demetleri elde ederiz:

$$\mathcal{F}_x = \{(U_i, s_i)_x : x \in U_i \ , \ s_i \in F(U_i)\} \ , \ \mathcal{F} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

Böylece her $(U_i, s_i)_x$, sürekli bir $\dot{s}$ dönüşümü tanımlar.

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &: U_i \to \mathcal{F} \\ x &\to (U_i, s_i)_x \end{aligned}$$

Burada $\mathcal{U}$ atlas olduğundan $x \in U_i$ için

$$\dot{s}(x) = \dot{s}_i(x)$$

formülü X topolojik uzayından $\mathcal{F}$ demetine bir $\dot{s}$ dönüşümü tanımlar. $\mathcal{F}$ demeti içinde açık olan keyfi bir U için

$$\dot{s}^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} \dot{s}_i^{-1}(U)$$

vardır. $\dot{s}_i^{-1}(U)$ kümesi, U_i' de açıktır. Buradan $\dot{s}_i^{-1}(U)$ kümesinin X uzayı üzerinde de açık olduğu elde edilir. Böylece

$$\dot{s} : X \to \mathcal{F}$$

sürekli olur. Şimdi; $p : \mathcal{F} \to X$ lokal homeomorfizm olduğundan $p \circ \dot{s} = I_x$ olduğu gösterilmelidir. Herhangi $x \in X$ için $x \in U_i$ açık kümesi vardır. Böylece

$$p \circ \dot{s}(x) = p \circ \dot{s}_i(x) = p((U_i, s_i)_x) = x$$

olur. Buradan $\dot{s}$, $\mathcal{F}$ demetinin global kesiti olur. Tersine; herhangi bir demetin global kesiti bir atlas belirtir: $\dot{s}$, F öndemetinden elde edilen $\mathcal{F}$ demetinin bir global kesiti olsun. Bu $p : \mathcal{F} \to X$ lokal homeomorfizm ve $p \circ \dot{s} = I_x$ olacak şekilde bir $\dot{s} : X \to \mathcal{F}$ sürekli dönüşümünün olduğu anlamına gelir. $\dot{s}$ sürekli olduğundan $x \in X$, $\dot{s}\,|_{U_i}$ olacak şekilde bir $x \in U_i$ açık komşuluğuna sahiptir. $\dot{s}\,|_{U_i} = \dot{s}_i$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &: U_i \to \mathcal{F} \\ x &\to (U_i, s_i)_x \end{aligned}$$

sürekli dönüşümü elde edilir. Her bir $x \in X$ için, bu şekildeki kümeler üzerinde bir denklik bağıntısı mevcuttur. Bunun anlamı her $x \in X$ noktasında $x \in U_i$ ile birlikte bir U_i açığı var ve U_i üzerindeki her $\dot{s}_i$ dönüşümü bir (U_i, s_i) verir demektir. Gerçekten bu (U_i, s_i)' ler

$$\mathcal{U} = \{(U_i, s_i)\,|s_i \in F(U_i), i \in I\}$$

şeklinde bir atlas oluşturur [14]. □

Tanım 3.2.11. *X topolojik uzayı üzerindeki demetlerin kategorisi **Sh(X)** olsun. **Sh(X)** kategorisinin $\mathbf{Sec_X}$ şeklinde gösterilen global kesitlerinin kategorisi aşağıdaki gibi elde edilir.*

*Nesneler kümesi $Ob(\mathbf{Sec_X})$, **Sh(X)** kategorisinin global kesitleridir. $\mathbf{Sec_X}$ kategorisindeki bir morfizm aşağıdaki diyagramı değişimli yapan*

$$\phi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$$

şeklindeki bir demet morfizmidir:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_1 \arrow[rr, "\phi"] & & \mathcal{F}_2 \\
& X \arrow[ul, "s_1"] \arrow[ur, "s_2"'] &
\end{tikzcd}$$

4. s-DEMETLER

Bu bölümde Grothendieck-Verdier [15] tarafından tanımlanan ve Rosenthal [16], İçen [14], Brown [19] tarafından geliştirilen lokal eşdeğerlik tanımı ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir.

4.1 Lokal Denklik Bağıntısı

Tanım 4.1.1. *X bir topolojik uzay, X in U açık altkümesi için $E(U) = \{R \mid R, U$ üzerinde tüm denklik bağıntıları$\}$ olsun. Eğer $V \subseteq U$ ve aynı zamanda Xte açık ise*

$$\begin{aligned} E_{UV} &: E(U) \to E(V) \\ R &\to R\mid_V = R \cap (V \times V) \end{aligned}$$

bir kısıtlama morfizmi bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} E &: O(X)^{op} \to Set \\ U_i &\to E(U_i) = \{R \mid R, U \text{ üzerinde denklik bağıntısı}\} \end{aligned}$$

*funktoru X üzerinde bir $E = \{E(U_{\dot{I}}), E_{UV}, X\}$ öndemetini tanımlar. E öndemetine karşı gelen demeti $\mathcal{E}$ ile gösterelim. $\mathcal{E}$ demetinin $r-$global kesitine X topolojik uzayı üzerinde bir **lokal denklik bağıntısı** denir [15].*

Lokal denklik bağıntısının bir dönüşüm olmanın yanısıra yapısında $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} R_i &\in E(U_i) \\ R_j &\in E(U_j) \end{aligned}$$

iken bir $z \in (U_i \cap U_j)$ vardır ve $z \in W \subseteq (U_i \cap U_j)$ dir öyle ki

$$R_i\mid_W = R_j\mid_W$$

*olan **lokal bağdaşabilirlik şartı** vardır [16].*

$$r \to U_r = \{(U_i, R_i) \mid U_i \subseteq X \text{ açık kümeler, } R_i \in E(U_i)\}$$

Örnek 4.1.1. *Bir X uzayı, U_i örtüsü ve gereken lokal bağdaşabilirlik şartı ile herhangi bir Y uzayı alınsın.*

$$f_i : X \to Y$$

sürekli dönüşüm olmak üzere U_i üzerinde bir R_i denklik bağıntısı tanımlanabilir. Burada

$$f_i(x) = f_i(y) \iff xRy$$

şeklinde tanımlanır. R_i ve R_j sırasıyla U_i ve U_j üzerinde denklik bağıntısı olsunlar. $x \in (U_i \cap U_j)$ için $x \in U_k \subseteq (U_i \cap U_j)$ alınırsa lokal bağdaşabilirlik şartı ile

$$R_i \mid_{U_k} = R_j \mid_{U_k}$$

olur.

