

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UZAY HAREKETİNİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Saime Şule AKSAKAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Ağustos 2008

Tezin Başlığı: **Uzay Hareketinin Diferensiyel Geometrisi Üzerine**

Tezi Hazırlayan: **Saime şule AKSAKAL**

Sınav Tarihi:28 Ağustos 2008

Yukarıda adı geçen tez, Jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Prof.Dr. A. İhsan Sivridađ (İnönü Üniv.) _____

Prof.Dr. Rıfat Güneş (İnönü Üniv.) _____

Dođ.Dr. H. Bayram Karadađ (İnönü Üniv.) _____

Prof.Dr. Rıfat Güneş

Tez Danışmanı

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Ali řAHİN

Enstitü Müdürü

Anneme, babama ve kardeşlerime ...

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

UZAY HAREKETİNİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Saime Şule AKSAKAL

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

54+iv sayfa

2008

Danışman: Prof.Dr. Rifat Güneş

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümü; diğer bölümlerin daha kolay anlaşılabilmesi için diferensiyel geometri ve kinematikteki temel kavramlara ayrılmıştır.

İkinci bölümde bir regle yüzeye adjoint (bitişik) bir nokta tanımlanmıştır. Bu noktanın sabit olması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir. Regle yüzeye adjoint bir A noktasının geometrik yeri olan eğrinin özellikleri, regle yüzeyin özellikleri ile ilişkilendirilerek incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ise bir regle yüzeye adjoint başka bir regle yüzey tanımlanmıştır. Birbiri üzerinde kaymaksızın yuvarlanma hareketi yapan iki regle yüzeyi ile bu regle yüzeylere adjoint olan başka bir regle yüzeyin özellikleri araştırılmıştır.

ANAHTAR KELİMELELER: Adjoint nokta, regle yüzey, yapı denklemleri, striksiyon eğrisi, dağılma parametresi, Euler-Savary Formülü

ABSTRACT

MSc. Thesis

KINEMATIC DIFFERENTIAL GEOMETRY OF A RIGID BODY IN SPATIAL
MOTION

Saime Şule AKSAKAL

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

54+iv pages

2008

Supervisor: Prof.Dr. Rifat Güneş

This thesis covers three chapters such a way that in the first chapter, to make easily understood we give the basic concepts in differential geometry and kinematics.

An adjoint point to a ruled surface is defined in the second chapter. And the properties are presented for this point to be fixed. The properties of the curve which is the geometrical place of the A point adjoining to the ruled surfaces are analysed by associating the properties of the ruled surface.

An adjoint ruled surface to another ruled surface is defined in the third chapter. The two ruled surfaces moving without sliding on each other and the ruled surface adjoining to these ruled surfaces are studied.

KEY WORDS: Adjoint point, ruled surface, construction equations, striction curve, Euler-Savary formulas

TEŞEKKÜR

Bana bu konuyu önererek, çalıőmaya teővik eden, bilgi ve tecrübeleriyle yönlendiren tez danışmanım Sayın Prof.Dr.Rıfat Güneş'e, İnönü Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı Başkanımız Sayın Prof.Dr.Sadık Keleő'e ve diğer bölüm hocalarıma teşekkür ederim. Zaman zaman karşılaőtığım problemleri tartıőmak için bana değerli zamanlarını ve bilgilerini sunan Sayın Hocalarım Doç.Dr. H. Bayram Karadađ' a ve Yrd.Doç.Dr. Müge Karadađ' a teőekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu çalışmanın yazılmasında bana yardım eden kıymetli arkadaşlarım Arő.Grv. Fulya Durak, Arő.Grv. Selcen Yüksel Perktaş ve H.Tuđba Ertan' a teőekkürlerimi sunarım. Ayrıca akademik çalıőmalarıma başlamam konusunda beni daima yüreklendiren babam, annem ve kardeşlerime de teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
1 TEMEL KAVRAMLAR	1
1.1 ÇİZGİLER UZAYINDA HAREKETLER	1
1.2 EĞRİLER TEORİSİ	7
1.3 YÜZEYLER TEORİSİ	10
2 REGLE YÜZEYLERDE HAREKETLİ VE SABİT CİSİMLERİN KİNEMATİK ANLAMLARI	18
2.1 BİR REGLE YÜZEYE ADJOİNT OLAN EĞRİLER	18
2.2 UZAY HAREKETİNDE BİR NOKTANIN YÖRÜNGESİNİN TEMEL DENKLEMLERİ	22
2.3 AKSOİDLERİN İNDİRGENMİŞ YAPI DENKLEMLERİNİN KİNEMATİK ANLAMLARI	25
2.4 UZAY HAREKETİNDE BİR NOKTANIN YÖRÜNGESİNİN ANİ ÖZELLİKLERİ	29
3 BİR REGLE YÜZEYE ADJOİNT OLAN YÜZEYLER	37
3.1 BİR REGLE YÜZEYE BİTİŞİK BAŞKA BİR REGLE YÜZEY . . .	37
3.2 UZAY HAREKETİNDE BİR DOĞRU YÖRÜNGESİNİN TEMEL DENKLEMLERİ	41
3.3 UZAY HAREKETLERİNDE BİR DOĞRUNUN İNVARİYANTLARI	47
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	54

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

II. ve III. bölümlerin daha iyi anlaşılması için temel kavramlara ayırdığımız bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölüm çizgiler uzayında hareketlere; ikinci alt bölüm eğriler teorisine; üçüncü alt bölüm ise yüzeylere ayrılmıştır.

1.1 ÇİZGİLER UZAYINDA HAREKETLER

Tanım 1.1.1.

A boş olmayan bir cümle ve V de F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir $\Psi : A \times A \rightarrow V$ dönüşümü $P, Q \in A$ noktaları için $\overrightarrow{PQ} \in V$ şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise A cümlesine V ile birleştirilmiş bir **afin uzay** adı verilir.

$$i) \forall P, Q, R \in A \text{ için } \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$$

ii) $\forall P \in A$ ve $\forall \vec{\alpha} \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \vec{\alpha}$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

\overrightarrow{PQ} vektöründe P noktasına **başlangıç noktası** ve Q noktasına **uç noktası** denir. A nın boyutu $boy A = boy V$ olarak tanımlanır.

A bir reel afin uzay ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. Eğer V de bir

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

iç çarpım işlemi tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da açı, diklik ve uzunluk gibi metrik özellikler tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı bir **Öklid Uzayı** adını alır ve E^n ile gösterilir[10].

Tanım 1.1.2.

n -boyutlu E^n Öklid uzayında bir nokta X ve E^n de bir afin koordinat sistemine göre X noktasının koordinatları (x_1, x_2, \dots, x_n) olsun.

$$x_i = E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

bileşenlerine E^n nin i -yinci koordinat fonksiyonu denir. \mathbb{R}^n standart reel afin uzayı olmak üzere \mathbb{R}^n de bir

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

iç çarpımı $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ için $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$\langle, \rangle (X, Y) = \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

biçiminde tanımlayalım. Bu iç çarpıma \mathbb{R}^n de **standart iç çarpım** veya **Öklid iç çarpımı** denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu \mathbb{R}^n vektör uzayı ile birleşen \mathbb{R}^n afin uzayına **n -boyutlu standart Öklid uzayı** denir ve E^n ile gösterilir[10].

Tanım 1.1.3.

n -boyutlu bir Öklid uzayı E^n olsun. Bir

$$d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\forall X, Y \in E^n$ için V deki norm $\|, \|$ olmak üzere,

$$d : (X, Y) \rightarrow d(X, Y) = \left\| \overrightarrow{XY} \right\|$$

şeklinde tanımlanır ve E^n nin X ile Y noktaları arasındaki uzaklık denir[10].

Tanım 1.1.4.

Bir n -boyutlu reel iç çarpım uzayı V olsun. V ile birleşen E^n Öklid uzayında sıralı bir $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ -lisi için eğer $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör sistemi V nin bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ çatısına bir **dik çatı** veya **Öklid çatısı** denir. Böylece bir çatıda tanımlanan $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ afin koordinat

sistemine **dik koordinat sistemi** veya **Öklid koordinat sistemi** denir. Bu sistemdeki

$$x_i = E^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n$$

koordinat fonksiyonlarına da **Öklid koordinat fonksiyonları** denir[10].

Tanım 1.1.5.

E_1^n ve E_2^n sırası ile, \mathbb{R}_1^n ve \mathbb{R}_2^n n -boyutlu iç çarpım uzayları ile birleşen birer Öklid uzayı olsunlar. Bir

$$f : E_1^n \rightarrow E_2^n$$

afin dönüşümü $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_1^n$ için

$$\langle \psi(\alpha), \psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

bağıntısını sağlayacak şekilde bir

$$\psi : \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}_2^n$$

lineer dönüşümü ile birleşiyorsa f ye bir **izometri** adı verilir[10].

Teorem 1.1.1.

Bir

$$f : E_1^n \rightarrow E_2^n$$

dönüşümü izometri ise

$$i) d(f(A), f(B)) = d(A, B), \quad \forall A, B \in E_1^n$$

ii) f birebir ve örtendir.

iii) E_1^n ve E_2^n uzaylarında birer Öklid koordinat sistemi sırası ile $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ise f izometrisi $A \in O(n)$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} Y \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $C, X, Y \in \mathbb{R}_1^n$ dir.

Bir n -boyutlu Öklid uzayı E^n nin izometrilerinin

$$R(n) = \left\{ f : E^n \xrightarrow{\text{izometri}} E^n \right\}$$

cümlesini alalım. $R(n)$ de dönüşümlerin birleşimi işlemi "o" ile gösterilirse $\{R(n), o\}$ ikilisi bir gruptur. Bu gruba **izometrilere grubu** denir[10].

Tanım 1.1.6.

n - boyutlu E^n Öklid uzayının izometrilereinden biri f olsun. E^n deki bir $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ Öklid koordinat sistemine göre f nin matrisel ifadesi $A \in O(n)$ ve $C \in \mathbb{R}_1^n$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} X' \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde dir. f ye E^n de bir **hareket** adı verilir.

$A \in O(n)$ olduğundan

$$\det A = \pm 1$$

dir. Eğer $\det A = +1$ ise f hareketine **direkt hareket**; $\det A = -1$ ise **karşı hareket** adı verilir. Hareket denince daha çok direkt hareketleri anlayacağız. Direkt hareketler iki çeşit hareketin bileşimidir; direkt dönme ve öteleme[10].

E^n Öklid uzayının bir f izometrisi için

$$f(0) = 0$$

olacak şekilde bir $O \in E^n$ noktası var ise f ye "O" noktası etrafında bir **dönme** denir[10].

Teorem 1.1.2.

E^n de başlangıcı $O \in E^n$ olan bir Öklid koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun. Bir

$$f : E^n \rightarrow E^n$$

izometrisi için

i) O noktası etrafında bir dönme f ise f nin bu Öklid koordinat sistemine göre ifadesi

$$X' = AX$$

şeklinde dir. Burada $A \in O(n)$ ve $X, X' \in \mathbb{R}_1^n$ dir.

ii) f bir direkt dönmedir $\Leftrightarrow X' \in AX$ ve $A \in O(n)$ dir[10].

Tanım 1.1.7.

E^n Öklid uzayının bir f izometrisi ve $\forall X \in E^n$ için

$$f(X) = X + h$$

olacak şekilde bir tek $h \in E^n$ noktası varsa f ye E^n nin h ile belirtilen bir ötelemesi denir[10].

Tanım 1.1.8.

E^3 Öklid uzayındaki 1- parametrelili hareketlerde E^3 ün doğruları regle yüzeyler teorisi için önemlidir. Doğrular E^3 ün lineer nokta cümleleridir. Bu yüzden E^3 Öklid uzayını yalnızca doğrulardan meydana gelmiş bir uzay olarak düşünecek ve bunu belirtmek için de E^3 e **çizgiler uzayı** adını vereceğiz.

Uzayda hareketin gözlenebilmesi için bir referans noktasına ihtiyaç vardır. Bu noktanın sabit ve aynı noktada bulunan gözleyiciye göre sabit olduğu farzedilir. Bu noktayı $O \in E^3$ ile gösterelim ve hareketi inceleyebilmek için ortonormal bir

$$\{\vec{e}_1(0), \vec{e}_2(0), \vec{e}_3(0)\} = \{0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

sistemini tesbit edelim. Ayrıca bu uzayda bütün noktaların sabit kaldığı yani hareket etmediği farzedilerek bu halde E^3 uzayına **sabit çizgiler uzayı** denir ve H' ile gösterilir. Yani

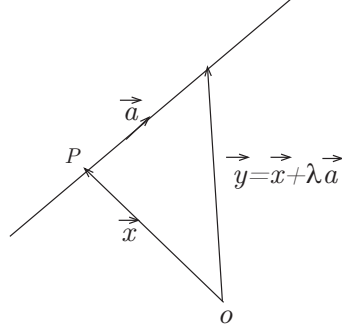
$$H' = Sp \{ \vec{e}_1(0), \vec{e}_2(0), \vec{e}_3(0) \}$$

dir. Diğer taraftan "O" noktasına göre hareketli bir P noktasını ve bu noktaya sıkı bir şekilde bağlı olan ortonormal bir $\{ \vec{E}_1(P), \vec{E}_2(P), \vec{E}_3(P) \}$ sistemini düşünelim. Yani

$$H = Sp \{ \vec{E}_1(P), \vec{E}_2(P), \vec{E}_3(P) \}$$

olsun.

Çizgiler uzayında artık, noktaların hareketi yerine doğruların hareketi alınabilir. Bu sebeple uzayın en basit elemanı olarak yönlü doğruları alırız. Hareketli bir P noktasının \vec{OP} yer vektörü ve bu noktaya yerleştirilen bir \vec{a} birim vektörü ile belirlenen doğrunun parametrik denklemi



$$\vec{y} = \vec{x} + \lambda \vec{a}$$

şeklinindedir. P noktasının doğru üzerinde keyfi bir nokta olması için, \wedge vektörel çarpımı göstermek üzere,

$$\vec{a}^* = \vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{y} \wedge \vec{a}$$

vektörel momentini kullanarak doğruyu (\vec{a}, \vec{a}^*) çifti ile belirleyebiliriz. \vec{a} ve \vec{a}^* vektörlerinin bileşenlerine **normlanmış Plücker doğru koordinatları** denir.

Çizgiler uzayında hareketleri üç gruba ayıracağız;

- i) (\vec{a}, \vec{a}^*) doğrusunun H' sabit uzayına göre hareketi
- ii) (\vec{a}, \vec{a}^*) doğrusunun H hareketli uzayına göre hareketi
- iii) H hareketli uzayının H' sabit uzayına göre hareketi

H hareketli uzayının H' sabit uzayına göre 1-parametrelili hareketine **uzay hareketi** diyerek H/H' ile göstereceğiz.

H/H' hareketini O noktası etrafında bir dönme ve O noktasına göre bir öteleme olmak üzere iki kısma ayırmak mümkündür.

Eğer sabit ve hareketli çizgiler uzayında iki Öklid koordinat sistemi sırası ile $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$ ve $\{x_1, x_2, x_3\}$ ise

$$X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere Tanım(1. 1. 6) dan dolayı H/H' uzay hareketini matris formunda

$$\begin{bmatrix} X' \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterebiliriz. Burada $A \in O(3)$, $C \in \mathbb{R}_1^3$ şeklindedir[10].

Tanım 1.1.9.

H/H' uzay hareketinin

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinde dönmeye karşılık gelen $A \in O(3)$ ve ötelemeye karşılık gelen $C \in \mathbb{R}_1^3$ matrisleri,

$$A = A(t)$$

$$C = C(t)$$

olacak şekilde bir tek reel t parametresinin diferensiyellenebilir fonksiyonları iseler H/H' uzay hareketine **bir parametrelili uzay hareketi** denir[10].

1.2 EĞRİLER TEORİSİ

Tanım 1.2.1.

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan $\alpha(I) \subset E^n$ kümesine α **eğrisi** denir, öyle ki

$$\alpha : I \rightarrow E^n, \quad I \subseteq \mathbb{R}$$

dir[10].

Tanım 1.2.2.

$M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\|\alpha'\| : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow \|\alpha'(t)\|$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına M nin (I, α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(t)$ noktasındaki **skalar hızı** denir[10].

Tanım 1.2.3.

M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise M eğrisi (I, α) ya göre **birim hızlı eğridir** denir. Bu durumda eğrinin $s \in I$ parametresine yay parametresi denir[10].

Tanım 1.2.4.

M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. $a, b \in I$ olmak üzere a dan b ye M eğrisinin **yay uzunluğu** diye eğrinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki uzunluğa karşılık gelen

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| .dt \quad t \in I$$

reel sayısına denir[10].

Tanım 1.2.5.

Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye **regüler eğri** denir[10].

Tanım 1.2.6.

M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T(t), N(t), B(t)\}$ ise

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

$$N(t) = B(t) \wedge T(t)$$

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}$$

şeklindedir[10].

Tanım 1.2.7.

