İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜZLEMSEL NORMAL KESİTLİ ALT MANİFOLDLAR

FEYZA ESRA ERDOĞAN (DENİZ)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA

2003

"Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne"

İş bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Ali İhsan SİVRİDAĞ ....

Üye: Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ ....

Üye: Yrd. Doç. Dr. Erol KILIÇ ....

....

Onay

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

..26../..09..2003

Doç. Dr. Ali ŞAHİN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DÜZLEMSEL NORMAL KESİTLİ ALT MANİFOLDLAR

Feyza Esra Erdoğan

İnönü Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

56+ v sayfa

2003

Danışman: Prof. Dr. Rıfat Güneş

Bu çalışma üç bölüm halinde düzenlenmiştir.Birinci bölüm daha sonraki bölümlerin iyi anlaşılabilmesi için temel kavramlara ayrılmıştır. Bu bölümde manifoldlara ilişkin bazı kavramlar ve yapı denklemleriyle bazı teoremler verilmiştir.

İkinci bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır.I.alt bölümde düzlemsel normal kesitli alt manifoldlar incelenmiştir.Ayrıca bir Öklidyen uzayın alt manifoldunun pointwise düzlemsel normal kesitlere sahip olması için gerekli şartlar verilmiştir.II.alt bölümde düzlemsel normal kesitli yüzeylerin bir sınıflandırılması yapılmıştır.III. alt bölümde ise bir kürenin düzlemsel normal kesitli alt manifoldları araştırılmıştır.

Üçünçü bölümde Geodezik normal kesitli Pseudo Öklidyen uzayın minimal yüzeyleri araştırılmıştır.

ABSTRACT

Master Thesis

SUBMANİFOLDS WITH PLANAR NORMAL SECTİONS
Feyza Esra Erdoğan

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

56 + v pages
2003
Supervisor: Prof. Dr. Rıfat Güneş

This study consists of three chapters. In the first chapter , fundamental notions are given for a better understanding of the other chepters.In this chapter, some notions about diferentiable manifolds , structure equations and same theorems are given.

Second chapter consists of three sections. In the first section, submanifolds with planar normal sections are investigated. And a necessary and sufficient condition is also given for a submanifold of E^m to , have pointwise planar normal sections. In the second section ,a classification of surfaces with planar normal sections is given. And finally in the third section, submanifolds with pointwise planar normal sections are investiagated in a sphere.

In the third chapter, minimal surfaces of pseudo Euclidean spaces with geodesic normal sections are studied.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan ; her adımda değerli bilgilerine başvurduğum çok değerli Hocam Sayın Prof. Dr. Rıfat Güneş'e ve araştırmalarım sırasında bana yardım eden , Prof. Dr. Ali İhsan Sivridağ Yrd.Doç. Dr. Bayram Şahin ,Yrd.Doç. Dr. Bayram Karadağ , Yrd.Doç. Dr. Erol Kılıç hocama ve değerli bölüm başkanı Prof. Dr. Sadık Keleş'e ve diğer hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Pointwise düzlemsel normal kesitli alt manifoldlar ilk kez 1980 lerde B. Y. Chen tarafından çalışılmıştır. Özellikle Chen [4] te E^m nin bir alt manifoldunun pointwise 2-düzlemsel normal kesite sahip olması için gerek ve yeter şartı elde etmiştir. Bu sonuç ve Chen in [5] te elde ettiği sonuçlar kullanılarak [5] Chen ve diğerleri E^m de pointwise 2-düzlemsel normal kesitli yüzeyleri sınıflandırdılar. Daha doğrusu ,onlar böyle bir yüzeyin E^m nin E^3 alt uzayında lokal olarak kalmak zorunda olduğunu gösterdiler.Daha sonra Shi-jie Li kürenin ikinci standart immersiyonu yardımıyla kürede pointwise 2- veya 3-düzlemsel normal kesitli alt manifoldları inceledi. Young Ho Kim ise Geodezik normal kesitli Pseudo Öklidyen uzayın minimal yüzeylerini inceledi. 5-boyutlu Geodezik normal kesitli Pseudo Öklidyen uzayın minimal yüzeylerinin ya tamamen Geodezik yada düz quadric olduğunu gösterdi.

Biz bu çalışmada yukarıda verilen çalışmaları ve bu konudaki araştırmaları inceleyerek bir derleme yaptık. Amacımız bu konuda çalışmak isteyen araştırmacılara, bu konular ile ilgili temel kavramları bir araya getirerek yardımcı olmak ve daha sonraki çalışmalarımıza temel teşkil etmektir.

I.BÖLÜM

I.I TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

II. ve III. Bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için I. Bölüm Diferensiyel Geometrinin temel kavramlarına ayrılmıştır.

TANIM I.I.1**(Homeomorfizma):** X ve Y birer topolojik uzay olsunlar.

$$f{:}X \to Y$$

dönüşümü için eğer f ve f^{-1} sürekli ise f ye X' den Y' ye bir homeomorfizma denir[1].

TANIM I.I.2**(Hausdorff Uzay):** X bir topolojik uzay olsun. X in P ve Q gibi farklı noktaları için, X de , sırası ile P ve Q noktalarını içine alan A_P ve A_Q açık alt kümeleri $A_P \cap A_Q = \phi$ olacak biçimde bulunabilirse X topolojik uzayına Hausdorff uzayı denir [1].

TANIM I.I.3**(Bağlantılılık):** (X,τ) topolojik uzayı boş kümeden farklı, ayrık, açık iki kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa (X,τ) topolojik uzayına bağlantılıdır, aksi halde bağlantısızdır denir [1].

TANIM I.I.4**(Topolojik Manifold):** M bir topolojik uzay olsun.

1. M bir Hausdorff uzaydır.
2. M nin herbir açık alt kümesi E^n ye veya E^n nin bir açık alt kümesine homeomorf olmalıdır.
3. M sayılabilir çoklukta açık kümeyle örtülmelidir.

Önermeleri doğru ise M ye bir topolojik manifold denir[1].

TANIM I.I.5**(Harita):** M bir topolojik n-manifold ve U da E^n in bir açık alt kümesi olsun. O zaman topolojik n-manifold tanımı gereğince U bir Ψ homeomorfizmi ile M nin bir W açık alt kümesine eşlenebilir

$$\psi : U \subset E^n \to W \subset M$$

(Ψ, W) ikilisine M de bir koordinat komşuluğu veya harita denir. $u \in U$ için $\Psi(u) \in M$ dir ve

$$\Psi(u)=(x_1(u),\ldots,x_n(u))\ ,\ x_i(u) \in IR \quad 1 \le i \le n$$

dir. Burada $x_i(u)$ reel sayısına $\Psi(u) \in M$ noktasının i-yinci koordinatı ve

$$u_i : U \to IR$$

fonksiyonuna da U nun i-yinci Öklid koordinat fonksiyonu denir.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, shift left, "\psi"] \arrow[d, "u_i"'] & W \subset M \arrow[l, shift left, "\psi^{-1}"] \arrow[dl, "u_i \circ \psi^{-1} = x_i"] \\ IR & \end{tikzcd}$$

$$x_i = u_i \circ \psi^{-1} : W \to IR$$

fonksiyonuna W nin i-yinci Öklid koordinat fonksiyonu denir[1].

TANIM I.I.6(**Atlas**): M bir n- boyutlu topolojik manifold ve M nin açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun . U_α açık kümelerinin α indislerinin kümesi A olmak üzere $\{U_\alpha\}$ örtüsü için $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ yazalım. E^n de U_α ya homeomorf olan bir açık küme E_α ve

$$\Psi_\alpha : U_\alpha \to E_\alpha$$

bir homeomorfizma olsun. Koordinat komşuluklarının $\{(U_\alpha , \Psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ koleksiyonuna bir atlas (veya koordinat komşuluğu sistemi) denir [1].

TANIM I.I.7(**Diferensiyellenebilir yapı**): M bir n-boyutlu manifold ve $S=\{(U_\alpha , \Psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, M nin bir atlası olsun. Eğer S aşağıdaki özelliğe sahipse S ye C^r , $r \geq 1$ sınıfındandır denir. $p \in M$ noktasının açık komşulukları U_α ve $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall \alpha, \beta \in A$ için

$$\phi_{\alpha\beta} = \Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1} : \Psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset IR^n \to \Psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset IR^n$$

$$\phi_{\beta\alpha} = \Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1} : \Psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset IR^n \to \Psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset IR^n$$

fonksiyonları r. dereceden diferensiyellenebilir ve sürekli ise. S atlası M üzerinde C^r sınıfından olduğu zaman S ye M üzerinde C^r sınıfından diferensiyellenebilir yapı denir. Buna göre S atlasının C^r sınıfından olması $(\phi_{\alpha\beta})_i , (\phi_{\beta\alpha})_i$, $1 \leq i \leq n$ fonksiyonlarının C^r sınıfından olması ile tanımlıdır[1].

TANIM I.I.8(**Diferensiyellenebilir Manifold):** M , n- boyutlu bir topolojik manifold olsun. Eğer M üzerinde , C^r sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye C^r sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir[1].

TANIM I.I.9(**Tanjant vektör ve tanjant uzay):** V vektör uzayı ile birleşen bir Afin uzay olsun. $P \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için $(P, \vec{v})$ sıralı ikilisine A afin uzayının P noktasındaki tanjant vektörü denir. A afin uzayının , $P \in A$ noktasındaki tanjant vektörlerinin kümesini $T_A(p)$ ile göstereceğiz.

$T_A(p)$ de toplama ve skalerle çarpma işlemleri , sırası ile

$$\begin{aligned} \oplus \; : T_A(P) \times T_A(P) &\to T_A(P) \\ ((P,\vec{v}),(P,\vec{u})) &\to (P,\vec{v}) \oplus (P,\vec{u}) = (P, \vec{v}+\vec{u}) \end{aligned}$$

veya

$$(\vec{v}_p, \vec{u}_p) \to \vec{v}_p \oplus \vec{u}_p = (\vec{v}+\vec{u})_p$$

ve

$$\begin{aligned} \otimes : \mathrm{IR} \times T_A(P) &\to T_A(P) \\ (\lambda, (P,\vec{v})) &\to \lambda \otimes (P,\vec{v}) = (P, \lambda\vec{v}) \end{aligned}$$

veya

$$(\lambda, \vec{v}_p) \to \lambda \otimes \vec{v}_p = (\lambda\vec{v})_p$$

biçiminde tanımlayalım. $\{T_A(P), \oplus, IR, +, ., \otimes\}$nın bir vektör uzayı olduğu gösterilebilir bu vektör uzayına A nın $P \in A$ noktasındaki tanjant uzayı denir ve kısaca $T_A(P)$ ile gösterilir[1].

TANIM I.I.10(**Vektör alanı):** M bir manifold ve M de bir komşuluk V olsun. Bir $P \in V$ noktasındaki tanjant uzayı $T_V\,(P)$ olsun. V de bütün P noktaları üzerindeki tanjant uzayların birleşimi $\bigcup\limits_{p \in V} T_V\,(P)$ ve

$$\pi : \bigcup_{p \in V} T_V\,(p) \to V$$

dönüşümü $\forall\, t_p \in T_V\,(p)$ tanjant vektörü için

$$\pi(\,t_p) = p$$

ile tanımlansın. Bu durumda $V \subseteq M$ üzerinde vektör alanı operatörü

$$X : V \to \bigcup_{p \in V} T_V(p)$$

biçiminde bir fonksiyondur , öyle ki

$$\pi o X = I : V \to V$$

dönüşümü birim dönüşümüdür. M üzerinde vektör alanlarının kümesini $\chi(M)$ ile göstereceğiz [1].

TANIM I.I.11**(Vektör alanı uzayı):**Yukarıdaki tanımda M manifoldu yerine E^n n- boyutlu Öklid uzayını alırsak E^n de bir X vektör alanını , $\forall p \in E^n$ noktasına bir X_p tanjant vektörünü karşılık getiren fonksiyon olarak düşünebiliriz [1].

$\forall p \in E^n$ noktasında X ve Y nin değerleri olan $X(P)=X_p$ ve $Y(P)=Y_p$ aynı bir $T_E{}^n(P)$ tanjant uzayı içinde olduklarından bunları toplayabiliriz. E^n üzerindeki vektör alanlarını kümesini $\chi(E^n)$ ile gösterirsek

$$+ : \chi(E^n) \times \chi(E^n) \to \chi(E^n)$$
$$(X,Y) \to X+Y$$

$\forall P \in E^n$ için

$$(X+Y)_P = X(P) + Y(P) = X_P + Y_P$$

şeklinde tanımlandığından $(\chi(E^n),+)$ bir abel grubudur.

$$\otimes : IR \times \chi(E^n) \to \chi(E^n)$$
$$(\lambda, X) \to \lambda X$$

$\forall p \in E^n$ noktası için $(\lambda X)(p) = \lambda X(p) = \lambda X_p$ biçiminde tanımlanır. Eğer bir

$$f : E^n \to IR$$

fonksiyonu ile $X \in \chi(E^n)$ vektör alanlarının çarpımı da $\forall p \in E^n$ noktası için

$$(fX)(p) = f(p)Xp$$

şeklinde tanımlanırsa $\{\chi(E^n), \oplus, IR, +, ., \otimes\}$ vektör uzayına E^n üzerindeki vektör alanlarının uzayı denir ve kısaca $\chi(E^n)$ ile gösterilir [1].

TANIM I.I.12 **(Türev) :** $f: E^n \to IR$ fonksiyonu verilsin. Eğer bir $a \in E^n$ noktası için

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - \lambda(h) \|}{\| h \|} = 0, \quad h \in E^n$$

olacak şekilde bir

$$\lambda : IR^n \xrightarrow{lineer} IR$$

fonksiyonu bulunabiliyorsa f'ye $a \in E^n$ noktasında türevlenebilir denir ve λ lineer fonksiyonuna da $a \in E^n$ noktasında f nin türevi adı verilir [1].

TANIM I.I.13**(Yöne göre türev):** $f: E^n \to IR$ diferensiyellenebilir ve $\vec{V}_p \in T_{E^n}(P)$ olsun. Bu durumda $P, Q \in E^n$ için $\vec{V}_p = \overrightarrow{PQ}$ olmak üzere

$$\vec{V}_p[f] = \frac{d}{dt}(f(P_1 + t(Q_1 - P_1), \ldots, P_n + t(Q_n - P_n)))|_{t=0}$$

reel sayısına f nin $\vec{V}_p$ ye göre türevi denir [1].

TANIM I.I.14(**Vektör alanı yönündeki türev):** $X \in \chi(E^n), f \in C(E^n, IR)$ olsun. $\forall p \in E^n$ için

$$(X(f))(P) = X_p[f]$$

olmak üzere $X[f] \in C(E^n, IR)$ fonksiyonuna f nin X vektör alanı yönündeki türevi denir [1].

TANIM I.I.15**(Diferensiyellenebilir eğri):** M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M manifoldu üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri ; IR ' nin [a,b] aralığından M ye diferensiyellenebilir bir fonksiyon olarak tanımlanır [1].

TANIM I.I.16. **(Kovaryant türev):** I, IR de bir açık aralık ve $\alpha : I \to E^n$ bir diferensiyellenebilir eğri olsun. Bir $t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasında

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt}\,|_t = (\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \ldots, \frac{d\alpha_n}{dt}(t))$$

vektörüne eğrinin hız vektörü denir ve $(\alpha(t), \alpha'(t))$ ikilisi bir tanjant vektörüdür. Bu kısaca $\alpha'(t)$ ile gösterilir.

$$\alpha'(t)[f] = \frac{d(f(\alpha))}{dt}\Big|_t = \frac{d}{dt}(fo\alpha) = D_{\alpha'(t)}f$$

olarak yazılır ve $D_{\alpha'(t)}f$ ye $f: E^n \to IR$ fonksiyonunun $\alpha: I \to E^n$ eğrisi boyunca kovaryant türevi denir [1].

TANIM I.I.17(**Kovaryant türev operatörü):** M bir C^{∞} manifold olsun . M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere ;

$$\begin{aligned} \nabla: \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X,Y) &\to \nabla(X,Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü için , $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$, $\forall f, g \in C^{\infty}(M, IR)$

$$1)\ \nabla_{fX+gY} Z = f\, \nabla_X Z + g\, \nabla_Y Z$$

$$2)\ \nabla_X (fY) = f\, \nabla_X Y + (Xf) Y$$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya M manifoldu üstünde bir afin konneksiyon ve ∇_X e de X e göre kovaryant türev operatörü denir [1].

TANIM I.I.18(**Lie operatörü):** V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$[\,,\,]: V \times V \to V$$

dönüşümü de ;

1) 2 – lineer ,
2) Alterne ($\forall X, Y \in V$ için $[X,Y] = -[Y,X]$),
3) $\forall X, Y, Z \in V$ için $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

olarak verilsin. $[\,,\,]$ dönüşümüne , V üzerinde bir Lie operatörü denir [1].