Tanım 4.1.2. *X bir topolojik uzay ve $\mathcal{F}$ bu uzay üzerinde bir demet olsun. Eğer her $x \in X$ için $\mathcal{F}_x$ sapı bir grup ve*

$$\begin{aligned} i : \mathcal{F}_x \times \mathcal{F}_x &\to \mathcal{F}_x \\ (\sigma_1, \sigma_2) &\to \sigma_1 \sigma_2 \end{aligned}$$

*sürekli ise bu $\mathcal{F}$ demetine **grupların demeti** denir [14].*

Böylece aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 4.1.1. *Grupların demeti bir grupoiddir.*

İspat.

$$\begin{array}{c} \mathcal{F} \\ p \downarrow \\ X \end{array}$$

Morfizmlerin kümesi

$$Mor\,(\mathcal{F} = \cup \mathcal{F}_x) = \{p\,(\mathcal{F}_x) \mid p : \mathcal{F} \to X\},$$

Nesnelerin kümesi

$$Ob\,(\mathcal{F}) = X,$$

Kaynak ve hedef dönüşümler

$$\alpha : \mathcal{F} \to X$$
$$\beta : \mathcal{F} \to X,$$

Bileşke dönüşümü

$$m : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F},$$

Nesne dönüşümü

$$\varepsilon : X \to \mathcal{F},$$

Ters dönüşüm de

$$i : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

alınırsa grupların demeti bir

$$(\mathcal{F}, X, \alpha = p, \beta = p, m, \varepsilon, i)$$

grupoidini oluşturur. □

4.2 Lokal ve Global Altgrupoidler

Tanım 4.2.1. *X bir topolojik uzay , $Ob(G) = X$ olacak şekilde bir grupoid G, X uzayının bir açık kümesi U ve*

$$G\mid_U = \alpha^{-1}(U) \cap \beta^{-1}(U)$$

olsun. $V \subseteq U$ olacak şekildeki $U, V \subseteq X$ açık kümelerini alalım. Eğer $H, G\mid_U$nun U geniş altgrupoidi ise $H\mid_V$ de $G\mid_V$ nin geniş altgrupoididir. Dolayısıyla $L_G(U)$ $G\mid_U$ tam altgrupoidinin U geniş altgrupoidlerinin ailesi olmak üzere;

$$\begin{aligned} L_{UV} : L_G(U) &\to L_G(V) \\ H &\to H\mid_V \end{aligned}$$

şeklinde bir kısıtlama dönüşümü vardır. Buradan

$$L_G : O(X)^{op} \to Set$$

kontravaryant funktoru elde edilir. Dolayısıyla L_G, X uzayı üzerinde bir $\{L_G, L_{UV}, X\}$ öndemeti olur. L_G öndemetinden

$$p : \mathcal{L}_G \to X \ , \ p(\mathcal{L}_x) = x$$

kanonik izdüşümü lokal homeomorfizmi ile

$$\mathcal{L}_G = \bigcup_{x\in X} \mathcal{L}_x^G = \bigcup_{x\in X} \{(U_i, H_i)_x : x \in U_i \subseteq X \text{ açık} \ , \ H_i \in L_G(U_i)\}$$

$\mathcal{L}_G$ demeti elde edilebilir. $U \subseteq X$ açık kümesini ve U üzerinde tanımlı $\mathcal{L}_G$ demetinin bir

$$s : U \to \mathcal{L}_G$$

kesitini alalım. Bu tür kesitlerin oluşturduğu $\Gamma(U, L_G)$ kümesi bir öndemet belirtir:

$$\Gamma : O(X)^{op} \to Set$$

$\mathcal{L}_G$ demetinin global kesitlerinin kümesi de $\Gamma(X, L_G)$ olur. Ayrıca her $H \in L_G(U)$ elemanı bir $s \in \Gamma(U, L_G)$ kesiti ile ilişkilidir. Eğer $x \in X$ ve $\sigma \in \mathcal{L}_x$ ise o zaman

$$\sigma = (U, H)_x = germ_x H = s(x) = s_x$$

olacak şekilde bir $x \in U \subseteq X$ açık komşuluğu ve $s \in (U, \mathcal{L}_G)$ vardır [17].

Tanım 4.2.2. *Bir X uzayı üzerindeki G grupoidinin bir **lokal altgrupoidi** L_G öndemetinden elde edilen $\mathcal{L}_G$ demetinin global kesitidir ya da X uzayından $\mathcal{L}_G$ demetine tanımlı $p \circ s = I_x$ şartını sağlayan sürekli fonksiyonlardır [14].*

Örnek 4.2.1. *Bir X topolojik uzayı üzerindeki herhangi bir G grupoidinin $G(x, y)$ kümesi boştan farklı olmak üzere X uzayı üzerinde $x \sim y$ şeklinde bir denklik bağıntısı olsun. X topolojik uzayı üzerindeki her lokal denklik bağıntısı $X \times X$ uzayının lokal altgrupoididir. Lokal altgrupoid bir kesitten çok altgrupoidin bir denklik* *sınıfıdır. X uzayındaki U açığı için* $E(U)$, *U üzerindeki bütün denklik sınıflarının kümesi,* $U \times U$ *üzerindeki bütün U geniş altgrupoidlerinin ailesi olsun. Bu X uzayı üzerinde*

$$E : O(X)^{op} \longrightarrow Set$$

öndemetinden $\mathcal{E}$ *demetinin oluştuğunu verir. Bu* $\mathcal{E}$ *demetinin bir global kesitinin r lokal denklik bağıntısını elde ederiz. Yani bir G grupoidinin herhangi bir* $s-$*lokal altgrupoidi bir lokal denklik bağıntısı belirtir. X uzayındaki atlas ile X kümesinin bir* $s-$*lokal altgrupoidi tanımlanabilir.*

