

TC
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİJİTAL KONTROL SİSTEMLERİNDE
DAYANIKLILIK ANALİZİ

YASİN KARATAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRİK – ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

MALATYA
Haziran 2007

Tezin Başığı: Dijital Kontrol Sistemlerinde Dayanıklılık Analizi

Tezi Hazırlayan: Yasin KARATAŞ

Sınav Tarihi: 10 Temmuz 2007

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Elektrik Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jürisi Üyeleri (ilk isim jüri başkanı, üçüncü isim tez danışmanı)

Prof.Dr. Hafız ALİSOY

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr.Arif MEMMEDOV

İnönü Üniversitesi

Doç.Dr. Nusret TAN

İnönü Üniversitesi

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onay

Prof.Dr.Ali ŞAHİN
Enstitü Müdürü

Onur Sözü

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Dijital Kontrol Sistemlerinde Dayanıklılık Analizi” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Yasin KARATAŞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİJİTAL KONTROL SİSTEMLERİNDE DAYANIKLILIK ANALİZİ

Yasin KARATAŞ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik – Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

150+X sayfa

2007

Danışman: Doç. Dr. Nusret TAN

Son yıllardaki mikrobilgisayar ve mikroişlemciler sanayindeki gelişmeler dijital kontrol sistemlerini insan hayatının her alanına yerleştirmiştir. Bir kontrol sistem performansının en önemli gereksinimlerinden biri kararlılıktır. Bu durum sistemin, sürekli bir sinyal, dijital sinyal ya da bu iki çeşit sinyali içermesi durumunda da doğrudur. Sürekli zamanlı sistemler için; Routh-Hurwitz kriteri, Nyquist kriteri, Bode ve Nichols diyagramları bilinen ve en çok kullanılan kararlılık analiz metotlarıdır. Bu metotların tamamı bazı, küçük değişiklikler yapılarak dijital kontrol sistemler için de kullanılabilir.

Otomatik kontrol ile ilgili verilen ilk kurslarda anlatılan konuların büyük bir kısmında son yirmi yıl boyunca çok az değişme olmuştur. Klasik kontrolün temel teorileri değişmez iken, son yıllarda kontrol alanında birçok yeni gelişmeler olmuştur. Son yıllarda geliştirilen metotlardan birisi parametrik belirsizlik kullanarak sistemlerin analizidir. Bu tezin amacı parametrik belirsizliğe sahip dijital kontrol sistemlerin dayanıklı kararlılığıyla ilgili metotların araştırılmasıdır. Fiziksel sistemlerdeki belirsizliklerin kaçınılmaz bir gerçek olduğu çok iyi bilinmektedir. Bu nedenle, kontrol sistemlerinin analizinde belirsizlikleri hesaba katmanın bazı avantajları vardır. Bu tez çalışmasında, parametrik belirsizlik içeren dijital kontrol sistemlerinin dayanıklı kararlılığıyla ilgili metotlar üzerinde çalışıldı. Bu tez çalışması bu yönde farklı sonuçlarda sunmaktadır ve yapılan çalışma üç ana bölüme ayrılabilir.

Birinci bölümde dijital kontrol sistemler ve alt başlıkları basit bir şekilde tanımlanarak anlatıldı.

Tezin ikinci bölümü, interval sistemlerdeki parametrik belirsizliklerle ilgilidir. Parametrik belirsizliklere sahip dijital kontrol sistemlerin kararlılığında kullanılan yeni yaklaşımlar bu bölümde incelendi. İnterval transfer fonksiyonların dayanıklı kararlılığı, değer kümesi ve frekans tanım bölgesi kararlılık analiz teknikleri olan Nyquist, Bode ve Nichols eğrileri üzerine tartışıldı. Bazı gerekli yazılım programları MATLAB ortamında hazırlandı. Elde edilen sonuçların pratik uygulamalarda kullanılma potansiyeli vardır. Bu sonuçların diğer belirsizlik yapılarına uygulanabilmesi de mümkündür.

Son bölüm ise oransal-integral-türevsel (PID) kontrolör tasarımı hakkındadır. Bir kontrolör tasarımında dikkat edilmesi gereken özellikler üzerinde durulmuş olup, örneklerle pekiştirilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Otomatik Kontrol, Dijital Kontrol, Kharitonov Teoremi, Kenar Teorem, Kararlılık, Değer Kümesi, Parametre Belirsizliği, Nyquist Diyagramı, Bode Diyagramı, Nichols Diyagramı, Dijital İnterval Polinomlar, Dijital PID Kontrolör.

ABSTRACT

M.S. Thesis

ROBUSTNESS ANALYSIS OF DIGITAL CONTROL SYSTEMS

Yasin KARATAŞ

Inönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Electrical and Electronics Engineering

150+X pages

2007

Supervisor: Assoc.Prof. Dr. Nusret Tan

In recent years the advances made in microcomputer and microprocessor industry have infused digital control systems into the human life. One of the most important requirements in the performance of control system is stability. This is true whether the system has continuous data, digital data or a combination of the two kinds of signal. Routh-Hurwitz criterion, the Nyquist criterion, the Bode plot and the Nichols plot are the most famous and well-known methods of stability analysis for continuous systems. All these methods can be used for stability analysis of digital control systems with some little changes.

Much of the material being taught in a first course on automatic control appears to have changed little over the last two decades. While the basic theories on classical control remain unchanged, there have been many new developments in the field of control theory in recent years. One such topic is the relatively recent development in methods to analyse systems with parametric uncertainty. The goal of this thesis is to investigate some methods of the robust stability analysis of digital control systems with parametric uncertainties. It is well known that the uncertainties in the physical systems are an unavoidable fact. Therefore, taking uncertainties into account while analysing control systems gives some advantages. In this thesis, the methods related to robust stability of digital control systems with parametric uncertainty are studied. This thesis presents additional results in this direction and the work can be divided into three main parts.

The first part presents the digital control systems, which has the simplest definition of its subtitles.

The second part of this thesis deals with the parametric uncertainties of interval systems. Some new approaches used for the stability analysis of digital control systems with parametric uncertainty are investigated in this section. The robust stability of interval transfer functions are discussed using value set and frequency domain stability analysing techniques such as Nyquist, Bode and Nichols diagrams. Some required software programs have been prepared in the MATLAB environment. The results developed in these research work, have potential features to be used for practical applications. It is also possible to extend these results to other uncertainty structures.

The last part is about the design of digital proportional-integral-derivative (PID) controllers. Some specifications have been discussed about the controller design and some examples have been done for intensifying the subject.

KEYWORDS : Automatic Control, Digital Control, Kharitonov Theorem, Edge Theorem, Stability, Value Set, Parametric Uncertainty, Nyquist Diagram, Bode Diagram, Nichols Diagram, Digital Interval Polynomials, Digital PID Controller.

TEŞEKKÜR

Bu tez alıőmasının her aşamasında yardım, tavsiye ve desteğini esirgemededen beni yönlendiren; bilgi birikimlerini bana aktaran ve değerli zamanını ayıran danışman hocam Sayın Doç. Dr. Nusret TAN'a;

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi ve tecrübelerini bizlerle paylaşan Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölüm Başkanlığı'nda görev yapan öğretim üyelerine;

Tüm hayatım boyunca ilgi ve desteklerini benden esirgemeyen değerli AİLEM'e ve tüm sevdiklerime;

Ayrıca meslek hayatımda ve yüksek lisans öğrenimim boyunca yardım ve desteğini benden esirgemeyen Tabur Komutanım Binbaşı Murat PEKŐEN'e;

teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	I
ABSTRACT	III
TEŞEKKÜR	V
İÇİNDEKİLER.....	VI
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VIII
TABLolar LİSTESİ.....	X
SİMGELER DİZİNİ.....	XI
1. OTOMATİK KONTROL SİSTEMLERİ.....	1
1.1. Giriş.....	2
1.2. Kontrol Nedir?.....	3
1.3. Kontrol Sistemi.....	4
1.3.1. Açık Çevrim Kontrol Sistemi.....	4
1.3.2. Kapalı Çevrim Kontrol Sistemi.....	5
1.4. Kontrolün Tarihçesi.....	6
1.5. Kontrol Sisteminin Amacı.....	10
1.6. Sonuç.....	11
2. DİJİTAL KONTROL SİSTEMLER.....	12
2.1. Giriş.....	13
2.2. Dijital Kontrol Sistemler.....	14
2.3. z – Dönüşümü.....	16
2.3.1. z – Dönüşümünün Özellikleri.....	17
2.4. Routh-Hurwitz Kararlılık Kriteri.....	19
2.5. Jury Kararlılık Testi.....	25
2.6. İki Yönlü Lineer (Bilineer) Dönüşüm Yöntemi.....	26
Sonuç.....	30
3. PARAMETRE BELİRSİZLİĞİ İLE İLGİLİ METOTLAR.....	31
3.1. Giriş.....	32
3.2. Belirsizlik Yapı Durumu	33
3.3. Değer Kümesi (Value Set) Kavramı.....	35
3.4. Sıfır Dışlama Prensibi	37
3.5. Segment Lemma.....	38
3.6. Kharitonov Teoremi.....	40
3.7. Kenar Teoremi.....	43
3.8. Onatlı Kharitonov Denklemi.....	47
3.9. 32 Sistem	49
3.10. Sonuç.....	50
4. DİJİTAL KONTROL SİSTEMLERİNDE DAYANIKLI KARARLILIK ANALİZİ.....	51
4.1. Giriş	52
4.2. Kharitonov Teoremi ve Dijital İnterval Polinomlar	53
4.3. Dijital İnterval Polinomların Değer Kümesi ve Kararlılığı	55
4.3.1. Kenar Teoremi	55
4.4. Sonuç	66
5. PARAMETRE BELİRSİZLİĞİ İÇEREN DİJİTAL KONTROL SİSTEMLERİNDE NYQUIST, BODE VE NICHOLS DİYAGRAMLARI.....	67
5.1. Giriş	68
5.2. Nyquist Kararlılık Kriteri.....	69
5.3. Bode Diyagramı.....	77
5.3.1. Bode Diyagramının Üstünlükleri ve Sakıncaları.....	84

5.4. Nichols Diyagramı.....	84
5.5. Sonuç	88
6. DİJİTAL KONTROL TASARIM.....	89
6.1. Giriş	90
6.2. Kontrol Sisteminin Özellikleri.....	92
6.2.1. Kararlı Hal Doğruluğu.....	92
6.2.2. Geçici Cevap.....	93
6.2.3. Kararlılık.....	93
6.2.4. Hassaslık.....	93
6.2.5. Bozukluğu Reddetme (Disturbance Rejection)	94
6.2.6. Kontrol Eforu.....	94
6.3. Sürekli Kontrolörlerin Dijital Gerçekleştirilmesi.....	95
6.3.1. 'P', 'I' ve 'D' Kontrolörlerinin Karakteristikleri.....	96
6.3.2. PID Kontrolörlerin Dijital Gerçekleştirilmesi.....	97
6.3.2.1. Yamuk İntegrasyon.....	99
6.3.2.2. İleri Dikdörtgen İntegrasyon.....	100
6.3.2.3. Geri Dikdörtgen İntegrasyon.....	100
6.4. Sonuç	114
7. SONUÇ.....	115
KAYNAKLAR	117
EKLER.....	120
ÖZGEÇMİŞ.....	150

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1	Bir kontrol sisteminin matematiksel ifadesi..... 3
Şekil 1.2	Açık Çevrim Kontrol Sistemi..... 5
Şekil 1.3	Kapalı Çevrim Kontrol Sistemi..... 5
Şekil 1.4	Ktesibios'un Debi Regülatörü 7
Şekil 1.5	Fliyon'un Seviye Regülatörü 8
Şekil 1.6	Sabit Hız Regülatörü 8
Şekil 1.7	El Cezeri'nin Referans Ayarlanabilir Otomatik Debi Kontrolü..... 9
Şekil 1.8	Watt'ın Buhar Makinesinde Debi Kontrolü..... 10
Şekil 2.1	Bir uçağın otomatik iniş sistemi 14
Şekil 2.2	Hava Aracı Yatay Kontrol Sistemi..... 15
Şekil 2.3	Örnek 2.3 için tasarlanan kontrol sistemi..... 22
Şekil 2.4	Örnek 2.6'ya ilişkin kapalı çevrim dijital kontrol sistem..... 28
Şekil 3.1	Standart geribeslemeli bir istem..... 35
Şekil 3.2	(3.9) eşitliğindeki polinomun değer kümeleri..... 37
Şekil 3.3	Segment lemmanın geometrik ifadesi..... 39
Şekil 3.4	(3.16) eşitliği segmentinin değer kümesi..... 40
Şekil 3.5	Kharitonov dikdörtgeni ve $p_1(s)$ 'in Mikhailov eğrisi..... 42
Şekil 3.6	Kharitonov dikdörtgenlerinin hareketi..... 43
Şekil 3.7	Belirsizlik küpü..... 44
Şekil 3.8	(3.26) polinomunun değer kümesi..... 47
Şekil 4.1	Denklem (4.1) 'deki interval polinomun $0 \leq w \leq 0.9$ için değer kümesi... 54
Şekil 4.2	Denklem (4.8) 'deki kenar polinomunun değer kümesi..... 57
Şekil 4.3	Denklem (4.9) 'daki dijital polinomun değer kümesi..... 58
Şekil 4.4	Denklem (4.13) 'deki dijital interval polinomun $w = 1.5 \text{ rad} / \text{sn}$ 'deki değer kümesi..... 59
Şekil 4.5	Denklem (4.13) 'de ki dijital interval polinomun değer kümesi..... 60
Şekil 4.6	Denklem (4.14) 'deki dijital kontrol sistemin karakteristik denkleminin $K=1$ için kök uzayı..... 61
Şekil 4.7	Denklem (4.14) 'deki dijital kontrol sistemin karakteristik denkleminin $K=1.5$ için kök uzayı..... 62
Şekil 4.8	Denklem (4.14) 'deki dijital kontrol sistemin karakteristik denkleminin $K=2$ için kök uzayı..... 63
Şekil 4.9	Denklem (4.14) 'deki dijital kontrol sistemin karakteristik denkleminin $K=10$ için kök uzayı..... 63
Şekil 4.10	Denklem (4.18) 'deki dijital interval polinomun $w = 5 \text{ rad} / \text{sn}$ 'deki değer kümesi..... 65
Şekil 4.11	Denklem (4.18) 'de ki dijital interval polinomun değer kümesi..... 65
Şekil 4.12	Denklem (4.18) 'deki dijital kontrol sistemin karakteristik denkleminin kök uzayı..... 66
Şekil 5.1	Geribeslemeli bir kontrol sistemi..... 70
Şekil 5.2	Nyquist eğrisi..... 71
Şekil 5.3	Örnek 5.1'e ait Nyquist template eğrileri..... 72
Şekil 5.4	Örnek 5.1'e ait gelişigüzel Nyquist yer eğrileri..... 73
Şekil 5.5	Örnek 5.2'nin $w = 0 \text{ rad} / \text{sn}$ için şekli..... 74
Şekil 5.6	Örnek 5. $0 < w < 60 \text{ rad} / \text{sn}$ için şekli..... 75
Şekil 5.7	Örnek 5. $0 < w < 60 \text{ rad} / \text{sn}$ için sistemin şekli..... 76