TANIM I.I.19(**Kotanjant vektör):** E^n Öklidyen uzayının $p \in E^n$ noktasındaki tanjant uzayı $T_{E^n}(p)$ olmak üzere $T_{E^n}(p)$ nin cebirsel duali $T^*_{E^n}(p)$ ile gösterilir ve E^n in $p \in E^n$ noktasındaki kotanjant uzayı adını alır. $T^*_{E^n}(p)$ nin her bir elemanına , $p \in E^n$ noktasında kotanjant vektör adı verilir.

$$T^*_{E^n}(p) = \left\{ \alpha^* \,\middle|\, \alpha^* : T_{E^n}(p) \xrightarrow[\text{lineer}]{} IR \right\}$$

dir [1].

TANIM I.I.20(**Kovaryant tensör**): $V_1 x V_2 x ... x V_r$ den IR ye bütün r-lineer fonksiyonların kümesini

$$L(V_1 ... V_r; IR) = \{f \mid f : V_1 \times V_2 \times ... \times V_r \xrightarrow{r-lineer} IR\}$$

ile gösterelim . Bu kümede toplama ve skalerle çarpma işlemlerini sırasıyla

$\forall (u_1 ... u_r) \in V_1 x V_2 x ... x V_r$ için,

$$(f_1 + f_2)(u_1, ..., u_r) = f_1(u_1, ..., u_r) + f_2(u_1, ..., u_r)$$

ve $\lambda \in IR$ için

$$(\lambda f)(u_1, ..., u_r) = \lambda f(u_1, ..., u_r)$$

şeklinde tanımlanırsa bu ikili işleme göre $L(V_1 ... V_r; IR)$, IR üzerinde vektör uzayı olur . Bu vektör uzayına

$$V_1^*, V_2^*, ..., V_r^*$$

dual vektör uzaylarının tensörel çarpımı denir ve

$$L(V_1, ..., V_r) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes ... \otimes V_r^*$$

İle gösterilir. $V_1^* \otimes V_2^* \otimes, ..., \otimes V_r^*$ tensör uzayının her bir elemanına r. dereceden bir tensör denir.

$$V_1 = V_2 = \cdots = V_r = V$$

ise $V^* \otimes V^* \otimes ... \otimes V^*$ uzayına kovaryant tensör uzayı ve bu uzayın her bir elemanına da r. mertebeden bir kovaryant tensör denir. $T^r(V)$ veya $\otimes^r V^*$ ile gösterilir [1].

TANIM I.I.21(**Riemann metriği ve Riemann manifold**): Bir topolojik n manifold M ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı $T_M(p)$ olsun.

$$g : M \to L(T_M(p) \times T_M(p); IR)$$
$$p \to g(p) = g_p : T_M(p) \times T_M(p) \to IR$$

şeklinde, pozitif tanımlı , simetrik , diferansiyellenebilir bir bilineer (2. mertebeden kovaryat tensör) form tanımlı ise g'ye Riemann metriği , metrik tensör veya diferansiyellenebilir metrik, (M,g) ikilisine de Riemann Manifoldu denir[1].

TANIM I.I.22. (**Semi Riemann Manifoldu**): M bir C^∞ manifold olsun. M üstündeki vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası da $C^\infty(M,IR)$ olmak üzere

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M,IR)$$

fonksiyonu

1) 2- lineer
2) simetrik
3) $\forall X \in \chi(M)$ için $g(X,Y)=0 \Rightarrow Y=0 \in \chi(M)$

özellikleri sağlanıyorsa , M ' ye Semi-Riemann manifoldu denir [1].

TANIM I.I.23(**Pseudo Metrik**): $X \neq \emptyset$ ve $d : X \times X \to IR$ ye bir metrik tensör olsun . Eğer,

$p_1)$ $d(x,y) \geq 0$, $d(x,x)=0$,
$p_2)$ $d(x,y) = d(y,x)$,
$p_3)$ $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$,

özellikleri sağlanıyor ise d ye X üzerinde bir Pseudo metrik tensör denir. Bir Pseudo metrik tensörü için , $d(x,y)=0$ olması $x=y$ olmasını gerektirmez , yani $d(x,y)=0$ olduğu halde $x \neq y$ olabilir [1].

TANIMI.I.24(**Riemann anlamında kovaryant türev operatörü**): M bir Semi- Riemann manifoldu ve ∇, M üstünde bir afin konneksiyon olsun. Eğer,

1) ∇, C^∞ sınıfındandır,

2) M nin bir A bölgesi üzerinde , C^∞ olan $\forall X,Y \in \chi\ (M)$ için

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$$

3) M bir A bölgesi üzerinde C^∞ olan $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ ve $\forall p \in A$ için

$$X_p g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z)|p + g(Y, \nabla_X Z)|p$$

özellikleri sağlanıyorsa , ∇ konneksiyonuna , M üstünde bir Riemann konneksiyonu ve ∇_X 'e de X ' e göre Riemann anlamında kovaryant türev operatörü denir [1].

TANIM I.I.25(**İmmersiyon ve imbedding**): M ve $\overline{M}$ birer C^∞ manifold ve

$$f: M \to \overline{M}$$

bir C^∞ fonksiyon olsun. Eğer f nin f_* Jakobian matrisi $\forall p \in M$ noktsında regüler ise f ye M den $\overline{M}$ içine bir immersiyon denir. Bir başka ifadeyle rank f = boy M ise f bir immersiyondur. Birebir immersiyona da imbedding denir [1].

TANIM I.I.26(**Hiperyüzey**): E^n n- boyutlu Öklid uzayında *(n-1)*- boyutlu bir yüzey veya *(n-1)* yüzey diye E^n deki boş olmayan bir M kümesine denir , öyle ki U , E^n de açık alt küme olmak üzere

$$M = \left\{ x \in U \subset E^n \;\middle|\; \begin{array}{l} f : U \xrightarrow{difbilir} IR, \\ \quad x \longrightarrow f(x) = c \end{array} \quad , c \in IR \right\}$$

$\nabla f|p \neq 0, \forall p \in M$ biçiminde tanımlanır. E^2 de bir 1-yüzeye düzlemsel eğri denir. E^3de bir 2 yüzeye sadece yüzey denir. E^n de *(n-1)*-yüzey $n \rangle 3$ olması halinde bir hiperyüzey olarak adlandırılır[1].

TANIM I.I.27(**Gauss dönüşümü**): E^n de yönlendirilmiş bir hiperyüzey M olsun . M nin diferensiyellenebilir birim normal vektör alanı N olsun.

$$\begin{array}{l} \eta : M \rightarrow S^{n-1} \subset E^n \\ \qquad P \rightarrow \eta(P) = \vec{N}(P) = (P, \vec{N}_P) = \sum_{i=1}^{n} a_i(P) \frac{\partial}{\partial x_i}|_P \end{array}$$

dönüşümü $\|\vec{N}_P\| = 1$ olduğundan M yi E^n deki S^{n-1} birim hiperküresine resmeder. Bu şekilde tanımlanmış olan diferensiyellenebilir η dönüşümüne Gauss dönüşümü denir[1].

TANIM I.I.28 (**Weingarten dönüşümü**): E^n nin bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı , N ile verilsin. E^n de Riemann konneksiyonu ∇ ve olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = -\nabla_X N$$

şeklinde tanımlı , S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya M nin Weingarten dönüşümü denir [1].

TANIM I.I.29 (**q-yuncu Temel Form**): E^n nin bir M hiper yüzeyi üzerinde q – yuncu temel form diye $1 \leq q \leq n$ olmak üzere

$$\begin{array}{l} I^q : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, IR) \\ \qquad (X,Y) \rightarrow I^q(X,Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle \end{array}$$

şeklinde tanımlı I^q fonksiyonuna denir [1].

TANIMI.I.30 (**Gauss anlamında Kovaryant türev**): E^n de bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S olsun . E^n in Riemann konneksiyonu ∇ ile gösterilmek üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle S(X), Y \rangle N$$

şeklinde tanımlı $\overline{\nabla}$ operatörüne M üzerinde Gauss anlamında kovaryant türev operatörü denir. Yukarıda verilen denklemede Gauss denklemi denir [1].

TANIM I.I.31(**Eğrilik Tensörü**): $\chi(M)$, Öklidyen uzayındaki vektör alanlarının kümesi olmak üzere

$$R: \chi(E^n)\times\chi(E^n)\times\chi(E^n)\to\chi(E^n)$$
$$(X,Y,Z)\to R(X,Y,Z)=\nabla_X(\nabla_Y Z)-\nabla_Y(\nabla_X Z)-\nabla_{[X,Y]}Z$$

olarak tanımlanan R fonksiyonu $\chi(E^n)$ üzerinde 3. mertebeden bir kovaryant tensör alanıdır. Bu kovaryant tensör alanına M in bir eğrilik tensör alanı denir[1].

TANIM I.I.32(**Codazzi-Mainardi denklemi**): E^n nin (n-1)- alt manifoldu üzerindeki kovaryant türev $\overline{\nabla}$ olmak üzere $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$\overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_Y Z)-\overline{\nabla}_Y(\overline{\nabla}_X Z)-\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z=\langle S(Y),Z\rangle S(X)-\langle S(X),Z\rangle S(Y)$$

ifadesine Gauss eğrilik denklemi denir [1].

$$\overline{\nabla}_Y(S(X))-\overline{\nabla}_X(S(Y))+S([X,Y])=0$$

denklemine de Codazzi – Mainardi denklemi denir [1].

TANIM I.I.33(**E^n de hiperyüzey**): N bir $C^\infty,(n-1)$ manifold olsun.

$$f:N\to E^n$$

fonksiyonu bir immersiyon ise $f(N)=M$ manifolduna E^n nin bir hiperyüzeyi denir[1].

TANIM I.I.34 (**Geodezik**): E^{n+1} de bir M hiperyüzeyi üzerinde geodezik denen eğri öyle bir parametrik eğridir ki bu eğrinin her noktasındaki ivme vektörü M ye ortagonaldir. Yani eğri

$$\alpha:I\to M$$

ise $\ddot{\alpha}(t)\in T_M^{\perp}(\alpha(t))$, $\forall t\in I$, dır[1].

TEOREM I.I.35: Geodeziklerin her noktasındaki hız vektörlerinin uzunlukları sabittir.

İSPAT:
$$\alpha:I\to M$$
$$t\to\alpha(t)$$

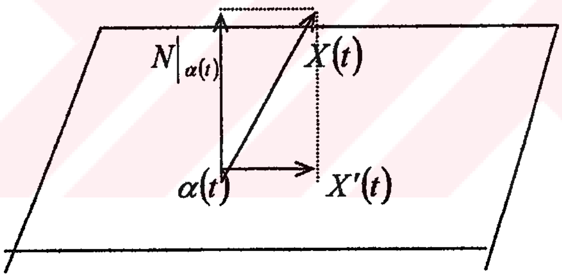
bir geodezik olsun. O zaman, $\ddot{\alpha}(t) \in T_M^{\perp}(\alpha(t)), \forall t$ olacaktır.

$$\frac{d}{dt}\|\dot{\alpha}(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle = 2\langle \dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t) \rangle = 0$$

dır. Çünkü $\dot{\alpha}(t) \in T_M(\alpha(t))$ olduğundan $\langle \dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t) \rangle = 0$ olur[1].

I.I.36 LEVİ –CİVİTA ANLAMINDA PARALELLİK

M bir hiperyüzey ve $\alpha : I \to M$ bir parametrik eğri olsun. Bir X vektör alanına α boyunca M'ye teğettir denir , eğer X vektör alanı α eğrisine kısıtlanmış ve $\forall t \in I$ için $X(t) \in T_M(\alpha(t))$ ise X in $\frac{dX}{dt}$ türevini $\dot{X}(t)$ ile gösterelim. $\dot{X}$ genel olarak M ye teğet değildir. Fakat $\dot{X}(t)$ nin $T_M(\alpha(t))$ üzerinde ortagonal izdüşümü alınmak suretiyle $\forall t \in I$ için yeni bir vektör alanı elde ederiz. Önce diferensiyel almak ve sonra M nin tanjant uzayına izdüşürmekten ibaret olan bu yöntem diferensiyel ile aynı özelliğe sahip bir operatör tanımlar.



ŞEKİL I.I.2

Sadece bir fark vardır; o da M ye teğet olan vektör alanlarının diferensiyelleri yine M ye teğet kalan vektör alanları verir. Bu yeni operasyona M üzerinde kovaryant diferensiyel denir.

E^{n+1} de bir hiperyüzey M olsun. M üzerinde parametrik eğri $\alpha : I \to M$ ve α boyunca M ye teğet ve diferensiyellenebilen bir vektör alanı X olsun. X in kovaryant türevi X' , α boyunca M ye teğet olan bir vektör alanıdır ve

$$X'(t) = \dot{X}(t) - \langle \dot{X}(t), N(\alpha(t)) \rangle N(\alpha(t))$$

olarak tanımlanır , burada N ile M nin birim normal vektör alanı gösterilmektedir. $X'(t)$, N nin seçilişinden bağımsızdır[1]

TEOREM I.I.37: $\alpha : I \to M$

Parametrik eğrisinin M üzerinde geodezik olması için gerek ve yeter şart α nın $(\dot{\alpha})'$ kovaryant ivmesinin α

İSPAT: $(\dot{\alpha})' = \ddot{\alpha} - \langle \ddot{\alpha}, N \rangle N$

olduğunu tanımdan yazabiliriz.

$(\Rightarrow)$ α eğrisi bir geodezik ise $\ddot{\alpha} \in T_M^{\perp}$ dir. Buna göre $(\dot{\alpha})'$ teğetsel bileşen olduğundan $(\dot{\alpha})' = 0$ olmalıdır.

$(\Leftarrow)$ $(\dot{\alpha})' = 0$ ise $\ddot{\alpha} \in T_M^{\perp}$ olduğunu göstereceğiz.

$$\ddot{\alpha} = \langle \ddot{\alpha}, N \rangle N + (\dot{\alpha})'$$

eşitliğinden $(\dot{\alpha})' = 0$ ve dolayısıyla $\ddot{\alpha} = \lambda N$ veya $\ddot{\alpha} \in T_M^{\perp}$ dir.

TANIM I.I.38(**Tanjant vektörlerinin Öklid anlamda paralelliği**): E^{n+1} de

$$\vec{V}_p = \left(P, \vec{V}_p\right) \in T_{E^{n+1}}(P) \text{ ve } \vec{W}_Q = \left(Q, \vec{W}\right) \in T_{E^{n+1}}(Q)$$

tanjant vektörleri için $\vec{V} = \vec{W}$ ise bu iki tanjant vektöre Öklid anlamda paraleldir denir[1].

TANIM I.I.39(**Vektör Alanlarının Öklid anlamda Paralelliği**): Bir $\alpha : I \to E^{n+1}$ parametrik eğrisi boyunca bir X vektör alanı için $X(t_1) = X(t_2)$, $\forall t_1, t_2 \in I$ ise X vektör alanına Öklid anlamında paraleldir denir. Burada $(\alpha(t), X(t))$,$\alpha(t) \in \alpha$ noktasındaki bir tanjant vektördür. O halde X vektör alanı için $\dot{X} = \dfrac{dX}{dt} = 0$ ise X vektör alanına α eğrisi boyunca Öklid anlamında paraleldir denir[1].

TANIM I.I.40(**X vektör alanının Levi-Civita anlamında paralelliği**): E^{n+1} de bir hiperyüzey M ve M üzerinde bir parametrik eğri $\alpha : I \to M$ olsun. α eğrisi boyunca M ye teğet olan bir X diferensiyellenebilir vektör alanı için $X' = 0$ ise bu X vektör alanına Levi-Civita anlamında paraleldir denir. Eğer α boyunca X bir sabit vektör vektör alanı ise , M den bakıldığında, X vektör alanı α boyunca paraleldir [1].

TEOREM I.I.41:Levi-Civita anlamında paralelizmin aşağıdaki özellikleri vardır.

(i) Eğer α boyunca X vektör alanı Levi-Civita anlamında paralel ise X in uzunluğu sabittir.

(ii) α boyunca X ve Y iki Levi-Civita anlamında paralel vektör alanı ise α boyunca $\langle X,Y\rangle$ sabittir.

(iii) α boyunca X ve Y iki Levi-Civita anlamında paralel ise X ve Y arasındaki açı α boyunca sabittir.

(iv) α boyunca X ve Y iki Levi-Civita anlamında paralel ise $X+Y$ ve $\forall c \in IR$ için cX de α boyunca Levi-Civita anlamında paraleldir.

(v) M hiperyüzeyi üzerinde bir parametrik α eğrisi boyunca hız vektör alanı Levi-Civita anlamında paraleldir $\Leftrightarrow$ α bir M hiperyüzeyi üzerinde geodeziktir [1].

İSPAT:

(i)
$$\dot{X} = X' + \langle \dot{X}, N\rangle N$$

olduğundan

$$\dot{X} = 0 + \langle \dot{X}, N\rangle N$$

dan

$$\langle \dot{X}, X\rangle = 0$$

olur.

(ii) $\langle X,Y\rangle' = \langle X',Y\rangle + \langle X,Y'\rangle = 0$ dır.