$M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı

$$\{T, N, B\}$$

olsun. Buna göre Frenet vektörleri ile türevleri arasında

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

bağıntısı vardır. Burada $k_1(s) \in \mathbb{R}$ sayısına α eğrisinin **eğriliği** ve $k_2(s) \in \mathbb{R}$ sayısına da α eğrisinin **burulması** denir[10].

Tanım 1.2.8.

$M \subset E^n$ eğrisi verilsin. M eğrisinin $m \in M$ noktasındaki **tanjant uzayı** diye, $m \in M$ noktasında M nin hız vektörlerini içine alan $T_M(m) = V(m)$ vektör uzayına denir. $m \in M$ seçilmiş bir nokta olmak üzere, E^n nin $T_M(m)$ ile birleşen alt afin uzayına da, M eğrisinin $m \in M$ noktasındaki **teğet doğrusu** denir.

$M \subset E^n$ bir eğri olduğundan $boyM = 1$ dir. Gerçekten

$$boyM = boyT_M(m), \quad \forall m \in M$$

olduğundan, $m \in M$ noktasında

$$boyM = 1$$

dir. $T_{E^n}(m)$ vektör uzayında

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : T_{E^n}(m) \times T_{E^n}(m) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle (v_1, \dots, v_n)_m, (u_1, \dots, u_n)_m \rangle = \sum_{i=1}^n v_i u_i$$

şeklinde tanımlı Öklid iç çarpımını göz önüne alalım. Bu iç çarpımın $T_M(m)$ alt uzayına kısıtlanması da $T_M(m)$ de bir iç çarpımdır. Buna göre $T_M(m)$ uzayında bir vektörün normundan bahsedilebilir[10].

1.3 YÜZEYLER TEORİSİ

Tanım 1.3.1.

n - boyutlu E^n vektör uzayında $(n-1)$ - boyutlu bir yüzey veya $(n-1)$ - yüzey diye E^n deki boş olmayan bir M cümlesine denir. Öyleki bu M cümlesi

$$M = \left\{ x \in U \subset E^n \mid f : U \xrightarrow{\text{diferensiyellenebilir } \mathbb{R}, U \text{ bir açık altcümle}} x \rightarrow f(x) = c \right\}$$

$\nabla f|_P \neq 0, \forall P \in M$ biçiminde tanımlanır. E^2 de bir 1-yüzeğe **düzlemsel eğri** denir. E^3 de bir 2-yüzeğe ekseriya sadece **yüzey** denir. E^n de bir $(n-1)$ - yüzey, $n > 3$ olması halinde daha çok bir **hiperyüzey** olarak adlandırılır.

Manifoldlar olarak her bir M hiperyüzeyi bir $(n-1)$ - manifolddur ve dolayısıyla $\forall P \in M$ noktasında M nin bir tanjant uzayı $T_M(P)$ tanımlı olup $(n-1)$ - boyutlu bir vektör uzayıdır. Bu tanjant uzay $T_{E^n}(P)$ tanjant uzayının bir alt uzayıdır. Ayrıca $T_M(P)$ nin sadece M ye bağlı olduğunu, M yi tanımlamada kullanılan f fonksiyonundan bağımsız olduğunu da belirtmek gerekir. Gerçekten $T_M(P)$ vektör uzayını, E^n nin tamamen M de yatan parametrik eğrilerinin P noktasındaki hız vektörleriyle karakterize edebiliriz. Eğer M yi tanımlamada kullanılan diferensiyellenebilir fonksiyon f ise $c \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$f(x) = c, \quad \forall x \in M$$

dir, ayrıca

$$\nabla f|_P \neq 0, \quad \forall P \in M$$

dir. M nin tanımından bu şekilde bir f fonksiyonu vardır; hem de bu şekildeki f fonksiyonları birden çok olabilir. Her bir f fonksiyonu için

$$T_M(P) = [\nabla f|_P]^\perp$$

olarak belirtilebilir[10].

Örnek 1.3.1.

$0 \neq (a_1, a_2, \dots, a_n) \in E^n$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere E^n de bir $(n-1)$ - düzlem ($(n-1)$ - yüzey)

$$M = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i = b \right\}$$

olarak tanımlanır. Her bir $b \in \mathbb{R}$ için M bir başka n -yüzeydir. Zira $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ olmak üzere

$$\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right), (a_1, a_2, \dots, a_n) \right\rangle$$
$$\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq \vec{0}$$

dır. E^2 deki bir 1-düzleme ekseriya E^2 deki bir **doğru**, E^3 deki bir 2-düzleme daha çok, E^3 deki bir **düzlem** ve nihayet $n > 3$ olmak üzere E^n deki bir $(n-1)$ -düzleme de, E^n deki bir **hiperdüzlem** denir. b reel sayısının farklı iki değeri b_1, b_2 olsun. O zaman,

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = b_1 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^n a_i x_i = b_2$$

ile tanımlanan n -düzlemler birbirine paralel iki hiperdüzlemdirler[10].

Örnek 1.3.2.

E^n de bir birim $(n-1)$ -küre ($(n-1)$ - yüzey)

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}$$

olarak tanımlanır. S^{n-1} birim küresi de bir diğer $(n-1)$ - yüzeydir. Zira $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ olmak üzere

$$\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right), (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n) \right\rangle$$

dir. Buradan $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$ ın dışında daima

$$\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq \vec{0}$$

dır. $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$ noktası ise $n > 1$ için kürenin üzerinde bir nokta değildir. $n = 1$ için küre bir noktadan ibarettir, $n = 2$ için ise S^1 bir birim çember olarak bilinir[10].

Tanım 1.3.2.

E^n nin bir hiperyüzeyi M olsun. $\chi(M)^\perp$ nin bir ortonormal bazı $\{N\}$ ise N ye M nin birim normal vektör alanı denir.

$\chi(M)^\perp$ nin iki tane birim normal vektör alanı vardır. Bunlardan birisi $\{N\}$ ise diğeri $\{-N\}$ dir[10].

Örnek 1.3.3.

$$M = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid g(x_1, x_2, \dots, x_n) = c = \text{sabit}, g \in C(E^n, \mathbb{R})\}$$

cümlesi verilsin. M , E^n nin bir hiperyüzeyidir. Diğer taraftan, g fonksiyonunun gradienti

$$\nabla g = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(E^n)$$

dir. Eğer,

$$\alpha : I \rightarrow M; \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

M de herhangi bir eğri ise,

$$go\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$$

sabit fonksiyon olacağından

$$\frac{d(go\alpha)}{dt} \Big|_{t=} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)} \cdot \frac{d\alpha_i}{dt} \Big|_{t=} = 0, \quad \forall t \in I$$

yazılabilir. Bu ise

$$\langle \nabla g \Big|_{\alpha(t)}, \alpha'(t) \rangle = 0$$

demektir. O halde $\nabla g \in \chi(E^n)$ vektör alanı, $\forall P \in M$ için $T_M(P)$ ye diktir. Böylece, $\chi(M)^\perp$ in bir bazı $\{\nabla g\}$ dir. Buna göre

$$\frac{1}{\|\nabla g\|} \cdot \nabla g$$

M nin bir birim normal vektör alanıdır[10].

Tanım 1.3.3.

$M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall P \in M$ noktasında, E^3 ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye bir **regle yüzey** ve $P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M nin bir **doğrultmanı** denir[10].

Teorem 1.3.1.

$M \subset E^3$ bir regle yüzey olsun. O zaman M nin doğrultmanları, M de hem asimptotik hem de geodezik çizgilerdir[10].

İspat. $X \in \chi(M)$, M nin bir doğrultmanının teğet vektör alanı olsun. Her bir doğrultman, bir doğru olduğundan, E^3 de geodeziktir. Böylece,

$$D_X X = \vec{0}$$

elde edilir. Bu ise,

$$\bar{D}_X X = D_X X - \langle S(X), X \rangle N$$

Gauss denkleminde,

$$\bar{D}_X X = -\langle S(X), X \rangle N$$

ve

$$\bar{D}_X X \in T_M \text{ ve } N \in T_M^\perp$$

olduğundan

$$\bar{D}_X X = \vec{0} \text{ ve } \langle S(X), X \rangle = 0$$

olması gerekir. $\bar{D}_X X = 0$ olduğundan, M nin doğrultmanları, M nin geodezik çizgileri olurlar. $\langle S(X), X \rangle = 0$ olması ise bu doğrultmanların asimptotik çizgiler olduğunu gösterir. \square

Tanım 1.3.4.

E^3 Öklid uzayında birer vektör alanı V_1, V_2, V_3 olsun. Eğer $\forall P \in E^3$ noktası için $\{V_1, V_2, V_3\}$ sistemi P noktasındaki $T_{E^3}(P)$ tanjant uzayının bir tabanı (bazı) ise bu vektör alanları üçlüsüne E^3 de bir **çatı alanı** denir[10].

Tanım 1.3.5.

E^3 Öklid uzayında $\forall P \in E^3$ için

$$e_1(P) = (1, 0, 0) |_P, \quad e_2(P) = (0, 1, 0) |_P, \quad e_3(P) = (0, 0, 1) |_P$$

şeklindeki $\{e_1, e_2, e_3\}$ çatı alanına **doğal çatı alanı** denir.

E^3 de diğ er bir ortonormal çatı alanı $\{E_1, E_2, E_3\}$ olsun. $P \in E^3$ için

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

olarak alırsak, $A \in O(3)$ olmak üzere

$$E = Ae$$

şeklinde yazılabilir[10].

Tanım 1.3.6.

E^3 de herbir $\Phi \in \Omega^1$ 1-formu

$$\Phi = \sum_{i=1}^3 f_i dx_i, \quad f_i : E^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde yazılabilir[10].

Tanım 1.3.7.

E^3 Öklid uzayında bir çatı alanı $\{E_1, E_2, E_3\}$ olsun. $\forall P \in E^3$ noktasındaki dE_i , $(1 \leq i \leq 3)$ diferensiyelleri $T_{E^3}(P)$ tanjant uzayına ait vektörler olduğundan $\{\vec{E}_1(P), \vec{E}_2(P), \vec{E}_3(P)\}$ sistemi cinsinden ifade edilebilirler. Buna göre, $w_{ij}(P) \in \mathbb{R}$ ($i, j = 1, 2, 3$), olmak üzere

$$dE = dAe \quad \text{ve} \quad e = A^T E$$

olduğ undan

$$dE = (dAA^T) E$$

elde edilir. Diğ er taraftan

$$AA^T = I_n$$

$$d(AA^T) = 0$$

$$dAA^T + AdA^T = 0$$

$$dA A^T = - (dA A^T)^T$$

elde edilir.

$$\Omega = dAA^T \Rightarrow dE = \Omega E$$

olur.

E^3 Öklid uzayında hareketli bir çatı alanı $\{E_1, E_2, E_3\}$ olsun. O zaman $\forall P \in E^3$ için $dE = \Omega E$ dir ve burada Ω matrisi 3×3 tipinde bir antisimetrik matristir. Bu matrisin bileşenleri birer 1-formdur. Eğer

$$\Omega = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix}$$

dersek $\Omega^T = -\Omega$ olduğundan

$$i = j \text{ için } w_{ii} = -w_{ii} \Rightarrow w_{ii} = 0$$

ve

$$i \neq j \text{ için } w_{ij} = -w_{ji}$$

olacağından

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \text{ ve } w_{ij} = w_k$$

olmak üzere

$$w_{23} = w_1, \quad w_{13} = -w_2, \quad w_{12} = w_3$$

olarak Ω matrisi için

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

Ω matrisinin w_1, w_2, w_3 elemanlarına E^3 Öklid uzayındaki $\{E_1, E_2, E_3\}$ çatı alanı için **bağ formları** denir.

$$\Omega = dAA^T \text{ veya } \Omega = [w_{ij}] \text{ ve } A = [a_{ij}], \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

olduğundan

$$w_{ij} = \sum_k da_{ik} \cdot a_{kj}^T$$

biçimindedir[10].

Tanım 1.3.8.

Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın orta dikmesinin esas doğrultmanı üzerindeki ayağına **boğaz(merkez veya striksiyon) noktası** denir[10].

Tanım 1.3.9.

Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyin ana doğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin **boğaz(striksiyon) eğrisi(çizgisi)** denir[10].

Tanım 1.3.10.

Regle yüzeyin komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa mesafenin bu iki komşu anadoğru arasındaki açıya oranına **dağılma parametresi (drali)** denir[10].

Anadoğrularının birim doğrultman vektörü X olan bir regle yüzeyin dralini P_X ile göstereyim. Komşu anadoğruların ortak dikmesi doğrultusundaki birim vektör, vektörel çarpım ile, $X \wedge X'$ olduğundan bu doğrultudaki birim vektör

$$\frac{X \wedge X'}{\|X'\|}$$

dir, burada $X' = D_T X$ dir.

Dayanak eğrisinin komşu iki noktası $\vec{\alpha}(s)$ ve $\vec{\alpha}(s+ds) = \vec{\alpha}(s) + d\vec{\alpha}(s)$ olduğundan bu noktalardaki anadoğrular arasındaki en kısa uzaklık $d\vec{\alpha}$ vektörünün

$$\frac{X \wedge X'}{\|X'\|}$$

vektörü üzerindeki izdüşümüdür. Böylece en kısa uzaklık k ile gösterilirse

$$k = \left\langle d\vec{\alpha}, \frac{X \wedge X'}{\|X'\|} \right\rangle$$

veya

$$k = \frac{\det [d\vec{\alpha}, X, X']}{\|X'\|}$$

olarak bulunur. Eğer anadoğruların kúresel gústergesini gúzúnüne alırsak

$$A = (1 - av)T + cvN^-$$

teğet vektör alanı olmak üzere bu gústerge yay elementi olan

$$d\psi = \frac{dX}{\|ds\|} ds = \|D_T X\| ds = \sqrt{a^2 + c^2} ds$$

komşu iki anadoğru arasındaki açı olarak alınabilir. Burada $M \subset E^3$ bir regle yüzey; $a, c \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $v \in \mathbb{R}$ dir. Bu regle yüzeyin dralı ise

$$P_X = \frac{k}{d\psi}$$

$$P_X = \frac{\det [d\vec{\alpha}, X, X']}{\|X'\|} : \|X'\| ds$$

$$P_X = \frac{\det \left[\frac{d\vec{\alpha}}{ds}, X, X' \right]}{\|X'\|^2} = \frac{c}{a^2 + c^2}$$

dir. Regle yüzeyler için dral; koordinat değişimlerine göre en basit diferensiyel invaryanttır[10].

BÖLÜM 2

REGLE YÜZEYLERDE HAREKETLİ VE SABİT CİSİMLERİN KİNEMATİK ANLAMLARI

Bu bölümde regle yüzeye adjoint olan eğriler ele alınacaktır. Önce regle yüzeye adjoint olan bir A noktası tanımlanarak; bu noktanın sabit olma şartı verildi. A noktasının tanımlanmış olduğu eğrinin teğeti hesaplanarak regle yüzeyi ile ilişkisi araştırıldı. A noktasının oluşturduğu eğrinin eğriliklerinin geometrik yorumu yapılarak Euler-Savary teoremi ile ilişkisi incelendi.

2.1 BİR REGLE YÜZEYE ADJOİNT OLAN EĞRİLER

$\sigma \in \mathbb{R}$ olmak üzere $r_p(\sigma)$ uzay eğrisini göz önüne alalım (Şekil 2.1.). $r_p(\sigma)$ uzay eğrisine dayanarak hareket eden bir L doğrusunun oluşturduğu regle yüzeyin vektörel denklemini

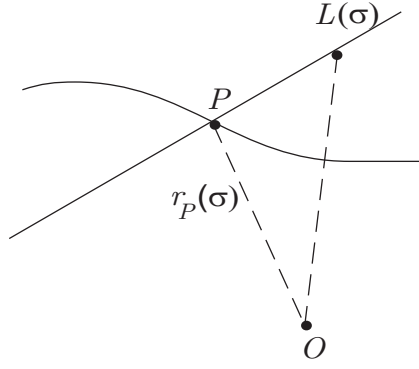
$$\Sigma : R(\sigma, \mu) = r_p(\sigma) + \mu L(\sigma), \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (2.1.1)$$

şeklinde ifade edebiliriz[5, 6]

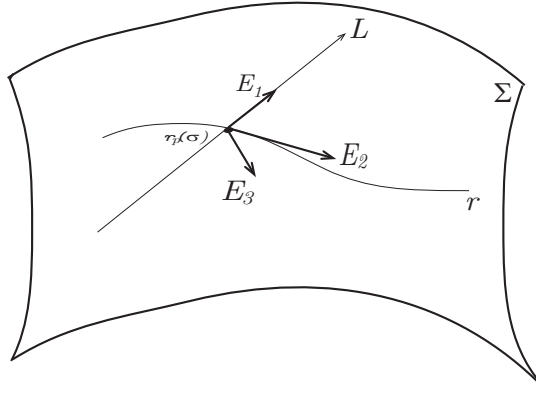
Burada $r_p(\sigma)$ ve $L(\sigma)$; Σ regle yüzeyinin dayanak eğrisi ve doğrultmanıdır. $r_p(\sigma)$ dayanak eğrisini Σ nm striksiyon eğrisi olarak alalım. Böylece $\{\vec{r}_p; \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$ Frenet çatısı veya Σ regle yüzeyinin doğal 3-ayaklısı

$$E_1 = L(\sigma), \quad E_2 = \frac{dL}{d\sigma}, \quad E_3 = E_1 \times E_2 \quad (2.1.2)$$

olarak alalım(Şekil 2.2.) [5]. Bu taktirde Frenet çatısının σ ya göre türevini alıp aşağıdaki işlemler yapılırsa



Şekil 2.1.