Şekil 5.8	Denklem (5.6)'daki dijital interval sistemin $0 < w < 30 \text{ rad / sn}$ 'deki değer kümeleri.	77
Şekil 5.9	Bode diyagramı ve kazanç payı, faz payı, kazanç-faz geçiş frekansı ifadelerinin gösterimi.....	78
Şekil 5.10	Denklem (5.3)'de belirtilen sistemin Bode diyagramları.....	80
Şekil 5.11	Denklem (5.13)'ün $K = 1$ için Bode diyagramı.....	82
Şekil 5.12	Denklem (5.13)'ün $K = 1.5$ için Bode diyagramı.....	82
Şekil 5.13	Denklem (5.13)'ün $K = 2$ için Bode diyagramı.....	83
Şekil 5.14	Denklem (5.13)'ün $K = 1$ için Bode diyagramları.....	83
Şekil 5.15	Örnek 5.8 için çizilen Nichols template eğrileri.....	86
Şekil 5.16	Örnek 5.8 için gelişigüzel çizilen Nichols eğrileri.....	86
Şekil 5.17	Örnek 5.9 için gelişigüzel (random) Nichols eğrileri.....	87
Şekil 6.1	(a) Sürekli kontrol sistem blok diyagramı.....	91
	(b) Dijital kontrol sistem blok diyagramı.....	91
Şekil 6.2	Ayrık kontrol sistem.....	94
Şekil 6.3	Dijital kontrolörlü bir dijital sistem.....	95
Şekil 6.4	Denklem (6.4)'ün basamak cevabı.....	96
Şekil 6.5	(a) Sürekli PID Kontrolör.....	98
	(b) Dijital PID Kontrolör.....	98
Şekil 6.6	Yamuk İntegrasyon Kuralı.....	99
Şekil 6.7	İleri Dikdörtgen İntegrasyon Kuralı.....	100
Şekil 6.8	Geri Dikdörtgen İntegrasyon Kuralı.....	101
Şekil 6.9	Basit bir kütle-yay modeli.....	102
Şekil 6.10	Denklem (6.21)'in açık çevrim basamak cevabı.....	103
Şekil 6.11	Denklem (6.22)'nin kapalı çevrim basamak cevabı.....	104
Şekil 6.12	Denklem (6.23)'ün kapalı çevrim basamak cevabı.....	105
Şekil 6.13	Denklem (6.24)'ün kapalı çevrim basamak cevabı.....	106
Şekil 6.14	Denklem (6.25)'in kapalı çevrim basamak cevabı.....	107
Şekil 6.15	Basit bir sistem.....	107
Şekil 6.16	Denklem (6.27)'nin açık çevrim basamak cevabı.....	108
Şekil 6.17	Denklem (6.28)'in kapalı çevrim basamak cevabı.....	109
Şekil 6.18	PD kontrolörlü sistemin $K_P = 100$ ve $K_D = 10$ için kapalı çevrim basamak cevabı.....	110
Şekil 6.19	PD kontrolörlü sistemin $K_P = 1000$ ve $K_D = 10$ için kapalı çevrim basamak cevabı.....	111
Şekil 6.20	PI kontrolörlü sistemin kapalı çevrim basamak cevabı.....	112
Şekil 6.21	PID kontrolörlü sistemin kapalı çevrim basamak cevabı.....	113
Şekil 6.22	Değişik 'P, I ve D' değerleri için PID kontrolörlü sistemin kapalı çevrim basamak cevabı.....	114

TABLULAR LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Tablo 1 Bazı z – Dönüşüm Formülleri.....	18
Tablo 2 Routh Tablosu	20
Tablo 3 Jury Kararlılık Testi Tablosu	24
Tablo 4 ‘P’, ‘I’ ve ‘D’ Kontrolörlerinin Karakteristikleri	97

SİMGELER DİZİNİ

$r(t)$	Zaman tanım bölgesi giriş sinyali
$y(t)$	Zaman tanım bölgesi çıkış sinyali
$g(t)$	zaman tanım bölgesi sistem gösterimi
$r(s)$	Laplace tanım bölgesi giriş sinyali
$y(s)$	Laplace tanım bölgesi çıkış sinyali
$G(s)$	Laplace tanım bölgesi sistem transfer fonksiyonu
$C(s)$	Kontrolörün Laplace tanım bölgesi gösterimi
$\Delta(s)$	Karakteristik denklem
g_m	Kazanç payı
ϕ_m	Faz payı
ω	Frekans
ω_{cp}	Faz kesim frekansı
ω_{cg}	Kazanç kesim frekansı
$G_c(s)$	Kazanç – Faz payı test edicisi transfer fonksiyonu
ζ	Sönüm oranı

BÖLÜM 1

OTOMATİK KONTROL SİSTEMLERİ

1.1. Giriş

1.2. Kontrol Nedir?

1.3. Kontrol Sistemi

1.3.1. Açık Çevrim Kontrol Sistemi

1.3.2. Kapalı Çevrim Kontrol Sistemi

1.4. Kontrolün Tarihçesi

1.5. Kontrol Sisteminin Amacı

1.6. Sonuç

1.1. Giriş

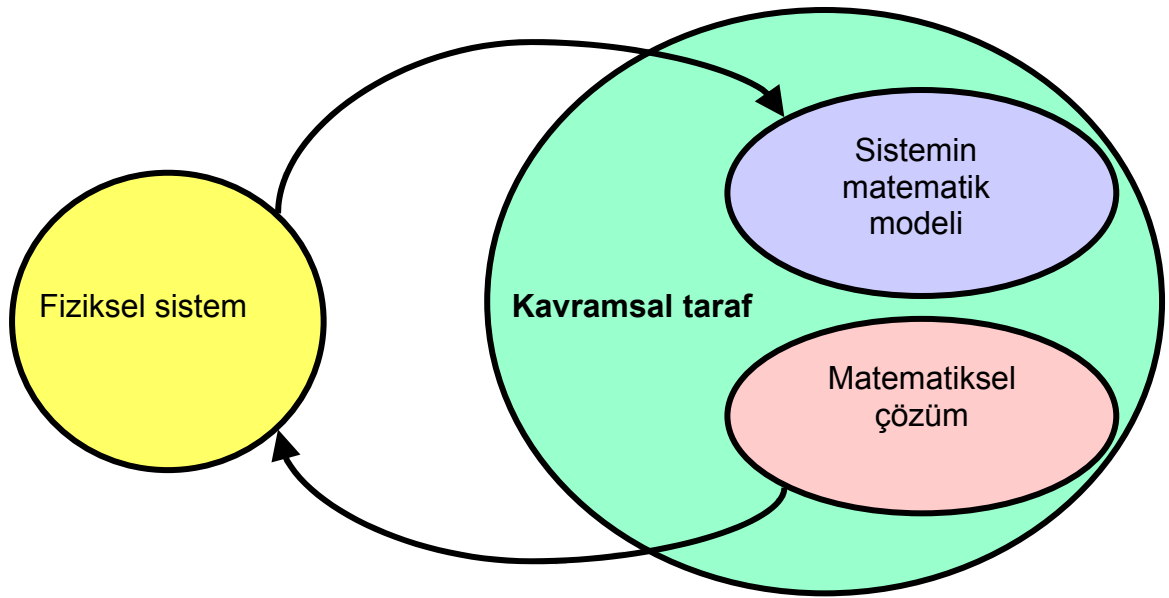
Kontrol çok genel bir kavramdır. Genellikle insan - makine arasındaki bazı etkileşimleri ifade eder. Örneğin, bir yerden bir yere güvenli bir şekilde gidebilmek için aracı kontrol edebilmek gerekir. Bu tür bir sistem manuel bir kontrol gerektirir. Bundan dolayı otomatik kontrol sadece makineleri kapsar [1].

İnsan vücudunda daha karmaşık ve hassas kontrol işlemleri gerçekleşmektedir. Örneğin; acı duyulduğu zaman geri çekilme refleksi, ağır, hafif, sağlam veya narin cisimleri tutma, kavrama işlemi, göz-kas koordinasyonu (yazı yazma), göze giren ışık şiddeti göz bebeğinin açılıp kapanması, insan vücudundaki fizyolojik kontrol işlemlerinden bazılarıdır [2].

Bilim ve teknoloji ilerledikçe insan kas gücünün üretimdeki payı azaltılmaktadır. Üretimi, makine ile veya insan gücüyle diye ayırsak, sürekli makine tarafı artma eğilimindedir. Makinelerin kullanımı da yine insan denetimi yerine başka makineler veya teçhizatlar yardımı ile yapılmaya çalışılmaktadır. Bilgisayarlı takım tezgâhlarında (CNC) nerdeyse çalışan sistem üzerinde insan denetimi yok denecek düzeydedir. Üretilmek istenen ürünün şekli bilgisayar ile çizilerek, elde edilen şekil bilgisayar programına dönüştürülerek üretim yapılmaktadır [3].

Otomatik kontrol sistemleri, çalışan sistemlerin insan gücüne gerek kalmadan denetlenmesini, kontrol edilmesini konu olarak alır. Dünyada emek yoğun üretim pahalı bir üretim yöntemi haline gelmiştir. Otomasyon sistemi ile üretim, daha ekonomik olmaktadır. Üretimin her aşamasına hızlı bir şekilde girmeye devam ediyor. Böylece daha ucuz ve standardı önceden belirtilen ölçülerde üretim yapılabilir. İyi yetişmiş bir kalifiye elemanın manuel tezgâhlarda 4 saatte ürettiği bir ürünü, otomatik sistemler 7 dakika gibi çok kısa bir sürede üretiyor. Arada 34 kat gibi büyük bir zaman farkı var. Bu fark maliyet açısından kapatılamaz büyüklüktedir. Ayrıca, sağlık ve çevre koşulları göz önünde tutulduğunda bazı iş alanlarında insan çalıştırmanın mümkün olmadığı görülmektedir (Zehirli yerler, tehlikeli yerler, çok sıcak yerler gibi) [3]. Belirtilen bu nedenlerden dolayı otomatik kontrolün yani kontrol sistemlerinin önemi ortaya çıkmaktadır.

Büyük önem arz eden kontrol sistemleri üzerine çok eski çağlardan itibaren çeşitli çalışmalar yapılmıştır ve kontrol mühendisliği ortaya çıkmıştır. Kontrol mühendisliği: motor, jeneratör ve güç sistemleri elektriksel sistemler, ısı sistemler, araba ve motosiklet gibi mekanik sistemler, uçak ve füze gibi aerodinamik sistemler, elektrik motoru ve robot kolu gibi elektromekanik sistemler, kağıt makinesi ve çelik levha üretim bandı gibi endüstriyel sistemler, güneş paneli gibi foto-elektrik sistemler, akışkan sistemler, elektromanyetik sistemler, internet gibi bilgi iletim sistemleri, ulaşım sistemleri, sosyal ve ekonomik sistemler, biyolojik, tarım ve ekolojik sistemleri ile ilgilenmektedir [4]. Yani kısaca kontrol, insan hayatının tüm alanları ile ilgilidir. Tüm bu sistemlerin ortak noktası davranışlarının matematiksel ifadelerinin birbirlerine benzemesidir.



Şekil 1.1 Bir kontrol sisteminin matematiksel ifadesi.

1.2. Kontrol Nedir?

Değişken bir niceliğin ya da nicelikler kümesinin önceden belirlenmiş bir koşula uyumunu sağlamaya yönelik gerçekleştirilen işlemler bütünüdür. Genel anlamda bir sistem 3 temel öğeden oluşur:

Bileşenler : Değişken değerlerden oluşup, girdi ve çıktılardır.

Özellikler : Sistemin karakteri ve parametrelerdir.

Bağıntı : Sistem ile özellikler arasındaki ilişkileri gösterir.

Genel bir sisteme ait olarak verdiğimiz bu öğeler tanımlanan bütün kontrol sistemleri için de geçerlidir. Otomatik kontrol sistemleri ile ilgili diğer tanımlar;

Sistem : Bir ya da daha çok amaca ya da sonuca ulaşmak üzere aralarında ilişkiler olan fiziksel ya da kavramsal, birden çok bileşenin oluşturduğu bütündür [3].

Otomatik Kontrol: Kontrol faaliyetlerinin insan girişimi olmaksızın önceden belirlenen bir amaca göre denetimi ve yönlendirilmesidir.

Giriş : Kontrol sisteminde belli bir cevap almak üzere bir dış kaynaktan sisteme uygulanan uyarıdır.

Çıkış : Kontrol sisteminde sağlanan cevaptır.

Hata ve Sapma : Çıkışın herhangi bir anda arzu edilen değere göre farkı.

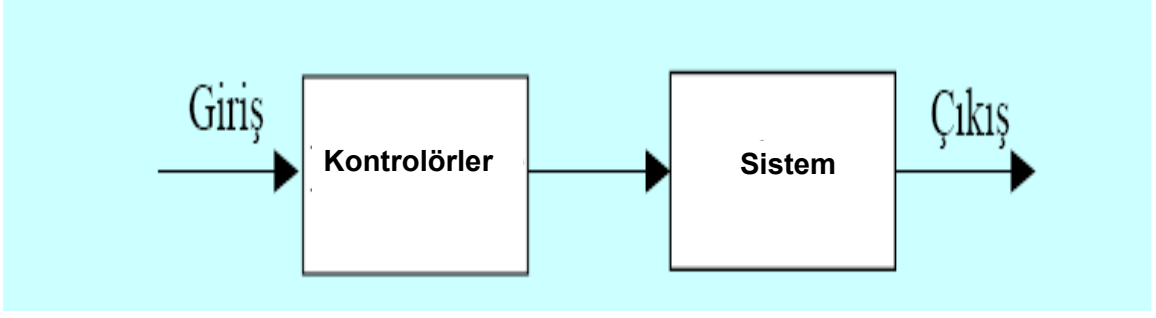
Bozucu Girişler : Sistemin çıkışı üzerinde arzu edilmeyen yönde etki yapan girişlerdir. Bu bozucu girişler sistemin kendi içerisinde mevcut olabilir ya da dışarıdan sisteme etki edebilir [3, 4].

1.3. Kontrol Sistemi

Bir sistemde bir veya birden fazla parametrenin ölçülmesi ve bu ölçülen parametrenin istenen bir değerde, amaca uygun bir şekilde sabit tutulmasını sağlayan sistemdir. Temel olarak ikiye ayrılır. Bunlar açık çevrim kontrol sistemi ve kapalı çevrim kontrol sistemlerdir.

1.3.1. Açık Çevrim Kontrol Sistemi

Açık çevrim kontrol sistemi denetim faaliyetinin denetim sistemi çıkışından bağımsız olduğu sistemdir. Açık çevrim kontrol sistemlerinde; çıkışın giriş üzerinde bir etkisi yoktur. Sistem, giriş sinyali verilmesiyle çalışır ve sonuçta bir çıkış elde edilir. Fakat çıkış sinyalinin konumu ile giriş arasında bir benzerlik bulunmamaktadır.

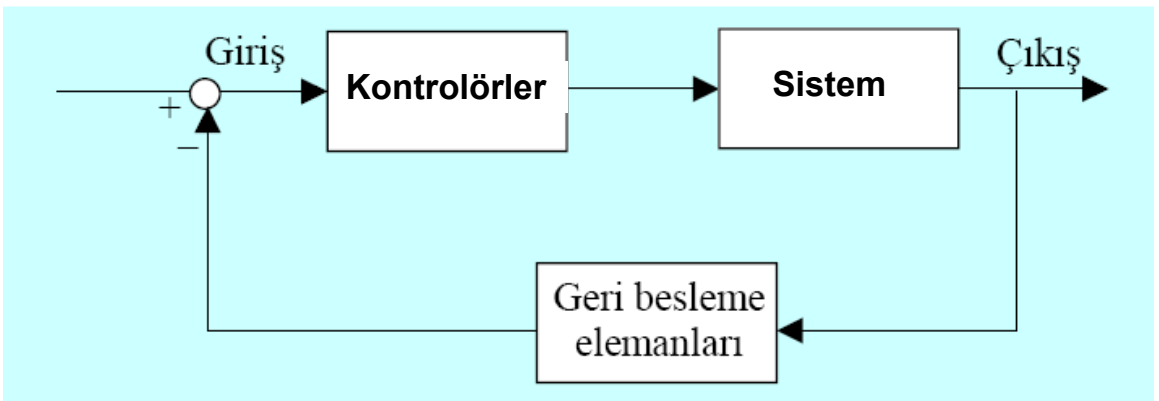


Şekil 1.2 Açık Çevrim Kontrol Sistemi.