(iii) $\theta = Cos^{-1}\dfrac{\langle X,Y\rangle}{\|X\|.\|Y\|}$ de $\langle X,Y\rangle, \|X\|$ ve $\|Y\|$den her biri α boyunca sabittir.

(iv)
$$\begin{aligned}(X+Y)' &= X'+Y' \\ &= 0+0 \\ &= 0\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(CX)' &= CX' \\ &= C0 \\ &= 0\end{aligned}$$

(v) $\Rightarrow$: $\dot{\alpha}$ hız vektör alanı olsun.

$$\ddot{\alpha} = (\dot{\alpha})' + \langle \ddot{\alpha}, N\rangle N$$

den $(\dot{\alpha})' = 0$ olması

$$\ddot{\alpha} = \langle \ddot{\alpha}, N\rangle N$$

yani $\ddot{\alpha} \in T_M^{\perp}$ olmasını gerektirir. Şu halde $\alpha \subset M$ eğrisi bir geodeziktir.

$(\Leftarrow): \ddot{\alpha} \in T_M^{\perp}$ dir.

$$\ddot{\alpha} = (\dot{\alpha})' + \langle \ddot{\alpha}, N \rangle N$$

den $(\dot{\alpha})' = 0$ olmak zorundadır. Buda $\dot{\alpha}$ nın Levi-Civita anlamında paralel olması demektir[1].

TANİM I.I.42 **(Total geodezik alt manifold):** $\overline{M}$, m boyutlu bir manifold ve M de $\overline{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. h ikinci temel form , $X, Y \in \chi(M)$, $\xi \in \chi(M)^{\perp}$ olmak üzere

$$\nabla_X \xi = 0$$

ise ξ ye paralel ve

$$\nabla_X h = 0$$

ise ikinci temel form paraleldir denir. Eğer $h=0$ ise M ye $\overline{M}$ nin total geodezik alt manifoldu denir[1].

TANIM I.I.43 **(Minimal alt manifold):** $\overline{M}$,m boyutlu bir manifold ve M de $\overline{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. $T_M(p)$ nin bir bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olmak üzere

$$H_p = \frac{1}{n} iz(h_p) = \sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i)$$

vektörüne $p \in M$ de M nin ortalama eğrilik vektörü denir. Eğer

$$H = 0$$

ise M ye minimal alt manifold denir[1].

I.II FRENET VEKTÖR ALANLARI

Bu kesimde $\alpha : I \to IR^3$ eğrisini IR^3 uzayında birim hızlı eğri olarak göz önüne alacağız. $s \in I$ için $\alpha_*\left(\frac{d}{dx}(s)\right)$ vektörünü $\alpha'(s)$ ile gösterelim.

TANIM I.II.1(**Birim teğet vektör ve birim teğet vektör alanı):** E^3 uzayında $\alpha : I \to IR^3$ eğrisi için

$$\alpha'(s) = T(s)$$

eşitliği ile belli $T(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir. T, I aralığının her bir s noktasına, $\alpha(s)$ noktasındaki $T(s)$ teğet vektörünü karşılık getiren bir fonksiyondur. Buna göre T, α eğrisi üstünde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına α eğrisinin birim teğet vektör alanı denir[2].

TANIM I.II.2(**Eğrilik fonksiyonu**): IR^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \to IR^3$ eğrisi için

$$\kappa : I \to IR \,,\; \kappa(s) = \|T'(s)\|$$

fonksiyonuna, α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir[2].

TANIM I.II.3(**Asli normal**): IR^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \to IR^3$ eğrisi için,

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$$

eşitliği ile belirli $N(s)$ vektörüne, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normali (Birincil dik vektörü) denir[2].

TANIM I.II.4(**Binormal**): IR^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \to IR^3$ eğrisi için

$$B = T \times N$$

eşitliği ile tanımlı B vektör alanına, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki binormali (ikincil dik vektörü) denir[2].

TANIM I.II.5(**Frenet vektörleri, Frenet çatıları, Frenet vektör alanları**): $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ vektörlerine, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesine, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir. T, N, B Vektör alanlarına da, eğri üstünde Frenet vektör alanları denir[2].

TANIM I.II.6 (**Burulma fonksiyonu**): $\alpha : I \to IR^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere,

$$\tau : I \to IR \quad , \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$$

fonksiyonuna, α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir[2].

I.III BAĞLANTI FORMLARI VE YAPI DENKLEMLERİ

Frenet formülleri bir eğrinin Frenet vektör alanlarının , eğri boyunca türevlerini , Frenet vektör alanlarına bağlı olarak verir. Bu eşitliklerdeki katsayılar , eğrinin eğrilik ve burulmasıdır. α eğrisi üstündeki bir X vektör alanının eğri boyunca $\alpha(t)$ noktasındaki türevi olan $X'(t)$ vektörü , X vektör alanının $\alpha'(t)$ vektörü yönündeki kovaryant türevine eşittir. Kısaca , $X'(t) = D_{\alpha'(t)}X$ dir. Buna göre birim hızlı bir eğri için Frenet formülleri

$$\begin{aligned} D_{\alpha'(t)}T &= 0T(t) + \kappa(t)N(t) + 0B(t) \\ D_{\alpha'(t)}N &= -\kappa(t)T(t) + 0N(t) + \tau(t)B(t) \\ D_{\alpha'(t)}B &= 0T(t) - \tau(t)N(t) + 0B(t) \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi ,bu formüllerden yola çıkarak , IR^3uzayındaki bir $\{E_1, E_2, E_3\}$ çatı alanın elemanları olan E_i vektör alanlarının bir v_p teğet vektörü yönündeki kovaryant türevlerini bu çatı alanına bağlı olarak elde edeceğiz. $\{E_1, E_2, E_3\}$ nin çatı alanı olması demek , IR^3uzayının her bir p noktasında , $\{E_1(p), E_2(p), E_3(p)\}$ kümesinin $T_p(IR^3)$ teğet uzayının orto normal bir tabanı olması demektir. $\{E_1, E_2, E_3\}$ çatı alanı her p noktasında , $T_p(IR^3)$ uzayının bir tabanını verir. $\{E_1(p), E_2(p), E_3(p)\}$ tabanının dualini $\{\theta_1(p), \theta_2(p), \theta_3(p)\}$ ile gösterelim. $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ fonksiyonlarını , $\{E_1, E_2, E_3\}$çatı alanının dual 1-formlarıdır.

$v_p \in T_p(IR^3)$olsun. $\omega_{ij}(v_p) \in IR$ olmak üzere

$$D_{v_p}E_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}(v_p)E_j(p)$$

biçimindedir.Buradan

$$\omega_{ij}(v_p) = \langle D_{v_p}E_i, E_j(p) \rangle$$

dir.

$$(\omega_{ij})_p : T_p(IR^3) \to IR , \quad (\omega_{ij})_p(v_p) = \omega_{ij}(p)$$

dönüşümü lineerdir. Öyleyse ω_{ij}, IR^3 uzayının her bir p noktasına , p noktasındaki teğet uzaydan IR ye giden lineer bir dönüşüm karşılık getiren bir fonksiyondur. $T_p(IR^3)$ uzayının duali $T_p^*(IR^3)$ ile gösterilsin. Buna göre $(\omega_{ij})_p \in T_p^*(IR^3)$ olur[2].

TEOREM I.III.1: $\omega_{ji} = -\omega_{ij}$ dir.

İSPAT: $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$ olduğundan, her $v_p \in T_p(IR^3)$ için

$$v_p \langle E_i, E_j \rangle = 0$$

dır.

$$v_p \langle E_i, E_j \rangle = \langle D_{v_p} E_i, E_j(p) \rangle + \langle E_i(p), D_{v_p} E_j \rangle$$

olduğundan

$$\langle D_{v_p} E_i, E_j(p) \rangle = -\langle E_i(p), D_{v_p} E_j \rangle = -\langle D_{v_p} E_j, E_i(p) \rangle$$

bulunur.Bu eşitlik, $\omega_{ji}(v_p) = -\omega_{ij}(v_p)$ olduğunu gösterir[2].

TANIM I.III.2(**Bağlantı Formları**): ω_{ij}, 1-formlarına, $\{E_1, E_2, E_3\}$çatı alanlarının bağlantı formları denir.

$$D_{v_p} E_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}(v_p) E_j(p)$$

eşitliklerine de $\{E_1, E_2, E_3\}$ çatı alanlarının bağlantı formülleri denir[2].

TEOREM I.III.3: $\{E_1, E_2, E_3\}$ çatı alanlarının bağlantı formlarının matrisi ω ise

$$\omega = dA.A^t$$

dır.

İSPAT: $v_p \in T_p(IR^3)$ olsun.

$$\begin{aligned} D_{v_p} E_i &= \sum_{k=1}^{3} D_{v_p}\left(a_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{3}\left(v_p[a_{ik}] \frac{\partial}{\partial x_k}(p) + a_{ik}(p) D_{v_p}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}(p)\right]\right) \\ &= \sum_{k=1}^{3} v_p[a_{ik}] \frac{\partial}{\partial x_k}(p) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\omega_{ij}(v_p)\langle D_{v_p}E_i, E_j(p)\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{3} v_p[a_{ik}]\frac{\partial}{\partial x_k}(p), \sum_{l=1}^{3} a_{jl}\frac{\partial}{\partial x_l}(p) \right\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{3} v_p[a_{ik}]a_{jk}(p) = \sum_{k=1}^{3}(da_{ik})(v_p)a_{jk}(p) = \left(\sum_{k=1}^{3} a_{jk}.da_{ik}\right)(v_p)$$

olur.Buradan

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{jk}.da_{ik}$$

elde edilir. Buradan $\omega = dA.A^t$ dir[2].

I.IV. YAPI DENKLEMLERİ

$\{E_1, E_2, E_3\}$, IR^3 uzayında bir çatı alanı olsun. $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ dual çatı alanı , her p noktasında , $T_p^*(IR^3)$ kotanjant uzayının bir tabanını verdiğinden , IR^3 üstündeki her θ 1-formu,

$$\theta = \sum_{i=1}^{3} f_i\theta_i$$

biçiminde tek olarak yazılabilir.

$$\theta(E_j) = \left(\sum_{i=1}^{3} f_i\theta_i\right)(E_j) = \sum_{i=1}^{3} f_i\theta_i(E_j) = \sum_{i=1}^{3} f_i\delta_{ij} = f_j$$

olduğundan

$$\theta = \sum_{i=1}^{3}\theta(E_i)E_i$$

olur[2].

TEOREM I.IV.1: $\{E_1, E_2, E_3\}$çatı alanlarının dual 1-formları $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ve bağlantı formları ω_{ij} , $(1 \le i, j \le 3)$ ise ,

(1) $d\theta_i = \sum_{i=1}^{3}\omega_{ij} \wedge \theta_j$ $\quad (1 \le i \le 3)$ $\quad$ (Birinci tür yapı denklemleri)

(2) $d\omega_{ij} = \sum_{i=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \qquad (1 \le i, j \le 3)$ (İkinci tür yapı denklemleri)

dir[2].

İSPAT: $E_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j}$ olsun. Bu durumda $\theta_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} dy_j$ olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$d\theta_i = \sum_{j=1}^{3} da_{ij} \wedge dy_j$$

elde edilir. $\omega = dA.A^t$ eşitliğinden, $dA = \omega A$ bulunur. Buna göre

$$da_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} a_{kj}$$

dır.Böylece,

$$d\theta_i = \sum_j \left[\left(\sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} a_{kj} \right) \wedge dy_j \right] = \sum_j \left[\left(\sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \right) \wedge \left(a_{kj} dy_j \right) \right]$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \right) \wedge \left(\sum_j a_{kj} dy_j \right) = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \theta_k$$

bulunur.

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{jk} da_{ik}$$

olduğundan ,

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{3} da_{jk} \wedge da_{ik}$$

olur.Öte yandan

$$\omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = \left(\sum_{h=1}^{3} a_{kh} da_{ih} \right) \wedge \left(\sum_{l=1}^{3} a_{jl} da_{kl} \right)$$

dır. $\sum_{l=1}^{3} a_{jl} a_{kl} = \delta_{jk}$ olduğundan

$$\sum_{l=1}^{3} da_{jl} a_{kl} + \sum_{l=1}^{3} a_{jl} da_{kl} = 0$$

ve buradan

$$\sum_{l=1}^{3} da_{jl} a_{kl} = -\sum_{l=1}^{3} a_{jl} da_{kl}$$

olur.Bu eşitlikten yararlanarak,

$$\omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = \left(\sum_{h=1}^{3} a_{kh} da_{ih} \right) \wedge \left(-\sum_{l=1}^{3} da_{jl} a_{kl} \right)$$

$$= -\sum_{h,l=1}^{3} a_{kh} a_{kl} da_{ih} \wedge da_{jl}$$

ve buradan,

$$\sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = \sum_{k=1}^{3} \left[-\sum_{h,l=1}^{3} a_{kh} a_{kl} da_{ih} \wedge da_{jl} \right]$$

$$= -\sum_{h,l=1}^{3} \left(\sum_{k=1} a_{kh} a_{kl} \right) da_{ih} \wedge da_{jl}$$

$$= -\sum_{h,l=1}^{3} \delta_{hl} da_{ih} \wedge da_{jl}$$

$$= -\sum_{h=1}^{3} da_{ih} \wedge da_{jh}$$

$$= \sum_{h=1}^{3} da_{jh} \wedge da_{ih} = d\omega_{ij}$$

elde edilir.

II BÖLÜM

NORMAL KESİTLİ ALTMANİFOLDLAR

Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda düzlemsel normal kesitli alt manifoldlar incelenmiştir. Ayrıca bir Öklidyen uzayın alt manifoldunun pointwise düzlemsel normal kesitlere sahip olması için gerekli şartlar verilmiştir. İkinci kısımda düzlemsel normal kesitli yüzeyler ile normal kesitlerin bir sınıflandırılması yapılmıştır. Son olarak ise bir kürenin düzlemsel normal kesitli alt manifoldları araştırılmıştır.

II.I.DÜZLEMSEL NORMAL KESİTLİ ALT MANİFOLDLAR

E^m nin n-boyutlu bir alt manifoldu M ve M nin herhangi bir p noktasındaki sıfırdan farklı tanjant vektörü t olsun

$$T_p^{\perp}M \cup Sp\{t\} = E(p,t)$$

diyelim. $boyE(p,t) = (m-n+1)$ olduğu açıktır. $E(p,t)$ ile M nin arakesiti, $p \in M$ noktasının komşuluğunda bir γ eğrisi tanımlar. s –yay parametresi olmak üzere $\gamma(s)$ eğrisine M nin normal kesitli eğrisi denir.Genel olarak p noktasında γ eğrisi için

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' \neq 0$$

dir. Burada $\wedge$ crooss çarpımı göstermektedir. Eğer p noktası için

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' = 0$$

ise M alt manifolduna pointwise düzlemsel normal kesitlere sahiptir denir.Yani her normal kesit γ için

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' = 0$$

olur.

Şimdi bu bölümde ve diğer alt bölümlerde kullanacağımız bazı temel bağıntıları verelim.

M, E^m nin n-boyutlu bir alt manifoldu olmak üzere M ve E^m nin kovaryant türev operatörleri sırasıyla ∇ ve $\overline{\nabla}$ olsun. M nin ikinci temel formu h olmak üzere $X,Y \in \chi(M)$ için

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{II.1.1}$$

$\xi \in \chi^{\perp}(M)$ için

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X Y \tag{II.1.2}$$

dir. $X,Y \in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi^{\perp}(M)$ olduğundan

$$X\langle Y,\xi\rangle = 0$$
$$\langle \overline{\nabla}_X Y,\xi\rangle + \langle Y,\overline{\nabla}_X \xi\rangle = 0$$

denklemlerinde (II.1.1) ve (II.1.2) kullanılırsa

$$\langle \nabla_X Y,\xi\rangle + \langle h(X,Y),\xi\rangle + \langle Y, D_X\xi\rangle - \langle A_\xi X, Y\rangle = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\langle h(X,Y),\xi\rangle - \langle A_\xi X, Y\rangle = 0$$

ve

$$\langle h(X,Y),\xi\rangle = \langle A_\xi X, Y\rangle \tag{II.1.3}$$

olur. $\overline{\nabla}_X h$, h nın kovaryant türevi olmak üzere , buna göre

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = \nabla_X h(Y,Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \tag{II.1.4}$$

şeklinde tanımlanır. Codazzi denkleminden

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = (\overline{\nabla}_Y h)(X,Z) \tag{II.1.5}$$

bulunur. Ayrıca (II.1.5) denklemi

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = (\overline{\nabla}_X h)(Z,Y) \tag{II.1.6}$$

olarak da elde edilebilir[3].

TEOREM II.1.1: IR^{m+d} nin m boyutlu bir alt manifoldu M olsun. M nin pointwise 2-düzlemsel normal kesite sahip olması için gerek ve yeter şart

$$\|H\|^2 \nabla H = \langle H, \nabla H \rangle H$$

olmasıdır[4].

Şimdi pointwise 2-düzlemsel olmayan bir alt manifold örneği verelim.