Örnek 4.2.2. *X bir topolojik uzay,* $X^* = \{X_i \mid i \in I\}$ *da X üzerindeki R denklik bağıntısı tarafından oluşturulmuş bir ayrışım ve K bir grup olsun.*

. α, β *dönüşümleri R üzerinde kanonik izdüşüm,*

. *K grubunun birim elemanı e için nesne dönüşümü;*

$$\varepsilon((x,y),k) = ((x,y),e)$$

. *kısmi çarpım işlemi*

$$m((x,y),k_1)((y,z),k_2) = ((x,z),k_1k_2)$$

olmak üzere $R \times K$*, X uzayı üzerinde bir* $(R \times K, X, \alpha, \beta, i, \mathcal{E}, m)$ *grupoiddir. X uzayı üzerinde* $U_j \subseteq U_i$ *olacak şekilde* $U_i, U_j \subseteq X$ *açık kümeleri ve*

$$E(U_i) = \{R_i \mid R_i, U_i \text{üzerinde denklik bağıntısı}\}$$

$$L(U_i) = \left\{H \mid H, G|_{U_i} = R \times K|_{U_i} = R|_{U_i} \times K \text{nın bir } U_i \text{geniş altgrupoidi}\right\}$$

yapıları olsun. X uzayı üzerinde E ve L öndemetlerinden

$$\gamma : E \to L$$

$$\begin{aligned} \gamma(U) : E(U_i) &\to L(U_i) \\ R_i &\mapsto R_i \times K \end{aligned}$$

doğal dönüşümü ve

$$O(X)^{op} \to Set$$

funktoru tanımlanabilir.

$$\gamma : E \to L$$

nın öndemet morfizmi olduğu aşağıdaki diyagramların değişimliliği ile gösterilebilir.

$$\begin{tikzcd} E(U_i) \arrow[r, "\gamma(U_i)"] \arrow[d, "E_{U_iU_j}"'] & L(U_i) \arrow[d, "L_{U_iU_j}"] \\ E(U_j) \arrow[r, "\gamma(U_j)"'] & L(U_j) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R_i \arrow[r] \arrow[d] & R_i \times K \arrow[d] \\ R_i|_{U_j} \arrow[r] & R_i|_{U_j} \times K = R_i \times K|_{U_j} \end{tikzcd}$$

Bu morfizmlerden $\mathcal{E}_R$ ve $\mathcal{L}_G$, E_R ve L_G öndemetlerinden elde edilen demetler olmak üzere;

$$\gamma^* : \mathcal{E}_R \to \mathcal{L}_G$$

demet morfizmi

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_R \arrow[r] \arrow[dr, "p\mathcal{E}"] & \mathcal{L}_G \arrow[d, "p\mathcal{L}"] \\ & X \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramıyla elde edilebilir. X uzayı üzerindeki $\mathcal{U} = \{(U_i, R_i) \mid i \in I\}$ atlası ile verilen bir R denklik bağıntısının lokal denklik bağıntısı

$$E : O(X)^{op} \to Set$$
$$E\,(U_i) = \{R_i \mid R_i, U_i \text{ üzerinde denklik bağıntısı}\}$$

ve K bir grup olmak üzere; X uzayı üzerindeki

$$\mathcal{U}^* = \{(U_i, R_i) \mid i \in I\}$$

atlası ile verilen $R \times K$ grupoidinin bir lokal altgrupoidini verir.

$$L_G : O\,(X)^{op} \to Set$$
$$L\,(U_i) = \{H_i \mid H_i \subseteq G\,|_{U_i}\}$$

Yani her denklik bağıntısı bir lokal altgrupoiddir. Fakat her grupoid bir denklik bağıntısı değildir [14].

4.3 Dahili Kategori

Tanım 4.3.1. *G bir grup, X bir küme olmak üzere;*

$$G \times X \to X$$
$$(g, x) \to g.x$$

fonksiyonu ile

- $\forall g, h \in G$ *ve* $x \in X$ *için* $(g.h).x = g.(h.x)$

- $\forall x \in X$ *ve* e, G *nin birim elemanı olmak üzere;*

$$e.x = x$$

*şartları sağlanıyorsa X üzerinde G grubu **soldan etki**yor denir. Benzer olarak X üzerinde G grubunun **sağdan etkisi***

$$X \times G \to X$$

fonksiyonu ile

- *$\forall g, h \in G$ ve $x \in X$ için $x.(g.h) = (x.g).h$*

- *$\forall x \in X$ ve e, G nin birim elemanı olmak üzere;*

$$x.e = x$$

şartlarını sağlayacak şekilde tanımlanır [4].

Tanım 4.3.2. *X kümesi üzerine etkiyen G grubu için X teki x noktasının **yörüngesi** X in elemanlarının kümesidir. x, G nin elemanlarına etkiyebilir. x in orbiti Gx ile gösterilir.*

$$Gx = \{g.x \mid g \in G\}$$

Denklik bağıntısıyla ilişkilendirildiğinde $x \sim y \Leftrightarrow g \in G$, $g.x = y$ dir. Orbitler bu bağıntının denklik sınıflarıdır [4].

Tanım 4.3.3. *Her $x \in X$ için x in **dengeleyici(stabilizer) altgrubu***

$$G_x = \{g \in G \mid g.x = x\}$$

şeklinde tanımlıdır [4].

Tanım 4.3.4. *Grup etkisinin genelleştirilmesiyle **etki grupoidi***

$$G' = G \times X$$

ile verilebilir. Etki grupoidinde grupoid morfizmlerini kapsayan bir $p : G' \to G$ morfizmi vardır. Burada stabilizerlar verteks gruplar, orbitler ise elemanlardır [4].

Tanım 4.3.5. *G, $Ob(G)$ üzerinde bir grupoid olmak üzere; G nin $\alpha, \beta, \mu, \varepsilon, i$ yapı dönüşümleri sürekli olacak şekilde, $Mor(G)$ ve $Ob(G)$ kümeleri üzerinde bir topoloji yapısı varsa G ye $Ob(G)$ üzerinde bir **topolojik grupoid** denir. G bir topolojik grupoid ise i ters dönüşümü bir homeomorfizmdir ve*

$$\delta : G \times G \to G, \ (g, h) \mapsto gh^{-1}$$

fark dönüşümü süreklidir [3].