Açık çevrim kontrol sistemleri giriş ve çıkış bağıntıları önceden belli olan ve iç veya dış bozuculara maruz kalmayan sistemlerde kullanılırlar. Giriş ve çıkışın bir karşılaştırılması yapılmadığından sistemin çalışma doğruluğu yapılan ayarlamaların derecesine bağlıdır. Bu tür sistemler ya zamanlama ya da sıralama esasına göre çalışırlar. Örneğin; otomatik çamaşır makinelerinde girişin bir program şeklinde verilmesiyle, makine çalışmaya başlar ve sistem daha önceden belirlenmiş program sırasını izler. Trafik ışıklarında ise belirlenen program, düzenlenen zaman ayarına göre çalışır. Işıklar, belirli bir sürede ayarlanan zaman süresi aralığı kadar yanıp söner [5].

1.3.2. Kapalı Çevrim Kontrol Sistemi

Denetim faaliyetinin sistemin denetlenen çıkışına bağlı olduğu sistem kapalı çevrim kontrol sistemidir.



Şekil 1.3 Kapalı Çevrim Kontrol Sistemi.

Kapalı çevrim kontrol sisteminin içinde 'geri besleme' de bir sistemdir ve denetlenen çıkış değişkeninin ölçülüp geri beslenerek istenen giriş değeri ile karşılaştırılmasını sağlar. Geri besleme negatif veya pozitif yönde etki edebilir. Negatif etkinin anlamı, çıkışın girişe ters yönde etki etmesidir. Pozitif etkinin anlamı ise çıkışın girişe aynı yönde etki etmesi demektir. Ancak kapalı çevrim kontrol sisteminde kullanılan çoğunlukla negatif geri beslemedir.

Negatif geribeslemede daima giriş ile çıkışın bir farkı alınır ve bu fark pozitif veya negatif değerli olabilir. Denetim organına bir hata girişi olarak iletilen bu değer çıkışın istenilen değere getirilmesini ve bu değerinde sabit tutulmasını sağlar. Negatif geribesleme endüstriyel sistemlerin en önemli özelliğidir ve daima hatayı en küçük değerinde tutmaya veya sıfır yapmaya çalışır.

Pozitif geribeslemede çıkış girişe aynı yönde etki eder. Bu sebeple çıkışta herhangi bir artış meydana gelecek olursa bu giriş ile toplanarak hata sinyalinde bir artış ve dolayısıyla da denetim sinyalinde bir artış meydana getirir. Bu ise sistemde çıkışı daha da artıracak yönde bir etki yaratır. Pozitif geribesleme, iç döngüler hariç kapalı çevrim denetim sistemlerinde kullanılmaz [6].

1.4. Kontrolün Tarihçesi

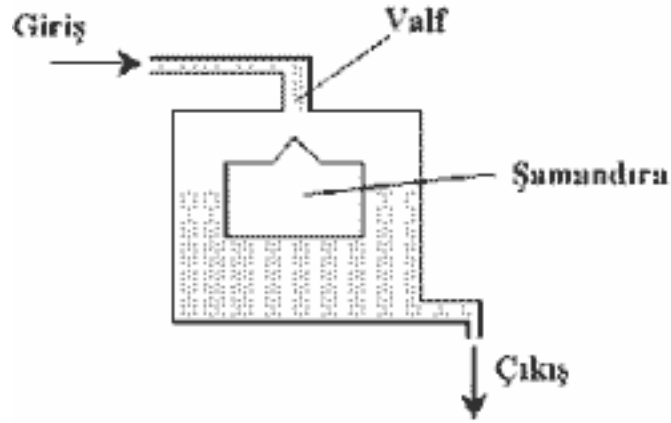
Otomatik kontrolün tarihçesi dört ana kısma ayrılır;

- a. İlk kontrol dönemi : 1900'lere kadar olan devre,
- b. Ön klasik dönem : 1900 – 1940,
- c. Klasik dönem : 1935 – 1960,
- d. Modern kontrol : 1955 ve sonrası [6].

Çağlar boyu bilinçli ya da bilinçsiz gerçekleşmiş olan otomatik kontrol sistemlerini açık çevrimli kontrol sistemlerinden ayırmak için Şekil 1.4'de görülen geribesleme özelliğinin bir sistemin yapısında bulunup bulunmadığını saptamak gerekir. Yapılmış olan incelemelerden teknik yönden gerçekleştirildiği bilinen ya da belgelerde bilinçli olarak tasarlanmış ve çalışabilirliği denenmiş olan en eski otomatik kontrol düzenleri Hellenizme kadar uzanmaktadır. En eski uygulamalar

su saatlerindeki debi kontrolüne ilişkindir. İskenderiye'de Ktesibios'un (M.Ö. III. Yüzyıl) geliştirmiş olduğu debi kontrolü modern otomobillerdeki yakıt akışını ayarlayan karbüratörlere benzemektedir (Şekil 1.4).

Burada amaç saat kabına akan suyun değişimini bir valf şamandıra kombinasyonu ile sabit tutmaktır. Ktesibios'un orijinal eseri kayıp olmasına rağmen kullandığı kontrol düzeninin rekonstrüksiyonu Romalı mimar Vitruvius'un anlatımından elde edilebilmektedir.

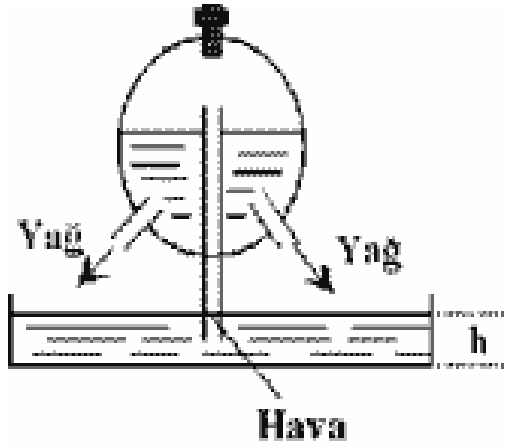


Şekil 1.4 Ktesibios'un Debi Regülatörü

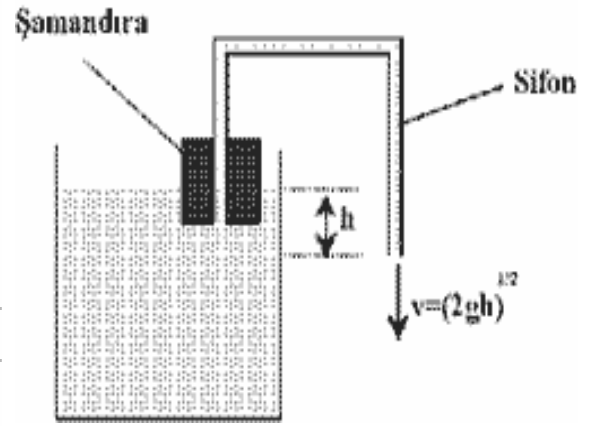
Ktesibios'tan bir nesil sonra yaşadığı tahmin edilen Bizantion'lu Filyon (MÖ. III. Yüzyılın ikinci yarısı) 'Pnömatika' adlı eserinde kandillerde yağ seviyesinin ayarına ilişkin örnekler vermektedir. Bu düzenlerde hava sızdırmayan yağ deposuna giren hava miktarı kandil yağı seviyesi h tarafından kontrol edilerek seviyenin aynı kalması sağlanmış olur (Şekil 1.5). İlginç olan bugün Pnömatika'nın sadece Süleymaniye Kütüphanesi'nde bulunan Arapça çevirilerinden bilinmesidir.

Otomatik kontrol tarihi ile ilgili 3 ncü büyük isim M.S. I. yüzyılda yaşadığı bilinen İskenderiye'li Heron'dur. Heron'un yine Pnömatika adlı eserinde otomatik kontrol düzenekleri yanında modern anlamda otomatlara da rastlanmaktadır. Tapınaklarda ilgi çekmek, hamamlarda özel ihtiyaçları karşılamak ya da sadece eğlenmek için geliştirilen bu kontrol düzenleri ve otomatlar sonraki yüzyıllarda başka çevrelerin özellikle İslam Bilim Adamları'nın ilgisini üzerine çekmekteydi. Yukarıda verilen prensibe dayanan çok sayıda kontrol düzeni yanında dışarıya sabit bir v hızıyla sıvı akıtan şamandıralı sifon ilginç bir regülatör uygulaması

oluşturur (Şekil 1.6). Şamandıralı sifonun su saatlerinde başarıyla uygulandığı varsayılabilir [7].



Şekil 1.5 Fliyon'un Seviye Regülatörü

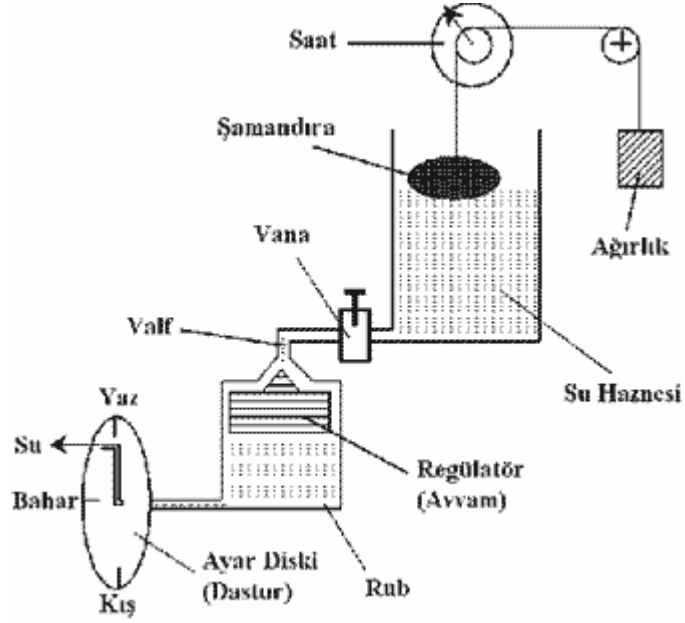


Şekil 1.6 Sabit Hız Regülatörü

Klasik dünyanın eski Mısır'dan aldığı ve geliştirdiği su saatlerinin boyutları Hellenizm'de gittikçe büyüyerek meydan saatleri biçimini almış bulunuyordu. Bu gelenek İslam Dünyası'nda devam etti ve XIII. Yüzyıl'ın başında gerçekleşen güzel eserler ve yazılan ilginç kitaplarla en ileri aşamaya erişildi. Burada konuyla ilgili en geniş eseri vermiş olan Cizreli Eb-ül-iz'i tanıtalım. Batı Dünyası'nda adı kısaca "el Cezeri" olarak bilinen "Bedi'el-Zaman Abu el-izz İsmail el-Razzaz el-Cezeri", XIII. Yüzyıl'ın başında Diyarbakır Artuklu Sarayı'nda saray mühendisi olarak çalışmış olan bir mühendis ve bilim adamıdır. Biz bugün el Cezeri'yi su saatleri, otomatik kontrol düzenleri, fıskiyeler, kan toplama kapları, şifreli anahtarlar ve robotlar gibi pratik ve estetik bir çok düzeni tasarlayan ve bunların nasıl gerçekleştirileceğini anlatan "Kitab-el Hiyal" adlı kitabın yazarı olarak tanıyoruz. Eb ül-iz'in Sultan Kuth el Din Sökmen II (1185-1200) ve kardeşi Nasir el Din Mahmut (1200-1222) zamanında 25 yıl (1181-1206) Artuklular'a hizmet ettiğini ve eserini 1206 yılında tamamladığını kitabının önsözünden öğrenmekteyiz. Bugün İstanbul Topkapı Sarayı III. Ahmed Kütüphanesi'nde bulunan özgün eserin bir ikinci el kopyasıdır. Altı kısımdan oluşan eserde 50 farklı düzen anlatılmaktadır.

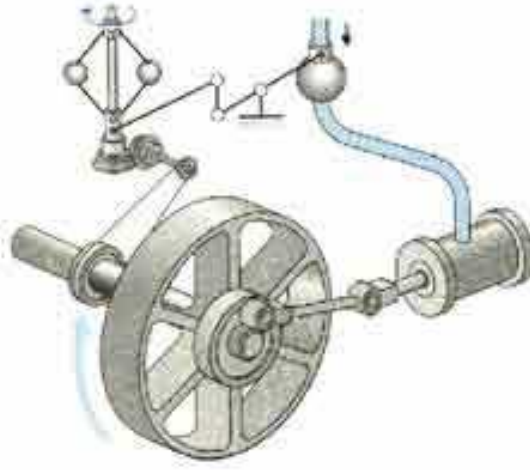
Eserde ele alınan 11 adet saatin ikisi otomatik debi kontrollü, su saatlerinden oluşur. Bu saatlerde de Ktesibios'un buluşu olan regülatörler kullanılmaktadır. Ancak İslamiyet'te güneşin doğuşu ile batışı arasındaki

zamanın 12 eşit parçaya bölünmesi gerektiğinden, düzene regülatörün referans seviyesini mevsimlere göre ayarlayan bir sistem ilave edilmiştir (Şekil 1.7).



Şekil 1.7 El Cezeri'nin Referans Ayarlanabilir Otomatik Debi Kontrolü.

Batı'da otomatik kontrol düzenleri ilkin simya ilmiyle uğraşan çevrelerde gelişti. Altını sentetik olarak imal etmeye çalışan simyacılar ortamın sabit bir ısıda olması gerektiğine inanmaktaydılar. Böylece Drebbel 1610'da ilk otoklavı gerçekleştirmiş oldu. Yöntem sonraki yüzyıllarda kuluçka makinesine (Reaumur 1750) ve nihayet buhar kazanlarına uygulandı (Henry 1771, Bonnemain 1777). Seviye kontrolü Hellenizm ve İslamiyet'teki parlak geçmişe rağmen 18. Yüzyıl'da adeta tekrar keşfedilerek buhar kazanlarına uygulanmaya başladı (Brindley 1758, Polzunov 1765). Basınç kontrolü 1707 de Papin'in düdüklü tencereye benzer buluşu ile gelişti, Delap (1799), Murray (1799), Boulton ve Watt'in (1820) yöntemleri buhar kazanlarında uygulama alanı buldu (Şekil 1.8) [7].



Şekil 1.8 Watt'ın Buhar Makinesinde Debi Kontrolü.

Kontrol teorisindeki diğer önemli çalışmalar “ön klasik dönem” de **Minorsky, Hazen ve Nyquist** tarafından yapılmıştır. 1922’de Minorsky, dümenli gemilerde sistemin differansiyel denklemini tanımlayarak nasıl kararlı yapılabileceğini göstermiştir. Nyquist, kalıcı durum sinüzoidal girişler için açık çevrim cevabına dayanarak kapalı çevrim kararlılığını belirlemiştir. 1940’ların sonundan 1950’lerin başına kadar kök-yer eğrisi metodu Evans tarafından başarılı bir şekilde geliştirilmiştir.

1960’lardan itibaren sayısal bilgisayarlar, karmaşık sistemlerin zaman tanım bölgesi analizini mümkün kılmıştır. 1960’lardan 1980’lere deterministik ve stokastik sistemlerin optimal kontrolü, bunların yanı sıra kompleks sistemlerin öğrenilmesi ve uyarlanabilmesi başarıyla gerçekleştirildi. 1980’lerden itibaren kontrol teorisindeki gelişmeler robust yani dayanıklı kontrol etrafında olmuştur [8].

1.5. Kontrol Sisteminin Amacı

Genel olarak bir kontrol sisteminin amacını, kontrol sisteminin elemanları aracılığı ile girişleri kullanarak çıkışları önceden belirlenmiş bir şekilde kontrol etmek şeklinde özetleyebiliriz.

Özellikle mühendislik sistemlerindeki önemi artan otomatik kontrol, insanın fizyolojik yeteneklerini aşan uygulamalarda insanın hakimiyetini sağlar.