ÖRNEK II.I.2: IR^4 ün içine gömülmüş olan

$$IK^2 = \{(\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos 2\theta \sin\varphi, \sin 2\theta \sin\varphi) : \theta, \varphi \in IR\}$$

Klein şişesinin pointwise 2-düzlemsel normal kesite sahip olmadığını gösterelim.

$$X_\theta = (-\sin\theta\cos\varphi, \cos\theta\cos\varphi, -2\sin 2\theta\sin\varphi, 2\cos 2\theta\sin\varphi)$$
$$X_\varphi = (-\cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos 2\theta\cos\varphi, \sin 2\theta\cos\varphi)$$

ile gerilen

$$p = (\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos 2\theta\sin\varphi, \sin 2\theta\sin\varphi)$$

noktasındaki $T_p(IK^2)$ uzayı ve

$$n_1 = (2\sin\theta\sin\varphi, -2\cos\theta\sin\varphi, -\sin 2\theta\cos\varphi, \cos 2\theta\cos\varphi)$$
$$n_2 = (\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos 2\theta\sin\varphi, \sin 2\theta\sin\varphi)$$

tarafından gerilen $N_p(IK^2)$ uzayını tanımlayalım. Buna göre

$$X = \frac{X_\theta}{\|X_\theta\|}, \quad \|X_\theta\| = \sqrt{1+3\sin^2\varphi}\ , Y = \frac{X_\varphi}{\|X_\varphi\|}, \quad \|X_\varphi\| = 1$$
$$v_1 = \frac{n_1}{\|n_1\|}, \quad \|n_1\| = \sqrt{1+3\sin^2\varphi}\ , v_2 = \frac{n_2}{\|n_2\|}, \quad \|n_2\| = 1$$

olmak üzere X, Y, v_1, v_2 orto normal çatısı elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}\right\} = -\left(\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{(1+3\sin^2\varphi)^{3/2}}\right)$$

olduğundan

$$D_X X = \left\{\frac{1}{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}\right\}\left(\frac{\partial X}{\partial\theta}\right)$$

$$=\left\{\frac{1}{1+3\sin^2\varphi}\right\}(\text{-}cos\theta\, cos\varphi, \text{-}sin\theta\, cos\varphi\ , \text{-}4cos2\theta\, sin\varphi, \text{-}4sin2\theta\, sin\varphi)$$

$$=-\left(\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{1+3\sin^2\varphi}\right)Y-v_2$$

$$D_X Y=\left\{\frac{1}{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}\right\}\left(\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)$$

$$=\left\{\frac{1}{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}\right\}(\ sin\theta\, sin\varphi,\ \text{-}cos\theta\, sin\varphi,\ \text{-}2sin2\theta\, cos\varphi, 2cos2\theta\, cos\varphi)$$

$$=-\left(\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{1+3\sin^2\varphi}\right)X+\left(\frac{2}{1+3\sin^2\varphi}\right)v_1$$

$$D_Y X=\left(\frac{\partial X}{\partial\varphi}\right)=-\left(\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{1+3\sin^2\varphi}\right)X$$

$$+\left\{\frac{1}{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}\right\}(\ sin\theta\, sin\varphi,\ \text{-}cos\theta\, sin\varphi,\ \text{-}2sin2\theta\, cos\varphi, 2cos2\theta\, cos\varphi\ )$$

$$=\left(\frac{2}{1+3\sin^2\varphi}\right)v_1$$

$$D_Y Y=\left(\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)=-\,v_2$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde

$$D_X v_1=\left\{\frac{1}{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}\right\}\left(\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)$$

$$=\left(\frac{2}{1+3\sin^2\varphi}\right)(\ cos\theta\, sin\varphi,\ sin\theta\, sin\varphi, \text{-}\ cos2\theta\, cos\varphi\ , \text{-}\ sin2\theta\, cos\varphi)$$

$$=-\left(\frac{2}{1+3\sin^2\varphi}\right)Y$$

$$D_X v_2=\left\{\frac{1}{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}\right\}\left(\frac{\partial v_2}{\partial\theta}\right)$$

$$=\left\{\frac{1}{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}\right\}(\text{-}\ sin\theta\, cos\varphi\ , cos\theta\, cos\varphi, \text{-}2\ sin2\theta\, sin\varphi, 2\ cos2\theta\, sin\varphi)=X,$$

$$D_Y v_1 = \left(\frac{\partial v_1}{\partial \varphi}\right) = -\left(\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{1+3\sin^2\varphi}\right)v_1$$
$$+\left\{\frac{1}{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}\right\}(2\sin\theta\cos\varphi\,,-2\cos\theta\cos\varphi,\ \sin2\theta\sin\varphi,-\cos2\theta\sin\varphi)\,,$$
$$= -\left(\frac{2}{1+3\sin^2\varphi}\right)X$$

$$D_Y v_2 = \left(\frac{\partial v_1}{\partial \varphi}\right) = (-\cos\theta\sin\varphi,-\sin\theta\sin\varphi,\ \cos2\theta\cos\varphi,\ \sin2\theta\cos\varphi) = Y$$

olur.Gauss ve Weingarten denklemlerini kullanırsak

$$\begin{aligned}
\nabla_X X &= -\left(\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{1+3\sin^2\varphi}\right)Y\\
\nabla_X Y &= \left(\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{1+3\sin^2\varphi}\right)X\\
\nabla_Y X &= 0\\
\nabla_Y Y &= 0
\end{aligned} \qquad (1.1)$$

ve

$$\begin{aligned}
h(X,X) &= -v_2\\
h(X,Y) &= \left(\frac{2}{1+3\sin^2\varphi}\right)v_1\\
h(Y,Y) &= -v_2
\end{aligned} \qquad (1.2)$$

ve

$$\overline{\nabla}_X v_1 = \overline{\nabla}_X v_2 = \overline{\nabla}_Y v_1 = \overline{\nabla}_Y v_2 = 0\,.$$

dir.

$$Z = xX + yY\,, \qquad x,y \in IR$$

Buradan

$$\begin{aligned}
h(Z,Z) &= x^2h(X,X) + 2xyh(X,Y) + y^2h(Y,Y)\\
&= -(x^2+y^2)v_2 + \left(\frac{4xy}{1+3\sin^2\varphi}\right)v_1
\end{aligned} \qquad (1.3)$$

ifadesini elde ederiz.

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{1+3\sin^2\varphi}\right) = \left(\frac{-6\sin\varphi\cos\varphi}{(1+3\sin^2\varphi)^2}\right)$$

olduğundan

$$h(X,X) = -v_2$$
$$h(X,Y) = \left(\frac{2}{1+3\sin^2\varphi}\right)v_1$$
$$h(Y,Y) = -v_2$$

olarak bulunur. Buradan

$$D_X(h(X,X)) = -D_X(v_2) = -X$$
$$D_X(h(X,Y)) = \left(\frac{2}{1+3\sin^2\varphi}\right)D_X(v_1)$$
$$= -\left(\frac{4}{(1+3\sin^2\varphi)^2}\right)Y$$

$$D_X(h(Y,Y)) = -D_X(v_2) = -X$$
$$D_Y(h(X,X)) = -D_Y(v_2) = -Y$$
$$D_Y(h(X,Y)) = -D_Y\left(\frac{2}{1+3\sin^2\varphi}v_1\right)$$
$$= \left(\frac{-2}{1+3\sin^2\varphi}\right)D_Y(v_1) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{-2}{1+3\sin^2\varphi}\right)v_1$$
$$= -\left(\frac{4}{(1+3\sin^2\varphi)^2}\right)X - \left(\frac{12\sin\varphi\cos\varphi}{(1+3\sin^2\varphi)^2}\right)v_1$$
$$D_Y(h(Y,Y)) = -D_Y(v_2) = -Y$$

elde edilir. Burada Weingarten denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&A_{h(X,X)}X = X\\
&A_{h(X,Y)}X = \left(\frac{4}{(1+3\sin^2\varphi)^2}\right)Y\\
&A_{h(Y,Y)}X = X\\
&A_{h(X,X)}Y = Y\\
&A_{h(X,Y)}Y = \left(\frac{4}{(1+3\sin^2\varphi)^2}\right)X\\
&A_{h(Y,Y)}Y = Y
\end{aligned} \tag{1.4}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\overline{\nabla}_X\left(h(X,X)\right)=0\\
&\overline{\nabla}_X\left(h(X,Y)\right)=0\\
&\overline{\nabla}_X\left(h(Y,Y)\right)=0\\
&\overline{\nabla}_Y\left(h(X,X)\right)=0\\
&\overline{\nabla}_Y\left(h(Y,Y)\right)=0\\
&\overline{\nabla}_Y\left(h(X,Y)\right)=-\left(\frac{12\sin\varphi\cos\varphi}{\left(1+3\sin^2\varphi\right)^2}\right)v_1
\end{aligned}\tag{1.5}$$

sonucuna varılır.

$$Z=xX+yY \qquad x,y\in IR$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\nabla}_Z h\right)(Z,Z)=x^3\left(\overline{\nabla}_X h\right)(X,X)+3yx^2\left(\overline{\nabla}_Y h\right)(X,X)\\
+3xy^2\left(\overline{\nabla}_Y h\right)(Y,Y)+y^3\left(\overline{\nabla}_Y h\right)(Y,Y)
\end{aligned}\tag{1.6}$$

ifadesine sahibiz. (II.1.4) den

$$\begin{aligned}
&\left(\overline{\nabla}_X h\right)(X,X)=\overline{\nabla}_X\left(h(X,X)\right)-2h\left(\nabla_X X,X\right)\\
&\left(\overline{\nabla}_X h\right)(X,Y)=\overline{\nabla}_X\left(h(X,Y)\right)-h\left(\nabla_X X,Y\right)-h\left(X,\nabla_X Y\right)\\
&\left(\overline{\nabla}_Y h\right)(Y,X)=\overline{\nabla}_Y\left(h(Y,X)\right)-h\left(\nabla_Y Y,X\right)-h\left(Y,\nabla_Y X\right)\\
&\left(\overline{\nabla}_Y h\right)(Y,Y)=\overline{\nabla}_Y\left(h(Y,Y)\right)-2h\left(\nabla_Y Y,Y\right)
\end{aligned}\tag{1.7}$$

dır , ayrıca (1.1) ve (1.2) den

$$\begin{aligned}
&h\left(\nabla_X X,X\right)=-\left(\frac{6\sin\varphi\cos\varphi}{\left(1+3\sin^2\varphi\right)^2}\right)v_1\\
&h\left(\nabla_X Y,X\right)=-\left(\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{1+3\sin^2\varphi}\right)v_2\\
&h\left(\nabla_X X,Y\right)=\left(\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{1+3\sin^2\varphi}\right)v_2\\
&h\left(\nabla_X Y,Y\right)=\left(\frac{6\sin\varphi\cos\varphi}{\left(1+3\sin^2\varphi\right)^2}\right)v_1\\
&h\left(\nabla_Y Y,Y\right)=h\left(\nabla_Y X,X\right)=h\left(\nabla_Y X,Y\right)=h\left(\nabla_Y Y,Y\right)=0.
\end{aligned}\tag{1.8}$$

elde ederiz. (1.7) de (1.5) , (1.8) i yerine koyarsak

$$
\begin{aligned}
&(\overline{\nabla}_X h)(X,X)=\left(\frac{12\sin\varphi\cos\varphi}{(1+3\sin^2\varphi)^2}\right)v_1\\
&(\overline{\nabla}_X h)(X,Y)=0\\
&(\overline{\nabla}_Y h)(Y,X)=\left(-\frac{12\sin\varphi\cos\varphi}{(1+3\sin^2\varphi)^2}\right)v_1\\
&(\overline{\nabla}_Y h)(Y,Y)=0
\end{aligned}
\qquad (1.9)
$$

olur. Diğer taraftan (1.6) , (1.9) dan

$$
(\overline{\nabla}_Z h)(Z,Z)=\left(\frac{12\sin\varphi\cos\varphi}{(1+3\sin^2\varphi)^2}\right)(x^3-3xy^2)v_1 \qquad (1.10)
$$

ve (1.3) den

$$
\|h(Z,Z)\|^2=(x^2+y^2)^2+\left(\frac{16x^2y^2}{(1+3\sin^2\varphi)^2}\right)
$$

elde ederiz. Benzer şekilde (1.10) ve (1.3) den

$$
\langle(\overline{\nabla}_Z h)(Z,Z),h(Z,Z)\rangle=\left(\frac{48\sin\varphi\cos\varphi}{(1+3\sin^2\varphi)^3}\right)x^2y(x^2-3y^2)
$$

bulunur. Buradan

$$
\langle(\overline{\nabla}_Z h)(Z,Z),h(Z,Z)\rangle h(Z,Z)\neq\|h(Z,Z)\|^2(\overline{\nabla}_Z h)(Z,Z)
$$

olup IK^2 pointwise 2-düzlemsel normal kesite sahip değildir.

TEOREM II.1.2: E^m nin $n\geq 2$ boyutlu alt manifoldu M olsun. M nin pointwise düzlemsel normal kesitlere sahip olması için gerek ve yeter şart $t\in TM$ için

$$
(\overline{\nabla}_t h)(t,t)\wedge h(t,t)=0
$$

dir[5].

İSPAT: E^m nin $n\geq 2$ boyutlu alt manifoldu M ve γ s-yay parametresiyle verilsin , t_p birim tanjant vektör olmak üzere γ, $\gamma(0)=p$ de , M nin p noktasında t yönündeki normal kesiti olsun.

$e_1,e_2,...,e_n$ M de tanjant vektörler $e_{n+1},...,e_m$ M ye normal vektörler olmak üzere E^m nin $e_1,e_2,...,e_m$ ortonormal çatılarının bir lokal alanını seçelim. Ayrıca $\gamma'(s)=e_1$ olduğunu kabul edelim.

Dual çatı $w^1,...,w^m$ olmak üzere , E^m nin yapı denklemleri

$$1)\ \overline{\nabla} e_A = \sum_B w_A^B e_B \qquad (\text{II.1.7})$$

olur. Buradan $w_A^B + w_B^A = 0$ dır.

$$2)\ dw^A = -\sum_B w_B^A \wedge w^B$$

$$3)\ dw_B^A = -\sum_{B,C} w_C^A \wedge w_B^C \qquad A,B,C = 1,...,m \text{ dir.}$$

$r = n+1,...,m$ için $w^r = 0$ olduğundan Cartans lemasından

$$0 = dw^r = -\sum w_i^r \wedge w^i$$

yazabiliriz.

$$4)\ w_i^r = \sum h_{ij}^r w^j \quad , \quad h_{ij}^r = h_{ji}^r \ , \ i,j,k = 1,...,n \qquad (\text{II.1.8})$$

Buradan ikinci temel form

$$h = \sum h_{ij}^r w^i \otimes w^j e_r \qquad (\text{II.1.9})$$

dir. $T = \gamma'(s)$ olmak üzere

$$\dot{\gamma}(s) = e_1 = T$$
$$\ddot{\gamma}(s) = \overline{\nabla}_T T = \nabla_T T + h(T,T)$$

(II.1.7) bağıntısı kullanılırsa

$$\ddot{\gamma}(s) = \sum_{i=2}^n w_1^i(T) e_i + h(T,T) \qquad (\text{II.1.10})$$

elde edilir. Buradan türev alırsak

$$\dddot{\gamma}(s) = \overline{\nabla}_T(\overline{\nabla}_T T) = \sum_{i=2}^n T(w_1^i(T))e_i + \sum_{i,j} w_1^i(T) w_i^j(T) e_j + \overline{\nabla}_T h(T,T)$$
$$= \sum_{i=2}^n T(w_1^i(T))e_i + \sum_{i,j} w_1^i(T) w_i^j(T) e_j + \sum w_1^i(T) h(e_i,T) - \sum_{i,r} h_{11}^r h_{1i}^r e_i + D_T(h(T,T)) \qquad (\text{II.1.11})$$

bulunur. $\gamma(p) = 0$ olduğu yerde $\ddot{\gamma}(0)$ ve $\dddot{\gamma}(0)$, *E(p,t)* nin içinde bulunur. *E(p,t)* nin tanımı ve (II.1.10) ve (II.1.11) bağıntılarından

$$w_1^i(t) = 0 \tag{II.1.12}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}(0) &= \sum_{i=2}^{n} w_1^i(t)e_i + h(t,t) \\ &= h(t,t) \end{aligned} \tag{II.1.13}$$

bulunur.

$$\dddot{\gamma}(0) = \sum_{i=2}^{n} t(w_1^i(t))e_i + \sum_{i,j} w_1^i(t)w_i^j(t)e_j + \sum w_1^i(t)h(e_i,t) - \sum_{i,r} h_{11}^r h_{11}^r e_i + D_T(h(t,t))$$

denkleminde (II.1.12) kullanılırsa

$$\dddot{\gamma}(0) = -\sum_{i,r} h_{11}^r h_{1i}^r e_i + D_t(h(t,t))$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \sum_{1,r} h_{11}^r h_{11}^r e_i &= \langle h(e_1,e_1), e_r \rangle \langle h(e_1,e_1), e_r \rangle e_i \\ &= \langle h(e_1,e_1), h(e_1,e_1) \rangle e_1 \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} \dddot{\gamma}(0) &= -\langle h(e_1,e_1), h(e_1,e_1) \rangle e_1 + D_t(h(t,t)) \\ \dddot{\gamma}(0) &= -\langle h(t,t), h(t,t) \rangle t + D_t(h(t,t)) \end{aligned} \tag{II.1.14}$$

elde edilir.

$$(\overline{\nabla}_t h)(t,t) = D_t(h(t,t)) - 2h(\nabla_t t, t) \quad , \quad w_1^i(t) = 0 \text{ ve } \nabla_t t = \sum w_t t(t) \wedge e_t$$

olduğundan $\nabla_t t = 0$ bulunur. Buradan

$$(\overline{\nabla}_t h)(t,t) = D_t(h(t,t)) \tag{II.1.15}$$

dir. (II.1.15) ifadesiyle (II.1.14) ifadesini birleştirirsek $p = \gamma(0)$ noktasında $\gamma(s)$ nin eğriliği

$$\begin{aligned} K(0) &= \|h(t,t)\| \\ \dddot{\gamma}(0) &= -K^2(0)t + (\overline{\nabla}_t h)(t,t) \end{aligned} \tag{II.1.16}$$

elde edilir. Hipotezimizden pointwise düzlemsel normal kesitlere sahip olduğundan

$$\dot{\gamma}(0) \wedge \ddot{\gamma}(0) \wedge \dddot{\gamma}(0) = 0$$

dır. $\dddot{\gamma}(0), \ddot{\gamma}(0)$ ve $\dot{\gamma}(0)$ ın bir lineer kombinasyonudur. Dolayısıyla $(\overline{\nabla}_t h)(t,t)$ ile $h(t,t)$ lineer bağımlı olup

$$(\overline{\nabla}_t h)(t,t) \wedge h(t,t) = 0$$

dır. Tersine $(\overline{\nabla}_t h)(t,t) \wedge h(t,t) = 0$ olsun. M nin pointwise düzlemsel normal kesitlere sahip olduğunu göstereceğiz.