Örnek 4.3.1. *X topolojik uzay olmak üzere; $X \times X$, X üzerinde bir topolojik grupoiddir. $x, y \in X$ için x den y ye bir morfizm (y, x) çifti olsun.*

- *Kaynak ve hedef dönüşümler*

$$\alpha(y, x) = x \ \text{ve} \ \beta(y, x) = y$$

- *Nesne dönüşümü*

$$\varepsilon : x \to (x, x)$$

- *Ters dönüşüm*

$$i : (y, x) \to (y, x)^{-1} = (x, y)$$

- *Kısmi çarpım işlemi*

$$\mu : (z, y)(y, x) = (z, x)$$

şeklindedir. α, β dönüşümleri izdüşümün sürekliliğinden, ε dönüşümü $\varepsilon \times \varepsilon$ birim dönüşümlerin kısmi çarpımı olduğundan, i dönüşümü de birinci izdüşüm ve ikinci izdüşüm dönüşümlerinin kısmi çarpımı ile tanımlı olduğundan dönüşümler süreklidirler.

4.3.1 Dahili kategori

Tanım 4.3.6. $\mathcal{K}$ pullback*lere sahip bir kategori olsun. $\mathcal{K}$ kategorisi üzerindeki bir $\mathcal{C}$ dahili kategorisi iki nesneden ve dört morfizmden oluşur. Nesneleri nesneler kümesi C_0 ve morfizmler kümesi C_1 dir. Morfizmleri ise; α,β kaynak ve hedef dönüşümleri, i ters dönüşümü ve*

$$m : C_2 = C_1 \times_{C_0} C_1 \to C_1$$

bileşke çiftlerinin kısmi çarpım işlemidir.

$$\begin{tikzcd} C_2 = C_1 \times_{C_0} C_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & C_1 \arrow[d, "\beta"] \\ C_1 \arrow[r, "\alpha"'] & C_0 \end{tikzcd}$$

Bu morfizmleri pullback olarak görebiliriz. Bu şekilde oluşan bir küçük kategoriye ***dahili kategori*** *denir [4].*

Burada genelleşmiş $h : X \to C_1 \times_{C_0} C_1$ elemanı,

$$\alpha f = \beta g$$

olacak şekilde

$$f,g : X \to C_1$$

bileşke çiftleri vardır.

Eğer $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki dahili kategori ise;

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

dahili funktoru tanımlanabilir. Burada

$$F_0 : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}_0$$
$$F_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{D}_1$$

dir.

Bu funktorların bileşkesi ile, $\mathcal{K}$ kategorisindeki dahili kategorileri nesne ve dahili funktorları da morfizm kabul eden ***Cat($\mathcal{K}$)*** *kategorisi oluşturulabilir.*

Basit kategori teorisinde, iki small kategori arasındaki

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

funktorları, $\mathcal{C}$ kategorisinden bir small kategoriye tanımlanan

$$\mathcal{C} \to \mathbf{Set}$$

*funktorlarından farklıdır. İkinci tür funktorlar $\mathcal{C}_0 \to \mathbf{Set}$ nesne fonksiyonu ve $\mathcal{C}_1 \to$ **Fonk** morfizm(ok) fonksiyonundan oluşurlar. Bu tanımda, **Set** kategorisi yerine pullbacklere sahip herhangi bir $\mathcal{K}$ kategorisi ve $\mathcal{C}$ yerine de $\mathcal{K}$ kategorisi üzerinde bir $\mathcal{C}$ dahili kategorisi alınsın.*

*$\mathcal{K}$ uzayına tanımlanan bu tür funktorların uygun bir tanımını elde etmek için önce uzayın **Set** olduğu durumlar ele alınmalıdır. $F_0 : \mathcal{C}_0 \to \mathbf{Set}$ nesne fonksiyonu her bir $x \in C_0$ için kümelerin C_0 dizinli ailesi olarak görülebilir.*

$$p : F \to C_0$$

aşikar izdüşümü olmak üzere

$$F = \bigcup_{x \in C_0} F_0(x)$$

bütün $F_0(x)$ kümelerinin ayrık toplamıdır. Her bir F_0x kümesi, p dönüşümünden $p^{-1}(x)$ lifi gibi yeniden yapılandırılabilir. Benzer olarak morfizm fonksiyonu için $\mathcal{C}$ kategorisinde her

$$f : x \to y$$

morfizmi kümelerin bir

$$\begin{aligned} F_0x &\to F_0y \\ a &\to f \cdot a \end{aligned}$$

dönüşümünü verir. Bütün bu dönüşümler, herbir $f \in C_1$ için herbir tekil dönüşüm f ' nin bir etkisi olacak şekilde $p : F \to C_0$ tarafından tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} \phi : C_1 \times_{C_0} F &\to F \\ (f, a) &\to f \cdot a \end{aligned}$$

Burada $C_1 \times_{C_0} F$,

$$\alpha : C_1 \to C_0$$

boyunca p dönüşümünün pullbackidir.

$\mathcal{K}$ *kategorisinde bir* C *nesnesi (*$\mathcal{C}$ *üzerinde bir dahili diyagram)* $\mathcal{C}$ *kategorisinin bir*

$$\phi : C_1 \times_{C_0} F \to F$$

etkisi ile birlikte C_0 *üzerine bir*

$$p : F \to C_0$$

nesnesidir. Burada $\alpha C_1 \to C_0$ *pullbacki için* C_1 , C_0 *üzerine bir nesne olarak alınmıştır. Aşağıdaki diyagramların değişimli olması gerekir.*

$$\begin{tikzcd}
C_1 \times_{C_0} F \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & F \arrow[d, "p"] \\
C_1 \arrow[r, "\beta"'] & C_0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C_1 \times_{C_0} F \arrow[r, "i\times 1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & C_1 \times_{C_0} F \arrow[d, "\phi"] \\
& F
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C_1 \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} F \arrow[r, "1\times\phi"] \arrow[d, "m\times 1"'] & C_1 \times_{C_0} F \arrow[d, "\phi"] \\
C_1 \times_{C_0} F \arrow[r, "\phi"'] & F
\end{tikzcd}$$

Eğer $F : (F, p, \phi_1)$ *ve* $G = (G, q, \phi_2)$, $\mathcal{K}$ *kategorisinde iki* C*-nesne iseler* F*'den* G*'ye* C*-nesnelerin bir morfizmi ilgili yapıları koruyan basit bir*

$$\psi : F \to G$$

morfizmidir.