İnsanları, sürekli tekrar eden işlerden kurtararak zamandan ve iş gücünden tasarruf sağlar. Otomatik kontrolün mühendislik sistemlerinde kullanılması, gerek teorik tasarım, gerekse uygulama bakımından daha esnek, sade, kolayca ayarlanabilen ve verimi yüksek çözümlere imkan tanımaktadır [2].

Otomatik kontrol sistemi bir devrede bir veya bir çok fiziksel büyüklüğün değişimini kontrol etmek amacıyla geliştirildiğine göre, iyi bir kontrol sisteminden beklenen çalışma aşağıdaki özellikleri yerine getirmelidir.

a. Sistem de meydana gelen herhangi bir bozucu etkiden sonra bile değişkenin değeri set değerinden minimum şekilde sapma olmalıdır.

b. Bozulma sonunda, normal çalışmaya en kısa zamanda dönebilmelidir.

c. Çalışma şartlarında meydana gelen değişimlerden ötürü olacak sapma set değerinden minimum seviyede olmalıdır. Ancak bu durum da istenen, her ne kadar değişim olsa da istenen değerden çok uzak olmamalıdır. Yani set değerine yakın olmalıdır [6].

1.6. Sonuç

Tezin bu bölümünde kısaca kontrol sistemleri ile ilgili başlıklara ve otomatik sistemler ile ilgili çok eski çağlardan itibaren günümüze kadar yapılan çalışmalara değinilmeye çalışılmıştır. Kontrol işlemlerinin belirlenmesi ve otomatik kontrol mekanizmalarının kurulması, öncelikli olarak bu işlemleri gerektiren amaçların ve istenen davranışların kesin biçimde tanımlanmasını, buna bağlı olarak olayların oluşturduğu ortamın, olayların sebep-sonuç ilişkilerinin ve davranış özelliklerinin incelenmesini gerektirir [2]. Bu yüzden otomatik kontrol, bu tür konuların incelendiği bir bilim dalıdır. Değinilen konularla ilgili detaylı bir çalışma yapmak isteyenler son bölümde belirtilen kaynaklardan ve [9]'da belirtilen kitaptan faydalanabilirler.

BÖLÜM 2

DİJİTAL KONTROL SİSTEMLER

- 2.1. Giriş
- 2.2. Dijital Kontrol Sistemler
- 2.3. z – Dönüşümü
 - 2.3.1. z – Dönüşümünün Özellikleri
- 2.4. Routh-Hurwitz Kararlılık Kriteri
- 2.5. Jury Kararlılık Testi
- 2.6. İki Yönlü Lineer (Bilineer) Dönüşüm Yöntemi
- 2.7. Sonuç

2.1. Giriş

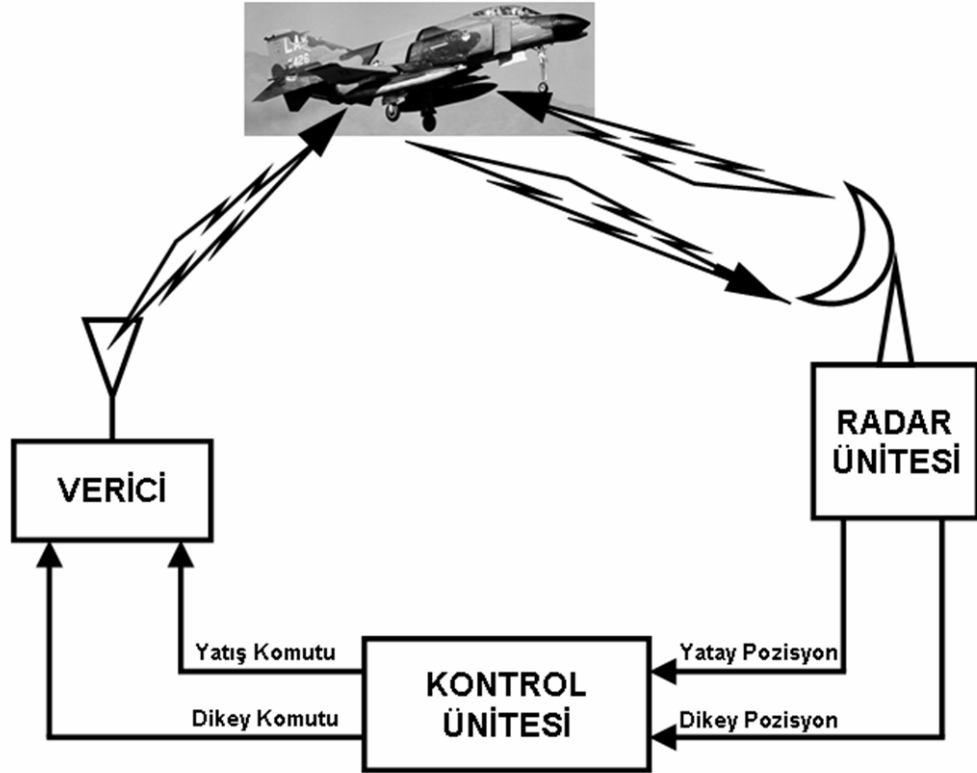
Kompensatör (kontrolör) gibi kullanılan dijital bilgisayarlarda son otuz yılda büyük gelişmeler yaşanmıştır. Dijital koşullarda birçok sistem yapısı analog koşullara oranla daha iyi sonuçlar vermektedirler. Kullandıkları işaretler bakımından dijital kontrol sistemler normal ya da alışlagelmiş kontrol sistemlerinden farklılıklar gösterir. Alışlagelmiş kontrol sistemlerinin tamamında analog (sürekli) işaretler kullanılır. Dijital kontrol sistemlerinde, kontrol düzeninin bir kısmında ya da tamamında zamanda süreksiz işaretler (discreet-in-time signals), darbe (pulse) şeklinde işaretler vardır [10]. Dijital kontrol sistemler, işlemleri kontrol edebilmek için dijital sinyaller ve dijital bilgisayarlar kullanır. Dijital bilgisayarlar sinyalleri dijital (sayısal) formda alırlar ve işlem yaparlar. Bilgisayarlar, birçok girdiyi alabilir ve bu girdileri işleyebilmektedir [11]. Pratikte kullanılan dijital kontrol sistemlerindeki işaretler, sürekli işaretler, örneklenmiş işaretler (sampled data) ile bilgisayar ya da mikroişlemciler ve dijital transdüktörlerin ürettiği dijital işaretlerden oluşur. Örneklenmiş işaretler, kontrol sistemlerinde kullanılan sürekli işaretlerin darbe dizisi (pulse-train) ile modüle edilmesi sonucu elde olunan ve değeri örnekleme anlarında sürekli işarete eşit olan, darbe dizisi şeklinde süreksiz işaretlerdir.

Kontrol sistemlerinde en az bir tane geribesleme devresi kullanılmaktadır. Dijital bilgisayarlar, geribeslemeli kontrol sistemlerinde bir kompensatör yani kontrolör olarak kullanılırlar. Çünkü bilgisayar veriyi sadece belirli aralıklarda alır. Bu yüzden bilgisayarlı kontrol sisteminin performansını tanımlamak ve analiz etmek için bir metodun geliştirilmesi gerekir [11]. Sistemde kontrol edilen büyüklük, kontrol edilen büyüklüğün izlediği bir referans büyüklük ve bu iki büyüklük arasındaki farktan oluşan bir hata büyüklüğü vardır. Çoğunlukla çıkış adı verilen kontrol edilen büyüklük, hataya bağlı olarak sistem tarafından kontrol edilir ve değiştirilir. Sürekli işaretle çalışan alışlagelmiş kontrol sistemlerinin analiz ve sentezinde sistemin matematik modelinin kurulması esastır. Bu kontrol sistemlerinin matematik modelleri, zaman tanım bölgesinde, eğer sistem parametreleri zamanla değişmiyorsa ve lineer ise normal diferansiyel denklemlerle ya da durum denklemleri ile verilir. Dijital kontrol sistemlerinin matematik modelinin elde edilmesinde, fark denklemleri kullanılmaktadır. Alışılmış kontrol sistemlerinin s – bölgesi analizine benzer şekilde, dijital kontrol

sistemlerinin matematik modeli z -domeyninde, z -dönüşümü transfer fonksiyonu ile verilir.

Tezin bu bölümünde öncelikle örnek bir dijital kontrol sistem üzerinde durulacak ve sonra z -dönüşümünden bahsedilecektir. Daha sonra dijital kontrol sistemlerinin kararlılık analizinde kullanılan Routh-Hurwitz kararlılık kriteri, Jury'nin kararlılık testi ve iki yönlü lineer (bilineer) dönüşüm yöntemi üzerinde durulacaktır.

2.2. Dijital Kontrol Sistemler

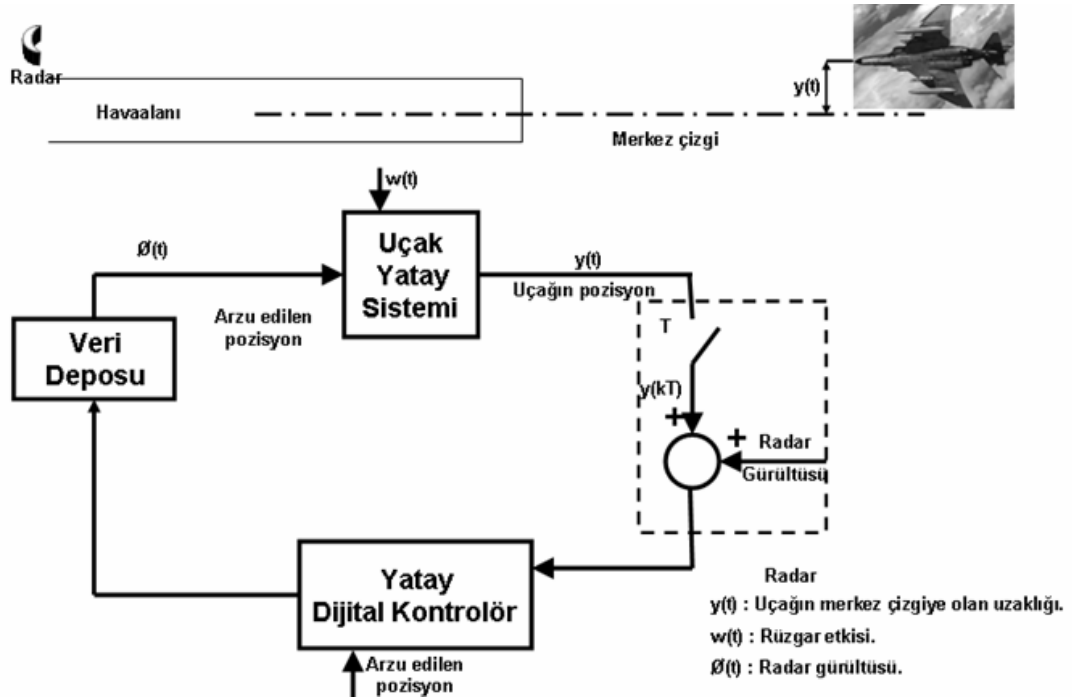


Şekil 2.1 Bir uçağın otomatik iniş sistemi.

Bir dijital kontrol sistemin temel yapısı, şekil 2.1' de görülen otomatik uçak iniş sistemi ile tanımlanabilir. Sistem, üç temel parçadan oluşmaktadır. Bunlar; hava aracı, radar ünitesi ve kontrol ünitesidir. İşlem esnasında radar ünitesi, uçağın yaklaşık yatay ve dikey pozisyonunu ölçer ve sonra kontrol ünitesine gönderir. Kontrol ünitesi bu ölçümlerden en uygun dikey ve yatış komutlarını

hesaplar. Uçağın hareketini sağlayacak olan bu komutları uçağın otopilotuna gönderir.

Şekil 2.1' de görülen kontrol ünitesi bir dijital bilgisayardır. Uçağın yatay pozisyonunu kontrol eden yatay kontrol sistemi ve uçağın yüksekliğini kontrol eden dikey kontrol sistemi birbirinden bağımsızdır. Böylece yatış (bank) komutu uçağın sadece yatay pozisyonuna, dikey (pitch) komutu ise sadece yüksekliğine etki eder [12].



Şekil 2.2 Hava Aracı Yatay Kontrol Sistemi.

Şekil 2.2' de yatay kontrol sisteminin blok diyagramı görülmektedir. Uçağın yatay pozisyonu olan $y(t)$, hareket yönünün uzatılmış merkezi çizgiye olan yatay uzaklıktır. Kontrol sistemi $y(t)$ 'nin sıfır olması için gayret eder. Radar ünitesi her 0.05 saniyede bir $y(t)$ 'yi ölçer. Böylece $y(kT)$, $t = 0.05 sn$ ve $k = 0,1,2,3,...$ için $y(t)$ 'nin örneklenmiş değeridir. Dijital kontrolör bu örneklenmiş değerleri işleyerek, arık yatış komutu $\phi(kT)$ 'yi meydana getirir. Uçak üzerinde bulunan veri deposu, sürekli olarak en son gelen $\phi(kT)$ değerini bir sonraki değer gelene kadar hafızada tutar. Yatış komutu her $t = 0.05 sn$ de

bir kendini günceller. Buna örnekleme periyodu denir. Hava aracı ise gelen bu yatış komutlarına yatay konumunu $y(t)$ 'yi değiştirerek cevap verir.

Şekil 2.2' de görülen blok diyagramda iki adet girdi daha görülmektedir. Bunlar, sistemde var olması istenmeyen bozukluklardır. Bunlardan $w(t)$, uçağın yatay konumunu direkt olarak etkileyen rüzgar girdisidir. İkinci girdi ise mevcut radar gürültüsüdür. Bu bozuklukta; radar zaman zaman uçağın konumunu tam olarak ölçemez. Bu bozukluk uçağın kesin konumu ile ölçülen konum arasındaki farktır. Bu mevcut sistemdeki tasarım problemi, rüzgar ve radar bozukluğunun neden olduğu $y(t)$ 'yi mümkün olduğu kadar küçük tutmaktır. Yapılan tasarımın etkinliğini yüksek tutmak için rüzgar girdisi $w(t)$, yatış komut girdisi $\phi(t)$ ve yatay konum $y(t)$ arasındaki matematiksel ilişkiyi bilmek gerekir [12]. Yani sistemin matematiksel modelini bilmek gerekir.

Bir kontrolör tasarımı yaparken dikkat edilmesi gereken hususlara; altıncı bölüm olan dijital kontrol tasarım kısmında değinilecektir.

2.3. z – Dönüşümü

Sürekli zamanlı kontrol sistemlerinde Laplace dönüşümü kullanılır; z – dönüşümü ise, doğrusal fark denklemlerinin ve ayrık ya da sayısal verili sistemlerin çözümünde işlevsel bir yöntem olarak kullanılmaktadır.

$e(k)$ sonlu ya da sonsuz bir darbe dizisi olsun ve $e(k)$ 'nın $k = 0, 1, \dots$ için bir değerler ya da olaylar dizisini ifade ettiğini varsayalım. z – dönüşümü, z gerçek ve sanal kısımları olan karmaşık bir değişken olmak üzere,

$$E(z) = e(k) \text{ 'nin } z \text{ – dönüşümü} = Z[e(k)]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e(k) z^{-k} \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır. (2.1) ifadesinin önemli bir özelliği, z – dönüşümünün gerçek tanım bölgesindeki bir değerler dizisini, karmaşık z – tanım bölgesine dönüştürdüğüdür [13].