M nin sabit bir p noktasındaki herhangi bir tanjant vektörü t olmak üzere

$$(\overline{\nabla}_t h)(t,t) \wedge h(t,t) = 0$$

olsun. $E(p,t)$, t ile $T_p^{\perp}M$ tarafından gerildiği için $w_1^i(t) = 0$ olup (II.1.13) ve (II.1.14) elde edilir. Buradan $\dot{\gamma}(0), \ddot{\gamma}(0)$ ve $\dddot{\gamma}(0)$ lineer bağımlı dolayısıyla

$$\dot{\gamma}(0) \wedge \ddot{\gamma}(0) \wedge \dddot{\gamma}(0) = 0$$

dir. Bu M nin üzerindeki herhangi bir normal kesit için doğru olduğundan M pointwise düzlemsel normal kesitlere sahiptir.

TEOREM II.1.3: E^m nin $n \geq 2$ boyutlu bir alt manifoldu M olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $(\overline{\nabla}_t h)(t,t) = 0$ dır.

(b) $\overline{\nabla} h = 0$ ise ikinci temel form paraleldir.

(c) M pointwise düzlemsel normal kesitlere sahiptir. $\gamma(s)$ eğrisinin eğriliği $K^2 = \langle \gamma'', \gamma'' \rangle$ olmak üzere $p \in M$ için $\dfrac{dK^2(p)}{ds} = 0$ ise p noktasında $\gamma(s)$ eğrisi bir köşe noktasına sahiptir denir[5].

İSPAT:**(a)**$\Rightarrow$**(b)** E^m nin bir alt manifoldu M ve $X, Y, Z \in \chi(M)$ olsun. (II.1.5) den $(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = (\overline{\nabla}_Y h)(X,Z)$ olup $(\overline{\nabla}_t h)(t,t) = 0$ olduğunu yazabiliriz. $t = X + Y$ ve $t = X - Y$ için

$$(\overline{\nabla}_X h)(X,Y) = (\overline{\nabla}_Y h)(X,X) = 0$$

elde edilir. Buradan $\overline{\nabla} h = 0$ olur.

(b)$\Rightarrow$**(a)** açıktır.

(b) $\Rightarrow$**(c)** Eğer $\overline{\nabla} h = 0$ ise Teorem II.1.2 den $(\overline{\nabla}_t h)(t,t) \wedge h(t,t) = 0$ dır. M pointwise düzlemsel normal kesitlere sahip ve $\gamma(s)$, M nin p noktasında $t \in T_p(M)$ yönünde verilsin. O zaman

$$\gamma''(s) = \sum_{i=2}^{n} w_1^i(T) e_i + h(T,T)$$

dır. $\gamma(s)$ eğrisinin eğriliği $K(s)$ olmak üzere

$$K^2(s)=\langle \gamma''(s),\gamma''(s)\rangle$$
$$=\left\langle \sum_{i=2}^{n} w_1^i(T)e_i + h(T,T), \sum_{i=2}^{n} w_1^i(T)e_i + h(T,T)\right\rangle$$
$$K^2(s)=\sum_{i=2}^{n} w_1^{i\,2}(T)e_i + \langle h(T,T),h(T,T)\rangle \qquad (\text{II.1.17})$$

olur. Buradan türev alınırsa

$$\frac{dK^2(s)}{ds}=2\sum_{i=2}^{n} w_1^i(T)Tw_1^i(T)+2\langle D_T h(T,T),h(T,T)\rangle \qquad (\text{II.1.18})$$

elde edilir. $w_1^i(T)=0$ olduğundan $p=\gamma(0)$ noktasında

$$\frac{dK^2(s)}{ds}=2\langle D_t h(T,T),h(t,t)\rangle$$
$$=2\langle(\overline{\nabla}_t h)(t,t),h(t,t)\rangle$$

olup $\overline{\nabla}h=0$ olduğundan

$$\frac{dK^2(s)}{ds}=0$$

bulunur. Böylece p normal bükümlü $\gamma(s)$ nin bir köşesidir.

(c)$\Rightarrow$(a) M nin düzlemsel normal kesitlere sahip olduğunu kabul edelim. Teorem II.1.2 den

$$(\overline{\nabla}_t h)(t,t)\wedge h(t,t)=0 \qquad (\text{II.1.19})$$

ve p, $\gamma(s)$ nin bir köşesi ise

$$\frac{dK^2(s)}{ds}=0 \qquad (\text{II.1.20})$$

dır. Buradan

$$\frac{dK^2(s)}{ds}=2\sum_{i=2}^{n} w_1^i(T)Tw_1^i(T)+2\langle D_T h(T,T),h(T,T)\rangle$$

dır. (II.1.20), $w_1^i(T)=0$ ve $(D_T h)(T,T)=(\overline{\nabla}_T h)(T,T)$ olduğundan

$$\langle(\overline{\nabla}_t h)(t,t),h(t,t)\rangle=0 \qquad (\text{II.1.21})$$

olur. (II.1.19) ve (II.1.21) ifadelerinden

$$(\overline{\nabla}_t h)(t,t)=0$$

veya

$$h(t,t)=0$$

elde ederiz.

$$U=\{t\in TM|h(t,t)=0\}$$

olsun. Eğer $\mathrm{int}(U)\neq\phi$ ise o zaman $w_1^i(t)=0$ ile $\mathrm{int}(U)$ üzerinde

$$(\overline{\nabla}_t h)(t,t)=0$$

elde ederiz. Yani

$$\overline{\nabla}h=0$$

olur.

TEOREM II.1.4: E^m nin $n\geq 2$ boyutlu bir alt manifoldu M olsun. M düzlemsel geodeziklere sahiptir $\Leftrightarrow$ M aynı sabit eğriliğin düzlemsel normal kesitlerine sahiptir[5].

İSPAT: M aynı sabit eğriliğin düzlemsel normal kesitlerine sahip olsun. Buna göre

$$K^2(s)=\sum_{i=2}^{n}(w_i^i(T))^2+\|h(T,T)\|^2 \qquad (\text{II.1.22})$$

elde ederiz. $w_1^i(t)=0$ olacağından

$$K^2(0)=\|h(t,t)\|^2 \qquad (\text{II.1.23})$$

dır. Eğer M nin normal kesitleri aynı sabit eğriliğin düzlemsel eğrileri ise o zaman (II.1.22) den

$$K^2(s)=c \qquad (\text{II.1.24})$$

elde ederiz. Üstelik (II.1.23) herhangi $u\in TM$ birim vektörü için

$$\|h(u,u)\|^2=c \qquad (\text{II.1.25})$$

olur.(II.1.22) , (II.1.24) ve (II.1.25) i birleştirirsek her normal kesitin M üzerinde bir geodezik olduğunu görürüz.

Tersine M düzlemsel geodeziklere sahip ise o zaman M, ya bir n düzlemini içerir ya da bütün geodezikler aynı yarıçaplı düzlemsel çemberlerdir.

Şayet ilk durum doğruysa her normal kesit bir düz çizginin parçasıdır. Eğer ikinci durum doğruysa o zaman M de bir p noktasıyla herhangi bir geodezik $\gamma(s)$ için $T=\gamma'(s)$ olduğu yerde

$$\overline{\nabla}_T T = h(T,T)$$

olur. $\gamma(s)$ bir düzlemsel çember olduğu için $\gamma(s), p=\gamma(0)$ da $t=\gamma'(0)$ ve $h(t,t)$ ile gerilen E^2 düzleminde yatar. Bundan dolayı γ , M nin ve E^2 nin bir kesişimidir. $E(p,t)$, E^2 nin bir alt uzayı olduğu için E^2 de t yönünde , p noktasında normal kesittir. Buradan da her normal kesitin M nin bir geodeziği olduğu sonucuna varılır. Bu yüzden M aynı sabit eğriliğin düzlemsel normal kesitlere sahiptir.

II.2.DÜZLEMSEL NORMAL KESİTLİ YÜZEYLERİN SINIFLANDIRILMASI

E^m nin bir hiperyüzeyi M olsun. Eğer M nin normal kesitleri düzlemsel eğrilerse bu durumda E^m de M düzlemsel normal kesitlere sahiptir denir[7].

Biz bu bölümde E^m de düzlemsel normal kesitleri sınıflandıracağız.

TEOREM II.2.1: E^m nin içinde düzlemsel normal kesitli bir yüzey M olsun.Eğer M, E^m nin 3-boyutlu E^3 Öklidyen uzayının içinde kalmazsa bu taktirde M , E^m nin 5-boyutlu Veronese yüzeyinin bir açık alt kümesidir[7].

İSPAT: M nin düzlemsel normal kesitli bir yüzey olduğunu kabul edelim. $p\in M$ noktasında M ye tanjant birim vektör t olsun.

$\gamma(s)$, $\gamma(0)=p\in M$ noktasında t yönünde M nin normal kesiti olsun.

$$T(s)=\gamma'(s)$$

olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\gamma''=\overline{\nabla}_T T=\nabla_T T+h(T,T) \qquad (\text{II.2.1})$$
$$\gamma'''=\nabla_T\nabla_T T+h(\nabla_T T,T)-A_{h(T,T)}T+D_T h(T,T) \qquad (\text{II.2.2})$$

elde ederiz. $\gamma(s)$ nin eğriliği $K(s)$ olmak üzere

$$K^2 = \langle \gamma'', \gamma'' \rangle = \langle \nabla_T T + h(T,T), \nabla_T T + h(T,T) \rangle$$
$$= \langle \nabla_T T, \nabla_T T \rangle + 2\langle \nabla_T T, h(T,T) \rangle + \langle h(T,T), h(T,T) \rangle$$

$$K^2 = \|\nabla_T T\|^2 + \|h(T,T)\|^2 \qquad \text{(II.2.3)}$$

bulunur. γ düzlemsel eğri olduğundan (II.2.1) , (II.2.2) ve (II.2.3) den

$$\nabla_T \nabla_T T - A_{h(T,T)} T = -K^2 T + \left(\frac{TK^2}{2K^2} \right) \nabla_T T \qquad \text{(II.2.4)}$$

$$h(\nabla_T T, T) + D_T h(T,T) = \left(\frac{TK^2}{2K^2} \right) h(T,T) \qquad \text{(II.2.5)}$$

elde edilir , ayrıca (II.1.4) te (II.2.5) in kullanılmasıyla

$$(\overline{\nabla}_T h)(T,T) + 3h(T, \nabla_T T) = \left(\frac{TK^2}{2K^2} \right) h(T,T) \qquad \text{(II.2.6)}$$

elde edilir.

$p = \gamma(0)$ da $\gamma''(0)$ ve $\gamma'''(0)$, $E(p,t)$ uzayında kaldığından ve $E(p,t)$, t ve $T_p^{\perp}M$ tarafından gerildiğinden (II.2.1) ve (II.2.2) den

$$\nabla_t T = 0 \ , \ t = T(0) \qquad \text{(II.2.7)}$$

elde edilir. Buradan

$$\gamma''(0) = h(t,t) \qquad \text{(II.2.8)}$$
$$\gamma''' = \nabla_T \nabla_T T + h(\nabla_T T, T) - A_{h(T,T)} T + D_T h(T,T)$$

olduğundan ve (II.2.7) den dolayı

$$\gamma''' = - A_{h(T,T)} T + D_T h(T,T)$$

olur. Ayrıca (II.2.4)ve (II.2.5) den

$$- A_{h(T,T)} T + D_T h(T,T) = -K^2 T + \left(\frac{TK^2}{2K^2} \right) h(T,T)$$

dır , burada (II.2.6) göz önüne alınırsa

$$\gamma'''(0) = -K^2(0) t + (\overline{\nabla}_t h)(t,t) \qquad \text{(II.2.9)}$$

olarak bulunur. Buradan $p = \gamma(0)$ da $\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' = 0$ olduğundan

$$\left(\overline{\nabla}_t h\right)(t,t) \wedge h(t,t) = 0 \qquad (\text{II}.2.10)$$

dır. Çünkü $p \in M$ keyfi bir nokta , $t \in T_pM$ de keyfi bir tanjant vektör olduğundan keyfi bir $u \in TM$ için

$$\left(\overline{\nabla}_u h\right)(u,u) \wedge h(u,u) = 0 \qquad (\text{II}.2.11)$$

elde edilir.(II.2.6) dan

$$3h(T,\nabla_T T) = \left(\frac{TK^2}{2K^2}\right)h(T,T) - \left(\overline{\nabla}_T h\right)(T,T)$$

dır.

$$h(T,\nabla_T T) \wedge h(T,T) = 0 \qquad (\text{II}.2.12)$$

olur. Eğer $\gamma(s), p = \gamma(0)$ ın yeter derecede küçük herhangi bir komşuluğunda geodezik yay olmasaydı , $\langle \nabla_T T, T \rangle = 0$ olacağından $s \neq 0$ için $\nabla_{T(s)} T(s) \neq 0$ olurdu. Buradan aşağıdaki lemmaları verebiliriz.

LEMMA II.2.2: M, E^m nin düzlemsel normal kesite sahip bir yüzeyi olsun.Eğer p deki normal kesit $\gamma(s)$, p nin yeterince küçük bir komşuluğunda geodezik yay değil ise , bu durumda $t = \gamma(0)$ olmak üzere

$$h(t,t^{\perp}) \wedge h(t,t) = 0 \qquad (\text{II}.2.13)$$

dır.Eğer $p = \gamma(0)$ ın küçük bir komşuluğunda $\gamma(s)$ geodezik yay ise $\nabla_T T = 0$ dır. Böylece

$$\overline{\nabla}_T T = \gamma'' = h(T,T) \qquad (\text{II}.2.14)$$

$h(t,t)$

olur. γ, p de $h(t,t)$ ve t tarafından gerilen düzlemde kalacağından

$$\overrightarrow{p\gamma(s)} = \lambda_1 t + \lambda_2 h(t,t)$$

olarak yazılır. Buna göre

$$\gamma(s) = p + a(s)t + b(s)h(t,t) \qquad (\text{II}.2.15)$$

olacak şekilde *a(s)* ve *b(s)* fonksiyonları vardır. Böylece (II.2.14) ve (II.2.15) den

$$\gamma''' = \overline{\nabla}_T h(T,T) = a'''(s)t + b'''(s)h(t,t) \qquad (\text{II}.2.16)$$

elde ederiz.