Şekil 2.2.

$$\langle E_1, E_1 \rangle = 1 \Rightarrow \langle dE_1, E_1 \rangle = 0 \Rightarrow dE_1 = \alpha E_2 + \gamma E_3$$

$$\langle E_2, E_2 \rangle = 1 \Rightarrow \langle dE_2, E_2 \rangle = 0 \Rightarrow dE_2 = \lambda E_1 + \beta E_3$$

$$\langle E_3, E_3 \rangle = 1 \Rightarrow \langle dE_3, E_3 \rangle = 0 \Rightarrow dE_3 = \xi E_1 + \varsigma E_2$$

$$\langle E_1, E_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle dE_1, E_2 \rangle + \langle dE_2, E_1 \rangle = 0 \langle \alpha E_2 + \gamma E_3, E_2 \rangle + \langle \lambda E_1 + \beta E_3, E_1 \rangle = 0$$

$$\lambda + \alpha = 0 \Rightarrow \lambda = -\alpha$$

$$\langle E_2, E_3 \rangle = 0 \Rightarrow \langle dE_3, E_2 \rangle + \langle dE_2, E_3 \rangle = 0 \langle \xi E_1 + \varsigma E_2, E_2 \rangle + \langle \lambda E_1 + \beta E_3, E_3 \rangle = 0$$

$$\beta + \varsigma = 0 \Rightarrow \varsigma = -\beta$$

$$\langle E_1, E_3 \rangle = 0 \Rightarrow \langle dE_3, E_1 \rangle + \langle dE_1, E_3 \rangle = 0 \langle \xi E_1 + \varsigma E_2, E_1 \rangle + \langle \alpha E_2 + \gamma E_3, E_3 \rangle = 0$$

$$\gamma + \xi = 0 \Rightarrow \xi = -\gamma$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{dr_p}{d\sigma} &= \alpha E_1 + \gamma E_3 \\ \frac{dE_1}{d\sigma} &= \alpha E_2 + \gamma E_3 \\ \frac{dE_2}{d\sigma} &= -\alpha E_1 + \beta E_3 \\ \frac{dE_3}{d\sigma} &= -\gamma E_1 - \beta E_2 \end{aligned}$$

bulunur. $\|L\| = 1$ olduğundan $dE_1 = E_2$ olur. Bu durumda $\alpha = 1$ ve $\gamma = 0$ elde edilir. Buna göre regle yüzeyinin Frenet çatısı ile türevleri arasında

$$\begin{aligned} \frac{dE_1}{d\sigma} &= E_2 \\ \frac{dE_2}{d\sigma} &= -E_1 + \beta E_3 \\ \frac{dE_3}{d\sigma} &= -\beta E_2 \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

ilişkisi vardır. Burada α, β, γ katsayılarına Σ nın yapı parametreleri veya Σ nın eğrilik fonksiyonları denir.

Dayanak eğrisi üzerinde olmayan bir A noktası alalım (Şekil 2.3.). L doğrusu $r_p(\sigma)$ eğrisine dayanarak hareket ederek Σ regle yüzeyini oluştururken A nın geometrik yeri bir eğri olur [4]. Bu eğriyi Γ_A ile gösterelim. Γ_A eğrisine Σ regle yüzeyine **adjoint(bitişik)** eğri denir.

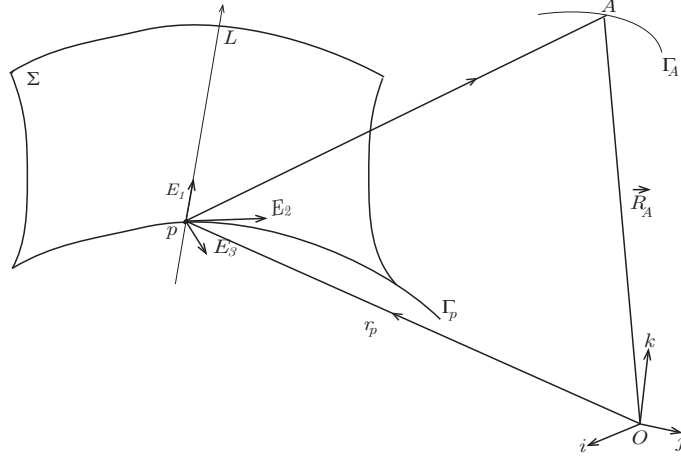
Böylece Γ_A nın vektörel denklemini

$$\Gamma_A : \vec{R}_A = \vec{r}_p + x_1 \vec{E}_1 + x_2 \vec{E}_2 + x_3 \vec{E}_3 \quad (2.1.4)$$

olarak yazabiliriz. Burada $(x_1, x_2, x_3); \{\vec{r}_p; \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$ Frenet çatısına göre A noktasının koordinatlarıdır.

\vec{R}_A nın σ ya göre türevi alınıp (2.1.3) denklemi kullanılırsa

$$\frac{d\vec{R}_A}{d\sigma} = \frac{dr_p}{d\sigma} + \frac{dx_1}{d\sigma} E_1 + \frac{dE_1}{d\sigma} x_1 + \frac{dx_2}{d\sigma} E_2 + \frac{dE_2}{d\sigma} x_2 + \frac{dx_3}{d\sigma} E_3 + \frac{dE_3}{d\sigma} x_3$$



Şekil 2.3.

$$\begin{aligned}
 &= \alpha E_1 + \gamma E_3 + \frac{dx_1}{d\sigma} E_1 + E_2 x_1 + \frac{dx_2}{d\sigma} E_2 - E_1 x_2 + \beta x_2 E_3 + \frac{dx_3}{d\sigma} E_3 - \beta x_3 E_2 \\
 &= \left(\frac{dx_1}{d\sigma} - x_2 + \alpha \right) E_1 + \left(x_1 + \frac{dx_2}{d\sigma} - \beta x_3 \right) E_2 + \left(\beta x_2 + \frac{dx_3}{d\sigma} + \gamma \right) E_3
 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$A_1 = \frac{dx_1}{d\sigma} - x_2 + \alpha, \quad A_2 = x_1 + \frac{dx_2}{d\sigma} - \beta x_3, \quad A_3 = \beta x_2 + \frac{dx_3}{d\sigma} + \gamma$$

almırsa

$$\frac{d\vec{R}_A}{d\sigma} = A_1 \vec{E}_1 + A_2 \vec{E}_2 + A_3 \vec{E}_3 \quad (2.1.5)$$

denklemini elde edilir.

Eğer A noktası $\{0; i, j, k\}$ sabit çatısına göre bir sabit nokta ise $\frac{dR_A}{d\sigma} = 0$ olur. Burada $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ Frenet vektörleri olduğundan

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0 \quad (2.1.6)$$

bulunur. Bu durumda A noktasına bir **sabit nokta** denir ve (2.1.6) denklemini bir regle yüzeye adjoint bir eğrinin sabit nokta şartı olarak tanımlanır.

2.2 UZAY HAREKETİNDE BİR NOKTANIN YÖRÜNGESİNİN TEMEL DENKLEMLERİ

$\{0_f; i_f, j_f, k_f\}$ sabit çatısını göz önüne alalım. Bu çatıya göre hareketli olan çatı da $\{0_m; i_m, j_m, k_m\}$ olsun. Bu çatıların temsil ettikleri uzaylara da sabit uzay ve hareketli uzay diyeceğiz. Hareketli ve sabit çatıya göre regle yüzeyler sırası ile

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_m &= R_m(\sigma_m, \mu_m) = r_m + \mu_m S_m \\ \Sigma_f &= R_f(\sigma_f, \mu_f) = r_f + \mu_f S_f \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1)$$

şeklinindedir. Burada r_m ve r_f sırasıyla Σ_m ve Σ_f nin striksiyon eğrilerinin yer vektörleri, S_m ve S_f de ani vida eksenlerinin (*ISA*) birim vektörleri veya Σ_m ve Σ_f nin üreteç vektörleri; σ_m ve σ_f ise yay parametreleridir. Σ_m ve Σ_f regle yüzeyleri için $\{r_m; E_1^{(m)}, E_2^{(m)}, E_3^{(m)}\}$ ve $\{r_f; E_1^{(f)}, E_2^{(f)}, E_3^{(f)}\}$ Frenet formüllerini (2.1.2) denkleminde olduğu gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned} E_1^{(m)} &= S^{(m)}(\sigma), & E_2^{(m)} &= \frac{dS^{(m)}(\sigma)}{d\sigma^{(m)}}, & E_3^{(m)} &= E_1^{(m)} \times E_2^{(m)} \\ E_1^{(f)} &= S^{(f)}(\sigma), & E_2^{(f)} &= \frac{dS^{(f)}(\sigma)}{d\sigma^{(f)}}, & E_3^{(f)} &= E_1^{(f)} \times E_2^{(f)} \end{aligned}$$

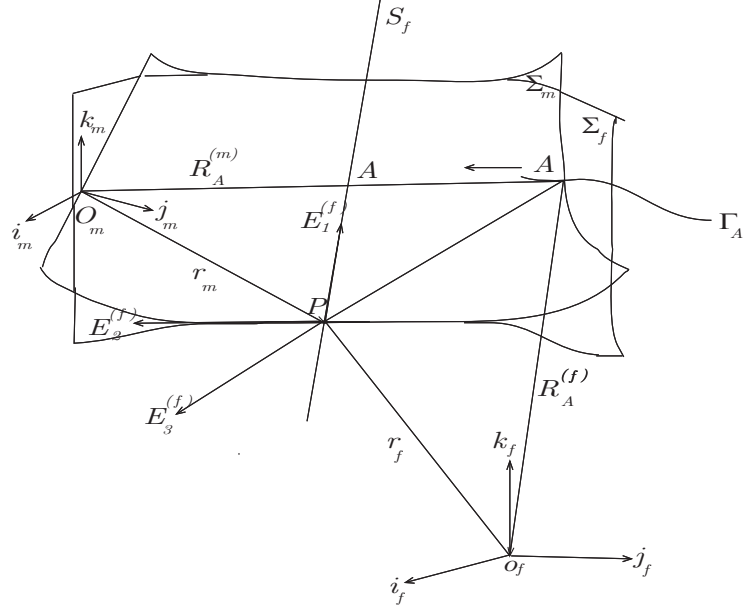
Sabit Σ_f regle yüzeyini (aksoidini) alalım. Sabit (fixed) $\{0_f; i_f, j_f, k_f\}$ referans çatısında, hareketli Σ_m cisminin bir sabit A noktasının yörüngesini inceleyelim (Şekil 2.4.). Herhangi bir anda A noktası Σ_f regle yüzeyine adjoint olsun. Böylece Γ_A nın vektörel denklemi;

$$\Gamma_A : \overrightarrow{R_A} = \overrightarrow{r_f} + x_1 \overrightarrow{E_1^{(f)}} + x_2 \overrightarrow{E_2^{(f)}} + x_3 \overrightarrow{E_3^{(f)}} \quad (2.2.2)$$

ile verilir. Burada $(x_1, x_2, x_3); \left\{ \overrightarrow{r_f}; \overrightarrow{E_1^{(f)}}, \overrightarrow{E_2^{(f)}}, \overrightarrow{E_3^{(f)}} \right\}$ Frenet çatısına göre A noktasının koordinatlarıdır. Bu taktirde $\overrightarrow{R_A}$ nın σ_f ye göre türevi;

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{R_A}}{d\sigma^{(f)}} &= \left(\frac{dx_1}{d\sigma^{(f)}} - x_2 + \alpha_f \right) E_1^{(f)} + \left(x_1 + \frac{dx_2}{d\sigma^{(f)}} - \beta_f x_3 \right) E_2^{(f)} \\ &+ \left(\beta_f x_2 + \frac{dx_3}{d\sigma^{(f)}} + \gamma_f \right) E_3^{(f)} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

dir.



Şekil 2.4.

Diğer yandan Σ_m hareketli regle yüzeyini alalım ve A noktası Σ_m regle yüzeyine adjoint olsun. Σ_m regle yüzeyi oluşurken A noktası da bir $\Gamma_A^{(m)}$ eğrisi meydana getirir. Bu eğrinin vektörel denklemini

$$\Gamma_A^{(m)} : \overrightarrow{R_A^{(m)}} = \overrightarrow{r_m} + x_1 \overrightarrow{E_1^{(m)}} + x_2 \overrightarrow{E_2^{(m)}} + x_3 \overrightarrow{E_3^{(m)}} \quad (2.2.4)$$

ile gösterelim. Burada (x_1, x_2, x_3) ; $\left\{ \overrightarrow{r_m}; \overrightarrow{E_1^{(m)}}, \overrightarrow{E_2^{(m)}}, \overrightarrow{E_3^{(m)}} \right\}$ Frenet çatısına göre A noktasının koordinatlarıdır. Şimdi $\Gamma_A^{(m)}$ eğrisinin $\{0_m; i_m, j_m, k_m\}$ referans çatısına göre değişimini inceleyelim.

Bu çalışmada hareketli Σ_m regle yüzeyi ile sabit Σ_f regle yüzeyi (2.2.2) ve (2.2.4) denklemlerine göre çakışık olur. Buna göre $\gamma_m = \gamma_f$ ve $d\sigma_{(f)} = d\sigma_{(m)}$ olur. Veya $\left\{ \overrightarrow{r_m}; \overrightarrow{E_1^{(m)}}, \overrightarrow{E_2^{(m)}}, \overrightarrow{E_3^{(m)}} \right\}$ ve $\left\{ \overrightarrow{r_f}; \overrightarrow{E_1^{(f)}}, \overrightarrow{E_2^{(f)}}, \overrightarrow{E_3^{(f)}} \right\}$ Frenet çatıları herhangi bir anda çakışır ki bu (2.2.4) denklemindeki (x_1, x_2, x_3) koordinatlarının (2.2.2) denklemindeki (x_1, x_2, x_3) koordinatları ile aynı olduğunu gösterir.

Bu arada A noktası $\{0_m; i_m, j_m, k_m\}$ referans çatısına göre bir sabit nokta olduğunda $\overrightarrow{R_A^{(m)}}$ nin türevleri regle yüzeye bir adjoint eğrinin sabit nokta şartı ile uyur. Yani

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{d\sigma_{(m)}} &= x_2 - \alpha_m \\
\frac{dx_2}{d\sigma_{(m)}} &= -x_1 + \beta_m x_3 \\
\frac{dx_3}{d\sigma_{(m)}} &= -\beta_m x_2 - \gamma_m
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

olur. Yukardaki denklem (2.2.3) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{dR_A}}{d\sigma_{(f)}} &= (x_2 - \alpha_m - x_2 + \alpha_f) E_1^{(f)} + (x_1 + \beta_m x_3 - x_1 - \beta_f x_3) E_2^{(f)} + (\beta_f x_2 - \beta_m x_2 - \gamma_m + \gamma_f) E_3^{(f)} \\
\frac{\overrightarrow{dR_A}}{d\sigma_{(f)}} &= (\alpha_f - \alpha_m) E_1^{(f)} + (\beta_m - \beta_f) x_3 E_2^{(f)} + [(\beta_f - \beta_m) x_2 - (\gamma_m - \gamma_f)] E_3^{(f)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\alpha^* = \alpha_f - \alpha_m \quad \beta^* = \beta_f - \beta_m \quad \gamma^* = \gamma_f - \gamma_m \tag{2.2.6}$$

alınırsa

$$\frac{\overrightarrow{dR_A}}{d\sigma_{(f)}} = \alpha^* E_1^{(f)} + \beta^* (x_2 E_3^{(f)} - x_3 E_2^{(f)}) \tag{2.2.7}$$

elde edilir. Burada (2.2.6) denklemi Σ_m ve Σ_f nin indirgenmiş yapı denklemleri olarak adlandırılırlar. Bunlar uzay hareketlerinin ani invaryantlarıdır.