$\mathcal{C}$ *bir topolojik dahili kategori olsun. Burada* C_0 *nesnelerin uzayı,* C_1 *morfizmlerin uzayı ve* C_2 *de morfizmlerin bileşke çiftleridir.* m *kısmi çarpım işlemini,* α, β *hedef ve kaynak dönüşümleri temsil etmektedir.*

Tanım 4.3.7. *$\mathcal{C}$ bir topolojik kategori olsun. Bir $\mathcal{C}$-demeti*

$$\begin{tikzcd}
C_1 \times F \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & F \arrow[d, "p"] \\
C_1 \arrow[r, "\beta"'] & C_0
\end{tikzcd}$$

yukarıdaki diyagramı değişimli yapan bir $p : \mathcal{F} \to X$ demetidir. Ayrıca

$$\begin{tikzcd}
C_0 \times F \arrow[r, "i\times 1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & C_1 \times F \arrow[d, "\phi"] \\
& F
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
C_1 \times C_1 \times F \arrow[r, "1\times\phi"] \arrow[d, "m\times 1"'] & C_1 \times F \arrow[d, "\phi"] \\
C_1 \times F \arrow[r] & F
\end{tikzcd}$$

dir. $\mathcal{F}$, X uzayı üzerinde bir demet ve $\mathcal{F}$ demetine tanımlanan ϕ dönüşümünün birim ve birleşim kuralları X üzerinde $\mathcal{F}$ demetinin bir etkisidir [4].

4.3.2 G-demeti

Bir $\mathcal{C}$-demet morfizmi, etkileri koruyan bir demet dönüşümüdür. Bu yolla $\mathcal{C}$-demetinin $\mathbf{Sh}(X;C)$ kategorisini elde ederiz.

Şimdi, G , X üzerinde bir topolojik grupoid olsun. Eğer $G = C_1$ ve $G \times G = C_2$ alırsak , G-topolojik kategorisini elde ederiz. Bu kategoride α,β kaynak ve hedef dönüşümleri, m kısmi çarpım işlemini, π_1 ve π_2 kanonik izdüşümleri ve ε nesne dönüşümünü temsil etmektedir.

$$\begin{tikzcd}
C = C_2 \arrow[r, shift left=2, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[r, shift right=2, "m"'] & C_1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & C_0
\end{tikzcd}$$

Dolayısıyla, herhangi bir $p : \mathcal{F} \to X$ demeti birim ve birleşme özelliğini koruyor ve hatta

$$\begin{tikzcd}
G \times \mathcal{F} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathcal{F} \arrow[d, "p"] \\
G \arrow[r, "\beta"'] & X
\end{tikzcd}$$

durumunu sağlıyor ise bu demete **G-demet** denir. Burada $G \times \mathcal{F}$, β üzerinde bir pullbacktir. $e_x \in \mathcal{F}_x$, $g_x \in G(x,y)$ ve $g \in G(x,y)$, $h \in G(y,z)$, $k \in G(x,z)$ için

$$p(\phi(g)(e_x)) = y$$

$$\phi((g_x)(e_x)) = e_x \quad \text{ve } \phi(h)(\phi(g)(e_x)) = \phi(k)(e_x)$$

sağlanır. Böylece, $G(x,y)$'nin her g elemanı $I_{\#} = I$ ve $(hg)_{\#} = g_{\#}h_{\#}$ olacak şekilde sapların bir

$$g_{\#} : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_y$$

morfizmini tanımlar. Sonuçta $\mathcal{F}$ demeti üzerindeki G ' nin bir etkisi bir

$$F : G \to \{\text{demetlerin sapları}\}$$

funktorunu verir. ϕ dönüşümüne $\mathcal{F}$ üzerinde G yönünde bir **transport** denir. X üzerinde bir R denklik bağıntısını gözönüne alalım. O zaman

$$R = R \times R \overset{\pi_1}{\underset{m}{\overset{\pi_2}{\rightrightarrows\!\!\!\!\!\!\rightarrow}}} R \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} X$$

bir dahili topolojik kategori olur. R bir topolojik grupoid olduğundan gösterilebilir ki R-demeti , F üzerinde S denklik bağıntısı ile birlikte $p : \mathcal{F} \to X$ demeti gibi tanımlanabilir. Burada $(x_1, x_2) \in R$ ve $e_1 \in p^{-1}(x_1)$ iken $(e_1, e_2) \in S$ ile birlikte $e_2 \in p^{-1}(x_2)$ tektir [14].

4.3.3 s-demeti

s , G grupoidinin bir lokal altgrupoidi olsun. (Örneğin s , $\mathcal{L}_G$ demetinin global kesiti)

Tanım 4.3.8. *$\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ demetinin bir t-global kesiti,*

$$p(t) = s$$

olacak şekilde, $\mathcal{F}$ demeti üzerindeki bir s-transportudur. s-transportu ile birlikte X uzayı üzerindeki bir demet X uzayı üzerinde bir s-demettir [6].

X uzayı üzerinde iki s-demeti arasındaki transportu koruyan dönüşümün notasyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Tanım 4.3.9. *ϕ_1 ve ϕ_2 etkileri ile $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ s-demetleri ve X uzayı üzerinde bir G topolojik grupoidi olsun. $\mathcal{F}_1$ demetinden $\mathcal{F}_2$ demetine tanımlanan bir $s-$morfizmi*

$$\begin{tikzcd} G \times \mathcal{F}_1 \arrow[r, "I\times\eta"] \arrow[d, "\phi_1"'] & G \times \mathcal{F}_2 \arrow[d, "\phi_2"] \\ \mathcal{F}_1 \arrow[r, "\eta"'] & \mathcal{F}_2 \end{tikzcd}$$

diyagramını değişimli yapan

$$\eta : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$$

transportu koruyan bir demet dönüşümüdür [6].