Z, γ boyunca T ye dik bir tanjant vektör olsun. O zaman Z=$Z(p)$ için

$$\begin{aligned}\langle h(t,t), h(t,z)\rangle &= \langle h(t,t), \overline{\nabla}_t Z\rangle \\ &= -\langle a'''(0)t + b'''(0)h(t,t), Z\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

LEMMA II.2.3: M , E^m nin düzlemsel normal kesitli bir yüzeyi olsun .Eğer normal kesit $\gamma(s), p=\gamma(0)$ ın bir komşuluğunda geodezik yay ise o zaman $t=\gamma'(0)$ olmak üzere

$$\langle h(t,t), h(t,t^{\perp})\rangle = 0 \qquad (\text{II.2.17})$$

olur. $T_M(p)$ nın bir bazı e_1, e_2 olsun. Böylece

$$\begin{aligned} t(\theta) &= e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta \\ t^{\perp}(\theta) &= -e_1 \sin\theta + e_2 \cos\theta \end{aligned} \qquad (\text{II.2.18})$$

şeklinde ifade edilebilir. Eğer

$$\langle h(t(\theta), t(\theta)), h(t(\theta), t^{\perp}(\theta))\rangle \neq 0$$

ise o zaman Lemma II.2.2 ve Lemma II.2.3 den

$$h(t(\theta), t^{\perp}(\theta)) \wedge h(t(\theta), t(\theta)) = 0 \qquad (\text{II.2.19})$$

olacak şekilde $\theta \in (a,b)$ olmak üzere (a,b) açık aralığı vardır. Burada (II.2.18) , (II.2.19) den

$$h(e_1,e_1) \wedge h(e_1,e_2) = h(e_1,e_1) \wedge h(e_2,e_2) = h(e_1,e_2) \wedge h(e_2,e_2) = 0 \qquad (\text{II.2.20})$$

bulunur. Dolayısıyla $boy(\operatorname{Im} h) \leq 1$ buluruz.

Eğer $t \in T_pM$ birim vektör için $\langle h(t,t), h(t,t^{\perp})\rangle = 0$ ise T_pM nin herhangi iki u ve v birim vektörleri için

$$\|h(u,u)\|^2 = \|h(v,v)\|^2 \qquad (\text{II.2.21})$$

$$\|h(u,u)\|^2 = 2\|h(u,u^{\perp})\|^2 + \langle h(u,u), h(u^{\perp},u^{\perp})\rangle \qquad (\text{II.2.22})$$

dir. Burada p noktasında ya $h(u,u^{\perp})=0$ ve $boy(\operatorname{Im} h) \leq 1$ yada p noktasında $h(u,u^{\perp}) \neq 0$ ve $boy(\operatorname{Im} h) \geq 2$ dir. Şimdi

$$M_1 = \{p \in M \mid boy(\operatorname{Im} h) \geq 2 \quad p \in M \ de\}$$

diyelim. Buna göre aşağıdaki lemmaya sahip oluruz[7].

LEMMA II.2.4: M , E^m nin pointwise düzlemsel normal kesitli bir yüzeyi olsun.Şayet $boy(\operatorname{Im} h) \leq 1$ ise o zaman lokal olarak M, E^m nin 3-boyutlu E^3 uzayında kalır. Şayet $M=M_1$ ise o zaman Lemma II.2.1 den lokal olarak M, E^m nin 3-boyutlu E^3 uzayında kalır.

Eğer $M \neq M_1$ ise bu durumda $M - M_1$, M nin boş olmayan bir açık alt kümesidir. $U = M - M_1$ ve $u \in TU$ olsun. Bu durumda

$$\langle h(u,u), h(u,u)^{\perp} \rangle = 0 \qquad \text{(II.2.23)}$$

ve $\|h(u,u)\| \neq 0$, $\|h(u,u^{\perp})\| \neq 0$, $u \in TU$ olup U üzerinde

$$h(u,u^{\perp}) \wedge h(u,u) \neq 0$$

dır. Tersine Lemma II.2.1 den görürüz ki $boy(\operatorname{Im} h) \geq 2$ ise U düzlemsel normal kesitlere sahiptir. U , E^m nin Veronese bir açık alt kümesidir.

II.3.BİR KÜRENİN DÜZLEMSEL NORMAL KESİTLİ ALT MANİFOLDLARI

Bu kısımda kürenin ikinci standart immersiyonu yardımıyla küredeki pointwise 2 veya 3 düzlemsel normal kesitli alt manifoldları göz önüne alınmıştır.

II.3.1 BİR RİEMANN MANİFOLDUNUN BİR ALT MANİFOLDUNUN ALT MANİFOLDLARI

K bir Riemann manifoldu ve K nın bir alt manifoldu N ve M de N nin bir alt manifoldu olsun. M ,N ve K nın Levi-Civita konneksiyonlarını sırasıyla ∇', ∇'' ve $\overline{\overline{\nabla}}$ ile gösterelim .K ve N de M nin normal konneksiyonları D ve D' ile K da M nin normal konneksiyonunu D'' ile gösterelim. $X,Y,Z \in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi(N)^{\perp}$ olsun. Bu durumda Gauss denklemlerini

$$\nabla''_x y = \nabla'_x y + h'(x,y) \qquad \text{(II.3.1)}$$

$$\overline{\nabla}_x y = \nabla'_x y + h(x,y) = \nabla''_x y + h''(x,y) \tag{II.3.2}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada h' ve h , M nin N ve K ya göre ikinci temel formlarını, h'' de N nin K ya göre ikinci temel formunu göstermektedir. Benzer olarak A ve A', M nin K ve N ya göre Weingarten dönüşümleri ve A'' da N nin K ya göre Weingarten dönüşümü olmak üzere Weingarten denklemleri

$$\nabla''_x u = -A'_u x + D'_x u \tag{II.3.3}$$

$$\overline{\nabla}_x u = -A_u x + D_x u = \nabla''_x u + h''(x,u) \tag{II.3.4}$$

$$\overline{\nabla}_x \xi = -A_\xi x + D_x \xi = -A''_\xi x + D''_x \xi \tag{II.3.5}$$

olarak yazılabilir. Buna göre (II.3.1) ve (II.3.2) den

$$\nabla'_x y = \nabla''_x y - h'(x,y)$$

elde edilir ve bu ifade (II.3.2) de yerine koyulursa

$$\overline{\nabla}_x y = \nabla'_x y + h(x,y) = \nabla''_x y - h'(x,y) + h(x,y)$$

dır ve

$$\overline{\nabla}_x y = \nabla''_x y + h''(x,y)$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$h(x,y) = h'(x,y) + h''(x,y) \tag{II.3.6}$$

elde edilir. Ayrıca (II.3.3) ve (II.3.4)den

$$-A_u x + D_x u = -A'_u x + D'_x u + h''(x,u)$$

dir ve buradan

$$A_u = A'_u \tag{II.3.7}$$

$$D_x u = D'_x u + h''(x,u) \tag{II.3.8}$$

olduğu görülür. Ayrıca (II.3.5) den

$$-A_\xi x + D_x \xi = -A''_\xi x + D''_x \xi$$

veya

$$D_x \xi - D''_x \xi = A_\xi x - A''_\xi x \tag{II.3.9}$$

elde edilir. Biz h, h' ve h'' nün kovaryant türevlerini , sırasıyla , $\overline{\nabla} h, \overline{\nabla} h'$ ve $\overline{\nabla} h''$ ile gösterecek olursak

$$(\overline{\nabla}_x h)(y,z) = D_x h(y,z) - h(\nabla'_x y, z) - h(y, \nabla'_x z) \qquad \text{(II.3.10)}$$

$$(\overline{\nabla}_x h')(y,z) = D'_x h'(y,z) - h'(\nabla'_x y, z) - h'(y, \nabla'_x z) \qquad \text{(II.3.11)}$$

$$(\overline{\nabla}_x h'')(y,z) = D''_x h''(y,z) - h''(\nabla''_x y, z) - h''(y, \nabla''_x z) \qquad \text{(II.3.12)}$$

yazılabilir. Benzer biçimde h , h' ve h'' nün ikinci kovaryant türevlerini sırasıyla $\overline{\nabla}\,\overline{\nabla} h$, $\overline{\nabla}\,\overline{\nabla} h'$ ve $\overline{\nabla}\overline{\nabla} h''$ ile gösterilirse ve

(II.3.10) denkleminde (II.3.6) ve (II.3.8) kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_x h)(y,z) = {} & D'_x h'(y,z) + h''(x, h'(y,z)) + D_x h''(y,z) \\ & - h'(\nabla'_x y, z) - h''(\nabla'_x y, z) \\ & - h'(y, \nabla'_x z) - h''(y, \nabla'_x z)\end{aligned} \qquad \text{(II.3.13)}$$

olur. (II.3.13) denkleminde de (II.3.11) ve (II.3.12) yi kullanılacak olursa

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_x h)(y,z) = {} & (\overline{\nabla}_x h')(y,z) + [D_x h''(y,z) - D''_x h''(y,z)] \\ & + (\overline{\nabla}_x h'')(y,z) + [h''(x, h'(y,z)) + h''(y, h'(z,x)) + h''(z, h'(x,y))]\end{aligned} \qquad \text{(II.3.14)}$$

denklemini elde ederiz. Buradan ise aşağıdaki lemmalara sahip oluruz.

LEMMA II.3.2: E^m n boyutlu bir alt manifoldu M olsun. M pointwise 2 düzlemsel normal kesitlere sahiptir $\Leftrightarrow$ M nin ikinci temel formu h olmak üzere her x tanjant vektörü için

$$(\overline{\nabla}_x h)(x,x) \wedge h(x,x) = 0 \qquad \text{(II.3.15)}$$

dir[12].

LEMMA II.3.3: E^m n boyutlu bir alt manifoldu M olsun. M pointwise 3 düzlemsel normal kesitlere sahiptir $\Leftrightarrow$ M nin ikinci temel formu h olmak üzere her x tanjant vektörü için

$$[(\overline{\nabla}_x \overline{\nabla}_x h)(x,x) + 3h(x, A_{h(x,x)} x)] \wedge (\overline{\nabla}_x h)(x,x) \wedge h(x,x) = 0 \qquad \text{(II.3.16)}$$

dir [12].

II.3.4 S^m NİN İKİNCİ STANDART İMMERSİYONU

Simetrik matrislerin kümesi $SM(m)=\{p \in gl(m;IR) \mid p^t = p\}$ ve buradaki p^t,p matrisinin transpozu olmak üzere $p,q \in SM(m)$ için $g(P,Q)=\frac{1}{2}iz(P,Q)$ metriğini tanımlıyalım.

$$f : S^m \to SM(m+1)$$

fonksiyonunu

$$f(u)=u^t u$$

ile tanımlıyalım. Bu durumda f , S^m nin ikinci standart immersiyonu ile bir izometrik immersiyondur. $f(S^m)$, $SM(m+1)$ lineer uzayının $\left[m+\frac{1}{2}m(m+1)\right]$ boyutlu bir reel projektif uzayıdır. Burada $f(S^m)$ ye Veronese alt manifoldu diyeceğiz.

S^m, $\sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}$ yarıçaplı ve $\frac{1}{m+1}I$ dönüşümü ile merkezi hale getirilmiş, $SM(m+1)$ in bir hiperküresinin, bir minimal alt manifoldu olarak f tarafından immersedtir. Ayrıca f nin h'' ikinci temel formu paralel olup $\langle\ ,\ \rangle$, E^{m+1} in

$$g(h''(x,y),h''(z,w))=2\langle x,y\rangle\langle z,w\rangle+\langle x,z\rangle\langle y,w\rangle+\langle x,w\rangle\langle y,z\rangle \qquad (\text{II.3.16})$$

şeklinde tanımlı S^m de bir iç çarpımdır[7].

M, f tarafından oluşturulan $SM(m+1)$ in S^m alt manifoldunun bir alt manifoldu olsun. Bu taktirde M ye normal S^m ye tanjant herhangi bir u vektörü için

$$\begin{aligned} g([D_x h''(y,z)-D''_x h''(y,z)],u) &= g(D_x h''(y,z),u) \\ &= g(\overline{\nabla}_x h''(y,z),u)=-g(h''(y,z),\overline{\nabla}_x u) \\ &= -g(h''(y,z),h''(x,u))=0 \end{aligned} \qquad (\text{II.3.17})$$

elde edilir. Böylece (II.3.9) ile $u \neq 0$ olduğundan

$$D_x h''(y,z)-D''_x h''(y,z)=0 \qquad (\text{II.3.18})$$

bulunur. Sonuç olarak $x, y, z \in TM$ tanjant vektörleri için h'' nün paralelliğinden ve (II.3.14) de (II.3.18) i kullanırsak

$$\left(\overline{\nabla}_x h\right)(y,z) = \left(\overline{\nabla}_x h'\right)(y,z) + \left(\overline{\nabla}_x h''\right)(y,z) + \left[h''(x, h'(y,z)) + h''(y, h'(z,x)) + h''(z, h'(x,y))\right]$$

elde edilir. $\left(\overline{\nabla}_x h''\right)(y,z)=0$ olduğundan

$$\left(\overline{\nabla}_x h\right)(y,z) = \left(\overline{\nabla}_x h'\right)(y,z) + \left[h''(x, h'(y,z)) + h''(y, h'(z,x)) + h''(z, h'(x,y))\right] \qquad \text{(II.3.19)}$$

olur , bu ifade de $y=x=z$ olarak alırsak

$$\left(\overline{\nabla}_x h\right)(x,x) = \left(\overline{\nabla}_x h'\right)(x,x) + 3h''(h'(x,x),x) \qquad \text{(II.3.20)}$$

ifadesini elde ederiz. Ayrıca (II.3.20) den

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_x \overline{\nabla}_x h\right)(x,x) &= D_x\left(\left(\overline{\nabla}_x h\right)(x,x)\right) - 3\left(\overline{\nabla}_x h\right)(\nabla'_x x, x) \\ &= D_x\left(\left(\overline{\nabla}_x h'\right)(x,x)\right) + 3D_x\left(h''(h'(x,x),x)\right) - 3\left(\overline{\nabla}_x h\right)(\nabla'_x x, x) \\ &= I + 3II - 3III\end{aligned} \qquad \text{(II.3.21)}$$

olarak elde edilir. Buradan (II.3.8) ve Codazzi denkleminden

$$\begin{aligned}I &= D'_x\left(\left(\overline{\nabla}_x h'\right)(x,x)\right) + h''\left(\left(\overline{\nabla}_x h'\right)(x,x),x\right) \\ &= \left(\overline{\nabla}_x \overline{\nabla}_x h'\right)(x,x) + 3\left(\overline{\nabla}_x h'\right)(\nabla'_x x, x) + h''\left(\left(\overline{\nabla}_x h'\right)(x,x),x\right)\end{aligned} \qquad \text{(II.3.22)}$$

olur. Ayrıca $\overline{\nabla} h'' = 0$ olduğundan , (II.3.1), (II.3.2) (II.3.11) ve (II.3.18) den

$$\begin{aligned}II &= D''_x\left(h''(h'(x,x),x)\right) \\ &= -h''\left(A'_{h'(x,x)}x, x\right) + h''\left(\left(\overline{\nabla}_x h'\right)(x,x),x\right) \\ &\quad + 2h''\left(h'(\nabla'_x x, x), x\right) + h''\left(h'(x,x), \nabla'_x x\right) + h''\left(h'(x,x), h'(x,x)\right)\end{aligned} \qquad \text{(II.3.23)}$$

dir ve (II.3.19) dan

$$III = \left(\overline{\nabla}_x h'\right)(\nabla'_x x, x) + 2h''\left(h'(\nabla'_x x, x), x\right) + h''\left(h'(x,x), \nabla'_x x\right) \qquad \text{(II.3.24)}$$

elde edilir. (II.3.22) , (II.3.23) , (II.3.24) ifadeleri (II.3.21) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_x \overline{\nabla}_x h\right)(x,x) &= \left(\overline{\nabla}_x \overline{\nabla}_x h'\right)(x,x) + 4h''\left(\left(\overline{\nabla}_x h'\right)(x,x),x\right) \\ &\quad - 3h''\left(A'_{h'(x,x)}x, x\right) + 3h''\left(h'(x,x), h'(x,x)\right)\end{aligned} \qquad \text{(II.3.25)}$$

elde edilir.

TEOREMİN İSPATI: S^m nin bir alt manifoldu M olsun. $SM(m+1)$ bir Öklid uzayı olduğundan S^m nin alt manifoldları hakkında konuşabiliriz.