$d\sigma_{(f)} = d\sigma_{(m)}$ olduğundan yay parametresini kısaca $d\sigma$ ile göstereceğiz. Benzer olarak σ ya göre R_A nın ikinci türevi;

$$\begin{aligned}
R'_A &= \alpha^* E_1^{(f)} + \beta^* (x_2 E_3^{(f)} - x_3 E_2^{(f)}) \\
R''_A &= \alpha^{*'} E_1^{(f)} + \alpha^* E_1^{(f)} + \beta^{*'} (x_2 E_3^{(f)} - x_3 E_2^{(f)}) \\
&\quad + \beta^* (x_2' E_3^{(f)} + x_2 E_3^{(f)} - x_3' E_2^{(f)} - x_3 E_2^{(f)}) \\
&= \alpha^{*'} E_1^{(f)} + \alpha^* E_2^{(f)} + \beta^{*'} (x_2 E_3^{(f)} - x_3 E_2^{(f)}) \\
&\quad + \beta^* (x_2' E_3^{(f)} - \beta_f x_2 E_2^{(f)} - x_3' E_2^{(f)} - x_3 (-E_1^{(f)} + \beta_f E_3^{(f)})) \\
&= \alpha^{*'} E_1^{(f)} + \alpha^* E_2^{(f)} + \beta^{*'} x_2 E_3^{(f)} - \beta^{*'} x_3 E_2^{(f)} + \beta^* x_2' E_3^{(f)} - \beta^* \beta_f x_2 E_2^{(f)} \\
&\quad - \beta^* x_3' E_2^{(f)} + \beta^* x_3 E_1^{(f)} - \beta^* x_3 \beta_f E_3^{(f)} \\
&= \alpha^{*'} E_1^{(f)} + \alpha^* E_2^{(f)} + \beta^{*'} x_2 E_3^{(f)} - \beta^{*'} x_3 E_2^{(f)} + \beta^* (-x_1 + \beta_m x_3) E_3^{(f)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta^* \beta_f x_2 E_2^{(f)} - \beta^* (-\beta_m x_2 - \gamma_m) E_2^{(f)} + \beta^* x_3 E_1^{(f)} - \beta^* x_3 \beta_f E_3^{(f)} \\
& = \alpha^{*'} E_1^{(f)} + \alpha^* E_2^{(f)} + (\beta^{*'} x_2) E_3^{(f)} - \beta^{*'} x_3 E_2^{(f)} + \beta^* \beta_m x_3 E_3^{(f)} - \beta^* x_1 E_3^{(f)} \\
& \quad - \beta^* \beta_f x_2 E_2^{(f)} + \beta^* \beta_m x_2 E_2^{(f)} + \beta^* \gamma_m E_2^{(f)} + \beta^* x_3 E_1^{(f)} - \beta^* x_3 \beta_f E_3^{(f)} \\
R_A'' & = (\alpha^{*'} + \beta^* x_3) E_1^{(f)} + (\alpha^* - \beta^{*'} x_3 - \beta^{*2} x_2 + \beta^* \gamma_m) E_2^{(f)} \\
& \quad + (\beta^{*'} x_2 - \beta^* x_1 - \beta^{*2} x_3) E_3^{(f)} \tag{2.2.8}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemi daha sonra regle yüzeyin büküm noktalarını hesaplamak için kullanacağız.

2.3 AKSOİDLERİN İNDİRGENMİŞ YAPI DENKLEMLERİNİN KİNEMATİK ANLAMLARI

(2.2.6) denkleminde elde edilen α^* , β^* , γ^* yapı denklemlerinin kinematik anlamlarını analiz edeceğiz. Bir cismin bir A noktasındaki hızını V_A ile gösterelim. Buna göre

$$V_A = \frac{dR_A}{dt} = R_A' \frac{d\sigma}{dt} = \alpha^* \frac{d\sigma}{dt} E_1^{(f)} + \beta^* \frac{d\sigma}{dt} (\overrightarrow{x_2 E_3^{(f)}} - \overrightarrow{x_3 E_2^{(f)}})$$

dir. Burada,

$$W = \beta^* \frac{d\sigma}{dt}, \quad V = \alpha^* \frac{d\sigma}{dt}, \quad r = \overrightarrow{x_1 E_1^{(f)}} + \overrightarrow{x_2 E_2^{(f)}} + \overrightarrow{x_3 E_3^{(f)}}$$

alınırsa

$$\begin{aligned}
V_A & = V E_1^{(f)} + W (E_1^{(f)} \times r) \\
& = V E_1^{(f)} + W (E_1^{(f)} \times (\overrightarrow{x_1 E_1^{(f)}} + \overrightarrow{x_2 E_2^{(f)}} + \overrightarrow{x_3 E_3^{(f)}})) \\
V_A & = V E_1^{(f)} + W (\overrightarrow{x_2 E_3^{(f)}} - \overrightarrow{x_3 E_2^{(f)}}) \tag{2.3.1}
\end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Burada W ve V ; Σ_m ve Σ_f regle yüzeylerinin birbirleri üzerinde kaymadan yuvarlanma hareketi esnasında hareketli cismin açısal hızı ve öteleme

hızıdır. Hareketli cismin A noktasındaki ivmesini de a_A ile gösterelim.

$$\begin{aligned}
a_A &= \frac{dV_A}{dt} = \frac{dV}{dt} E_1^{(f)} + V E_2^{(f)} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{dW}{dt} x_2 E_3^{(f)} - x_3 \frac{dW}{dt} E_2^{(f)} \\
&\quad + W (-x_1 + \beta_m x_3) \frac{d\sigma}{dt} E_3^{(f)} - W \beta_f x_2 E_2^{(f)} \frac{d\sigma}{dt} + W (\beta_m x_2 + \gamma_m) E_2^{(f)} \frac{d\sigma}{dt} \\
&\quad - W x_3 \left(-E_1^{(f)} + \beta_f E_3^{(f)} \right) \frac{d\sigma}{dt} - x_2 (\beta_f - \beta_m) E_2^{(f)} \frac{d\sigma}{dt} \\
a_A &= \left(\frac{dV}{dt} + W x_3 \frac{d\sigma}{dt} \right) E_1^{(f)} + \left(V \frac{d\sigma}{dt} - x_3 \frac{dW}{dt} - W \beta^* x_2 \frac{d\sigma}{dt} + W \gamma_m \frac{d\sigma}{dt} \right) E_2^{(f)} \\
&\quad + \left(\frac{dW}{dt} x_2 - W x_1 \frac{d\sigma}{dt} - W \beta^* x_3 \frac{d\sigma}{dt} \right) E_3^{(f)} \tag{2.3.2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\frac{dW}{dt}$ ve $\frac{dV}{dt}$ Σ_m nin $E_1^{(f)}$ (ani vida eksenini) boyunca Σ_m ya ilişkin açısız ivme ve öteleme ivmeleridir.

$$\left. \begin{aligned}
V_A &= \frac{dR_A}{dt} = R'_A \frac{d\sigma}{dt} \\
a_A &= \frac{d^2 R_A}{dt^2} = R''_A \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 + R'_A \frac{d^2 \sigma}{dt^2}
\end{aligned} \right\} \tag{2.3.3}$$

$$\begin{aligned}
W &= \beta^* \frac{d\sigma}{dt}, \quad V = \alpha^* \frac{d\sigma}{dt} \\
\frac{dV}{dt} &= \alpha^{*'} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 + \alpha^* \frac{d^2 \sigma}{dt^2} \\
\frac{dW}{dt} &= \beta^{*'} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 + \beta^* \frac{d^2 \sigma}{dt^2} \tag{2.3.4}
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir.

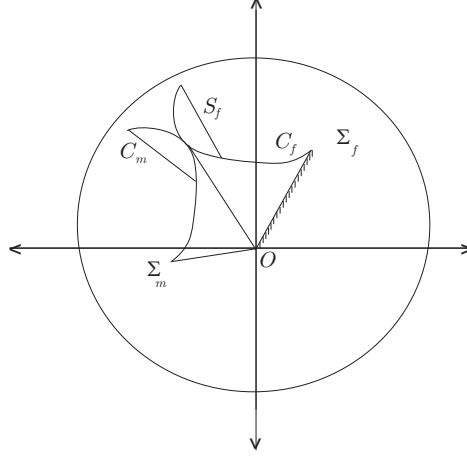
Yukardaki denklemler α^* ve β^* ifadelerinin kinematik anlamlarını açıklamaktadır[1].

Onlar uzay hareketlerinin tüm invaryantlarıdır (Şekil 2.5.).

$E_1^{(m)}$ için c_m küresel gösterge eğrisi $E_1^{(f)}$ nin c_r küresel gösterge eğrisi üzerinde yuvarlanır[2, 3]. Şimdi (2.3.2) ve (2.3.3) denklemlerini sıfıra eşitleyelim. Bu durumda x_1, x_2, x_3 ifadelerini aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz; $a_A = \frac{dV_A}{dt} = 0$ dan

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{dV}{dt} + W x_3 \frac{d\sigma}{dt} \right) E_1^{(f)} + \left(V \frac{d\sigma}{dt} - x_3 \frac{dW}{dt} - W \beta^* x_2 \frac{d\sigma}{dt} + W \gamma_m \frac{d\sigma}{dt} \right) E_2^{(f)} \\
&+ \left(\frac{dW}{dt} x_2 - W x_1 \frac{d\sigma}{dt} - W \beta^* x_3 \frac{d\sigma}{dt} \right) E_3^{(f)} = 0
\end{aligned}$$

$$1) \frac{dV}{dt} + W x_3 \frac{d\sigma}{dt} = 0$$



Şekil 2.5.

$$2) V \frac{d\sigma}{dt} - x_3 \frac{dW}{dt} - W \beta^* x_2 \frac{d\sigma}{dt} + W \gamma_m \frac{d\sigma}{dt} = 0$$

$$3) \frac{dW}{dt} x_2 - W x_1 \frac{d\sigma}{dt} - W \beta^* x_3 \frac{d\sigma}{dt} = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{\frac{d\omega}{dt} \left(\omega \frac{d\sigma}{dt} \right)^{-1} \left(v \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \frac{dv}{dt} \frac{d\omega}{dt} \left(\omega \frac{d\sigma}{dt} \right)^{-1} \right)}{\omega \beta^* \frac{d\sigma}{dt}} \\
 &\quad - \frac{\beta^* \frac{dv}{dt} \left(\omega \frac{d\sigma}{dt} \right)^{-1} - \omega \gamma_m \frac{d\sigma}{dt} \frac{d\omega}{dt} \left(\omega \frac{d\sigma}{dt} \right)^{-1}}{\omega \beta^* \frac{d\sigma}{dt}} \quad (2.3.5) \\
 x_2 &= \left[V \frac{d\sigma}{dt} + W \gamma_m \frac{d\sigma}{dt} + \frac{dV}{dt} \frac{dW}{dt} \left(W \frac{d\sigma}{dt} \right)^{-1} \right] \Big/ \left(W \beta^* \frac{d\sigma}{dt} \right) \\
 x_3 &= \frac{dV}{dt} \left(W \frac{d\sigma}{dt} \right)^{-1}
 \end{aligned}$$

bulunur.

Bu (x_1, x_2, x_3) noktasına Σ_f yüzeyine göre **ivme merkezi** denir.

$$a_A \times V_A = 0$$

olacak şekildeki noktalara **büküm noktaları** denir. Bu noktaları hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
a_A \times V_A &= 0 \\
\left(R_A'' \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 + R_A' \frac{d^2\sigma}{dt^2} \right) \times \left(R_A' \frac{d\sigma}{dt} \right) &= 0 \\
R_A'' \times R_A' \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^3 + R_A' \times R_A' \frac{d^2\sigma}{dt^2} \frac{d\sigma}{dt} &= 0 \\
R_A'' \times R_A' \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^3 = 0 &\Rightarrow R_A'' \times R_A' = 0
\end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} E_1^{(f)} & E_2^{(f)} & E_3^{(f)} \\ \alpha^{*'} + \beta^* x_3 & \alpha^* - \beta^{*'} x_3 - \beta^{*2} x_2 + \beta^* \gamma_m & \beta^{*'} x_2 - \beta^* x_1 - \beta^{*2} x_3 \\ \alpha^* & -\beta^* x_3 & \beta^* x_2 \end{array} \right| = 0$$

$$\begin{aligned}
& [\beta^* x_2 (\alpha^* - \beta^{*'} x_3 - \beta^{*2} + \beta^* \gamma_m) + \beta^* x_3 (\beta^{*'} x_2 - \beta^* x_1 - \beta^{*2} x_3)] E_1^{(f)} \\
& + [\alpha^* (\beta^{*'} x_2 - \beta^* x_1 - \beta^{*2} x_3) - \beta^* x_2 (\alpha^{*'} + \beta^* x_3)] E_2^{(f)} \\
& + [-\beta^* x_3 (\alpha^{*'} + \beta^* x_3) - \alpha^* (\alpha^* - \beta^{*'} x_3 - \beta^{*2} x_2 + \beta^* \gamma_m)] E_3^{(f)} \\
& = 0
\end{aligned}$$

olur. $E_1^{(f)}$, $E_2^{(f)}$, $E_3^{(f)}$ baz vektörler olduğundan

$$\begin{aligned}
1) \beta^* x_2 (\alpha^* - \beta^{*'} x_3 - \beta^{*2} + \beta^* \gamma_m) + \beta^* x_3 (\beta^{*'} x_2 - \beta^* x_1 - \beta^{*2} x_3) &= 0 \\
\beta^* (\alpha^* + \beta^* \gamma_m) x_2 - \beta^{*2} x_1 x_3 - \beta^{*3} (x_2^2 + x_3^2) &= 0 \\
-(\alpha^* + \beta^* \gamma_m) x_2 + \beta^* x_1 x_3 + \beta^{*2} (x_2^2 + x_3^2) &= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
2) \alpha^* (\beta^{*'} x_2 - \beta^* x_1 - \beta^{*2} x_3) - \beta^* x_2 (\alpha^{*'} + \beta^* x_3) &= 0 \\
\alpha^* \beta^{*'} x_2 - \alpha^* \beta^* x_1 - \alpha^* \beta^{*2} x_3 - \alpha^{*'} \beta^* x_2 - \beta^{*2} x_2 x_3 &= 0 \\
\alpha^* \beta^* x_1 + (\alpha^{*'} \beta^* - \alpha^* \beta^{*'}) x_2 + \alpha^* \beta^{*2} x_3 + \beta^{*2} x_2 x_3 &= 0
\end{aligned}$$

dır.

$$\begin{aligned}
3) -\beta^* x_3 (\alpha^{*'} + \beta^* x_3) - \alpha^* (\alpha^* - \beta^{*'} x_3 - \beta^{*2} x_2 + \beta^* \gamma_m) &= 0 \\
-\beta^* \alpha^{*'} x_3 - \beta^{*2} x_3^2 - \alpha^{*2} + \alpha^* \beta^{*'} x_3 + \alpha^* \beta^{*2} x_2 - \alpha^* \beta^* \gamma_m &= 0 \\
-\alpha^* (\alpha^* + \beta^* \gamma_m) - (\alpha^{*'} \beta^* - \alpha^* \beta^{*'}) x_3 - \beta^{*2} (x_3^2 + \alpha^* x_2) &= 0
\end{aligned}$$

olur. Yani

$$\begin{aligned}
& -(\alpha^* + \beta^* \gamma_m) x_2 + \beta^* x_1 x_3 + \beta^{*2} (x_2^2 + x_3^2) = 0 \\
& \alpha^* \beta^* x_1 + (\alpha^{*'} \beta^* - \alpha^* \beta^{*'}) x_2 + \alpha^* \beta^{*2} x_3 + \beta^{*2} x_2 x_3 = 0 \\
& -\alpha^* (\alpha^* + \beta^* \gamma_m) - (\alpha^{*'} \beta^* - \alpha^* \beta^{*'}) x_3 - \beta^{*2} (x_3^2 + \alpha^* x_2) = 0
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

denklemleri elde edilmiş olundu. Bu 3 denklemden iki denklem lineer bağımsızdır. Veya 3 yüzey sadece bir uzay eğrisi boyunca kesişir.

BRESSE HİPERBOLOİDİ: Bir katı cisimde Bresse hiperboloidi

$$\langle a_A, V_A \rangle = 0$$

ile belirlidir. (2.3.1) ve (2.3.2) denklemleri yukardaki denklemde yerlerine yazılırsa $\left\{ \vec{r}_m; \vec{E}_1^{(m)}, \vec{E}_2^{(m)}, \vec{E}_3^{(m)} \right\}$ Frenet çatısında Bresse Hiperboloidinin denklemi;

$$V \frac{dV}{dt} - x_3 W^2 \gamma_m \frac{d\sigma}{dt} - x_1 x_3 W^2 \frac{d\sigma}{dt} + (x_2^2 + x_3^2) W \frac{dW}{dt} = 0 \tag{2.3.7}$$

ile temsil edilir.

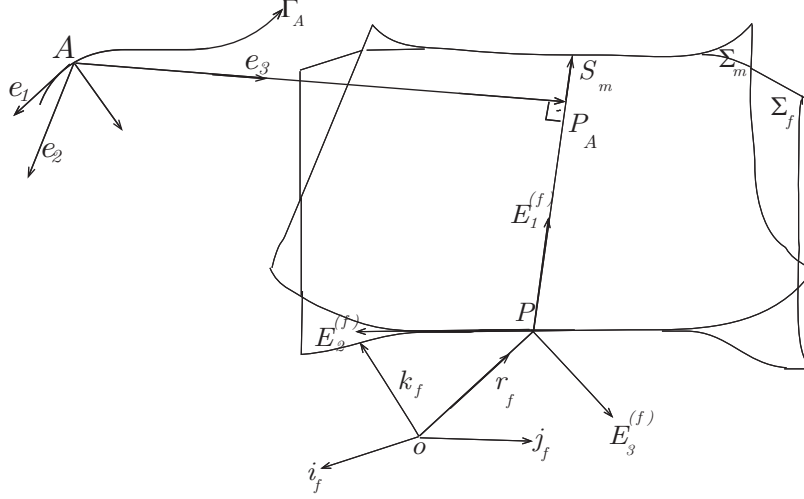
Özel olarak $\alpha_f, \gamma_f \in \Sigma_f$ ve $\alpha_m, \gamma_m \in \Sigma_m$ ifadelerinin tümü sıfır ise (2.3.5) - (2.3.7) denklemleri

- 1) İvme merkezi; $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$
 - 2) İnflection (bükülme) noktaları; $x_2 = 0, x_3 = 0$
 - 3) Bresse Hiperboloidi; $W x_1 x_2 \frac{d\sigma}{dt} + (x_2^2 + x_3^2) \frac{dW}{dt} = 0$
- olarak basitleştirilebilir.