Örnek 2.1

$$e(k) = \varepsilon^{-akT} \text{ ise } Z\{e(k)\} = ?$$

Öncelikle $e(k)$, denklem (2.1)'de yerine konur.

$$Z\{e(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{-akT} z^{-k} \text{ ve elde edilen bu denklem güç serisine açılır.}$$

$$E(z) = 1 + \varepsilon^{-aT} z^{-1} + \varepsilon^{-2aT} z^{-2} + \dots$$

$$= 1 + (\varepsilon^{-aT} z^{-1}) + (\varepsilon^{-aT} z^{-1})^2 + \dots$$

$$\Rightarrow E(z) = \frac{1}{1 - \varepsilon^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - \varepsilon^{-aT}}, \quad \left| \varepsilon^{-aT} z^{-1} \right| < 1$$

2.3.1. z – Dönüşümünün Özellikleri

z – dönüşümü analizinde bir çok yönden fayda sağlayan bazı z – dönüşüm özelliklerine kanıtlanmadan değinilecektir [10].

$$a. \quad Z\{\alpha e_1(k) + \beta e_2(k)\} = \alpha E_1(z) + \beta E_2(z) \quad (2.2)$$

$$b. \quad Z\{e(k-n)\} = z^{-n} E(z) \quad (2.3)$$

$$Z\{e(k \pm n)\} = z^{\pm n} E(z) \quad (2.4)$$

$$c. \quad Z\{e(k+n)\} = z^n \left[E(z) - \sum_{k=0}^{n-1} e(k)z^{-k} \right] \quad (2.5)$$

Bir yanlı dönüşüm;

$$Z\{e(k-n)\} = z^{-n} E(z) + e(-1)z^{-n+2} + \dots + e(-n)z^0$$

$$d. \quad Z\{e^{\alpha k} e(k)\} = E(ze^{-\alpha}) \quad (2.6)$$

$$e. \quad \lim_{z \rightarrow 1} E(z) = e(0) \text{ Eğer } e(k) \text{ sağa doğru gelişen bir taraflı dizi ise;}$$

$$f. \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{k \rightarrow 1} e(k) \quad (2.7)$$

Eğer $z=1$ noktası $E(z)$ 'in yakınsaklık dairesinin üstünde ya da içinde ise ve $e(k)$ bir taraflı sağa doğru gelişen bir darbe dizisi ise;

$$g. Z\{ke(k)\} = -z \frac{dE(z)}{dz} \quad (2.8)$$

$$h. Z\{k^n e(k)\} = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^n E(z) \quad (2.9)$$

$$i. Z\{e_1(k) * e_2(k)\} = E_1(z)E_2(z) \quad (* \text{ konvolüsyon gösterir}) \quad (2.10)$$

Tablo 1 Bazı z – Dönüşüm Formülleri

	Darbe Dizisi	$\{e(k)\}$	z – Dönüşümü $E(z)$
1.	$u(k) = 1$	$k \geq 0$	$z/(z-1)$
2.	$\delta(k)$		1
3.	k	$k \geq 0$	$z/(z-1)^2$
4.	a^k	$k \geq 0$	$1/(1-az^{-1}) = z/(z-a)$
5.	a^{k-1}	$k \geq 1$	$1/(z-a), \quad z \geq a$
6.	$-a^{k-1}$	$k \leq 0$	$1/(z-a), \quad z < a$
7.	$1/k$	$k \geq 0$	$-\ln(1-z^{-1}), \quad z > 1$
8.	k^2	$k \geq 0$	$z(z+1)/(z-1)^3$
9.	ka^k	$k \geq 0$	$az/(z-a)^2$
10.	$\sin(ak)$	$k \geq 0$	$z \sin a / (z^2 - 2z \cos a + 1)$
11.	$\cos(ak)$	$k \geq 0$	$z(z - \cos a) / (z^2 - 2z \cos a + 1)$
12.	$a^k \sin(bk)$	$k \geq 0$	$az \sin b / (z^2 - 2az \cos b + a^2)$
13.	$a^k \cos(bk)$	$k \geq 0$	$(z^2 - az \cos b) / (z^2 - 2az \cos b + a^2)$

2.4. Routh-Hurwitz Kararlılık Kriteri

Routh-Hurwitz kriteri, sabit katsayılı polinom sıfırlarını, sağ ve sol yarı s -düzlemine göre, denklemi çözmeden belirleyen yöntemdir [13]. Dijital sistemlerin kararlılığı için ise z 'ye göre tanımlanmış karakteristik denklemin köklerinin birim çember içinde olup olmadığı araştırılır. Bu bakımdan Routh-Hurwitz kriterinin dijital sistemlerde kullanılması için birim çemberin içinin w -düzlemi gibi yeni bir düzlemin sol yarısına dönüştürülmesi ve sonra Routh kriterinin uygulanması gerekir. Bu bölümde öncelikli olarak Routh-Hurwitz kriteri açıklanacak, daha sonra Jury kararlılık testi ve z -düzleminde birim çemberin içini yeni w -düzleminde sol yarıya düşürecek iki yönlü lineer (bilineer) dönüşüm açıklanacaktır.

Routh-Hurwitz kriterini açıklamak için;

$$q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \quad (2.11)$$

karakteristik denklemini ele alalım. $q(s)$ köklerinin sağ yarı düzlemde olup olmadığını Routh kriteri ile incelemeye başlamadan önce aşağıda belirtilen iki yeter ve gerek koşulun sağlanıp sağlanmadığına bakılır.

a. Eğer s 'nin herhangi kuvvetinin bir tanesinin katsayısı sıfır ise ya da negatif ise, karakteristik denklemin sağ yarı s -düzleminde ya da jw ekseninde kökü vardır. Routh kararlılık kriterini uygulamaya gerek yoktur. Sağ yarı düzlemde kökün bulunması sistemin kararlı olmadığını gösterir.

b. Bütün katsayıların pozitif ve sıfırdan farklı olması halinde sistemin sağ yarı s -düzleminde kökleri bulunabilir ve sistem kararsız olabilir.

Routh tablosu oluşturulurken s 'nin en yüksek kuvvetinin katsayısından başlanır [10].

Tablo 2 Routh Tablosu

s^n	b_n	b_{n-2}	b_{n-4}	...
s^{n-1}	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	...
s^{n-2}	c_1	c_2	c_3	...
:	d_1	d_2	d_3	...
s^1	j_1			
s^0	k_1			

$$c_1 = \frac{b_{n-1}b_{n-2} - b_n b_{n-3}}{b_{n-1}}$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_{n-3} - b_{n-1} c_2}{c_1}$$

$$c_2 = \frac{b_{n-1}b_{n-4} - b_n b_{n-5}}{b_{n-1}}$$

$$d_2 = \frac{c_1 b_{n-5} - b_{n-1} c_3}{c_1}$$

$$c_3 = \frac{b_{n-1}b_{n-6} - b_n b_{n-7}}{b_{n-1}}$$

:

denklemleri kullanılarak tabloda yer alan diğer katsayılar bulunur. Routh tablosunun bir satırının tüm elemanları sıfır oluncaya kadar eleman değerleri belirlenir. Bir satırın bütün elemanları sıfır olunca bu işlem durdurulur. Routh tablosu oluşturulduktan sonra birinci sütun kontrol edilir. Eğer işaret değişimi var ise sistem kararsız olur.

Routh tablosu oluşturulurken iki özel durumla karşılaşılabılır. Bunlar:

1. Birinci sütunda sadece tek bir elemanın sıfır olarak ortaya çıkması durumunda sıfır yerine ε gibi sonlu küçük bir pozitif değer konulur ve tablo oluşturulmaya devam edilir. Tablo tamamlandıktan sonra ε değeri sıfır yapılır.

2. Tablodaki herhangi bir satırın tüm elemanları sıfırsa o satırın üstündeki satır elemanlarından yardımcı polinom elde edilir. Yardımcı polinomun türevi alınarak sıfır olan satır elemanları yerine bu türevin katsayıları konulur ve tablo oluşturulmaya devam edilir [6].

Örnek 2.2

Aşağıda verilen sistemin kararlılığını inceleyelim,

$$\Delta(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 3s + 63 \quad (2.12)$$

Denklem (2.12)'nin Routh tablosu oluşturulur.

s^5	1	4	3
s^4	1	24	63
s^3	-20	-60	0
s^2	21	63	0
s	0	0	0

Son satırın tamamı sıfır olduğu için bir üsteki satırdan yardımcı denklem oluşturulur ve oluşturulan denklemin türevi alınır. Ortaya çıkan katsayılar tamamı sıfır olan satıra yazılır.

$$y(s) = 21s^2 + 63 \quad (2.13)$$

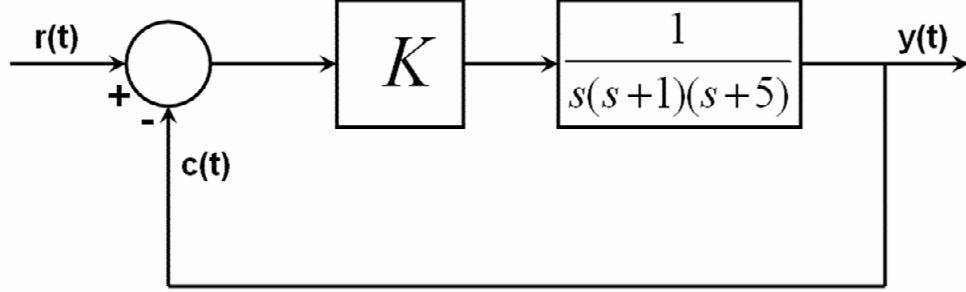
$$\frac{dy(s)}{ds} = 42s$$

s^1	42	0
s^0	63	

Sonuç olarak Routh tablosunun birinci sütunundaki katsayıları kontrol ettiğimizde, ikinci satırdan üçüncü satıra ve üçüncü satırdan dördüncü satıra geçerken toplamda iki sefer işaret değişikliği olmuştur. Dolayısıyla sistem kararsızdır.

Örnek 2.3

K'nın hangi değerleri için sistem kararlıdır?



Şekil 2.3 Örnek 2.3 için tasarlanan kontrol sistemi.

Öncelikle sistemin karakteristik denklemi,

$$\Delta(s) = 1 + K \frac{1}{s(s+1)(s+5)} = s^3 + 6s^2 + 4s + K \quad (2.14)$$

bulunur ve Routh tablosu oluşturulur.

s^3	1	5
s^2	6	K
s	$\frac{30-K}{6}$	
s^0	K	

Sistemin kararlı olabilmesi için birinci sütundaki katsayıların tamamının pozitif olması gerekmektedir. Dolayısıyla $K > 0$ ve $\frac{30-K}{6} > 0$ olması gerekir.

Sonuç olarak $0 < K < 30$ değerleri için sistem kararlıdır.

2.5. Jury'nin Kararlılık Testi

Sürekli zamanlı sistemlerde düşük dereceli sistemlerin kararlılığını hesaplamada, Routh-Hurwitz kriteri basit ve kullanışlı bir tekniktir. Bununla beraber z-düzleminin kararlılık sınırı s- düzlemininkinden farklıdır. Bu yüzden ayrık zamanlı sistemlerinde karakteristik denklem; z'nin bir fonksiyonu olarak tanımlanmış ise, Routh-Hurwitz kriteri kullanılmaz. Ayrık zamanlı sistemlerde, Routh-Hurwitz kriterine benzer şekilde, kararlılık kriteri olarak z'nin bir fonksiyonu olarak yazılabilen Jury'nin kararlılık testi kullanılır [12]. Jury kararlılık testi; Jury ve Blanchard tarafından önerilen ve dijital kontrol sistemleri kararlılığının doğrudan z – düzleminde analizini sağlayan bir kararlılık test yöntemidir. Dijital kontrol sistemi karakteristik denklemi,

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \quad (2.15)$$

olarak tanımlansın. a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 gerçel sayılardır. a_n 'in pozitif olması varsayımı ile Jury kararlılık test tablosu hazırlanır. Bu tabloda $p(z)$ ikinci dereceden ise yalnız birinci satır vardır. Karakteristik denklem üçüncü dereceden ise üç satır, n . dereceden ise $n + 1$ satır vardır.

Tablo 3 Jury Kararlılık Testi Tablosu

	z^0	z^1	z^2	z^{n-k}	z^{n-1}	z^n	$n \geq 2$
1.	a_0	a_1	a_2	a_{n-k}	a_{n-1}	a_n	
2.	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_k	a_1	a_0	
3.	b_0	b_1	b_2	b_{n-k}	b_{n-1}			
4.	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{k-1}	b_0			
5.	c_0	c_1	c_2	c_{n-k}				
6.	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	c_{k-2}				
7.	d_0	d_1	d_2	d_{k-2}				
8.	d_{n-3}	d_{n-4}	d_{n-5}						
	$:$	$:$	$:$							
	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4					
	h_4	h_3	h_2	h_1	h_0					
	p_0	p_1	p_2	p_3						
	p_3	p_2	p_1	p_0						
	q_0	q_1	q_2							

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-k-1} \\ b_n & b_k \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

$$d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-2-k} \\ c_n & c_k \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

$p(z)$ karakteristik denkleminin, z -düzleminde birim çemberin üstünde ya da dışında kökü bulunmaması için, yani sistemin kararlı olması için gereken koşul;

$$\begin{aligned} q(1) > 0 & \quad q(-1) > 0 & \quad n \text{ çift} & \quad (2.19) \\ & \quad q(-1) < 0 & \quad n \text{ tek} & \end{aligned}$$

$$|a_0| < a_n \quad |b_0| > |b_{n-1}| \quad |c_0| > |c_{n-2}| \quad |d_0| > |d_{n-3}|$$

olmalıdır [10].

Jury tablosu oluşturulduktan sonra eğer tek numaralı satırların (1, 3, 5, ...) İlk elemanları "0" dan büyük ise bütün köklerin birim çemberin içinde olduğuna karar verilir. Yani $p(z)$ polinomu kararlıdır [12].

Örnek 2.4

"K" kazancı eklenmiş bir sistemi inceleyelim [12];

$$K \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.368 + 0.368} \quad (2.20)$$

Sistemin kararlı olduğu "K" değerlerini bulmak için öncelikle sistemin karakteristik denklemi hesaplanır.

$$\begin{aligned} \Delta(z) = 1 + KG(z) &= 1 + K \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.368 + 0.368} = 0 \\ &= z^2 + (0.368K - 1.368)z + (0.368 + 0.264K) = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Elde edilen karakteristik denklemin Jury test tablosu oluşturulur.

	z^0	z^1	z^2
1.	$0.368 + 0.264K$	$0.368K - 1.368$	1

Yukarıda belirtildiği gibi Jury test tablosunda ikinci dereceden bir denklem için yalnız bir satır vardır. (2.19) koşullarından hareketle,

$n = \text{çift}$ olduğundan:

$q(1) > 0$ koşulu için;

$(-1)^2 q(-1) > 0$ koşulu için;

$$(-1)^2 q(-1) = 1 - (0.368K - 1.368) + (0.368 + 0.264K) > 0 \Rightarrow K < \frac{2.736}{0.104} = 26.3$$

koşulları ortaya çıkar.

$$\text{Diğer taraftan } |a_0| < a_n \text{ için } |0.368 + 0.264K| < 1 \Rightarrow K < \frac{0.632}{0.264} = 2.39$$

Sonuç olarak sistemin kararlılığı için kazancın $0 < K < 2.39$ olması gerekir.

Örnek 2.5

Kapalı çevrim ayrık zamanlı bir sistemin karakteristik denklemini inceleyelim;

$$Q(z) = z^3 - 1.8z^2 + 1.05z - 0.20 = 0 \quad (2.22)$$

	z^0	z^1	z^2	z^3
1.	-0.20	1.05	-1.8	1
2.	1	-1.8	1.05	-0.20
3.	-0.96	1.59	-0.69	

Üçüncü satırı bulmak için (2.16) eşitliğini kullanırız.

$$b_0 = \begin{vmatrix} -0.2 & 1 \\ 1 & -0.2 \end{vmatrix} = -0.96, \quad b_1 = \begin{vmatrix} -0.2 & -1.8 \\ 1 & 1.05 \end{vmatrix} = 1.59, \quad b_2 = \begin{vmatrix} -0.2 & 1.05 \\ 1 & -1.8 \end{vmatrix} = -0.69$$

$$Q(1) = 1 - 1.8 + 1.05 - 0.2 = 0.05 > 0$$

$$(-1)^3 Q(-1) = -[-1 - 1.8 - 1.05 - 0.2] = 4.05 > 0$$

$$|a_0| = 0.2 < a_3 = 1$$

ve son koşul $|b_0| = 0.96 > |b_2| = 0.69$ 'da sistem karakteristik denklemin kararlı olduğunu gösteriyor.