Eğer M , noktasal 2-düzlemsel normal kesite sahip ise ,bu taktirde açık olarak M , noktasal 3-düzlemsel normal kesite sahiptir. Böylece M nin noktasal 3-düzlemsel normal kesite sahip olduğunu kabul edebiliriz. Bu taktirde Lemma (II.3.3) deki (II.3.16) denkleminden herhangi bir $x \in T_pM$ tanjant vektörü için

$$\alpha(x)\left[\left(\overline{\nabla}_x \overline{\nabla}_x h\right)(x,x) + 3h\left(x, A_{h(x,x)}x\right)\right] + \beta(x)\left(\overline{\nabla}_x h\right)(x,x) + \gamma(x)h(x,x) = 0 \qquad (\text{II.3.26})$$

olacak şekilde $\alpha(x) \neq 0, \beta(x) \neq 0, \gamma(x) \neq 0$ katsayıları vardır. (II.3.6),(II.3.20) ve (II.3.25) kullanıldığında herhangi $x \in T_pM$ tanjant vektörü için (II.3.26) dan aşağıdaki denklemlere sahip oluruz:

$$\alpha(x)\left[\left(\overline{\nabla}_x \overline{\nabla}_x h\right)(x,x) + 3h\left(x, A_{h(x,x)}x\right)\right] + \beta(x)\left(\overline{\nabla}_x h\right)(x,x) + \gamma(x)h(x,x) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\alpha(x)[\left(\nabla_x \nabla_x h'\right)(x,x) + 4h''\left(\left(\overline{\nabla}_x h'\right)(x,x), x\right) - 3h''\left(A'_{h'(x,x)}x, x\right) + 3h''\left(h'(x,x), h'(x,x)\right) \\
&+ 3h'\left(x, A_{h(x,x)}x\right) + 3h''\left(x, A_{h(x,x)}x\right)] + \beta(x)\left[\left(\nabla_x h'\right)(x,x) + 3h''\left(h'(x,x), x\right)\right] \\
&+ \gamma(x)\left[h'(x,x) + h''(x,x)\right] = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha(x)[4h''\left(\left(\overline{\nabla}_x h'\right)(x,x), x\right) - 3h''\left(A'_{h'(x,x)}x, x\right) + 3h''\left(h'(x,x), h'(x,x)\right) \\
&+ 3h'\left(x, A_{h(x,x)}x\right) + 3h''\left(x, A_{h(x,x)}x\right)] + 3\beta(x)h''\left(h'(x,x), x\right) \\
&+ \gamma(x)h''(x,x) + \alpha(x)\left[\left(\nabla_x \nabla_x h'\right)(x,x)\right] + 3h'\left(x, A_{h(x,x)}x\right) + \beta(x)\left(\nabla_x h'\right)(x,x) + \gamma(x)h'(x,x) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha(x)[4h''\left(\left(\overline{\nabla}_x h'\right)(x,x), x\right) - 3h''\left(A'_{h'(x,x)}x, x\right) + 3h''\left(h'(x,x), h'(x,x)\right) \\
&+ 3h''\left(x, A_{h(x,x)}x\right)] + 3\beta(x)h''\left(h'(x,x), x\right) + \gamma(x)h''(x,x) = 0
\end{aligned} \qquad (\text{II.3.27})$$

(II.3.27) ifadesinin $h''(x,x)$ ile iç çarpımı yapılırsa , $x \in T_pM$ birim tanjant vektörü olduğundan (II.3.16) dan

$$g\left(h''\left(\left(\overline{\nabla}_x h'\right)(x,x), x\right), h''(x,x)\right) = 0 \qquad (\text{II.3.28})$$

$$g\left(h''\left(x, A'_{h'(x,x)}x\right), h''(x,x)\right) = 4\left|h'(x,x)\right|^2 \qquad (\text{II.3.29})$$

$$g\left(h''\left(h'(x,x), h'(x,x)\right), h''(x,x)\right) = 2\left|h'(x,x)\right|^2 \qquad (\text{II.3.30})$$

$$g\left(h''\left(x, A_{h(x,x)}x\right), h''(x,x)\right) = 4\left|h(x,x)\right|^2 \qquad (\text{II.3.31})$$

$$g\left(h''\left(h'(x,x), x\right), h''(x,x)\right) = 0 \qquad (\text{II.3.32})$$

$$g\left(h''(x,x), h''(x,x)\right) = 4 \qquad (\text{II.3.33})$$

elde edilir. Bu eşitlikler (II.3.26) da yerine yazılırsa

$$4.3\alpha(x).0 - 3.\alpha(x).4.\left|h'(x,x)\right|^2 + 3.\alpha(x).2.\left|h'(x,x)\right|^2 + 3.\alpha(x).4\left|h(x,x)\right|^2 + 3\beta(x).0 + \gamma(x).4 = 0$$

veya

$$3\alpha(x)\left[-4|h'(x,x)|^2+2|h'(x,x)|^2+4|h(x,x)|^2\right]+4\gamma(x)=0 \qquad (\text{II.3.34})$$

olur. Buradan da

$$h(x,y)=h'(x,y)+h''(x,y)$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$3\alpha(x)|h'(x,x)|^2+6\alpha(x)|h''(x,x)|^2+2\gamma(x)=0 \qquad (\text{II.3.35})$$

elde edilir. Ayrıca (II.3.27) ifadesinin $h''(y,y)$ ile iç çarpımı yapılırsa

$$g(h''((\overline{\nabla}_x h')(x,x),x),h''(y,y))=0 \qquad (\text{II.3.36})$$

$$g(h''(x,A'_{h'(x,x)}x),h''(y,y))=2|h'(x,x)|^2 \qquad (\text{II.3.37})$$

$$g(h''(h'(x,x),h'(x,x)),h''(y,y))=2|h'(x,x)|^2 \qquad (\text{II.3.38})$$

$$g(h''(x,A_{h(x,x)}x),h''(y,y))=2|h(x,x)|^2 \qquad (\text{II.3.39})$$

$$g(h''(h'(x,x),x),h''(y,y))=0 \qquad (\text{II.3.40})$$

$$g(h''(x,x),h''(y,y))=2 \qquad (\text{II.3.41})$$

bu sonuçlar (II.3.27) de yerine yazılırsa

$$3\alpha(x)\left[-2|h'(x,x)|^2+2|h'(x,x)|^2+2|h(x,x)|^2\right]+2\gamma(x)=0 \qquad (\text{II.3.42})$$

ifadelerine sahip oluruz. Buradan da

$$3\alpha(x)|h'(x,x)|^2+3\alpha(x)|h''(x,x)|^2+\gamma(x)=0 \qquad (\text{II.3.43})$$

olur. Burada $x\in T_pM$ ve $\|y\|=1$, y , x' e diktir (II.3.27) ve (II.3.43) birleştirilirse

$$\alpha(x)|h'(x,x)|^2=0 \qquad (\text{II.3.44})$$

ve

$$3\alpha(x)|h''(x,x)|^2+\gamma(x)=0 \qquad (\text{II.3.45})$$

elde edilir. (II.3.44) den de ya $h'(x,x)=0$ yada $\alpha(x)=0$ dır. Bununla birlikte, son durumda biz hala $h'(x,x)=0$ ifadesine sahip olduğumuzdan eğer $\alpha(x)=0$ ise bu taktirde (II.3.45) den $\gamma(x)=0$ dır ve böylece (II.3.27) den $\alpha(x)\neq 0,\beta(x)\neq 0,\gamma(x)\neq 0$ olduğundan

$$h''(h'(x,x),x)=0 \qquad (\text{II.3.46})$$

elde edilir. Böylece (II.3.16) ile

$$0 = g\left(h''\left(h'(x,x),x\right),h''\left(h'(x,x),x\right)\right) = \left|h'(x,x)\right|^2 \qquad \text{(II.3.47)}$$

ifadesine sahip olunur ki bu da

$$h'(x,x) = 0$$

ifadeşini gerektirir. Şimdi $\forall x \in T_pM$ için $h'(x,x) = 0$ olduğunu söyleyebiliriz. Böylece M, S^m de total geodezik olmak zorundadır.

Tersine eğer M, S^m de S^n ,n-birim küresinin bir parçası ise bu taktirde M, S^m de total geodezik olduğundan (II.3.20) den biz $(\overline{\nabla}_x h)(x,x) = 0$ ifadesine sahip oluruz ki bu da Lemma II.3.2 ve Lemma II.3.3 deki (II.3.15) ve (II.3.16) nın M üzerinde korunduğunu ifade eder. Böylece M noktasal 2-düzlemsel ve noktasal 3-düzlemsel normal kesite sahiptir

III.BÖLÜM

GEODEZİK NORMAL KESİTLİ PSEUDO ÖKLİDYEN UZAYIN MİNİMAL YÜZEYLERİ

m-boyutlu s-indeksli pseudo Öklidyen uzayı E_s^m ve M , E_s^m nin r-indeksli $(r \leq s)$ n boyutlu bir yüzeyi olsun.

TANIM III.1 (**Düzlemsel geodezik**): Bir izometrik immersiyon

$$İ: M \to E_s^m$$

M'nin her geodeziğini E_s^m nin iki boyutlu düzleminin içine resmediyorsa bu izometrik immersiyona düzlemsel geodezik denir [9].

Bir Riemann manifoldunda tanımlanan izotropik tanımına benzer olarak Pseudo-izotropik tanımını da verebiliriz.

h , M 'nin ikinci temel formu olsun ve $<,>$, E_s^m de skaler iç çarpım olsun . Eğer $<h(X,X),h(X,X)>$, M'nin p' deki birim X tanjant vektörü seçiminden bağımsızsa yani normu her noktada invaryant kalıyorsa o zaman M, p' de pseudo izotropik olarak adlandırılır . Eğer M , her noktada pseudo izotropikse M' ye pseudo izotropiktir denir [4].

M , E_s^m içinde bir hiperyüzey olsun. M ve E_s^m' nin konneksiyonları sırasıyla ∇ ve $\overline{\nabla}$ olsun. M nin ikinci temel formu h olmak üzere $\forall X,Y \in \chi(M)$ *için*

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)$$

dir. Buradan ise $X \in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi^{\perp}(M)$ için

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_{\xi} X + \nabla_X^{\perp} \xi$$

yazılabilir[2].

M nin ikinci temel formu h olmak üzere h nın $\overline{\nabla} h$ kovaryant türevi $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = D_X(h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)$$

olarak tanımlanır. Burada

$$D = \nabla_X^{\perp}$$

dır. Ayrıca Weingarten dönüşümü ile ikinci temel form arasında

$$\langle h(X,Y),\xi\rangle = \langle Y, A_\xi X\rangle$$

bağıntısı vardır [3].

M nin Riemann-Cristoffel eğrilik tensörüne R diyelim. Bu durumda M üzerindeki X,Y,Z ve W vektör alanları için Gauss denklemi

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle h(X,W),h(Y,Z)\rangle - \langle h(Y,W),h(X,Z)\rangle \qquad \text{(III.1)}$$

olarak yazılabilir. Benzer olarak Ricci-Mainardi denklemi ise $\forall X,Y \in \chi(M)$ ve $\tau,\xi \in \chi^{\perp}(M)$ için

$$\overline{R}(X,Y)\xi = \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y\xi - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X\xi - \overline{\nabla}_{[X,Y]}\xi$$

dir veya

$$\overline{\nabla}_X\xi = -A_\xi X + \nabla_X^{\perp}\xi$$

eşitliği kullanılırsa

$$\overline{R}(X,Y)\xi = \overline{\nabla}_X\left(-A_X Y + \nabla_Y^{\perp}\xi\right) - \overline{\nabla}_Y\left(-A_\xi X + \nabla_X^{\perp}\xi\right) - \left(-A_\xi[X,Y] + \nabla_{[X,Y]}^{\perp}\xi\right)$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenir ve

$$[A_\tau, A_\xi] = A_\tau A_\xi - A_\xi A_\tau$$

eşitliği kullanılırsa

$$\overline{R}(X,Y)\xi = R^{\perp}(X,Y)\xi - h(X,A_\xi Y) - (\nabla_X A)_\xi Y + (\nabla_Y A)_\xi X$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafını $\tau\in\chi^{\perp}(M)$ ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$\langle \overline{R}(X,Y)\xi,\tau\rangle = \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\tau\rangle - \langle [A_\tau, A_\xi]X, Y\rangle$$

olur.

$$\langle \overline{R}(X,Y)\xi,\tau\rangle = 0$$

olduğundan

$$\langle \bar{R}(X,Y)\xi,\tau\rangle = \langle [A_\tau, A_\xi]X, Y\rangle \qquad \text{(III.2)}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$R^\perp(X,Y) = D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]}$$

dır.

AÇIKLAMA III.2: $E^m_{s,\,t}$ simetrik bilineer form olan < , > metriğine göre , s tane bileşeninin negatif , t tane bileşeni 0 olan ve $m\text{-}n\text{-}t$ tane bileşeni pozitif olan E^m yi gösterir. Eğer $t=0$ olursa Pseudo Öklidyen uzay E_s^m i elde ederiz.

TANIM III.3 (**Tamlık**) **:**M_r^n , $E^m_{s,\,t}$ nin bir alt manifoldu M ve M nin ikinci temel formu h olsun. Eğer

$$\bar{\nabla}h = 0$$

ise ikinci temel forma paraleldir denir. İkinci temel formu paralel olan

$$\dot{I} : M_r^n \to E^m_{s,t}$$

izometrisine tamdır denir [9].

E_s^m bir Pseudo-Öklidyen uzayı ve M_r^n bağlantılı bir alt manifold olsun. $p\in M$ ve p den geçen bir non-null geodezik eğri γ olsun. γ nın yay parametresiyle verildiğini kabul edelim yani

$$\langle \gamma'(s), \gamma'(s)\rangle = \varepsilon = \pm 1$$

olsun.

$$\gamma(0)=p \text{ olmak üzere } \gamma'(s)=T \qquad \text{(III.3)}$$

yazılabilir. Gauss denkleminden

$$\gamma''(s) = \bar{\nabla}_T T = \nabla_T T + h(T,T) \qquad \text{(III.4)}$$

olur. γ geodezik olduğundan $\nabla_T T=0$ olacağından

$$\gamma''(s) = h(T,T) \qquad \text{(III.5)}$$

elde edilir. (III.4) eşitliğinin s' ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\gamma'''(s) &= \bar{\nabla}_T(\nabla_T T + h(T,T)) \\ &= \nabla_T\nabla_T T + h(T,\nabla_T T) - A_{h(T,T)}T + D_T h(T,T) \\ &= -A_{h(T,T)}T + D_T h(T,T)\end{aligned} \qquad \text{(III.6)}$$

bulunur. (III.6) nın bir daha türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\gamma^{(4)}(s) &= \overline{\nabla}_T\left(-A_{h(T,T)}T + D_T h(T,T)\right)\\ &= -\overline{\nabla}_T A_{h(T,T)}T + \overline{\nabla}_T D_T h(T,T)\\ &= -\nabla_T (A_{h(T,T)}T) - h\left(A_{h(T,T)}T, T\right) - A_{D_T^{h(T,T)}}T + D_T D_T h(T,T)\end{aligned} \qquad (\text{III.7})$$

elde edilir.

ÖNERME III.3: M s-indeksli E_s^m Pseudo Öklidyen uzayında indeksi r olan geodezik normal kesitli alt manifold olsun. Bu durumda $\gamma(0)$ da M nin bir normal doğrultusu olan $\gamma'(0)$, γ nın bölgesindeki s için $\gamma(s)$ de M nin normal kesiti $\gamma'(0)$ doğrultusunda kalır [9].

TEOREM III.4: Geodezik normal kesitli Pseudo Öklidyen uzay E_s^m nin alt manifoldları sabit Pseudo izotropiktirler.

İSPAT: M, s indeksli E_s^m Pseudo Öklidyen uzayının r-indeksli bir alt manifoldu olsun. $p \in M$ ve γ normal kesitli , $\gamma'(0)$ doğrultusunda olan ve p den geçen bir eğri olsun.γ nın yay parametresi s-olmak üzere (III.3) den (III.7) ye kadar olan denklemler geçerlidir. (III.3) önermesinden ve (III.6) dan dolayı

$$A_{h(T,T)}T \wedge T = 0 \qquad (\text{III.8})$$

dir.(2.7) yi T ile dış çarpıma tabi tutarsak

$$\gamma^{(4)}(s) \wedge T = -\nabla_T A_{h(T,T)}T \wedge T - h\left(A_{h(T,T)}T, T\right) \wedge T - A_{D_T^{h(T,T)}}T \wedge T + D_T D_T h(T,T) \wedge T$$

olur.

$$\gamma^4(s) \wedge T = 0$$

olup buradan

$$-\nabla_T\left(A_{h(T,T)}T\right) \wedge T - A_{D_T^{h(T,T)}}T \wedge T = 0 \qquad (\text{III.9})$$

dır. (III.9) dan

$$(\nabla_T\left(A_{h(T,T)}T\right) + A_{D_T^{h(T,T)}}T) \wedge T = 0 \qquad (\text{III.10})$$

dır. γ boyunca $t=T(0)$ alalım. $u \in T_pM$ için $<t,u>=0$ ve $A_{h(t,t)}t$, t ye paralel olduğundan

$$\langle A_{h(t,t)}t,u\rangle = \langle h(t,t),h(t,u)\rangle = 0 \tag{III.11}$$

dır. p keyfi bir nokta ve p de keyfi non-null tanjant vektör t olduğundan (III.11) , M nin pseudo izotropik olmasını gerektirir.

t nin birim vektör olduğu yerde $\lambda(p)=< h(t,t),h(t,t) >$ olsun. $< t,z >=0$ olacak şekilde $z\in T_pM$ alalım.γ boyunca paralel, p nin 0 komşuluğundaki z yi $< T,Z >=0$ olacak şekilde Z vektör alanına genişletelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}Z(p)\lambda &= \frac{1}{2}Z(p)\langle h(T,T),h(T,T)\rangle \\ &= \langle(\overline{\nabla}_Z h)(T,T),h(T,T)\rangle\end{aligned}$$