2.4 UZAY HAREKETİNDE BİR NOKTANIN YÖRÜNGESİNİN ANİ ÖZELLİKLERİ

Σ_m hareketli regle yüzeyinin Σ_f sabit regle yüzeyine göre hareketini göz önüne alalım.

Bir A noktasının yörüngesinin geometrik özelliklerini incelemek için ilk önce A noktasının Γ_A yörüngesinin A noktasındaki $\{R_A; e_1, e_2, e_3\}$ hareketli çatısını kuralım (Şekil 2.6.). Burada e_1 birim vektörü A noktasında Γ_A nın birim teğet vektörüdür[5].



Şekil 2.6.

e_3 birim vektörü ise $E_1^{(f)}$ nin üzerinde bulunduğu doğrultman vektörüne dik olan bir doğru üzerindeki birim vektördür. e_1, e_2, e_3 vektörleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir;

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \frac{R'_A}{\|R'_A\|} = \frac{\alpha^*}{R} E_1^{(f)} + \beta^* \left(\frac{x_2}{R} E_3^{(f)} - \frac{x_3}{R} E_2^{(f)} \right) \\
 e_2 &= e_1 \times e_3 = \frac{-\beta^* r^2}{Rr} E_1^{(f)} + \alpha^* \left(\frac{x_2}{Rr} E_3^{(f)} - \frac{x_3}{Rr} E_2^{(f)} \right) \\
 e_3 &= \frac{R'_A \times E_1^{(f)}}{\|R'_A \times E_1^{(f)}\|} = \frac{x_2}{r} E_2^{(f)} + \frac{x_3}{r} E_3^{(f)}
 \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

bulunur. Burada $r = (x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}$ ve $R = (\alpha^{*2} + \beta^{*2} r^2)^{\frac{1}{2}}$ dir. Gerçekten

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \frac{R'_A}{\|R'_A\|} = \frac{\alpha^* E_1^{(f)} + \beta^* (x_2 E_3^{(f)} - x_3 E_2^{(f)})}{\|R'_A\|} = \frac{\alpha^*}{R} E_1^{(f)} + \beta^* \left(\frac{x_2}{R} E_3^{(f)} - \frac{x_3}{R} E_2^{(f)} \right) \\
 e_3 &= \frac{R'_A \times E_1^{(f)}}{\|R'_A \times E_1^{(f)}\|} = \frac{[\alpha^* E_1^{(f)} + \beta^* (x_2 E_3^{(f)} - x_3 E_2^{(f)})] \times E_1^{(f)}}{\|[\alpha^* E_1^{(f)} + \beta^* (x_2 E_3^{(f)} - x_3 E_2^{(f)})] \times E_1^{(f)}\|} \\
 &= \frac{\beta^* x_2 E_3^{(f)} \times E_1^{(f)} - \beta^* x_3 E_2^{(f)} \times E_1^{(f)}}{\|\beta^* x_2 E_3^{(f)} \times E_1^{(f)} - \beta^* x_3 E_2^{(f)} \times E_1^{(f)}\|} = \frac{\beta^* x_2 E_2^{(f)} + \beta^* x_3 E_3^{(f)}}{\|\beta^* x_2 E_2^{(f)} + \beta^* x_3 E_3^{(f)}\|} \\
 &= \frac{\beta^* x_2 E_2^{(f)} + \beta^* x_3 E_3^{(f)}}{\sqrt{\beta^{*2} (x_2^2 + x_3^2)}} = \frac{\beta^* x_2 E_2^{(f)} + \beta^* x_3 E_3^{(f)}}{\beta^* r} = \frac{x_2}{r} E_2^{(f)} + \frac{x_3}{r} E_3^{(f)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_2 = e_1 \times e_3 &= \left[\frac{\alpha^*}{R}, -\frac{x_3\beta^*}{R}, \frac{x_2\beta^*}{R} \right] \times \left[0, -\frac{x_2}{r}, \frac{x_3}{r} \right] \\
&= \frac{-\beta^*r^2}{Rr} E_1^{(f)} + \alpha^* \left(\frac{x_2}{Rr} E_3^{(f)} - \frac{x_3}{Rr} E_2^{(f)} \right)
\end{aligned} \tag{2.4.1}$$

elde edilir.

s yay parametresi olmak üzere

$$\begin{aligned}
s &= \int \|R'_A\| d\sigma \\
ds &= \|R'_A\| d\sigma \\
ds &= R d\sigma
\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

yazılabilir. $\{R_A; e_1, e_2, e_3\}$ çatısının türev denklemleri

$$\begin{aligned}
\frac{de_1}{ds} &= k_n e_2 + k_g e_3 \\
\frac{de_2}{ds} &= -k_n e_1 + \tau_g e_3 \\
\frac{de_3}{ds} &= -k_g e_1 - \tau_g e_2
\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

dır. Burada k_n , k_g ve τ_g sırasıyla **normal eğrilik**; **geodezik eğrilik** ve **geodezik torsiyon** olarak isimlendirilir. Ayrıca

$$k^2 = k_n^2 + k_g^2$$

bağıntısı vardır.

A noktasında Γ_A nın eğriliği ve k_g , e_3 ün doğrultusunda $\frac{d^2 R_A}{ds^2}$ nin normal bileşenidir. (2.4.1) ve (2.4.3) denklemleri birleştirildiğinde

$$\begin{aligned}
k_n &= \frac{de_1}{ds} e_2 = \frac{r}{R^3} (\alpha^* \beta^* - \alpha^* \beta^{*'} + \beta^{*2} x_3) + \frac{\alpha^*}{R^3 r} (\alpha^* x_3 + \beta^* \gamma_m x_3 + \beta^* x_1 x_2) \\
k_g &= -\frac{de_3}{ds} e_1 = \frac{-\alpha^* x_2 + \beta^{*2} r^2 + \beta^* (x_1 x_3 - x_2 \gamma_m)}{R^2 r} \\
\tau_g &= -\frac{de_3}{ds} e_2 = \frac{\beta^*}{R^2} (x_2 + \alpha^*) + \frac{\alpha^*}{R^2 r} (x_1 x_3 - x_2 \gamma_m)
\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

elde edilir. Şimdi düzlem kinematığında bilinen hareketli bir noktanın sabit düzlemdeki yörüngesinin eğrilik yarıçapını veren Euler-Savary formülünü A noktasının yörüngesi için benzer formüller elde edelim.

BİR UZAY HAREKETİNDE BİR NOKTA YÖRÜNGESİNİN EULER-SAVARY FORMÜLLERİ:

Bir noktanın Γ_A yörüngesinin özelliklerini ortaya çıkarmak için (2.4.4) denkleminde

$$D_g = \frac{[\beta^{*2}x_1^2 + (\alpha^* + \beta^*\gamma_m)^2]^{\frac{1}{2}}}{\beta^{*2}} \quad (2.4.5)$$

$$\sin \theta_g = \frac{\beta^*x_1}{D_g} \quad \sin \theta = \frac{x_3}{R}$$

ifadelerini alalım. Bu durumda (2. 4. 4) denkleminin ikinci ifadesi yeniden

$$k_g = \frac{r - D_g \cos(\theta + \theta_g)}{r^2 + \left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)^2} \quad (2.4.6)$$

olarak yazılabilir.

$k_g = \frac{1}{\rho_g}$ olmak üzere bu denklem,

$$\rho_g [r - D_g \cos(\theta + \theta_g)] = r^2 + \left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)^2 \quad (2.4.7)$$

veya

$$r\rho_g - r^2 = \left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)^2 + \rho_g D_g \cos(\theta + \theta_g)$$

$$\frac{\rho_g}{r(\rho_g - r)} = \frac{\rho_g}{\left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)^2 + \rho_g D_g \cos(\theta + \theta_g)}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho_g - r} = \frac{\rho_g}{\left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)^2 + \rho_g D_g \cos(\theta + \theta_g)} \quad (2.4.8)$$

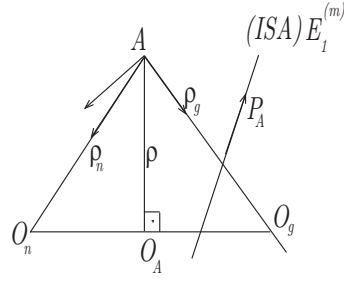
olur.

(2.4.6) ve (2.4.8) denklemlerine **Euler-Savary benzeri geodezik** denir. Çünkü bu denklemler düzlemde Euler-Savary formülüne benzemektedir.

Bu arada genel olarak Γ_A nın \vec{n} asli normali ani vida eksenini ile kesişmez fakat düzlemsel harekette kesişir. A noktasında Γ_A nın eğrilik merkezi O_A dır.

Özellikle eğer hareketli cismin bir A noktasının çizmiş olduğu Γ_A yörünge eğrisinin k_g geodezik eğriliği sıfır ise bu taktirde A noktasına **geodezik büküm noktası** denir. (2.4.6) denkleminde biliyoruz ki bu anda hareketli cismin bütün geodezik büküm noktaları aşağıdaki denklemle tanımlanan yüzey üzerindedir;

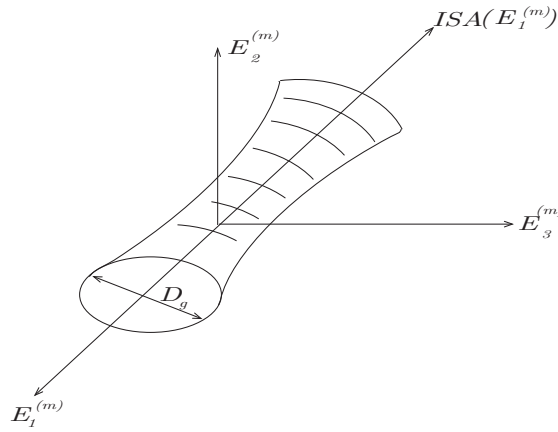
$$r - D_g \cos(\theta + \theta_g) = 0 \quad (2.4.9)$$



Şekil 2.7.

Bu yüzey **geodezik büküm yüzeyi** olarak tanımlanır (Şekil 2.7.). (2.4.5) denklemine göre yukardaki denklemle verilen D_g ve θ_g bir x_1 değeri için sabittir. Böylece (2.4.9) denklemi $E_1^{(f)}$ eksenine dik $(E_2^{(f)}, E_3^{(f)})$ düzleminde kalan ve $E_1^{(f)}$ eksenini boyunca geçen bir çember denklemdir. Bu çembere **geodezik büküm çemberi** denir (Şekil 2.8.).

Eğer $x_1 \in (-A, +A)$ alınırsa $E_1^{(f)}$ ekseninin konumundan (2.4.9) denklemi geodezik büküm çemberlerinin bir ailesi olarak veya geodezik büküm yüzeyi geodezik büküm çemberlerinin bir ailesi olarak göz önüne alınabilir.



Şekil 2.8.

Geodezik büküm yüzeylerinin ilave 2 özelliğini aşağıdaki gibi bulmak kolaydır.

(1) Geodezik büküm çemberlerinin merkezi striksiyon noktasında (veya $x_1 = 0$ da)

hareketli Σ_m aksoidinin normalı üzerinde kalır.

(2) Geodezik büküm yüzeyi bir konidir. Bu koninin üst kısmı

$$\alpha^* + \beta^* \gamma_m = 0$$

iken Σ_m nin striksiyon noktasıdır.

$$k^2 = k_n^2 + k_g^2$$

denkleminde $k = k_g$ için $k_n = 0$ dir. Buna göre (2.4.4) denklemini tekrar

$$r^2 (\alpha^* \beta^{*'} - \alpha^* \beta^{*'} + \beta^{*2} x_3) + \alpha^* (\alpha^* x_3 + \beta^* \gamma_m x_3 + \beta^* x_1 x_2) = 0$$

$$k = \frac{-\alpha^* x_2 + \beta^{*2} r^2 + \beta^* (x_1 x_3 - x_2 \gamma_m)}{R^2 r}$$

olarak yazabiliriz.

(2.4.5) denklemi yukardaki denklemlerde yerine yazılırsa

$$0 = r \left[r \left(\frac{\alpha^*}{\beta^*} \right)^2 + r^2 \sin \theta + \alpha^* D_g \sin(\theta + \theta_g) \right] \quad (2.4.10)$$

$$k = \frac{r - D_g \cos(\theta + \theta_g)}{r^2 + \left(\frac{\alpha^*}{\beta^*} \right)^2} \quad (2.4.11)$$

olur.

(2.4.11) denkleminin diğer iki açılımı k eğriliği yerine ρ eğrilik yarıçapı yazılırsa

$$\rho [r - D_g \cos(\theta + \theta_g)] = r^2 + \left(\frac{\alpha^*}{\beta^*} \right)^2 \quad (2.4.12)$$

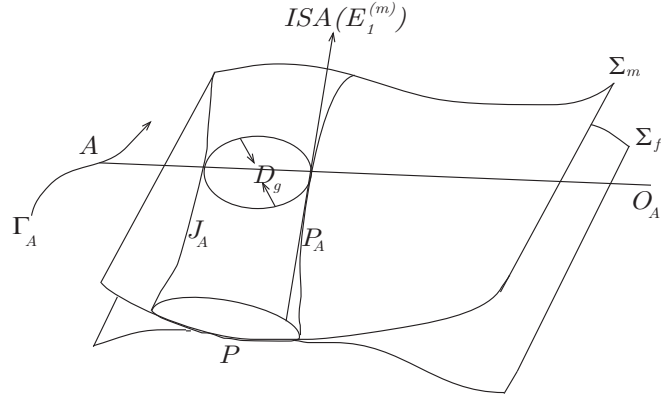
$$\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho - r} = \frac{\rho}{\left(\frac{\alpha^*}{\beta^*} \right)^2 + \rho D_g \cos(\theta + \theta_g)} \quad (2.4.13)$$

olarak yazılır.

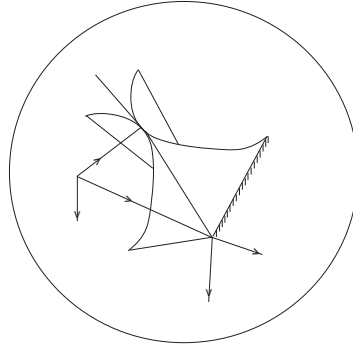
(2.4.11)-(2.4.13) denklemlerine **uzay hareketinde bir noktanın yörüngesinin Euler-Savary benzeri formülü** denir. (2.4.12) denklemi

$$\overline{AO_AAJ_A} = \overline{AP_A^2} + \left(\frac{\alpha^*}{\beta^*} \right)^2 \quad (2.4.14)$$

olarak ifade edilebilir. Burada A hareketli cismi üzerinde tracing point; O_A ise Γ_A yörüngesinin eğrilik merkezidir (Şekil 2.9.). J_A ; $E_1^{(f)}$ eksenine dik düzlem



Şekil 2.9.



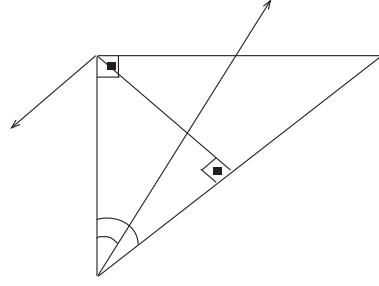
Şekil 2.10.

üzerindedir ve yine bu nokta $A(x_1, x_2, x_3)$ noktasından geçer. n ile geodezik büküm çemberinin kesişmesi J_A da olduğu anda; P_A noktası da Γ_A yörüngesinin asli normali ile $E_1^{(f)}$ ekseninin kesişme noktası olur.

Açık olarak; O hareketli cisim üzerinde herhangi bir nokta değildir. Bu nokta bir anda hareketli cisim üzerinde (2.4.10) denklemiyle tanımlanan yüzey üzerinde iken yukardaki Euler-Savary benzeri formül korunur.

Başka bir ifade ile uzay hareketinde herhangi bir noktanın yörüngesi için bir geodezik Euler-Savary formülü vardır. Fakat bazı noktaların yörüngeleri için Euler-Savary formülü yoktur. Bu noktalar büküm noktalarıdır.

Özellikle eğer k_g geodezik eğriliği ve k_n normal eğriliği özdeş olarak sıfır ise



Şekil 2.11.

hareketli bir cismin bir A noktası (2.4.10) denklemi ile tanımlanan yüzey ve geodezik büküm yüzeyinin arakesit eğrisi üzerinde olmalıdır.