2.6. Bilineer (İki Yönlü Lineer) Dönüşüm

s -düzleminde kararlılık sınırının sanal eksen olduğu özelliği temeline dayanan Routh-Hurwitz kriteri ve Bode teknikleri gibi, sürekli zamanlı LTI sistemler için bir çok analiz ve tasarım teknikleri vardır. Fakat bu teknikler, kararlılık sınırı birim çember olduğundan dolayı z -düzleminde LTI ayrık zamanlı sistemler için kullanılamaz [12]. Eğer z -düzlemindeki birim daireyi başka bir karmaşık düzlemde sanal eksene dönüştüren bir dönüşüm bulunursa Routh-Hurwitz kriteri ayrık verili sistemler içinde kullanılabilir. Bu amaçla $z = e^{Ts}$ ya da $s = (\ln z)/T$ dönüşüm kuralından yararlanılamaz, çünkü z 'ye göre cebirsel denklem s 'ye göre cebirsel olmayan başka bir denkleme

dönüştürülmüş olur ve Routh testi uygulanamaz [13]. Şimdi z -düzleminde birim çemberi, w düzleminde sanal eksene ve içini de sanal eksenin soluna dönüştüren iki yönlü lineer (bilinear) dönüşümü inceleyeceğiz.

$$z = \frac{1 + \left(\frac{T}{2}\right)w}{1 - \left(\frac{T}{2}\right)w} = \frac{2 + Tw}{2 - Tw} \quad (2.23)$$

veya w için;

$$w = \frac{2z - 1}{Tz + 1} \quad (2.24)$$

dönüşümleri z -düzlemindeki birim çemberi, w -düzleminin sanal eksenine dönüştürür ve w -dönüşümü olarak adlandırılır. w -dönüşümünün en büyük özelliği w -düzleminde sanal eksenin s -düzlemine benzer. Bunu gösterebilmek için z -düzleminde birim çember üzerinde $z = e^{j\omega T}$ dönüşümü yapılır,

$$w = \frac{2z - 1}{Tz + 1} \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{2e^{j\omega T} - 1}{Te^{j\omega T} + 1} = \frac{2e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{Te^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}} = j \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2} \quad (2.25)$$

$$w = j\omega_w = j \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$$

ve denklemi bulunur [12]. Buna göre z -düzlemindeki birim çember w -düzleminde $w = j\omega_w$ sanal eksenine aktarılmış olur. ω_w ve ω gerçek frekansları arasındaki ilişki ise, $\omega_s [rad/sn]$ boyutunda örnekleme açısal frekansı olmak üzere,

$$\omega_w = j \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2} = \frac{\omega_s}{\Pi} \tan \frac{\Pi \omega}{\omega_s} \quad (2.26)$$

şeklinindedir. ω_w ve ω açısal frekanslarının ikisi de 0 ve ∞ 'da aynı değeri alır. Denklem (2.24)'de T örnekleme periyodu görüldüğünden Routh-Hurwitz kriteri w -dönüşümüne uygulanması zor olabilir, fakat bilgisayar programları kullanıldığı takdirde bu zorluk giderilir [13].

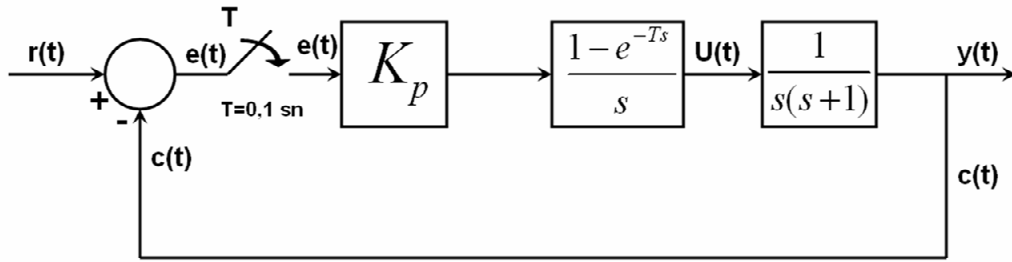
Sonuç olarak iki yönlü dönüşüm z – düzleminde;

1. Birim çemberi, w – düzleminde jw_w sanal eksenine
2. Birim çemberin içini, w – düzleminde jw_w sanal ekseninin sol yarısına
3. Birim çemberin dışını ise w – düzleminde jw_w sanal ekseninin sağ yarı düzlemine dönüştürür [10].

Bir sistemin kararlı olabilmesi için birim çember dışında karakteristik denklemin hiçbir kökünün bulunmaması ya da iki yönlü dönüşümle elde edilen w – düzleminin sağ yarısında, hiçbir kökü bulunmaması gerekmektedir.

Örnek 2.6

Şekil 2.4'de gösterilen kapalı çevrim dijital kontrol sisteminin kararlı olabilmesi için $K_p = ?$



Şekil 2.4 Örnek 2.6'ya ilişkin kapalı çevrim dijital kontrol sistem.

İleri yolun darbe transfer fonksiyonu;

$$G(z) = K_p Z \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{1}{s(s+1)} \right\} \quad T = 0.1 \text{ sn} \quad (2.27)$$

'dır.

$$G(z) = K_p (1 - e^{-Ts}) Z \left\{ \frac{1}{s^2(s+1)} \right\} \quad (2.28)$$

ya da z – dönüşüm tablolarını kullanarak,

$$G(z) = K_p (1 - z^{-1}) \frac{z[(T - 1 + e^{-T})z - Te^{-T} + 1 - e^{-T}]}{(z - 1)^2 (z - e^{-T})} \quad (2.29)$$

olur. $T=0.1$ sn ise,

$$G(z) = K_p \frac{z-1}{z} \frac{z[0.00484z + 0.00467]}{(z-1)^2 (z - 0.90484)} \quad (2.30)$$

olur. Buradan,

$$G(z) = K_p \frac{0.00484z + 0.00467}{(z-1)(z - 0.90484)} \quad (2.31)$$

elde edilir. Buradan da karakteristik denklem;

$$\Delta(z) = 1 + G(z) = z^2 - (1.90484 - 0.00484K_p)z + 0.90484 + 0.0047K_p = 0 \quad (2.32)$$

elde edilir. Karakteristik denkleme iki yönlü lineer dönüşüm uygulanarak Routh-Hurwitz kriteri uygulanır.

$$\left(\frac{1+0.05w}{1-0.05w}\right)^2 - (1.90484 - 0.00484K_p)\left(\frac{1+0.05w}{1-0.05w}\right) + 0.90484 + 0.0047K_p = 0 \quad (2.33)$$

buradan,

$$(3.80968 - 0.00014K_p)w^2 + (0.19032 - 0.0094K_p)w + 0.00954K_p = 0 \quad (2.34)$$

elde edilir ve Routh tablosu oluşturulur.

w^2	$(3.80968 - 0.00014K_p)$	$0.00954K_p$
w	$(0.19032 - 0.0094K_p)$	0
w^0	$0.00954K_p$	

bulunur. Birinci sütunda işaret değişikliği olmaması için;

$$3.80968 - 0.00014K_p > 0 \Rightarrow K_p < 27200$$

$$0.19032 - 0.0094K_p > 0 \Rightarrow K_p < 20.247$$

$0.00954K_p > 0 \Rightarrow K_p > 0$ sonuçları elde edilir. Bu sonuçlardan hareket ederek, verilen kapalı çevrim dijital kontrol sistemin kararlı olabilmesi için K_p kazancının $0 < K_p < 20.247$ olması gerekir [10].

2.7. Sonuç

Bu bölümde dijital kontrol sistemlerinin kararlılığı incelendi. Sürekli kontrol sistemlerine benzer bir biçimde, dijital kontrol sistemlerinin kararlılığının incelenmesinde z -bölgesinde Routh-Hurwitz kriterinin değiştirilmiş şekli olan Jury'nin kararlılık testi, iki yönlü lineer dönüşüm yöntemi açıklandı. Ayrıca kısaca dijital kontrol sistemlere değinilerek, Routh-Hurwitz kararlılık kriteri ile z -dönüşümü konularından da kısaca bahsedildi. Dijital kontrol sistemleri ile ilgili daha sonraki bölümlerde dayanıklı kararlılık analizi ile ilgili yöntemlere ve frekans cevabı ile ilgili kararlılık yöntemlerine değinilecektir.

BÖLÜM 3

PARAMETRE BELİRSİZLİĞİ İLE İLGİLİ METOTLAR

- 3.1. Giriş
- 3.2. Belirsizlik Yapı Durumu
- 3.3. Değer Kümesi (Value Set) Kavramı
- 3.4. Sıfır Dışlama Prensipli
- 3.5. Segment Lemma
- 3.6. Kharitonov Teoremi
- 3.7. Kenar Teoremi
- 3.8. Onatlı Kharitonov Transfer Fonksiyonu
- 3.9. 32 Sistem
- 3.10. Sonuç

3.1. Giriş

Kontrol sistemlerinin kararlılık analizi çok önemli bir konudur, bu sebeple her zaman kontrol mühendislerinin temel merak konusu olmuştur. Otonomus kararlılık; dış uyarım yokluğunda sistemdeki tüm sinyallerin sifıra doğru azalması demektir. Bir kontrol sistemi, yalnızca ve yalnızca eğer sistem karakteristik denkleminin tüm kökleri “s” düzleminin sol yanında ise kararlıdır. Klasik kontrolde, sabit nominal bir sistem için geliştirilmiş; devamlı sistemler için Routh-Hurwitz kriteri, ayrık sistemler için Jury testi ve iyi bilinen kararlılık analizi ve kontrolör dizaynı için frekans cevabı metotları (Nyquist, Bode ve Nichols eğrileri) gibi bazı güçlü araçlar mevcuttur. Fakat gerçek fiziksel sistemlerde, transfer fonksiyonlarının parametre değişimleri göz ardı edilemez bir gerçektir. Bu sebeple, parametrik belirsizliğe sahip kontrol sistemlerinin incelenmesindeki temel problem, verilen karakteristik polinom ailesindeki tüm polinomların Hurwitz kararlı olup olmadığına karar vermektir. Bu özellik parametrik robust (dayanıklı) kontrolün ana konularından biri olan dayanıklı kararlılık olarak bilinir.

Parametrik dayanıklı kontrolde, parametrik belirsiz sistemlerin dayanıklı kararlılık analizi ile ilgili Kharitonov'un meşhur teoreminin [14] yayımlanmasından beri muazzam adımlar atılmıştır. Kharitonov teoremi basitçe, bir aralık (interval) polinomun dayanıklı kararlılığına, gerçek katsayı durumundaki yalnızca dört polinomun dayanıklı kararlılığının test edilmesiyle karar verilebileceğini anlatmaktadır. Bu sürpriz sonuçla parametrik dayanıklı kontrol araştırma alanı ortaya çıktı ve araştırmacılar şu soruları dile getirdi: Belirsizlik içeren sistemlerde Kharitonov teoremi nereye kadar kullanılabilir? Bu teorem, kontrol sistemleri analizi ve tasarımı için nasıl kullanılabilir?

Tezin bu bölümünde belirsiz yapı konusu, belirsiz polinomların dayanıklı kararlılık analizinde defalarca kullanılan değer kümesi kavramı, sıfır dışlama prensibi ve segment lemma gibi temel kavramlara değinilmiştir. Daha sonra, Kharitonov teoremi ve kenar teoremine değinilmiştir. Kharitonov teoreminin bir kontrol sistemine uygulanması, 16 Kharitonov transfer fonksiyonu ailesi (plant family) ve 32 sistem [15] konularına kısaca değinilmiştir. Son kısımda genel olarak bölümün bir özeti yapılmıştır.

3.2. Belirsizlik Yapı Durumu

Bir mühendislik sistemini bir kimse matematiksel olarak ne kadar doğru modellemeye çalışırsa çalışsın, elde edilen model hiç bir zaman sistemin davranışını tam olarak tanımlayamaz. Çevresel değişimlerin yanında, parça üretim toleransları da sistemin parametre değerlerini etkiler. Bu yüzden belirsizlik yapısına sahip bir model farzetmek daha gerçekçi olacaktır [16].

Şekil 3.1'de gösterilen geri beslemeli sistem olan

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.1)$$

eşitliğini ve bir kompensatör yani kontrolör olan

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \quad (3.2)$$

eşitliğini ele alalım.

Bu standart konfigürasyonun klasik kararlılık probleminin çözümü, $N(s)N_c(s) + D(s)D_c(s)$ kapalı çevrim polinomunun incelenmesine bağlıdır. Uygulamada, diğer yandan, yukarıda belirtildiği gibi bir kontrol sistemi modeline giren fiziksel parametreler tam olarak bilinmeyebilir. Tipik olarak, bu fiziksel parametrelerin belirli aralıklarla değiştiği bilinir, bu da bu parametrelerle ilgili düzensizlikleri de içeren kapalı çevrim polinomunu çözüme götürür. Bu bilinmeyen parametreler $q = [q_1, q_2, \dots, q_q]^T$ vektörü ile gösterilebilir ki buda belirli *sınırlı hiper dikdörtgen (bounding hyper rectangle)* (belirsizlik kutusu) ile sınırlanmış R^q içinde Q

$$Q = \{q \in R^q : q_i \in [q_i, \bar{q}_i], j = 1, 2, \dots, q\} \quad (3.3)$$

dir. Burada q_i ve \bar{q}_i , q_i 'nin i 'nci belirsizliğin sırasıyla belirlenmiş alt ve üst sınırlarıdır. Şimdi, şekil 3.1'de verilen konfigürasyonun sabit transfer fonksiyonunda

$$G(s, q) = \frac{N(s, q)}{D(s, q)} \quad (3.4)$$

bulunan $N(s, q)$ ve $D(s, q)$ 'nin belirsiz polinomlar olduğunu düşünelim. Bu, her bir polinom katsayısının q 'nin fonksiyonu olduğu anlamına gelir. Bu durumda kapalı çevrim karakteristik polinomu

$$P(s, q) = N(s, q)N_c(s) + D(s, q)D_c(s) \quad (3.5)$$

katsayılarını q belirsizlik vektörüne dayanan daha genel bir şekilde yazacak olursak;

$$P(s, q) = a_0(q) + a_1(q)s + a_2(q)s^2 + \dots + a_n(q)s^n \quad (3.6)$$

şeklindedir. Polinom ailesinin kararlılık analizinde (3.6) eşitliği için $a_i(q)$ katsayı fonksiyonu tipi önemli bir rol oynar. $a_i(q)$ katsayı fonksiyonu yapısına dayalı dört sınıf belirsiz polinom vardır;

1. Bağımsız Belirsizlik Yapısı (Aralık (interval) Polinomlar): Belirsiz bir polinom, eğer (3.6) eşitliğindeki her bir $a_i(q)$ aralık polinomu $a_0(q) = q_0, a_1(q) = q_1, \dots, a_n(q) = q_n$ gibi yalnızca tek bir parametreye bağlıysa bu bir aralık polinomudur.

2. Affine Doğrusal Belirsizlik Yapısı: Eğer; $i = 0, 1, 2, \dots, n$ için $a_i(q)$ bir affine lineer fonksiyon ise, (3.6) eşitliğindeki polinom için bir affine lineer belirsizlik yapısı vardır. Örneğin, $a_i(q) = 3q_1 + q_2 + 8q_3 + 2$ affine doğrusal fonksiyondur. Bu tür polinomlar aynı zamanda politopik polinom ailesi olarak da bilinir.