$\mathbf{Sh}(X; s)$, s-demetlerinin ve s-morfizmlerinin kategorisini göstersin. $\mathbf{Sh}(X; s)$ kategorisinden $\mathbf{Sh}(X)$ kategorisine tanımlanan bir bağlı(faithfull) funktor vardır. Çünkü X uzayı üzerinde her s-demeti X üzerinde bir demettir .

Tanım 4.3.10. *X bir topolojik uzay ve G, X üzerinde bir grupoid olsun. α, β hedef, kaynak dönüşümler olmak üzere;*

i) *s nin tanım kümesi $Dom(s) = U$, X'te açıktır.*

ii) *Her $x \in Dom(s)$ için $\alpha s(x) = x$ dir.*

iii) *$\beta(s(Dom(s)))$, X'te açıktır.*

özelliklerini sağlayan

$$s : U \to G$$

*kısmi dönüşümüne G grupoidinin bir **uygun lokal kesiti** denir [17].*

Tanım 4.3.11. *U, X in bir açık kümesi olmak üzere; G nin bir lokal kesiti tanım kümesi $Dom(s) = U$ üzerinde sürekli ise bu kesite G grupoidinin bir **sürekli lokal kesiti** denir. $x \in X$ için bir s lokal kesitinin tersini*

$$s^{-1}(x) = s((\beta \circ s)^{-1}(x))^{-1}$$

ile $s : U \to G$ ve $t : V \to G$ şeklindeki iki lokal kesitin bileşkesi ise

$$(s * t)(x) = s((\beta \circ t)(x))t(x)$$

ile tanımlanır [17].

Tanım 4.3.12. *X bir topolojik uzay ve G, X üzerinde bir grupoid olsun. Eğer her $x \in U$ açığı için $\beta \circ s : x \to \beta \circ s(x)$ homeomorfizm ise G nin bir $s : U \to G$ ye lokal kesitine G nin* ***tersi alınabilir lokal kesiti*** *denir. Eğer G nin $s : U \to G$ ve $t : V \to G$,$(\beta \circ s)(U) \subseteq V$ olacak şekilde iki sürekli tersi alınabilir kesiti varsa*

$$ts : U \to G, \ ts(x) = t((\beta \circ s)(x))s(x)$$

yazılır ve $y \in (\beta \circ s)(U)$ olmak üzere; s nin tersi de $s^{-1}(y) = s((\beta \circ s)^{-1}(y))^{-1}$ ile verilir. $(\beta \circ s)(U) \to G$ uygun lokal kesiti için $\beta s(x) \mapsto (s(x))^{-1}$ yazılır. Sürekli tersi alınabilir lokal kesitlerin kümesi kompozisyona göre bir ters-yarıgruptur [19].

Tanım 4.3.13. *G, X üzerinde bir topolojik grupoid, $\alpha, \beta : G \to X$ kaynak, hedef dönüşümleri olmak üzere; eğer herbir $g \in G$, g boyunca G nin bir sürekli tersi alınabilir lokal kesitine sahipse (α, β, G) üçlüsüne* ***yeterince sürekli tersi alınabilir lokal kesitlere sahiptir*** *denir [20].*

Tanım 4.3.14. *X bir topolojik uzay ve G, X üzerinde bir grupoid olsun. $S_x(X, G)$ $x \in X$ in bir açık komşuluğundan G ye α nın tüm lokal kesitlerinin kümesi olsun. Bu küme üzerinde bir denklik bağıntısı $s, t \in S_x(X, G)$ için $s \sim_x t$ dir$\Leftrightarrow$ $x \in X$ için V açık komşuluğu vardır öyleki $J_x(X, G), \sim_x$ in denklik sınıflarının kümesi olsun.*

$$J(X, G) = \bigcup_{x \in X} J_x(X, G)$$

diyelim. $J_x(X, G)$ nin her $[s]_x$ elemanına $s \in S_x(X, G)$ ve $x \in Dom(s)$ olmak üzere; x teki hücre denir. $J_x(X, G)$ ye α nın lokal kesitlerinin hücrelerinin demeti denir [19].

Tanım 4.3.15. *$y = (\beta \circ s)(x)$ ve $[i]_x$, $x \in X$ için $i : X \to G$ birim kesitinin hücresi ve $[s]_x, [t]_y \in J(X, G)$ hücreleri*

$$[t]_y[s]_x = (ts)(x) = t((\beta \circ s)(x))s(x)$$

şeklinde bileşkelendirilmiş olmak üzere eğer; bir $[t]_y \in J(X,G)$ hücresi var $[s]_x[t]_y$ ve $[t]_y[s]_x$ tanımlı ve

$$[s]_x[t]_y = [i]_y,\ [t]_y[s]_x = [i]_x$$

*ise $[s]_x \in J(X,G)$ hücresine **tersi alınabilir** denir [17, 20].*

$[s]_x, [t]_y, [r]_z \in J(X,G)$ olsun. $J(X,G)$ nin nesnelerinin kümesi X, kaynak ve hedef dönüşümleri $\alpha, \beta : J(X,G) \to X$ dir. α nın tersi alınabilir lokal kesitlerinin hücrelerinin demetini Γ ile gösterecek olursak $[r]_z([t]_y.[s]_x)$ bileşke hücresi tanımlı olup $[r]_z([t]_y.[s]_x) = ([r]_z.[t]_y)[s]_x$ olduğundan $\Gamma(X,G)$, $J(X,G)$ üzerinde bir grupoiddir.

Tanım 4.3.16. *G bir grupoid ve W üzerindeki topoloji ile G nin bir altkümesi olmak üzere;*

1. *$Ob(G) = X \subseteq W \subseteq G$*

2. *$W = W^{-1}$ ve W bir grupoid olarak Gyi üretir. Yani G nin her elemanı W nın bazı elemanlarının çarpımı olarak yazılabiliyordur.*

3. *$(W \times W) \cap \delta^{-1}(W)$ kümesi $W \times W$ da açıktır ve*

$$\delta_W : (W \times W) \cap \delta^{-1}(W) \to W$$

   dönüşümü süreklidir. Burada $\delta : G \times G \to G$, $(g,h) \mapsto gh^{-1}$ fark dönüşümüdür.