$k^2 = k_n^2 + k_g^2$ olduğundan biliyoruz ki A noktası aynı zamanda büküm noktasıdır. Γ_A eğrisi büküm noktalarından oluşuyorsa (2.4.10), (2.4.11) denklemleri ve onların çözümleri birleştirilirse elde edilen denklem (2.3.6) denklemi ile aynıdır.

BÖLÜM 3

BİR REGLE YÜZEYE ADJOİNT OLAN YÜZEYLER

3.1 BİR REGLE YÜZEYE BİTİŞİK BAŞKA BİR REGLE YÜZEY

Bu bölümde bir regle yüzeye adjoint olan başka bir regle yüzeyi çalışılacaktır. İki regle yüzeyin adjoint olması için dayanak eğrileri ve doğrultmanları arasındaki ilişkileri vereceğiz. Ayrıca iki regle yüzeyin adjoint olması için gerek ve yeterli şartlar araştırılacaktır.

Dayanak eğrisi $r_p(\sigma)$ ve doğrultmanı L olan regle yüzeyi

$$\Sigma : R(\sigma, \mu) = r_p(\sigma) + \mu.L(\sigma) ; \mu \in \mathbb{R}$$

denklemleri ile verilsin[7]. Bu regle yüzeyine adjoint olan nokta $A(x_1, x_2, x_3)$ olsun. Σ regle yüzeyi oluşurken A noktasının geometrik yeri Γ^* eğrisidir. Γ^* eğrisine dayanarak hareket eden L^* doğrultmanının oluşturduğu regle yüzey de

$$\Sigma^* : R^*(\sigma, \mu) = r_p + r_{pA} + \mu.I^*(\sigma) ; \mu \in \mathbb{R} \quad (3.1.1)$$

olsun(Şekil3.1). Bu regle yüzeye **adjoint regle yüzey** denir (Şekil 3.1.). r_p dayanak eğrisi Σ nin striksiyon eğrisidir. Dolayısıyla $r_p + r_{pA}$ dayanak eğrisi de Σ^* m striksiyon eğrisidir.

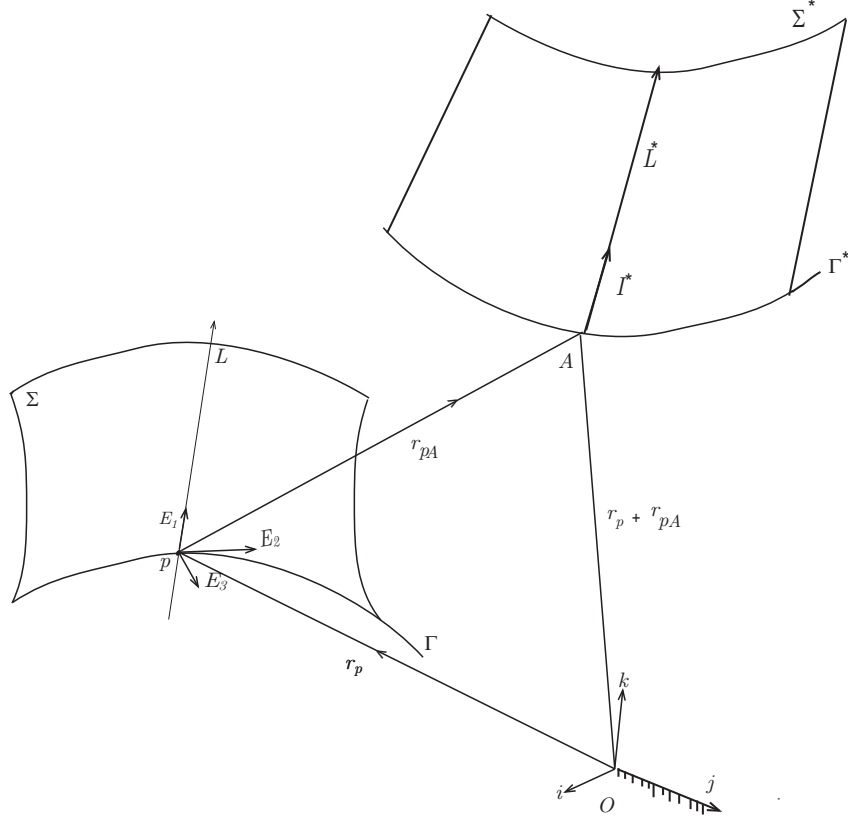
Burada $A(x_1, x_2, x_3)$ olmak üzere

$$r_{pA} = x_1\vec{E}_1 + x_2\vec{E}_2 + x_3\vec{E}_3$$

$$I^* = I_1^*\vec{E}_1 + I_2^*\vec{E}_2 + I_3^*\vec{E}_3 \quad (3.1.2)$$

$$I_1^{*2} + I_2^{*2} + I_3^{*2} = 1$$

dir.



Şekil 3.1.

Dayanak eğrisi $r_p + r_{pA}$; doğrultmanı L^* ve L^* üzerinde birim vektörü I^* olan regle yüzeyi (3.1.1) denklemindeki Σ^* denklemi ile ifade edilebilir. Burada \vec{r}_p ; Σ nın striksiyon eğrisi ve r_{pA} ise P striksiyon noktasını L^* üzerindeki A noktasına götüren vektördür. Bu durumda Σ^* adjoint regle yüzeyin denklemi

$$\Sigma^* : R^*(\sigma, \mu) = r_p + r_{pA} + \mu.I^*(\sigma)$$

şeklinde yazılır. (3.1.1) ve (3.1.2) denklemlerinin σ yönündeki türevleri alınırsa;

$$\frac{d(r_p + r_{pA})}{d\sigma} = \frac{dr_p}{d\sigma} + \frac{dx_1}{d\sigma}E_1 + \frac{dE_1}{d\sigma}x_1 + \frac{dx_2}{d\sigma}E_2 + \frac{dE_2}{d\sigma}x_2 + \frac{dx_3}{d\sigma}E_3 + \frac{dE_3}{d\sigma}x_3$$

elde edilir. (2.1.3) bağıntısını bu denklemde yerine yazarsak

$$\frac{d(r_p + r_{pA})}{d\sigma} = \alpha E_1 + \gamma E_3 + \frac{dx_1}{d\sigma} E_1 + E_2 x_1 + \frac{dx_2}{d\sigma} E_2 - E_1 x_2 + \beta x_2 E_3 + \frac{dx_3}{d\sigma} E_3 - \beta x_3 E_2$$

veya

$$\begin{aligned} \frac{d(r_p + r_{pA})}{d\sigma} &= \left(\frac{dx_1}{d\sigma} - x_2 + \alpha \right) E_1 + \left(x_1 + \frac{dx_2}{d\sigma} - \beta x_3 \right) E_2 \\ &+ \left(\beta x_2 + \frac{dx_3}{d\sigma} + \gamma \right) E_3 \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

elde edilir. Burada α , β , γ ; Σ orjinal regle yüzeyinin yapı parametreleridir.

$$\begin{aligned} \frac{dI^*}{d\sigma} &= \frac{dI_1^*}{d\sigma} E_1 + \frac{dE_1}{d\sigma} I_1^* + \frac{dI_2^*}{d\sigma} E_2 + \frac{dE_2}{d\sigma} I_2^* + \frac{dI_3^*}{d\sigma} E_3 + \frac{dE_3}{d\sigma} I_3^* \\ &= \frac{dI_1^*}{d\sigma} E_1 + I_1^* E_2 + \frac{dI_2^*}{d\sigma} E_2 - I_1^* E_1 + \beta I_2^* E_3 + \frac{dI_3^*}{d\sigma} E_3 - \beta I_3^* E_2 \end{aligned}$$

veya

$$\frac{dI^*}{d\sigma} = \left(\frac{dI_1^*}{d\sigma} - I_2^* \right) E_1 + \left(I_1^* + \frac{dI_2^*}{d\sigma} - \beta I_3^* \right) E_2 + \left(\frac{dI_3^*}{d\sigma} + \beta I_2^* \right) E_3 \quad (3.1.4)$$

bulunur. Şimdi Σ^* adjoint regle yüzeyinin de yapı parametrelerini elde edelim.

Σ regle yüzeyine adjoint olan Σ^* regle yüzeyinin L^* doğrultmanı O-ijk sabit çatısına göre sabit bir doğrudur; dolayısıyla $\frac{dI^*}{d\sigma} = 0$ olur. Ayrıca benzer düşünceyle $\frac{d(r_p + r_{pA})}{d\sigma} = 0$ olarak yazılabilir. Buna göre (3.1.3) ve (3.1.4.) denklemleri;

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\sigma} - x_2 + \alpha &= 0 \text{ den } \frac{dx_1}{d\sigma} = x_2 - \alpha \\ x_1 + \frac{dx_2}{d\sigma} - \beta x_3 &= 0 \text{ den } \frac{dx_2}{d\sigma} = -x_1 + \beta x_3 \\ \beta x_2 + \frac{dx_3}{d\sigma} + \gamma &= 0 \text{ den } \frac{dx_3}{d\sigma} = -\beta x_2 - \gamma \\ \frac{dI_1^*}{d\sigma} - I_2^* &= 0 \text{ den } \frac{dI_1^*}{d\sigma} = I_2^* \\ I_1^* + \frac{dI_2^*}{d\sigma} - \beta I_3^* &= 0 \text{ den } \frac{dI_2^*}{d\sigma} = \beta I_3^* - I_1^* \\ \frac{dI_3^*}{d\sigma} + \beta I_2^* &= 0 \text{ den } \frac{dI_3^*}{d\sigma} = -\beta I_2^* \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

olarak ifade edebiliriz. (3.1.5) denklemleri Σ^* adjoint regle yüzeyinin dayanak eğrisinin ve doğrultmanın sabit olma şartlarıdır[7].

Diğer yandan L^* doğrultmanı O-ijk çatısına göre sabit ve dayanak eğrisinin teğetine paralel ise

$$\frac{dI^*}{d\sigma} = 0 \quad ve \quad \frac{d(r_p + r_{pA})}{d\sigma} \times I^* = 0 \quad (3.1.6)$$

denklemleri yazılabilir. Burada $\frac{d(r_p+r_{pA})}{d\sigma} \times I^* = 0$ denklemini hesaplayalım;

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{dx_1}{d\sigma} - x_2 + \alpha & x_1 + \frac{dx_2}{d\sigma} - \beta x_3 & \beta x_2 + \frac{dx_3}{d\sigma} + \gamma \\ I_1^* & I_2^* & I_3^* \end{vmatrix} = 0$$

$$e_1 I_3^* \left(x_1 + \frac{dx_2}{d\sigma} - \beta x_3 \right) + e_3 I_2^* \left(\frac{dx_1}{d\sigma} - x_2 + \alpha \right) + e_2 I_1^* \left(\beta x_2 + \frac{dx_3}{d\sigma} + \gamma \right) - e_3 I_1^* \left(x_1 + \frac{dx_2}{d\sigma} - \beta x_3 \right) - e_1 I_2^* \left(\beta x_2 + \frac{dx_3}{d\sigma} + \gamma \right) - e_2 I_3^* \left(\frac{dx_1}{d\sigma} - x_2 + \alpha \right) = 0$$

$$\left[I_3^* \left(x_1 + \frac{dx_2}{d\sigma} - \beta x_3 \right) - I_2^* \left(\beta x_2 + \frac{dx_3}{d\sigma} + \gamma \right) \right] e_1$$

$$+ \left[I_1^* \left(\beta x_2 + \frac{dx_3}{d\sigma} + \gamma \right) - I_3^* \left(\frac{dx_1}{d\sigma} - x_2 + \alpha \right) \right] e_2$$

$$+ \left[I_2^* \left(\frac{dx_1}{d\sigma} - x_2 + \alpha \right) - I_1^* \left(x_1 + \frac{dx_2}{d\sigma} - \beta x_3 \right) \right] e_3 = 0$$

$$I_1^* \left(\beta x_2 + \frac{dx_3}{d\sigma} + \gamma \right) - I_3^* \left(\frac{dx_1}{d\sigma} - x_2 + \alpha \right) = 0$$

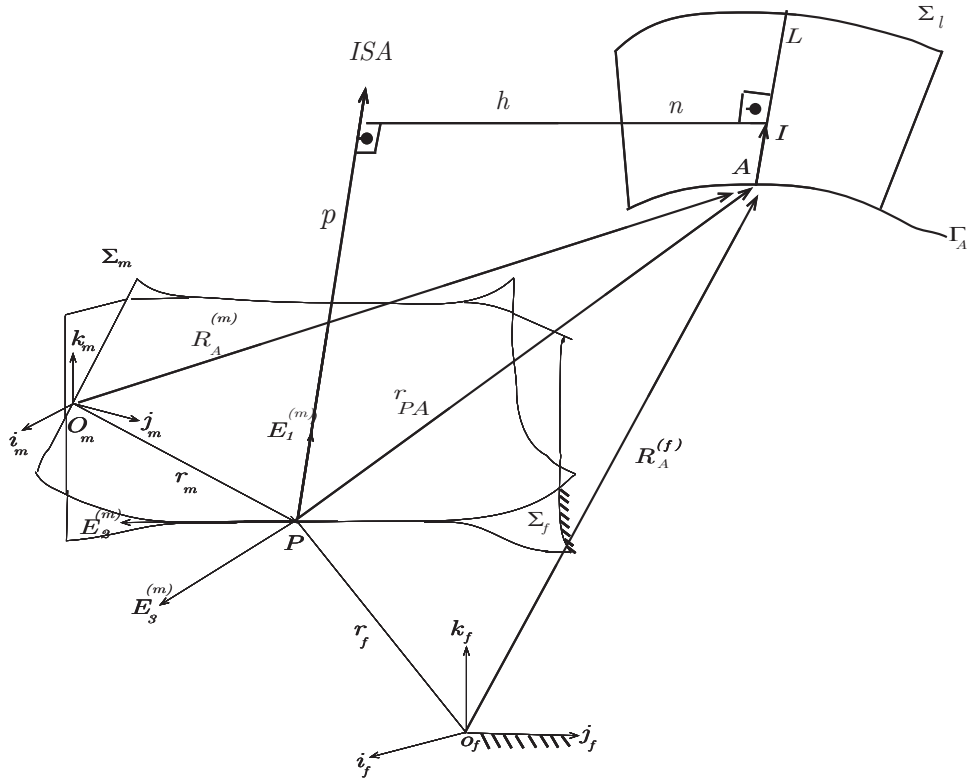
$$I_2^* \left(\frac{dx_1}{d\sigma} - x_2 + \alpha \right) - I_1^* \left(x_1 + \frac{dx_2}{d\sigma} - \beta x_3 \right) = 0 \quad (3.1.7)$$

$$I_3^* \left(x_1 + \frac{dx_2}{d\sigma} - \beta x_3 \right) - I_2^* \left(\beta x_2 + \frac{dx_3}{d\sigma} + \gamma \right) = 0$$

denklemleri elde edilir.

3.2 UZAY HAREKETİNDE BİR DOĞRU YÖRÜNGESİNİN TEMEL DENKLEMLERİ

Σ_f sabit regle yüzeyi ve bu regle yüzey üzerinde kaymaksızın yuvarlanma hareketini meydana getiren regle yüzey Σ_m olsun[7]. Bu durumda Σ_f ve Σ_m nin ISA ani vida eksenleri çakışır. Σ_f regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{r}_f; \vec{E}_1^{(f)}, \vec{E}_2^{(f)}, \vec{E}_3^{(f)}\}$; ve Σ_m hareketli regle yüzeyinin Frenet çatısı ise $\{\vec{r}_m; \vec{E}_1^{(m)}, \vec{E}_2^{(m)}, \vec{E}_3^{(m)}\}$ şeklindedir. Bu yüzeylere adjoint olan A noktasının çizmiş olduğu yörüngeyi Γ_A ile gösterelim (Şekil 3.2.). Doğrultman vektörü L ; dayanak eğrisi Γ_A olan Σ_ℓ regle yüzeyinin vektörel



Şekil 3.2.

denklemini

$$\Sigma_\ell : R_\ell^{(f)}(\sigma_\ell, \mu) = \Gamma_A + \mu.L \quad (3.2.1)$$

dir. Burada σ_ℓ ; Σ_ℓ regle yüzeyinin dayanak eğrisinin (veya striksiyon çizgisinin) yay parametresidir. Ayrıca

$$\begin{aligned} I &= I_1 \overrightarrow{E_1^{(f)}} + I_2 \overrightarrow{E_2^{(f)}} + I_3 \overrightarrow{E_3^{(f)}} ; & I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 &= 1 \\ R_A &= \overrightarrow{r_f} + x_1 \overrightarrow{E_1^{(f)}} + x_2 \overrightarrow{E_2^{(f)}} + x_3 \overrightarrow{E_3^{(f)}} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

dir. Burada (I_1, I_2, I_3) ; $\left\{ \overrightarrow{r_f}; \overrightarrow{E_1^{(f)}}, \overrightarrow{E_2^{(f)}}, \overrightarrow{E_3^{(f)}} \right\}$ Frenet çatısındaki L doğrusunun I birim vektörünün bileşenleridir. $\overrightarrow{r_f}$; Frenet çatısının orjinal noktasının vektörü veya Σ_f sabit ekseninin striksiyon noktasıdır. I nın σ yönündeki türevi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa (3.1.4) denklemlerine benzer olarak

$$I' = (I_1' - I_2) E_1^{(f)} + (I_1 + I_2' - \beta_f I_3) E_2^{(f)} + (\beta_f I_2 + I_3') E_3^{(f)} \quad (3.2.3)$$

elde edilir. Burada σ ; yay uzunluğu olup $\sigma = \sigma_f = \sigma_m$ dir. Benzer olarak R_A nın σ ya göre türevi alınır

$$\frac{dR_A}{d\sigma} = \left(\frac{dx_1}{d\sigma} - x_2 + \alpha \right) E_1 + \left(x_1 + \frac{dx_2}{d\sigma} - \beta x_3 \right) E_2 + \left(\beta x_2 + \frac{dx_3}{d\sigma} + \gamma \right) E_3$$

elde edilir[7].