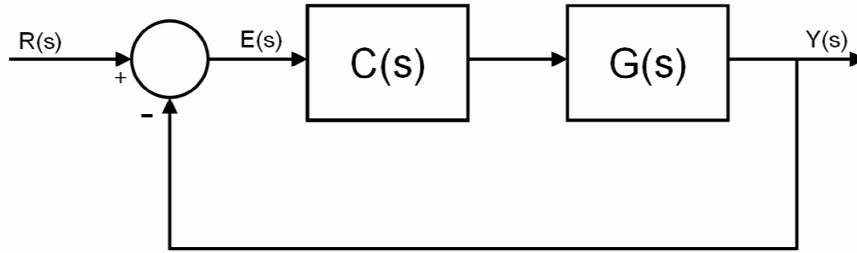
3. Çoklu Doğrusal (Multilinear) Belirsizlik Yapısı: $P(s, q)$ belirsizlik polinomunun eğer her bir $a_i(q)$ katsayısı $a_i(q) = 5q_1q_2q_3 + 3q_2 - q_3 + 9q_2q_3 + 2$ gibi bir çoklu doğrusal fonksiyon ise çoklu doğrusal belirsizlik yapısı vardır denir.

4. Polinom Belirsizlik Yapısı: Eğer (3.6) eşitliğindeki polinomun $a_i(q)$ katsayıları belirsiz parametrelerin nonlinear fonksiyonları ise bu durumda $P(s, q)$ 'nin polinom belirsizlik yapısı vardır denir. Örneğin, $a_i(q) = 3q_1q_3 - 5q_1q_2 + q_3^2$ bir polinom fonksiyonudur.

Yukarıda polinomlara ait dört değişik belirsizlik yapısına değinildi. $P_{indep.}$, P_{affine} , $P_{multilin.}$, $P_{poly.}$ sırasıyla bağımsız, affine doğrusal, çoklu doğrusal ve polinomik belirsizlik yapıları olan belirsiz polinomları temsil etsin, bu durumda polinomlar arasındaki sıralama şu şekilde olur [16];

$$P_{indep.} \subset P_{affine} \subset P_{multilin.} \subset P_{poly.} \quad (3.7)$$

Bu sıralamadan anlaşıldığı üzere en basit belirsizlik yapısının bağımsız yapı olduğu görülür. Bağımsız belirsizlik yapısı için en etkili bir çözüm yöntemi Kharitonov teoremidir. Bundan sonraki zorluk derecesi affine doğrusal belirsizlik yapısıdır. Affine doğrusal belirsizlik için, kenar teoremi faydalı bir yöntemdir. Çoklu doğrusal ve polinom belirsizlik yapıları daha yüksek zorluk derecesindedirler. Bu tür belirsizlik yapılarıyla uğraşmak için düz bir yöntem yoktur. Bu tür belirsizlik yapılarının çözümü için, muhtemel bir yol olan bağımlı bir belirsizlik yapısını bağımsız belirsizlik yapısına çevirmeye imkân veren *overbounding tekniği* [17] kullanılmalıdır. Diğer yandan, *mapping teoremi* de kullanılabilir [18].



Şekil 3.1 Standart geribeslemeli bir sistem.

3.3. Değer Kümesi (Value Set) Kavramı

Bu kavram, parametrik belirsizlik altında dayanıklı kontrolde belirsiz sistemlerin kararlılığını kontrol etmede, belirsiz sistemlerin frekans cevaplarını hesaplamada yoğun bir şekilde kullanılan önemli bir kavramdır. Sabit bir polinom için sabit frekanstaki bir polinomun şekli karmaşık düzlemde bir

noktadır. Fakat belirsiz bir polinom için şekil bir noktalar kümesidir. Bu kümeler değer kümeleri olarak anılır. Basitçe, bir belirsiz polinomun değer kümesi şu şekilde gösterilebilir: $P(s,q)$ 'nin (3.6) eşitliği ile ifade edilen belirsiz bir polinom olduğunu düşünürsek, sabit bir gerçek frekansı w^* olan polinomun değer kümesi;

$$P(jw^*,Q) = \{P(jw^*,q) : q \in Q\} \quad (3.8)$$

olur.

Genellikle, $P(s,q)$ katsayılarının multilineer veya polinomik oldukları durum da değer kümesi için etkili bir analitik gösterim yoktur ve elde edilmesi zor olabilir. Fakat, bağımsız ve affine doğrusal belirsizliği olan polinomlar gibi bazı önemli durumlarda değer kümesinin şekli çok kolay bir şekilde ifade edilebilir.

Değer kümesi kavramı, bir sonraki alt kısımda verilen sıfır dışlama prensibi ile birlikte belirsiz polinomların kararlılık analizinde kullanılan etkili bir yöntemdir.

Örnek 3.1

Belirsiz bir polinom ele alalım;

$$P(s,q) = s^3 + [6,8]s^2 + 6s + 5 \quad (3.9)$$

Bu belirsiz polinom ailesinin her frekansta değer kümesini elde etmek için $P(s,q)$ 'nin reel ve sanal bölümlerinin bulunmasına ihtiyaç vardır.

$s = jw$ yerine koymasıyla;

$$P(jw,q) = -jw^3 - [6,8]w^2 + 6jw + 5 = -[6,8]w^2 + 5 + jw(-w^2 + 6) \quad (3.10)$$

$P(s,q)$ 'nin reel ve sanal kısımlarını,

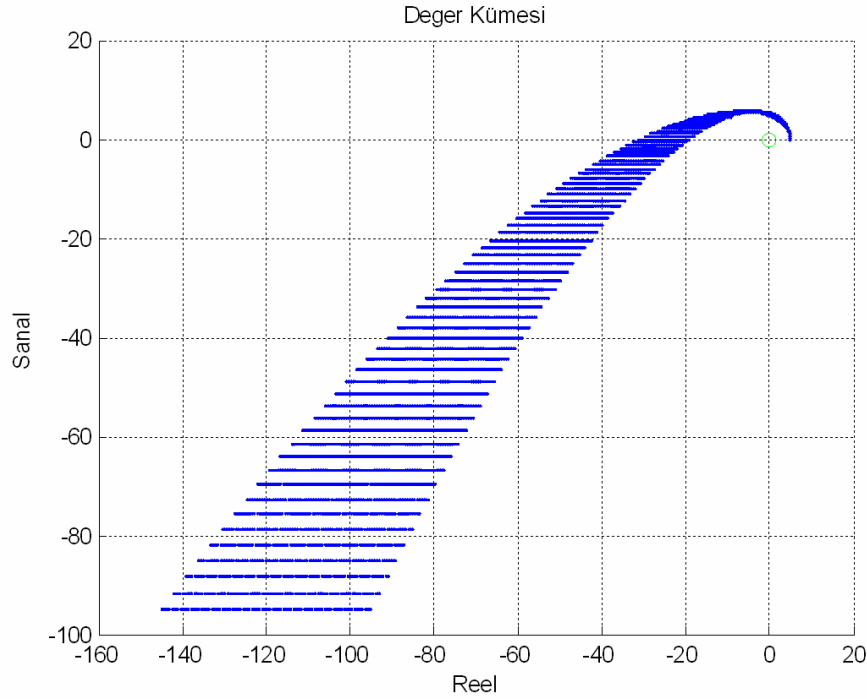
$$-8w^2 + 5 \leq \text{Re}[P] \leq -6w^2 + 5 \quad (3.11)$$

ve

$$\text{Im}[P] = -jw^3 + 6jw \quad (3.12)$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Bu denklemlerden $P(s, q)$ değer kümeleri elde edilir. $P(s, q)$ 'nin $0 \leq w \leq 5$ aralığında eşit uzaklıkta sıralanmış 100 frekans için değer kümeleri şekil 3.2 'de gösterilmiştir.



Şekil 3.2 (3.9) eşitliğindeki polinomun değer kümeleri.

3.4. Sıfır Dışlama Prensibi

$P(s, q)$ 'nin bir belirsiz polinom kümesi olduğunu düşünelim ve bu kümedeki bütün polinomların derecesi aynı olsun. Bu durumda, polinom kümesinin değerler kümesi eğer bütün reel w değerleri için "0" (sıfır)'ı orijini içine almıyorsa polinom kümesinin *kararlı* olduğu sonucuna varılır ve

$$0 \notin P(jw^*, Q) \quad (3.13)$$

şeklinde ifade edilir [17].

Daha öncede bahsedildiği gibi, değer kümesi kavramı, sıfır dışlama prensibi ile birleştirildiğinde belirsiz polinomların dayanıklı kararlılığını belirlemede etkili bir yöntem teşkil eder. Bu, bir belirsiz polinomun kaynağının değer kümesine dâhil edilmesi veya bunun dışında bırakılmasının değer kümesinin bağları kullanılarak kontrol edilebileceği gerçeğinden gelir. Böylece

bir belirsiz polinomun değer kümeleri kolayca oluşturulabildiğinde, bu tür bir polinomun analizi de kolay olacaktır. Örneğin, örnek 3.1’de verilen belirsiz polinom ailesinden bir üye, $p(s) \in P(s, q) = s^3 + [6, 8]s^2 + 6s + 5$ karardır ve şekil 3.2 ’den, tüm gerçekte w ’ler için $0 \notin P(jw^*, Q)$ ise, (3.9) eşitliğindeki $P(s, q)$ polinomları ailesinin dayanıklı kararlı olduğu sonucuna varılabilir.

3.5. Segment Lemma

Bu bölümde, uç nokta polinomları olarak adlandırılan iki sabit polinoma katılan çizgi segmentinin kararlılık analizi yapılmıştır. $\delta_1(s)$ ve $\delta_2(s)$ polinomlarının derecelerinin “ n ” olduğunu varsayarsak, polinom kısımları şu şekilde yazılabilir;

$$\delta(s, \lambda) = (1 - \lambda)\delta_1(s) + \lambda\delta_2(s), \quad \lambda \in [0, 1] \quad (3.14)$$

Genellikle, son noktaların kararlılığı polinomların tüm kısımlarının kararlılığını garanti etmez. Örneğin, aşağıdaki iki polinoma katılan kısmı düşünün

$$\delta_1(s) = 3s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1$$

ve

$$\delta_2(s) = s^4 + s^3 + 5s^2 + 2s + 5$$

$\delta_1(s)$ ve $\delta_2(s)$ Hurwitz kararlı olmasına rağmen $\delta(s, \lambda) = (1 - \lambda)\delta_1(s) + \lambda\delta_2(s)$, $\lambda = 0.5$ için polinomunun Hurwitz kararlı olmadığı görülebilir. Bir segment polinomda uç noktalardaki polinomların kararlı olması, bütün segment polinomlarının kararlı olacağı anlamına gelmez.

Segment lemma kullanılarak, bir segmentin kararlılığı uç nokta polinomlarının kullanılması ile kontrol edilebilir. $\delta_1(s)$ ve $\delta_2(s)$ polinomları n . dereceden kararlı iki polinom olsun. Bu iki polinomun oluşturduğu segment polinomu $(1 - \lambda)\delta_1(s) + \lambda\delta_2(s)$ bütün $\lambda \in [0, 1]$ değerleri için ve sadece eğer $w > 0$ ’da reel değer yoksa, şekil 3.3’ten çıkarılabilecek aşağıdaki tüm üç şartın sağlanması halinde

$$\begin{aligned}
1) \quad & \delta_1^e(w)\delta_2^o(w) - \delta_2^e(w)\delta_1^o(w) = 0 \\
2) \quad & \delta_1^e(w)\delta_2^e(w) \leq 0 \\
3) \quad & \delta_1^o(w)\delta_2^o(w) \leq 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$(\delta_1^e(w), \delta_1^o(w))$ ve $(\delta_2^e(w), \delta_2^o(w))$, $\delta_1(s)$ ve $\delta_2(s)$ polinomlarının sırasıyla çift ve tek parçaları ise Hurwitz kararlıdır.

Örnek 3.2

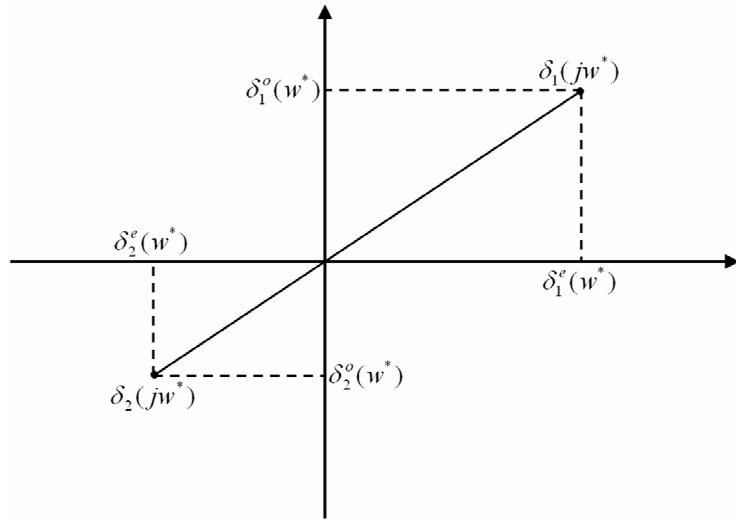
Aşağıdaki uç noktaları olan belirtilen bir çizgi segmenti düşünelim;

$$\delta_1(s) = 3s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1$$

ve

$$\delta_2(s) = s^4 + s^3 + 5s^2 + 2s + 5$$

$\delta_1(s)$ ve $\delta_2(s)$ 'in Hurwitz kararlı olduğu görülebilir.



Şekil 3.3 Segment lemmanın geometrik ifadesi.

Burada amaç;

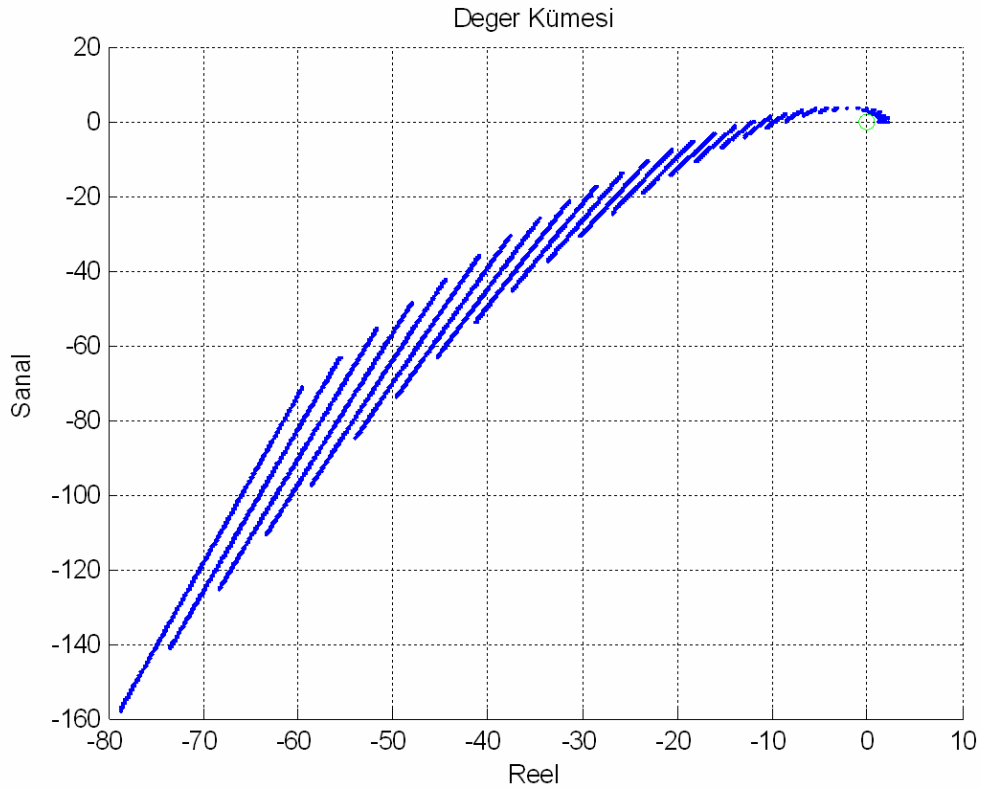
$$\delta(s, \lambda) = (1 - \lambda)\delta_1(s) + \lambda\delta_2(s) = (\lambda + 1)s^3 + (\lambda + 3)s^2 + (\lambda + 4.4)s + (\lambda + 1.25) \tag{3.16}$$

'in $\lambda \in [0,1]$ durumunda dayanıklı kararlılığını kontrol etmektir. Segment lemmayı uygulamak için;

$$\delta_1^e(w)\delta_2^o(w) - \delta_2^e(w)\delta_1^o(w) = 2w^4 + 1.15w^2 - 3.15 = 0 \quad (3.17)$$

polinomunun pozitif reel köklerini bulmak gerekmektedir.