4. *$\alpha_W, \beta_W : W \to G_0$ olmak üzere; (α_W, β_W, W) üçlüsü α nın yeterince sürekli tersi alınabilir lokal kesitlerine sahiptir.*

5. *W da $G_0 = X$ in bir V açık komşuluğu vardır öyleki $V = V^{-1}$ ve $V^2 \subseteq W$ dır.*

Şartlarını sağlayan (G,W) ikilisine G grupoidinin topolojik parçası denir [17, 20].

4.3.4 Holonomy grupoid

X üzerinde bir topolojik grupoid (G,X) olmak üzere; G grupoidinin (G,W) topolojik parçasının holonomy grupoidi H'yı topolojik durumdaki holonomy grupoid teoremiyle ifade edilsin.

Tanım 4.3.17. *G, X uzayı üzerinde bir grupoid ve s , G grupoidinin bir lokal altgrupoidi olsun. Eğer s düzenli ve her $g \in H_x(x,z)$ ve $h \in H_y(x,y)$ elemanı için $gh^{-1} \in H_z(y,z)$ olacak şekilde düzenli zayıf $s-$uyumlu bir $(H_x, U_x)_{x\in U}$ ailesi varsa s' ye* ***değişmez uygun(düzenli) altgrupoid*** *denir [6].*

Teorem 4.3.1. *(Aof-Brown Teoremi) $\Gamma(H)$, H ' nın bütün uygun yerel kesitlerinin kümesi olsun. $\Gamma(H)$ üzerinde k ve t uygun lokal kesitleri için*

$$(tk)(x) = t(\beta k(x))k(x)$$

ile bir çarpım tanımlanır. Eğer k bir uygun lokal kesit ise o halde $\beta k(U) \to H$ uygun lokal kesiti için k^{-1} ile

$$\beta k(x) \longmapsto (k(x))^{-1}$$

yazılır. Bu çarpımla $\Gamma(H)$, bir ters yarıgruba dönüşür. $\Gamma^c(W)$, W üzerinde değer alan ve sürekli uygun lokal kesitlerden oluşan $\Gamma(H)$' nin altkümesi olsun. $\Gamma^c(H,W)$, $\Gamma(H)$' nin yarıgrubu olsun. O halde $\Gamma^c(H,W)$ yine bir ters yarıgrup olur. $J(H)$, H' nın uygun lokal kesitlerinin hücrelerinin demeti olsun. Buradan $J(H)$' nın elemanı, $k \in \Gamma(H)$ olacak şekildeki (x,k) çiftlerinin denklik sınıfları olur. Öyle ki

$$x \in U = dom(k)$$

ve (x,k) , (y,t) ' ye denktir ancak ve ancak $x = y$ ve k ve t, x' in komşuluğu üzerinde çakışık ise. (x,k) denklik sınıfı $[k]_x$ şeklinde yazılır [6].

Tanım 4.3.18. *$\Gamma(H)$ üzerindeki çarpımın yapısı $J(H)$ üzerinde bir grupoid yapısı oluşturur. Öyle ki burada nesnelerin sınıfı X , kaynak ve hedef dönüşümleri de*

$$[k]_x \to X$$
$$[k]_x \longmapsto \beta k(x)$$

dir. $J^c(H,W)$, $\Gamma^c(H,W)$ ' nin elemanının hücrelerinin $J^c(W)$ demeti tarafından üretilen $J(H)$ ' nin altgrupoidi olsun.

Buradan $J^c(H,W)$ ' nin bir elemanı $k = k_n, ..., k_1$, $[k_i] \in J^c(W)$, $x_{i+1} = \beta k_i(x_i)$, $i = 1, ..., n$ ve $x_1 = x \in U = dom(k)$ olmak üzere;

$$[k]_x = [k_n]_{x_n} ... [k_1]_{x_1}$$

şeklindedir.

$$\psi : J(H) \to H$$
$$[k]_x \longmapsto \psi([k]_x) = k(x)$$

final dönüşümdür. Burada k *bir uygun lokal kesittir.O halde* $\psi(J^c(H,W))$ *olur.* $J_0 = J^c(W) \cap Ker\psi$ *olsun. Buradan* J_0 *,* $J^c(H,W)$ *' nin bir normal altgrupoidi olur.* $H^s = Hol(H,W)$ *holonomy grupoidi* $J^c(H,W)/J_0$ *bölüm uzayı olarak tanımlanır.* $p : J^c(H,W) \to H^s$ *bölüm morfizmi ve* $p([k]_x)$ *,* $< k >_x$ *tarafından oluşturulmuş olsun.* $J_0 \subseteq Ker\psi$ *olduğundan* $\phi p = \psi$ *olacak şekilde bir*

$$\phi : H^s \to H$$

örten morfizmi vardır.

H^s *holonomy grupoidi üzerindeki topoloji* H^s *ile birlikte aşağıdaki gibi bir topolojik grupoid yapısı oluşturur.* $k \in \Gamma^c(H,W)$ *olsun.*

$$\sigma_k : W \to H^s$$

kısmi fonksiyonu şöyle tanımlansın:

σ_k *' nın tanım kümesi* $\beta(W) \in U$ *olacak şekilde* $w \in W$ *elemanlarından oluşur.* w *ile uygun bir sürekli uygun lokal kesit seçilsin.* $\sigma_k(w)$ *değeri*

$$\sigma_k(w) = < k >_{\beta(w)} < f >_{\alpha(w)} = < kf >_{\alpha w}$$

şeklinde tanımlanır. $\sigma_k(w)$, f *lokal kesitinin seçiminden bağımsızdır ve bu* σ_k *' lar haritaların bir kümesini oluştururlar.* σ_k *haritalarına uyan başlangıç topolojisi* H^s *üzerine yüklenir. Bu topoloji ile birlikte* H *bir topolojik grupoid haline dönüşür [6].*