Sabit A noktasından geçen L doğrultman vektörüne ISA ani vida eksenine **adjoint doğru** denir. Dolayısıyla Σ_ℓ regle yüzeyi de Σ_m regle yüzeyine adjoint bir regle yüzey olarak düşünülebilir(Şekil3.2). Bu regle yüzeyin vektörel denklemi

$$\Sigma_\ell^m : R_\ell^{(m)}(\sigma_\ell, \mu) = R_A^{(m)} + \mu \cdot I^{(m)} \quad (3.2.4)$$

şeklinindedir. Burada $R_A^{(m)}$; 0_m referans noktasından bir hareketli cisimdeki A noktasına bir vektördür. Ayrıca

$$\Gamma_A^{(m)} : R_A^{(m)} = \overrightarrow{r_m} + x_1 \overrightarrow{E_1^{(m)}} + x_2 \overrightarrow{E_2^{(m)}} + x_3 \overrightarrow{E_3^{(m)}}$$

dir. $I^{(m)}$; $\{0_m; i_m, j_m, k_m\}$ referans çatısındaki L doğrusunun birim vektörüdür ve $\left\{ \overrightarrow{r_m}; \overrightarrow{E_1^{(m)}}, \overrightarrow{E_2^{(m)}}, \overrightarrow{E_3^{(m)}} \right\}$ Frenet çatısında

$$I^{(m)} = I_1 \overrightarrow{E_1^{(m)}} + I_2 \overrightarrow{E_2^{(m)}} + I_3 \overrightarrow{E_3^{(m)}}$$

olarak yazılabilir. Σ_m ve Σ_f yüzeyleri aynı ISA doğrultmanına sahip olduğundan $\left\{ \overrightarrow{E_1^{(m)}}, \overrightarrow{E_2^{(m)}}, \overrightarrow{E_3^{(m)}} \right\}$ ile $\left\{ \overrightarrow{E_1^{(f)}}, \overrightarrow{E_2^{(f)}}, \overrightarrow{E_3^{(f)}} \right\}$ çakışır. Dolayısıyla $I^{(m)}$ bileşeni (3.2.2) denklemindeki I ile aynıdır. $I^{(m)}$ ve $R_A^{(m)}$ nin σ yönündeki türevini alırsak; (2.2.3) ve (2.2.5) denklemlerine benzer formüller elde ederiz. Açıkça hareketli cisimdeki sabit L doğrusu $\{0_m; i_m, j_m, k_m\}$ sisteminde tam bir sabit doğrudur. Böylece

$$I^{(m)'} = 0 \quad \text{ve} \quad R_A^{(m)'} = 0$$

olup

$$I^{(m)} = \left(I_1^{(m)'} - I_2^{(m)} \right) E_1^{(m)} + \left(I_1^{(m)} + I_2^{(m)'} - \beta_m I_3^{(m)} \right) E_2^{(m)} + \left(\beta_m I_2^{(m)} + I_3^{(m)'} \right) E_3^{(m)} = 0$$

elde edilir. Burada $\left\{ \overrightarrow{E_1^{(m)}}, \overrightarrow{E_2^{(m)}}, \overrightarrow{E_3^{(m)}} \right\}$ baz vektörler olduğundan

$$\begin{aligned} I_1^{(m)'} - I_2^{(m)} &= 0 \quad \text{dan} \quad I_1^{(m)'} = I_2^{(m)} \\ I_1^{(m)} + I_2^{(m)'} - \beta_m I_3^{(m)} &= 0 \quad \text{dan} \quad I_2^{(m)'} = \beta_m I_3^{(m)} - I_1^{(m)} \\ \beta_m I_2^{(m)} + I_3^{(m)'} &= 0 \quad \text{dan} \quad I_3^{(m)'} = -\beta_m I_2^{(m)} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

ve

$$R_A^{(m)'} = (x'_1 - x_2 - \alpha_m) E_1^{(m)} + (x_1 + x'_2 - \beta_m x_3) E_2^{(m)} + (\beta_m x_2 + x'_3 + \gamma_m) E_3^{(m)} = 0$$

olup

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 + \alpha_m \\ x'_2 &= \beta_m x_3 - x_1 \\ x'_3 &= -\beta_m x_2 - \gamma_m \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

elde edilir. Tam sabit olma durumunu ((3.2.5) ve (3.2.6) denklemini); (3.2.3) denkleminde yerine yazıp (2.2.7) denklemini ile birleştirirsek

$$I' = -(\beta_m I_3 - \beta_f I_3) E_2^{(f)} + (\beta_f I_2 - \beta_m I_2) E_3^{(f)}$$

elde edilir. Burada $\beta^* = \beta_f - \beta_m$ olup

$$\begin{aligned} I' &= -\beta^* I_3 E_2^{(f)} + \beta^* I_2 E_3^{(f)} \\ I' &= \beta^* (-I_3 E_2^{(f)} + I_2 E_3^{(f)}) \\ R'_A &= \alpha^* E_1^{(f)} + \beta^* (x_2 E_3^{(f)} - x_3 E_2^{(f)}) \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

denklemlerini elde ederiz.

Bu denklemlerden $d\sigma_\ell$ yi $d\sigma$ türünden hesaplayabiliriz. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\sigma_\ell &= \int_0^\sigma |I'| .d\sigma \Rightarrow d\sigma_\ell = |I'| .d\sigma \\
I' &= \beta^*(-I_3E_2^{(f)} + I_2E_3^{(f)}) \\
\|I'\| &= \sqrt{\beta^{*2}(I_2^2 + I_3^2)} = \beta^* \sqrt{(I_2^2 + I_3^2)} \\
I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 &= 1 \Rightarrow I_2^2 + I_3^2 = 1 - I_1^2 \\
|I'| &= \beta^* (1 - I_1^2)^{\frac{1}{2}} \\
d\sigma_\ell &= |I'| .d\sigma = \beta^* (1 - I_1^2)^{\frac{1}{2}} d\sigma \tag{3.2.8}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada I nın σ yönündeki II . türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
I &= I_1\overrightarrow{E_1^{(f)}} + I_2\overrightarrow{E_2^{(f)}} + I_3\overrightarrow{E_3^{(f)}} \\
I' &= \beta^*(-I_3E_2^{(f)} + I_2E_3^{(f)}) \\
I'' &= \frac{dI'}{d\sigma} = \beta^*(-I_3E_2^{(f)} + I_2E_3^{(f)}) + \beta^* \left(-I_3' E_2^{(f)} - I_3 E_2^{(f)'} + I_2' E_3^{(f)} + I_2 E_3^{(f)'} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
E_1^{(f)'} &= E_2^{(f)} \\
E_2^{(f)'} &= -E_1^{(f)} + \beta_f E_3^{(f)} \\
E_3^{(f)'} &= -\beta_f E_2^{(f)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
I_1' &= I_2 \\
I_2' &= \beta_m I_3 - I_1 \\
I_3' &= -\beta_m I_2
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
I'' &= -\beta^{*'} I_3 E_2^{(f)} + \beta^{*'} I_2 E_3^{(f)} \\
&+ \beta^* \left[\beta_m I_2 E_2^{(f)} - I_3 \left(-E_1^{(f)} + \beta_f E_3^{(f)} \right) + (\beta_m I_3 - I_1) E_3^{(f)} + I_2 \left(-\beta_f E_2^{(f)} \right) \right] \\
I'' &= -\beta^{*'} I_3 E_2^{(f)} + \beta^{*'} I_2 E_3^{(f)} \\
&+ \beta^* \left[\beta_m I_2 E_2^{(f)} + I_3 E_1^{(f)} - \beta_f I_3 E_3^{(f)} - I_1 E_3^{(f)} + \beta_m I_3 E_3^{(f)} - I_2 \beta_f E_2^{(f)} \right] \\
I'' &= -\beta^{*'} I_3 E_2^{(f)} + \beta^{*'} I_2 E_3^{(f)} + \beta^* \left[-\beta^* I_2 E_2^{(f)} - \beta^* I_3 E_3^{(f)} + I_3 E_1^{(f)} - I_1 E_3^{(f)} \right] \\
I'' &= -\beta^{*'} I_3 E_2^{(f)} + \beta^{*'} I_2 E_3^{(f)} - \beta^{*2} I_2 E_2^{(f)} - \beta^{*2} I_3 E_3^{(f)} + \beta^* I_3 E_1^{(f)} - \beta^* I_1 E_3^{(f)} \\
I'' &= \beta^* I_3 E_1^{(f)} + (-\beta^{*'} I_3 - \beta^{*2} I_2) E_2^{(f)} + (\beta^{*'} I_2 - \beta^{*2} I_3 - \beta^* I_1) E_3^{(f)} \quad (3.2.9)
\end{aligned}$$

dir. Σ_ℓ regle yüzeyinin dağılma parametresi (drali);

$$b_\ell = \frac{R'_A \cdot I'}{(I')^2}$$

dir.

$$\begin{aligned}
R'_A &= \alpha^* E_1^{(f)} + \beta^* \left(x_2 E_3^{(f)} - x_3 E_2^{(f)} \right) \\
I' &= \beta^* (-I_3 E_2^{(f)} + I_2 E_3^{(f)})
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
b_\ell &= \frac{\langle R'_A, I' \rangle}{\langle I', I' \rangle} = \frac{\langle (\alpha^*, -x_3 \beta^*, x_2 \beta^*), (0, -\beta^* I_3, \beta^* I_2) \rangle}{\langle (0, -\beta^* I_3, \beta^* I_2), (0, -\beta^* I_3, \beta^* I_2) \rangle} \\
b_\ell &= \frac{\beta^{*2} x_3 I_3 + \beta^{*2} x_2 I_2}{\beta^{*2} I_3^2 + \beta^{*2} I_2^2} \\
b_\ell &= \frac{x_2 I_2 + x_3 I_3}{I_3^2 + I_2^2} \\
b_\ell &= \frac{x_2 I_2 + x_3 I_3}{1 - I_1^2} \quad (3.2.10)
\end{aligned}$$

elde edilir. Σ_ℓ regle yüzeyinin striksiyon eğrisinin vektörel denklemi

$$\begin{aligned}
r_\ell &= R_A + b_\ell I = \vec{r}_f + x_1 \overrightarrow{E_1^{(f)}} + x_2 \overrightarrow{E_2^{(f)}} + x_3 \overrightarrow{E_3^{(f)}} + b_\ell \left(\overrightarrow{I_1 E_1^{(f)}} + \overrightarrow{I_2 E_2^{(f)}} + \overrightarrow{I_3 E_3^{(f)}} \right) \\
&= \vec{r}_f + x_1 \overrightarrow{E_1^{(f)}} + x_2 \overrightarrow{E_2^{(f)}} + x_3 \overrightarrow{E_3^{(f)}} + b_\ell I_1 \overrightarrow{E_1^{(f)}} + b_\ell I_2 \overrightarrow{E_2^{(f)}} + b_\ell I_3 \overrightarrow{E_3^{(f)}} \\
&= \vec{r}_f + (x_1 + b_\ell I_1) E_1^{(f)} + (x_2 + b_\ell I_2) E_2^{(f)} + (x_3 + b_\ell I_3) E_3^{(f)} \\
r_\ell &= \vec{r}_f + \sum_{i=1}^3 (x_i + b_\ell I_i) E_i^{(f)} ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.2.11)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Σ_ℓ regle yüzeyinin özellikleri incelenirse Σ_ℓ nin $\left\{ \overrightarrow{r}_\ell; \overrightarrow{E}_1^{(\ell)}, \overrightarrow{E}_2^{(\ell)}, \overrightarrow{E}_3^{(\ell)} \right\}$ Frenet çatısı

$$\begin{aligned} E_1^{(\ell)} &= I \\ E_2^{(\ell)} &= \frac{dI}{d\sigma_\ell} \\ E_3^{(\ell)} &= E_1^{(\ell)} \times E_2^{(\ell)} \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

olarak kabul edilebilir. Burada $E_2^{(\ell)}$; Σ_ℓ nin striksiyon noktasındaki normalidir[1].

(3.2.2); (3.2.7) ve (3.2.12) denklemleri birleştirilirse

$$\begin{aligned} E_2^{(\ell)} &= \frac{dI}{d\sigma_\ell} = \frac{dI}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{d\sigma_\ell} \\ &= \frac{\beta^* \left(-I_3 E_2^{(f)} + I_2 E_3^{(f)} \right)}{|I'|} \\ &= \frac{\beta^* \left(-I_3 E_2^{(f)} + I_2 E_3^{(f)} \right)}{\beta^* (1 - I_1^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{-I_3 E_2^{(f)} + I_2 E_3^{(f)}}{(1 - I_1^2)^{\frac{1}{2}}} \\ E_2^{(\ell)} &= \frac{E_1^{(f)} \times I}{|E_1^{(f)} \times I|} \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

elde edilir.

L doğrusu ile ISA ani vida eksenini (veya $E_1^{(f)}$) arasındaki mesafe h olsun. ISA ani vida eksenini üzerindeki ortak doğrunun dik ayağı ile Σ_ℓ regle yüzeyinin A striksiyon noktası arasındaki mesafe p olsun. Σ_ℓ doğru yörüngesinin striksiyon noktasının durumu (h, p) olarak ifade edilir[4, 8].

$E_1^{(m)}$ ile $I = I_1 \overrightarrow{E}_1^{(f)} + I_2 \overrightarrow{E}_2^{(f)} + I_3 \overrightarrow{E}_3^{(f)}$ arasındaki uzaklık h olmak üzere N_0 ; I da bir nokta; N'_0 ise $E_1^{(m)}$ üzerinde bir nokta olsun. $N_0 = (x_1, x_2, x_3)$ ve $N'_0 = (1, 0, 0)$ koordinatları ile verilirse

$$\begin{aligned} h &= \overrightarrow{N_0 N'_0} \cdot \frac{E_1^{(m)} \times I}{|E_1^{(m)} \times I|} = (x_1 - 1, x_2, x_3) \cdot \frac{(0, I_3, -I_2)}{(1 - I_1^2)^{\frac{1}{2}}} \\ h &= \frac{x_2 I_3 - x_3 I_2}{(1 - I_1^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$p = \frac{x_1 - I_1(x_1I_1 + x_2I_2 + x_3I_3)}{1 - I_1^2} \quad (3.2.14)$$

elde edilir. Burada h ve p değerleri $(E_1^{(f)} \times I_1E_1^{(f)})$ referans sistemi üzerindeki striksiyon noktasının durumuna göre pozitif veya negatif olabilir.

3.3 UZAY HAREKETLERİNDE BİR DOĞRUNUN İNVARYANTLARI

Σ_ℓ regle yüzeyinin Γ_A yörüngesinin r_ℓ striksiyon eğrisinin (3.2.11) vektörel denkleminde (3.2.13),(3.2.14) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} r_\ell &= \vec{r}_f + (x_1 + b_\ell I_1) E_1^{(f)} + (x_2 + b_\ell I_2) E_2^{(f)} + (x_3 + b_\ell I_3) E_3^{(f)} \\ r_\ell &= \vec{r}_f + \left(x_1 - \frac{x_2I_1I_2 + x_3I_1I_3}{1 - I_1^2}\right) E_1^{(f)} + \left(x_2 - \frac{x_2I_2 + x_3I_3}{1 - I_1^2} \cdot I_2\right) \frac{I_2E_3^{(f)} - I_3E_2^{(f)}}{(1 - I_1^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad + \left(x_3 - \frac{x_2I_2 + x_3I_3}{1 - I_1^2} I_3\right) \cdot E_3^{(f)} \\ r_\ell &= \vec{r}_f + \frac{x_1 - x_1I_1^2 - x_2I_1I_2 - x_3I_1I_3}{1 - I_1^2} E_1^{(f)} + \left(\frac{x_2 - x_2I_1^2 - x_2I_2^2 - x_3I_2I_3}{1 - I_1^2}\right) \cdot \frac{I_2E_3^{(f)} - I_3E_2^{(f)}}{(1 - I_1^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad + \left(\frac{x_3 - x_3I_1^2 - x_2I_2I_3 - x_3I_3^2}{1 - I_1^2}\right) E_3^{(f)} \\ r_\ell &= \vec{r}_f + \frac{x_1 - I_1(x_1I_1 + x_2I_2 + x_3I_3)}{1 - I_1^2} E_1^{(f)} + \frac{x_2I_3 - x_3I_2}{1 - I_1^2} E_1^{(f)} \times I \\ r_\ell &= \vec{r}_f + p \cdot E_1^{(f)} + q \cdot E_1^{(f)} \times I \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$q = \frac{h}{|E_1^{(f)} \times I|} = \frac{h}{(1 - I_1^2)^{\frac{1}{2}}}$$

dir. Σ_ℓ yörüngesinin (3.2.1) vektörel denklemi standart formda

$$\begin{aligned} \Sigma_\ell : R_\ell(\sigma_\ell, \mu) &= r_\ell + \mu \cdot I \\ r_\ell &= r_f + p \cdot E_1^{(f)} + q \cdot E_1^{(f)} \times I \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada q sabitken p değeri değışirse L doğrusu ISA ani vida eksenine paralel olarak hareket eder. p sabitken q değışirse L doğrusu ISA ani vida eksenine yaklaşır veya uzaklaşır. I_2, I_3 değıştiğinde ise L doğrusu ISA çevresinde döner. L ile ISA arasındaki eğilim açısı ise I_ℓ ye bağılı olarak değışir.