Codazzi eşitliğinden

$$(\overline{\nabla}_Z h)(T,T) = (\overline{\nabla}_T h)(Z,T)$$

değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}Z(p) &= \langle(\overline{\nabla}_T h)(Z,T),h(T,T)\rangle \\ &= \langle D_T h(Z,T),h(T,T)\rangle(p) - \langle h(\overline{\nabla}_T Z,T),D_T h(T,T)\rangle(p) \\ &= \langle D_T h(Z,T),h(T,T)\rangle(p)\end{aligned}$$

bulunur. $<h(Z,T),h(T,T)>$ ifadesinin T yönünde türevi alınıp düzenlenirse

$$\begin{aligned}T\langle h(Z,T),h(T,T)\rangle &= T\langle h(Z,T),h(T,T)\rangle(p) - \langle h(Z,T),D_T h(T,T)\rangle(p) \\ &= -\langle h(Z,T),D_T h(T,T)\rangle(p)\end{aligned}$$

olup, Weingarten ve ikinci temel form arasındaki bağıntı kullanılırsa

$$T\langle h(T,T),h(T,T)\rangle = -\langle A_{D_T^{h(T,T)}}T,Z\rangle$$

olur. (III.10) eşitliğinden

$$\begin{aligned}T\langle h(T,T),h(T,T)\rangle &= \langle\nabla_T(A_{h(T,T)}T),Z\rangle(p) \\ &= T\langle A_{h(T,T)}T,Z\rangle(p) \\ &= 0\end{aligned}$$

dır. λ nın , Z yönündeki türevi 0 olduğundan

$$\lambda=<h(t,t),h(t,t)>=c(sbt) \qquad (\text{III}.12)$$

elde edilir.
T, M nin birim tanjant vektörü olmak üzere (III.8) ,(III.10) ve (III.12) ifadeleri birlikte kullanılırsa, γ geodezik olduğundan

$$A_{D_T^{h(T,T)}}T=0 \qquad (\text{III}.13)$$

elde edilir. $z\in T_pM$ birim tanjant vektörü için $<h(z,z),h(z,z)>=c$ yazılabilir.Bu ifadenin z yönünde kovaryant türevi alınırsa

$$Z\langle h(z,z),h(z,z)\rangle=\left\langle\left(\overline{\nabla}_z h\right)(z,z),h(z,z)\right\rangle=0$$

dır. Burada

$$\left(\overline{\nabla}_z h\right)(z,z)=\left(\overline{\nabla} h\right)(z,z,z)$$

eşitliği kullanılırsa

$$\left\langle\left(\overline{\nabla} h\right)(z,z,z),h(z,z)\right\rangle=0 \qquad (\text{III}.14)$$

bulunur. (III.14) ü M nin p noktasındaki $U_pM=\{z\in T_pM \mid |<z,z>|=1\}$ birim tantant uzayında bir fonksiyon olarak kabul edebiliriz. $u\in T_pM$ ve $t\in U_pM$ için $<t,u>=0$ dır. Codazzi eşitliğini ve (III.14) ü kullanırsak

$$\left\langle\left(\overline{\nabla} h\right)(t,t,u),h(t,t)\right\rangle=0 \qquad (\text{III}.15)$$

elde edilir. Buna göre (III.7) ve (III.13) ifadeleri kullanılırsa $<T,T>=e=\pm 1$ olduğu yerde

$$\gamma^{(4)}(s)=-\nabla_T A_{h(T,T)}T-h\left(A_{h(T,T)}T,T\right)+D_T D_T h(T,T)$$

olur. Buradan

$$\gamma^{(4)}(s)=-eCh(T,T)+\left(\overline{\nabla}^2 h\right)(T^4) \qquad (\text{III}.16)$$

olur. Bu ifadenin s ye göre türevini alırsak

$$\gamma^{(5)}(s)=C^2T-eC\left(\overline{\nabla} h\right)(T^3)-A_{\left(\overline{\nabla}^2 h\right)(T^4)}T+D_T\left(\overline{\nabla}^2 h\right)(T^4) \qquad (\text{III}.17)$$

elde edilir. γ , M nin $\gamma(s)$ noktasında normal kesitli olduğunda Önerme III.3 gereğince

$$A_{\left(\overline{\nabla}^2 h\right)(T^4)} T \wedge T = 0 \tag{III.18}$$

elde edilir. p nin 0 komşuluğunda tanımlı Z vektör alanı için $<T,Z>= 0$ ve $\nabla_t Z=0$ olsun. (III.18) den dolayı

$$\left\langle A_{\left(\overline{\nabla}^2 h\right)(T^4)} T, Z \right\rangle = \left\langle \left(\overline{\nabla}^2 h\right)(T^4), h(T,Z) \right\rangle = 0 \tag{III.19}$$

dır. (III.13) ve (III.19) ifadeleri kullanılarak $Z=Z(p)$ olduğu yerde

$$0 = \left\langle \left(\overline{\nabla} h\right)(T^3), h(T,Z) \right\rangle$$

ifadesinin T yönünde kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= T\left\langle \left(\overline{\nabla} h\right)(T^3), h(T,Z) \right\rangle \big| s = 0 \\ &= \left\langle \left(\overline{\nabla}^2 h\right)(t^4), h(t,z) \right\rangle + \left\langle \left(\overline{\nabla} h\right)(t^3), \left(\overline{\nabla} h\right)(t,t,z) \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\overline{\nabla} h\right)(t^3), \left(\overline{\nabla} h\right)(t,t,z) \right\rangle \end{aligned} \tag{III.20}$$

bulunur. Buradan

$$\left\langle \left(\overline{\nabla} h\right)(t^3), \left(\overline{\nabla} h\right)(t^3) \right\rangle$$

birim vektör t nin bağımsız bir seçimi olup M nin noktalarına bağlıdır. Şimdi birim tanjant demeti olan UM üzerinde sürekli olduğunu ispatlıyalım.

γ , $p \in M$ de geodezik olsun. γ boyunca $<T,Z>=0$ ve $\nabla_t Z=0$ olacak şekilde bir Z birim vektör alanı seçelim.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} z\left\langle \left(\overline{\nabla} h\right)(T,T,T), \left(\overline{\nabla} h\right)(T,T,T) \right\rangle &= \left\langle D_Z \left(\overline{\nabla} h\right)(T,T,T), \left(\overline{\nabla} h\right)(T,T,T) \right\rangle (P) \\ &= \left\langle \left(\overline{\nabla}^2 h\right)(z,t,t,t) + 3\left(\overline{\nabla} h\right)(\overline{\nabla}_Z T,t,t), \left(\overline{\nabla} h\right)(t,t,t) \right\rangle \end{aligned}$$

dır. (III.20) eşitliğinden

$$\frac{1}{2} z\left\langle \left(\overline{\nabla} h\right)(T,T,T), \left(\overline{\nabla} h\right)(T,T,T) \right\rangle = \left\langle \left(\overline{\nabla}^2 h\right)(z,t,t,t), \left(\overline{\nabla} h\right)(t,t,t) \right\rangle \tag{III.21}$$

dır. Ricci denkleminden

$$R^{\perp}(z,t)h(t,t) = (\overline{\nabla}_z \overline{\nabla}_t h)(t,t) - (\overline{\nabla}_t \overline{\nabla}_z h)(t,t) - (\overline{\nabla}_{[z,t]} h)(t,t)$$

olup bu ifade düzenlenirse

$$(\overline{\nabla}^2 h)(z,t,t,t) = (\overline{\nabla}^2 h)(t,z,t,t) + R^{\perp}(z,t)h(t,t) - 2h(R(z,t)t,t)$$

olur. Bu eşitlikte (III.21) denkleminin sağ tarafı

$$\left\langle (\overline{\nabla}^2 h)(z,t,t,t), (\overline{\nabla} h)(t,t,t) \right\rangle = \left\langle (\overline{\nabla}^2 h)(t,z,t,t), (\overline{\nabla} h)(t,t,t) \right\rangle + \left\langle R^{\perp}(z,t)h(t,t), (\overline{\nabla} h)(t,t,t) \right\rangle$$
$$-2\left\langle h(R(z,t)t,t), (\overline{\nabla} h)(t,t,t) \right\rangle \qquad \text{(III.22)}$$

olur.

$$\left\langle R^{\perp}(z,t)h(t,t), (\overline{\nabla} h)(t,t,t) \right\rangle = 0$$

olduğundan

$$\left\langle (\overline{\nabla}^2 h)(z,t,t,t), (\overline{\nabla} h)(t,t,t) \right\rangle = \left\langle (\overline{\nabla}^2 h)(t,z,t,t), (\overline{\nabla} h)(t,t,t) \right\rangle - 2\left\langle h(R(z,t)t,t), (\overline{\nabla} h)(t,t,t) \right\rangle \quad \text{(III.23)}$$

$R(z,t)t = A_{h(t,t)}z - A_{h(z,t)}t$ ve (III.13) den dolayı

$$\left\langle h(R(z,t)t,t), (\overline{\nabla} h)(t,t,t) \right\rangle = 0$$

elde edilir. Buradan (III.21) eşitliği

$$\left\langle (\overline{\nabla}^2 h)(z,t,t,t), (\overline{\nabla} h)(t,t,t) \right\rangle = \left\langle (\overline{\nabla}^2 h)(t,z,t,t), (\overline{\nabla} h)(t,t,t) \right\rangle$$

olarak elde edilir. Bu ifadeler kullanılarak (III.21) eşitliği

$$\frac{1}{2} Z\left\langle (\overline{\nabla} h)(T,T,T), (\overline{\nabla} h)(T,T,T) \right\rangle = \left\langle (\overline{\nabla}^2 h)(t,z,t,t), (\overline{\nabla} h)(t,t,t) \right\rangle$$

denklemine dönüşür.

$$\left\langle (\overline{\nabla} h)(Z,T,T), (\overline{\nabla} h)(T,T,T) \right\rangle$$

ifadesinin T yönünde türevi alınır ve düzenlenip (III.23) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\frac{1}{2} Z\left\langle (\overline{\nabla} h)(T,T,T), (\overline{\nabla} h)(T,T,T) \right\rangle = -\left\langle (\overline{\nabla} h)(z,t,t), (\overline{\nabla}^2 h)(t^4) \right\rangle$$

bulunur.Şimdi (III.17) ifadesinin bir daha türevini alalım.

$$\gamma^{(6)}(s) = -eC(\overline{\nabla}^2 h)(T^4) - \nabla_T (A_{(\overline{\nabla}^2 h)(T^4)} T) - h(A_{(\overline{\nabla}^2 h)(T^4)} T, T) - A_{(\overline{\nabla}^3 h)(T^5)} T + (\overline{\nabla}^4 h)(T^6)$$

olur. γ , $\gamma(s)$ de M nin normal kesiti olduğu sürece γ boyunca

$$\left(\nabla_T(A_{(\bar{\nabla}^2 h)(T^4)}T)+(A_{(\bar{\nabla}^3 h)(T^5)}T)\right)\wedge T=0$$

dır. $<T,Z>=0$ ve yukarıdaki ifadeden dolayı

$$\left\langle \nabla_t\left(A_{(\bar{\nabla}^2 h)(T^4)}T\right)+\left(A_{(\bar{\nabla}^3 h)(T^5)}T\right),Z\right\rangle=0 \qquad (\text{III.24})$$

dır

$$0=t\left\langle A_{(\bar{\nabla}^2 h)(T^4)}T,Z\right\rangle=\left\langle \nabla_t\left(A_{(\bar{\nabla}^2 h)(T^4)}T,Z\right)\right\rangle+\left\langle A_{(\bar{\nabla}^2 h)(T^4)}T,\nabla_t Z\right\rangle$$

olup $\nabla_t Z=0$ olduğundan

$$t\left\langle A_{(\bar{\nabla}^2 h)(T^4)}T,Z\right\rangle=\left\langle A_{(\bar{\nabla}^3 h)(T^5)}T,Z\right\rangle=\left\langle\left(\bar{\nabla}^3 h\right)(T^5),h(t,z)\right\rangle=0 \qquad (\text{III.25})$$

dır.

$$\left\langle\left(\bar{\nabla}^3 h\right)(t^5),h(t,z)\right\rangle=0$$

ifadesinin γ boyunca kovaryant türevini alırsak (III.25) ifadesinide göz önünde bulundurursak

$$\left\langle\left(\bar{\nabla}^2 h\right)(t^4),\left(\bar{\nabla}h\right)(t,t,z)\right\rangle=0 \qquad (\text{III.26})$$

dır. Buradan (III.22) eşitliği

$$Z\left\langle\left(\bar{\nabla}h\right)(T^3),\left(\bar{\nabla}h\right)(T^3)\right\rangle=0$$

denklemine indirgenir.
boy$M\geq 2$ den ve M nin her noktasında

$$\left\langle\left(\bar{\nabla}h\right)(T^3),\left(\bar{\nabla}h\right)(T^3)\right\rangle$$

UM nin birim tanjant kümesinde sürekli olduğundan *M* nin her noktasını içine alır.

TEOREM III.4: *M* geodezik normal kesitli *s* indeksli E_s^m Pseudo Öklidyen uzayının *r* indeksli bir alt uzayı olsun .Bu durumda

$$\left\langle\left(\bar{\nabla}h\right)(t^3),\left(\bar{\nabla}h\right)(t^3)\right\rangle$$

M nin *UM* kümesi üzerinde süreklidir[9].

T.C.
TRABZON İLİ
MERKEZ İLÇESİ
GAZİPAŞA MAHALLESİ MUHTARLIĞI

MUH.TEL : 3225015

İKAMETGAH SENEDİ

İli	:	TRABZON
İlçesi	:	ARSİN
Mahalle veya Köyü	:	IŞIKLI
Nufus Cüzdan No	:	B06 828212
Soyadı	:	ERDOĞAN
Adı	:	ELİF
Baba Adı	:	MÜHİTTİN
Ana Adı	:	EMİNE
Doğum Yeri	:	TRABZON
Doğum Tarihi	:	15.03.1978
Medeni Hali	:	BEKAR
Mesleği (işi)	:	
Tabiyeti	:	TC.
Ne Suretle Verildiği	:	BÜYÜK FEN DERSANESİNE VERİLMEK İÇİN
İkametgahı	:	KIZILAY ÇIKMAZI UZUN Sokak ZAFER Apt. No: 4 / 4
Nufus Kaydı	:	**TRABZON / ARSİN**

Hüviyetim hakkında tanzim edilen işbu varakadaki suallerin cevaplarının doğru olduğunu ve tarafıma yapılacak herhangi kanuni tebligatı kabul edeceğimi bildiren ikamet senedidir.

imza

Yukarıda Fotoğrafı yapıştırılarak tasdik edilen ELİF ERDOĞAN in İkametgahı tasdik olunur.

23.09.2003 14:02:21

GAZİPAŞA MAHALLESİ MUHTARI
MUSTAFA NACİ TURHAN

BU BELGE KARŞILIĞINDA =,0 TL ALINMIŞTIR.

KAYNAKLAR

[1] Prof. Dr. H. Hilmi Hacısalihoğlu , Diferensiyel Geometri, A.Ü Fen Fak. 1993

[2] Prof. Dr. Arif Sabuncuoğlu , Diferensiyel Geometri , Haziran 2001

[3] Bayram Şahin , CR Alt Manifoldlarının Geometrisi , Yüksek Lisans Bitirme Tezi , İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü , (1996) , Malatya

[4] Kadri Arslan , Isoparametric Submanifolds With Pointwise k-Planar Normal Sections, Doctor of Philosophy , 1993

[5] Bang-yen Chen, Submanifolds With Planar Normal Sections, Soochow Journal of Mathematıcs, Volume.7, (1981) , 19-24

[6] J. A. Little , Manifolds With Planar Geodesics , J. Differential Geometry, (1976) , 265-285

[7] Bang-yen Chen , Classıfication of Surface With Planar Normal Sections , Journal of Geometry ,Vol.20 (1983) , 122-127

[8] Bang-yen Chen ,Differential Geometry of Submanifolds With Planar Normal Sections , Ann. Mat. Pura Appl. 130 (1982) , 59-66

[9] Young Ho Kim, Minimal Surface of Pseudo Euclidean Space With Geodezic Normal sections, Differantial Geometry and its Application ,(1995),321-329

[10] C. Blomstrom, Planar Geodesic İmmersions in Pseudo-Euclidean Space , Math.Ann. 274 (1986) , 585-598

[11] Y. H. Kim , Surfaces in a Pseudo – Euclidean Space With Planar Normal Sections , J.Geom. 35 (1989) , 120-131

[12] Shi-Jie Li , Submanifolds With Pointwise Planar Normal Sections in a Sphere , J. Geom.70 (2001) , 101-107

[13] S. L. Hong , İsometric İmmersions of Manifolds With Plane Geodesics into Euclidean Space , J.Diff Geom, 8 (1973) ,259-278

ÖZGEÇMİŞ

08.04.1977 yılında Konya'da doğdu. İlköğretimi Kıbrıs ve İzmir'de tamamlayarak 1994 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girmeye hak kazandı. 1998 de yüksek öğrenimini tamamladı. Üç yıl öğretmen olarak görev yaptıktan sonra 2001 de İnönü Üniversitesi Adıyaman Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Öğretim Görevlisi olarak işe başladı.Halen bu görevi yapmaktadır.