Tanım 4.3.19. G *,* X *üzerinde bir topolojik grupoid ve* s *,* X *üzerinde* G *' nin bir sabit düzenli lokal altgrupoidi olsun.*

$$glob(s) = H \quad ve \quad W = \bigcup_{x \in X} H_x$$

olsun. s *lokal altgrupoidi ile tanımlanan* (H,W) *lokal altgrupoidinin* H^s *holonomy grupoidine* s ***lokal altgrupoidinin holonomy grupoidi*** *denir [17].*

Örnek 4.3.2. *Pradines [18] tarafından ilk kez ortaya çıkarılan ve Brown [19] tarafından tanımlanan H^s holonomy grupoidini alalım. Aşağıdaki gibi bir s-demet tanımlayabiliriz.*

$J(H)$ kaynak dönüşümünün uygun lokal kesitlerinin hücrelerinden elde edilen bir demet olsun.

$$(tk)(x) = t(\beta k(x))k(x)$$

bileşkesi, $J(H)$ demetini, X üzerindeki demet topolojisi ile bir topolojik grupoide dönüştürür. $J^C(W)$, $k(U) \subseteq W$ olacak şekildeki

$$k : U \to H$$

kesitlerinin hücrelerinin altdemetini göstersin. $J^C(H, W)$, $J(H)$ demetinin $J(W)$ tarafından üretilen altgrupoidi olsun. Bu bir demet olur ve bir

$$\psi : J(H) \to H$$

$$[k]_x \mapsto \psi([k]_x) = k(x)$$

dönüşümü vardır. Eğer

$$J_0 = J(W) \cap Ker\psi$$

alınırsa, o zaman J_0 , $J^C(H, W)$ ' nin normal altgrupoidi olacaktır.

$$H^s = Hol(H, W) = J^C(H, W)/J_0$$

Bu bir topolojik grupoiddir ve X uzayı üzerinde bir demet topolojisine sahiptir [19]. Topolojik grupoidlerin bu tür yapıları topolojik kategorilerin yapısında da görülür. Bu yapılardan hareketle tekrar s lokal grupoidine dönelim.

s bir değişmez, düzenli lokal altgrupoid ve H^s ,

$$\alpha_s, \beta_s : H^s \to X$$

hedef ve kaynak dönüşümleri ile birlikte holonomy grupoidi olsun. O zaman H^s , aşağıdaki

$$\begin{tikzcd}
H_x \times H^s \mid_{U_x} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & H_s \mid_{U_x} \arrow[d, "\alpha_s"] \\
H_x \arrow[r, "\alpha_x"'] & U_x
\end{tikzcd}$$

s transportu ile birlikte bir s-demet olur.

$g \in H_x(x, y)$ *ve* $[k]_y \in H^s \mid_{U_x}$ *olsun. O halde* $x \in U \subseteq U_x$ *için bir*

$$t : U \to H_x$$
$$x \mapsto t(x) = g$$

uygun lokal kesit vardır. Dolayısıyla

$$\phi(g, [k]_y) = [gk]_x$$

olacak şekilde bir s-transportu tanımlayabiliriz. Hatta burada H^s *holonomy grupoidi bir s-demettir.*

5. KAYNAKLAR

[1] T.S.Blyth, *Categories*, University of st. Andrews, Scotland, 1986.

[2] H.Herlich, G.E.Strecker, *Category theory*, An introduction, Allyn and Bacon, Heldermann Verlag,1973.

[3] L.Pontrjagin, *Topological Groups*, Princeton Univ.Press,1946

[4] S.Maclane, I.Moerdijk,*Sheaves in Geometry and Logic*, Springer Verlag, 1991.

[5] M.H.Gürsoy, *Topolojik 2-Grupoidler*, M.Sc.Thesis, İnönü University Turkey, Malatya, 2002.

[6] H.T.Ertan, *Grupoidler ve Demetler*, M.Sc.Thesis, İnönü University Turkey, Malatya, 2008

[7] P.J.Higgins, *Notes on Categories and groupoids*, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1971.

[8] S.Maclane, *Categories for the working mathematicians, graduate texts in mathematics 5*, Springer, Verlag, Berlin 1971

[9] İ.İçen, *Demetler Üzerine*, M.Sc.Thesis, İnönü University Turkey, Malatya, 1989.

[10] R.Brown, *Topology and Groupoids*, Book surge LLC,U.K 2006

[11] G.E.Bredon, *Sheaf Theory*, Mc Graw-Hill Book Company, 1976

[12] B.R.Tennison, *Sheaf Theory*, Cambridge University Press,1975

[13] R.Brown, *Topology: A geometric account of general topology, homotopy types and the fundamental groupoid*, Ellis , Horwood Chichester 1988

[14] İ.İçen, *Sheaves, Local Subgroupoids and Holonomy Groupoids*, University of Wales, Report 1996

[15] A.Grothendieck, T.L.Verdier, *Theorie des topos*, Lectures Notes Maths, Springer 1972.

[16] K.Rosenthal, *Sheaves and Local Equivalence Relations*, Cah. Geom. Diff. Cat. , 1984.

[17] A.O.F, R.Brown, *The Holonomy Groupoid of a Locally Topological Groupoid*, University of Wales, Bangor, 1987

[18] J.Pradines, *Thorie de Lie Pour les Groupoides Differentiables, Relation entre Proprites Locates et Globales*, Comptes Rendus Acad,Sci. Paris, 1966

[19] R.Brown, *Holonomy and Monodromy Groupoids*, UCNW Maths Preprint, 1982

[20] O.Mucuk, .en *Holonomy, Extendibility and Star Universal Cover of a Topological Groupoid*, Applied General Topology 2003

ÖZGEÇMİŞ

22 Temmuz 1985 tarihinde Bursa'da doğdu. İlk öğrenimini Antakya, Muş ve Niğde'de, orta öğrenimini Adıyaman'da , lise öğrenimini Sivas ve Diyarbakır'da tamamladı. 2004 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programına kayıt yaptırdı ve Haziran 2008'de bölüm ikincisi olarak öğrenimini tamamlayıp yine 2008'de İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına kayıt yaptırdı. Eylül 2009'da, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Halen görevine devam etmektedir.