Diğer yandan $\{0_m; i_m, j_m, k_m\}$ hareketli çatısındaki Σ_ℓ regle yüzeyinin (3.2.4) vektörel denklemi standart formda yeniden yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Sigma_\ell^{(m)} : R_\ell^{(m)}(\sigma_\ell, \mu) &= r_\ell^{(m)} + \mu \cdot I \\ r_\ell^{(m)} &= r_m + p \cdot E_1^{(m)} + q \cdot E_1^{(m)} \times I\end{aligned}\quad (3.3.3)$$

elde edilir. L doğrusu $\{0_m; i_m, j_m, k_m\}$ hareketli çatısındaki sabit bir doğru ile daima doğruduş olduğunda $\Sigma_\ell^{(m)}$ nin striksiyon noktası L doğrusu üzerinde hareket eder. Bu durumda L doğrusu **hemen hemen sabit bir doğrudur** ve

$$\frac{dI^{(m)}}{d\sigma_\ell} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{dr_p^{(m)}}{d\sigma_{(m)}} \times I^{(m)} = 0$$

denklemlerini sağlar.

(3.2.2); (3.2.12) ve (3.3.3) denklemlerini bu denklemde yerine yazarsak **hemen hemen sabit doğru durumunu** elde ederiz. (3.2.5)den

$$\begin{aligned}I_1^{(m)'} &= I_2^{(m)} \\ I_2^{(m)'} &= \beta_m I_3^{(m)} - I_1^{(m)} \\ I_3^{(m)'} &= -\beta_m I_2^{(m)}\end{aligned}$$

ve (3.2.14)den

$$\begin{aligned}
p &= \frac{x_1 - I_1 (x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_3)}{1 - I_1^2} \\
p' &= \frac{[x_2 - \alpha_m - (x_2 - \alpha_m) I_1^2 - 2x_2 I_1 I_2 - (-x_1 + \beta_m x_3) I_1 I_2] \cdot (1 - I_1^2)}{(1 - I_1^2)^2} \\
&\quad + \frac{-x_2 (I_2^2 + \beta_m I_1 I_3 - I_1^2) - (-\gamma_m - \beta_m x_2) I_1 I_3 - x_3 (I_2 I_3 - \beta_m I_1 I_2) (1 - I_1^2)}{(1 - I_1^2)^2} \\
&\quad + \frac{+2I_1 I_2 (x_1 - I_1 (x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_3))}{(1 - I_1^2)^2} \\
p' &= \frac{x_2 - \alpha_m - x_2 I_1^2 + \alpha_m I_1^2 - x_1 I_1 I_2 + x_1 I_1 I_2 - \beta_m x_3 I_1 I_2 - x_2 I_2^2}{1 - I_1^2} \\
&\quad - \frac{-\beta_m I_1 I_3 x_2 + x_2 I_1^2 + \gamma_m I_1 I_3 + \beta_m x_2 I_1 I_3 - x_3 I_2 I_3 + \beta_m I_1 I_2 x_3 + 2I_1 I_2 \cdot p}{1 - I_1^2} \\
p' &= \frac{x_2 - \alpha_m (1 - I_1^2) - I_2 (x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_3) + \gamma_m I_1 I_3 + I_1 I_2 \cdot p}{1 - I_1^2} \\
p' &= -\alpha_m + \frac{I_1 I_2 \cdot p - I_3 q + \gamma_m I_1 I_3}{1 - I_1^2} \tag{3.3.4}
\end{aligned}$$

ve

$$q = \frac{x_2 I_3 - x_3 I_2}{1 - I_1^2}$$

olup

$$\begin{aligned}
q' &= \frac{(I_3' x_2 + x_2' I_3 - x_3 I_2' - x_3' I_2) (1 - I_1^2) + 2I_1 I_2 (x_2 I_3 - x_3 I_2)}{(1 - I_1^2)^2} \\
q' &= \frac{(-\beta_m I_2 x_2 + \beta_m I_3 x_3 - x_1 I_3 + x_3 I_1 - \beta_m I_3 x_3 - \beta_m I_2 x_2 + \gamma_m I_2) (1 - I_1^2) + 2I_1 I_2 (x_2 I_3 - x_3 I_2)}{(1 - I_1^2)^2} \\
q' &= \frac{-x_1 I_3 + x_3 I_1 + \gamma_m I_2 + I_1 I_2 \cdot q}{1 - I_1^2} \\
q' &= \frac{I_3 \cdot p + I_1 I_2 \cdot q - \gamma_m I_2}{1 - I_1^2} \tag{3.3.5}
\end{aligned}$$

bulunur. Aynı şekilde Σ_ℓ regle yüzeyinin dağılma parametresi;

$$b_\ell = -\frac{x_2 I_2 + x_3 I_3}{1 - I_1^2}$$

olup

$$\begin{aligned}
b'_\ell &= \frac{-(x'_2 I_2 + x_2 I'_2 + x'_3 I_3 + x_3 I'_3)(1 - I_1^2) - 2I_1 I'_1 \cdot (x_2 I_2 + x_3 I_3)}{(1 - I_1^2)^2} \\
&= \frac{(-I_1 + \beta_m x_3)x_2 + (-x_1 + \beta_m x_3)I_2 - \beta_m I_2 x_3 + (-\gamma_m - \beta_m x_2)I_3}{1 - I_1^2} - \frac{2I_1 I_2 (x_2 I_2 + x_3 I_3)}{(1 - I_1^2)^2} \\
&= \frac{-I_1 x_2 + \beta_m x_2 I_3 - x_1 I_2 + \beta_m x_3 I_2 - \beta_m x_2 I_3 - \beta_m x_3 I_2 - \gamma_m I_3}{1 - I_1^2} - \frac{2I_1 I_2 (x_2 I_2 + x_3 I_3)}{(1 - I_1^2)^2} \\
&= \frac{-I_1 x_2 - x_1 I_2 - \gamma_m I_3}{(1 - I_1^2)^2} - \frac{2I_1 I_2 (x_2 I_2 + x_3 I_3)}{(1 - I_1^2)^2} \\
&= \frac{I_2 \frac{x_1 - I_1(x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_3)}{1 - I_1^2} - I_1 I_3 \left(\frac{x_2 I_3 - x_3 I_2}{1 - I_1^2} \right) + \gamma_m I_3}{(1 - I_1^2)^{\frac{1}{2}}} \\
b'_\ell &= r_\ell^{(m)} \cdot I = \frac{I_2 \cdot p - I_1 I_3 \cdot q + \gamma_m I_3}{(1 - I_1^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.3.6}
\end{aligned}$$

bulunur. Eğer $r_\ell^{(m)}$ sabit vektörse veya $\Sigma_\ell^{(f)}$ nin A striksiyon noktası $\Sigma_\ell^{(m)}$ hareketli regle yüzeyinde bir sabit nokta ise $r_\ell^{(m)'} = 0$ dır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
p' &= -\alpha_m - I_3 \cdot q \\
q' &= \frac{p}{I_3} \\
b'_l &= I_2 \cdot p - I_1 I_3 \cdot q + I_3 \gamma_m = 0
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

elde edilir. Σ_ℓ regle yüzeyinin r_ℓ striksiyon eğrisi; $\Sigma_\ell^{(m)}$ hareketli regle yüzeyi üzerindeki L doğrusu üzerinde bulunan sabit bir (p, q) noktası tarafından izlenir. Ve bu nokta yukardaki 3 diferensiyel denklemi sağlar.

(3.3.1) denkleminin 2. kısmını σ yönünde türevini alıp (3.3.4) ve (3.3.5) hemen hemen sabit doğru durumunu bu türevde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
r_\ell &= r_f + p \cdot E_1^{(f)} + q \cdot \left(-I_3 E_2^{(f)} + I_2 E_3^{(f)} \right) \\
&= r_f + p \cdot E_1^{(f)} - q \cdot I_3 E_2^{(f)} + q \cdot I_2 E_3^{(f)}
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
r'_\ell &= \frac{dr_f}{d\sigma} + p'E_1^{(f)} + p.E_2^{(f)} - \left[q'.I_3E_2^{(f)} + q. \left(-\beta_m I_2 E_2^{(f)} - E_1^{(f)} I_3 + \beta_f I_3 E_3^{(f)} \right) \right] \\
&+ q'.I_2 E_3^{(f)} + q. \left(I_1 E_3^{(f)} + \beta_m I_3 E_3^{(f)} - \beta_f I_2 E_2^{(f)} \right) \\
&= \alpha_f E_1^{(f)} + E_3^{(f)} \gamma_m + p'.E_1^{(f)} + p.E_2^{(f)} - q'.I_3 E_2^{(f)} + q.\beta_m I_2 E_2^{(f)} + q.E_1^{(f)} I_3 \\
&- q.\beta_f I_3 E_3^{(f)} + q'.I_2 E_3^{(f)} + q.I_1 E_3^{(f)} + q.\beta_m I_3 E_3^{(f)} - q.\beta_f I_2 E_2^{(f)} \\
&= \alpha_f E_1^{(f)} + \gamma_m E_3^{(f)} + p'.E_1^{(f)} + p.E_2^{(f)} - q'.I_3 E_2^{(f)} - \beta^* q I_2 E_2^{(f)} - \beta^* q I_3 E_3^{(f)} \\
&+ q'.I_2 E_3^{(f)} + q.I_1 E_3^{(f)} + q.E_1^{(f)} I_3 \\
r'_\ell &= (\alpha_f + p' + q.I_3) E_1^{(f)} + (p - q'.I_3 - \beta^* q I_2) E_2^{(f)} \\
&+ (\gamma_m - \beta^* q I_3 + q'.I_2 - q.I_1) E_3^{(f)} \tag{3.3.8}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Diferensiyel Geometri [5] den biliyoruz ki; bir doğru yörüngesinin 3 yapı parametresi şu şekilde saptanabilir;

$$\begin{aligned}
\alpha_\ell &= (r'_\ell . I) = \frac{I_1 \alpha^* - \beta^* (1 - I_1^2) q + b'_\ell}{\beta^* (1 - I_1^2)^{\frac{1}{2}}} \\
\alpha_\ell &= \frac{I_1 \alpha^* (1 - I_1^2) + I_3 \gamma_m - \left[\beta^* (1 - I_1^2)^2 + I_1 I_3 \right] . q + I_2 . p}{\beta^* (1 - I_1^2)} \tag{3.3.9}
\end{aligned}$$

$$\beta_\ell = \left(I, \frac{dI}{d\sigma_\ell}, \frac{d^2 I}{d\sigma_\ell^2} \right) = \frac{I_3 + \beta^* I_1 (1 - I_1^2)}{\beta^* (1 - I_1^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.3.10}$$

$$\gamma_\ell = \left(\frac{dr_\ell}{d\sigma_\ell}, I, \frac{dI}{d\sigma_\ell} \right) = \frac{\alpha^*}{\beta^*} + I_1 . q \tag{3.3.11}$$

Yukarıdaki 3 yapı parametresinin σ_ℓ yönündeki 1. türevi;

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha_\ell}{d\sigma_\ell} &= \frac{\frac{I_2 \alpha^*}{1 - I_1^2} + I_1 \beta^* \left(\frac{\alpha^*}{\beta^*} \right)' - I_2 (\alpha_m + \beta_m \gamma_m) + I_3 \gamma'_m}{\beta^* (1 - I_1^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&+ \frac{(\beta_m I_1 I_2 - 2I_2 I_3 + \beta^* I_1 I_2) q + \left[\beta_m I_3 - 2I_1 - \frac{\beta^* (1 - I_1^2)}{I_3} \right] . p}{\beta^* (1 - I_1^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&+ \frac{\left[4I_1 I_2 + \beta^* (1 - I_1^2) \frac{I_2}{I_3} - \frac{\beta^*}{\beta^*} + \frac{I_1 I_2}{1 - I_1^2} \right] b'_\ell}{\beta^* (1 - I_1^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.3.12}
\end{aligned}$$

$$\frac{d\beta_\ell}{d\sigma_\ell} = \frac{\beta^* I_2 [3I_1 I_3 - \beta_m (1 - I_1^2) + \beta^* (1 - I_1^2)] - I_3 \beta'^* (1 - I_1^2)}{\beta^* (1 - I_1^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.3.13}$$

$$\frac{d\gamma_\ell}{d\sigma_\ell} = \frac{\left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)' + \frac{I_1 I_3 \cdot p + I_2 \cdot q - I_1 I_2 \gamma_m}{1 - I_1^2}}{\beta^* (1 - I_1^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.3.14)$$

ve (3.3.5) denkleminin σ yönündeki 2. türevi alınırsa

$$b_\ell'' = \frac{(\beta_m I_3 - 2I_1)p + (\beta_m I_1 - 2I_3)I_2 q - I_2(\alpha_m + \beta_m \gamma_m) + I_3 \gamma_m' + 4I_1 I_2 b_\ell'}{1 - I_1^2} \quad (3.3.15)$$

elde edilir. (3.3.11) denkleminde göre eğer

$$q = \frac{\alpha^*}{\beta^* I_1} \quad \text{veya} \quad h = -\frac{(1 - I_1^2)^{\frac{1}{2}} \alpha^*}{\beta^* I_1} \quad (3.3.16)$$

şartı sağlanıyorsa bir doğru yörüngesi açılabilir bir yüzeydir. Bu denklemlerin açılabilirlik koşulunun p ve I_2 (veya I_3) e bağıllık durumunu gözardı edersek; sadece $\frac{\alpha^*}{\beta^*}$, I_1 ve h ya bağlı olduğu görülür. Eğer açılabilir doğru yörüngesi bir koni ise veya $\alpha_\ell = 0$ ve $\gamma_\ell = 0$ ise açılabilirlik koşulu

$$\begin{aligned} q &= -\frac{\alpha^*}{\beta^* I_1} \\ p &= -\frac{\left(\frac{\beta^* (1 - I_1^2)}{I_1} + I_3\right) \frac{\alpha^*}{\beta^*} + I_1 (1 - I_1^2) \alpha^* + I_3 \gamma_m}{I_2} \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

dir.

KAYNAKLAR

- [1] De Lun Wang, *Kinematic Differential geometry of mechanisms*, Doctoral dissertation,Dalian University of Technology,Dalian,March (1995)
- [2] Bokelberg,E.H.,Hunt,K.H. and Ridley,P.R.,*Mechanism and Machine Theory*, 27,(1992), 1.
- [3] Ridley,P.R.,Hunt,K.H. and Bokelberg,E.H.,*Mechanism and Machine Theory*, 27,(1992), 17.
- [4] McCarthy,J. and Roth,B.,*ASME Journal of Mechanical Design*, 103 (1981), 718.
- [5] Sasaki,S., *Differential Geometry(in Japanese)*, Kyolitsu Press, Tokyo, (1956).
- [6] De Lun Wang and Da Zhun Xiao, *Mechanism and Machine Theory*, 28(5) ,(1993), 671.
- [7] De Lun Wang,Jian Liu and Da Zhun Xiao, *Mechanism and Machine Theory*, 32,(1997), 419-432.
- [8] McCarthy,J. and Roth,B.,*ASME Journal of Mechanical Design*, 104 (1982), 39.
- [9] De Lun Wang,Jian Liu and Da Zhun Xiao, *Mechanism and Machine Theory*, Geometrical characteristics of some typical spatial constraints,
- [10] Hacisalihoglu,H.H., *Diferensiyel Geometri*, I.Ü. Fen-Ed.Fak. Yayinlari, Mat.No:2,Malatya,(1983)

ÖZGEÇMİŞ

26.12.1982 tarihinde Malatya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Malatya'da tamamladı. 2000 yılında İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. 2005-2008 yılları arası çeşitli dersanelerde matematik öğretmenliği yaptı. Eylül 2005 de İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına kayıt yaptırdı.