$w = 1$ olan bir pozitif kök mevcuttur. Fakat $w = 1$ için $\delta_1^e(w)\delta_2^e(w) = 3.06 > 0$ ve $\delta_1^o(w)\delta_2^o(w) = 11.56 > 0$ olduğu görülebilir. Bu yüzden, segment lemmanın (3.16) eşitliğindeki çizgi segmenti kararlıdır denebilir. Frekans taramasına gerek olmasa bile, segmentin beklendiği gibi orijini kapsamayan değer kümeleri şekil 3.4'te gösterilmiştir.



Şekil 3.4 (3.16) eşitliği segmentinin değer kümesi.

3.6. Kharitonov Teoremi

1978 yılında Rus araştırmacı V. L. Kharitonov; “ Sürekli zamanlı interval polinomlara ait dört Kharitonov polinomu kararlı ise bu interval polinomlar kararlıdır” teorisini ortaya çıkardı. Sınırsız sayıdaki polinomun kararlılığını

kontrol etmek yerine, klasik Hurwitz kriteri ile dört polinomun kararlılığını kontrol etmek yeterlidir [15, 19].

n. dereceden bir sürekli zamanlı interval polinom kümesi şu formda yazılabilir:

$$p(s, q) = \sum_{i=0}^n [q_i, \bar{q}_i] s^i$$

$$p(s, q) = q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + q_3 s^3 + q_4 s^4 + q_5 s^5 + \dots + q_n s^n \quad (3.18)$$

Eger;

$$Q = \{q : q \in [q_i, \bar{q}_i], i = 0, 1, 2, \dots, n\} \text{ ise} \quad (3.19)$$

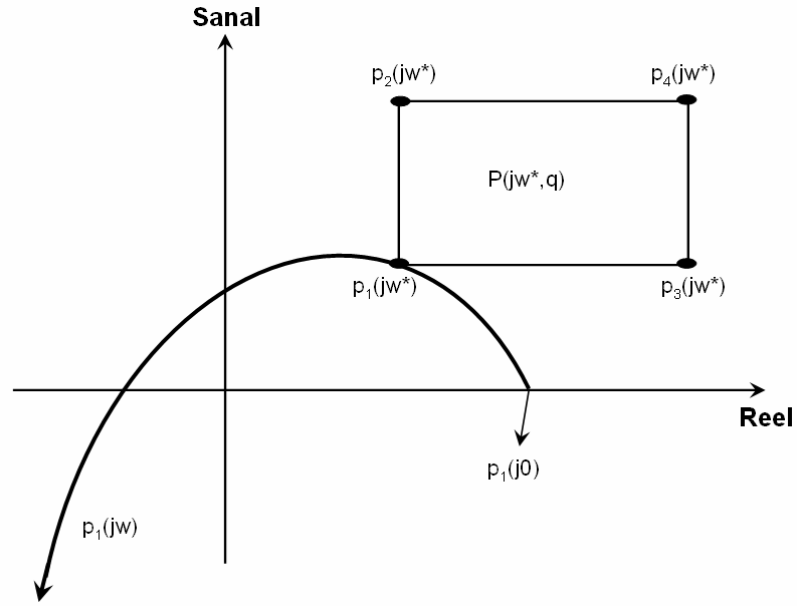
q_i ve \bar{q}_i i . belirsizlik q_i 'nin alt ve üst limitlerini göstermektedir. Bu interval kümesinin kararlı olabilmesi için Kharitonov teoremine göre aşağıda belirtilen dört Kharitonov polinomunun kararlı olması gerekmektedir. Dört Kharitonov polinomu şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} p_1(s) &= \underline{q}_0 + \underline{q}_1 s + \bar{q}_2 s^2 + \bar{q}_3 s^3 + \underline{q}_4 s^4 + \underline{q}_5 s^5 + \dots \\ p_2(s) &= \underline{q}_0 + \bar{q}_1 s + \bar{q}_2 s^2 + \underline{q}_3 s^3 + \underline{q}_4 s^4 + \bar{q}_5 s^5 + \dots \\ p_3(s) &= \bar{q}_0 + \underline{q}_1 s + \underline{q}_2 s^2 + \bar{q}_3 s^3 + \bar{q}_4 s^4 + \underline{q}_5 s^5 + \dots \\ p_4(s) &= \bar{q}_0 + \bar{q}_1 s + \underline{q}_2 s^2 + \underline{q}_3 s^3 + \bar{q}_4 s^4 + \bar{q}_5 s^5 + \dots \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= - - + + - - \dots \\ p_2 &= - + + - - + \dots \\ p_3 &= + - - + + - \dots \\ p_4 &= + + - - + + \dots \end{aligned}$$

Bu sonuç aslında Mikhailov kriterini kullanarak basit bir şekilde ispatlanabilir. Mikhailov kriterine göre n. dereceden bir $p(s)$ polinomunun kararlı olabilmesi için $p(jw)$ 'nin pozitif reel eksenden başlayarak saat yönünün tersinde n eksenini kesmesi gerekir. Yani sıfırın dışlanması kuralına (zero exclusion principle) [20] göre $p(jw)$ 'nin orijinden geçmemesi gerekir. Dolayısıyla, bir interval polinomun herhangi bir sabit frekanstaki değer kümesinin şekil 3.5 'te görüldüğü üzere kenarları reel ve sanal eksene paralel olan bir dikdörtgen olduğu kolayca gösterilebilir. Bu dikdörtgenin köşelerini

Kharitonov polinomları oluşturur ve bu dikdörtgene Kharitonov dikdörtgeni denir. Bu dikdörtgenin kenarları reel ve sanal eksenlere paralel olduğu için orijinin dikdörtgensel değer kümesinin içinde veya dışında kalması köşe noktalarını kullanarak kolayca test edilebilir. Şekil 3.5 'te de görüldüğü üzere köşe noktaları Kharitonov polinomlarına karşılık gelmektedir [21].



Şekil 3.5 Kharitonov dikdörtgeni ve $p_1(s)$ 'in Mikhailov eğrisi.

Örnek 3.3

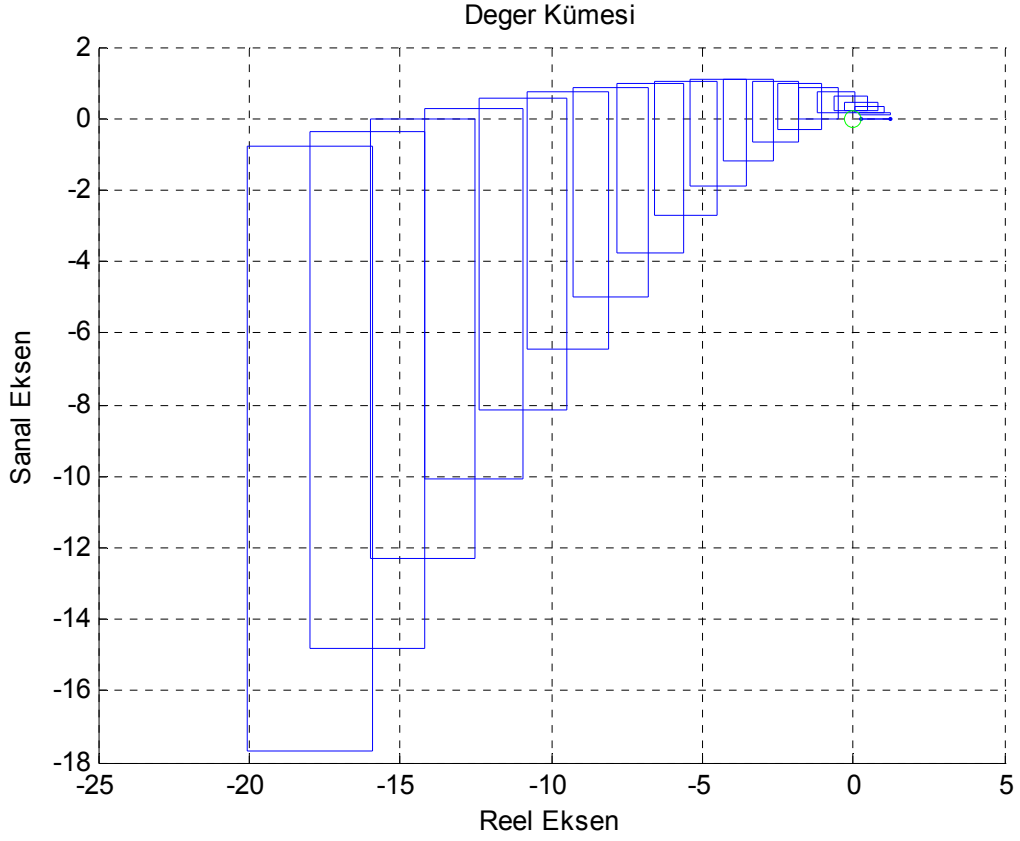
$$P(s, q) = [0.25, 1.25]s^3 + [2.75, 3.25]s^2 + [0.75, 1.25]s + [0.25, 1.25] \quad (3.21)$$

interval polinomu üzerinde çalışacak olursak;

Dört Kharitonov polinomu:

$$\begin{aligned} p_1(s) &= 1.25s^3 + 3.25s^2 + 0.75s + 0.25 \\ p_2(s) &= 0.25s^3 + 3.25s^2 + 1.25s + 0.25 \\ p_3(s) &= 1.25s^3 + 2.75s^2 + 0.75s + 1.25 \\ p_4(s) &= 0.25s^3 + 2.75s^2 + 1.25s + 1.25 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Eğer yukarıdaki dört Kharitonov polinomu kararlı ise (3.21) denkleminde verilen polinom kümesinin Hurwitz kararlı olduğu sonucuna ulaşılır.



Şekil 3.6 Kharitonov dikdörtgenlerinin hareketi.

Şekil 3.6 'da görüldüğü üzere Kharitonov dikdörtgenleri '0' (sıfır) noktasını kapsamamaktadır. Dolayısıyla, sistemin kararlı olduğunu söylemek mümkündür.

3.7. Kenar Teoremi

Kharitonov teoreminin interval polinomlarının kararlılığına hassas bir çözüm getirmesine rağmen iki temel temel sınırlama ile karşılaşmaktadır. Bunlar:

1. Polinomların katsayılarının bağımsız olarak değiştiği varsayılmaktadır. Yani, hiçbir q_i birden fazla katsayıya katılmaz. Genel bir durumda, belirsiz bir polinom için katsayıların affine lineer, multilineer veya polinom fonksiyonlarından oluşabileceği (3.6) eşitliğinde gösterilmiştir.

2. Diğer önemli sınırlama ise Kharitonov teoreminin sadece, kararlılık alanının açık sol yarı düzlemde kesiştiği yerde uygulanabilmesidir.

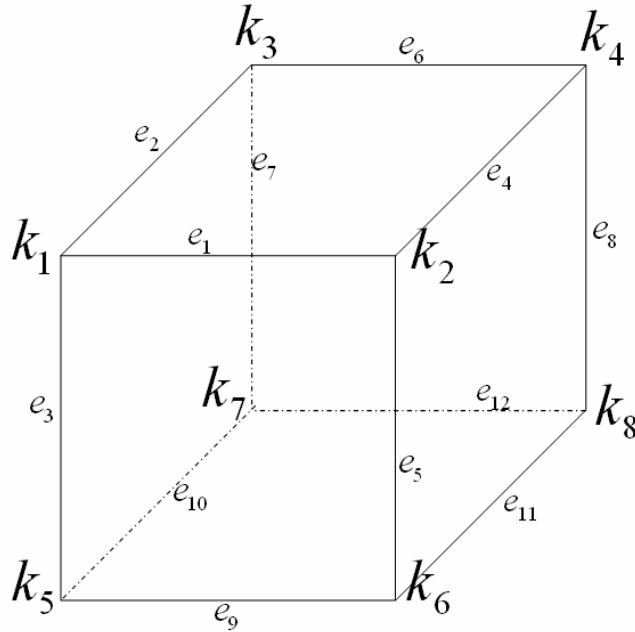
Kenar teoremi [22] için; “m” tane belirsiz parametre içeren bir belirsiz polinomda, parametre düzleminde 2^m tane köşe, $2^{m-1}(2^m - 1)$ tane kenar ve bu kenarların içerisinde $m * 2^{m-1}$ tane kenar *etkin kenardır*.

“m” tane belirsiz parametre içeren bir polinom kümesinin kararlı olabilmesi için $m * 2^{m-1}$ tane etkin (exposed) kenarın kararlı olması gerekmektedir. Ayrıca böyle bir polinomun kök uzayı, etkin kenarların kök uzayının içindedir.

Örnek 3.4

Aşağıda üç tane belirsiz parametreye sahip bir polinom verilmiştir.

$$p(s, q) = q_2 s^2 + q_1 s^1 + q_0 \quad (3.23)$$



Şekil 3.7 Belirsizlik küpü.

Bu polinomun köşe sayısı üç adet belirsiz parametreye karşılık olarak; $2^m = 2^3 = 8$ ' dir. Polinoma ait köşe polinomları, aşağıda belirtildiği şekilde belirsiz parametrelerin alt ve üst değerlerinin alınması ile bulunur.

$$\begin{aligned}
k_1 &= \underline{q_2} s^2 + \underline{q_1} s + \underline{q_0} \\
k_2 &= \underline{q_2} s^2 + \underline{q_1} s + \underline{q_0} \\
k_3 &= \underline{q_2} s^2 + \underline{q_1} s + \underline{q_0} \\
k_4 &= \underline{q_2} s^2 + \underline{q_1} s + \underline{q_0} \\
k_5 &= \underline{q_2} s^2 + \underline{q_1} s + \underline{q_0} \\
k_6 &= \underline{q_2} s^2 + \underline{q_1} s + \underline{q_0} \\
k_7 &= \underline{q_2} s^2 + \underline{q_1} s + \underline{q_0} \\
k_8 &= \underline{q_2} s^2 + \underline{q_1} s + \underline{q_0}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$k_1(s)$ ile $k_2(s)$ köşe polinomları arasında sadece q_1 ' in üst limitinin alındığı görülmektedir. Dolayısıyla $k_1(s)$ ile $k_2(s)$ köşe polinomları arasındaki bu fark, iki köşeyi birbirine bağlayan bir kenar olduğunu gösterir. Köşeler arasındaki kenar polinomlarını bulmak için $\lambda k_1(s) + (1-\lambda)k_2(s)$ veya $(1-\lambda)k_1(s) + \lambda k_2(s)$ denklemleri kullanılır. Üç belirsiz parametreye sahip polinoma ait $m \cdot 2^{m-1} = 3 \cdot 2^{3-1} = 12$ adet kenar polinomu aşağıda belirtilmiştir.

$$\begin{aligned}
e_1(k_1 k_2) &= \lambda k_1(s) + (\lambda - 1)k_2(s) \\
e_2(k_1 k_3) &= \lambda k_1(s) + (\lambda - 1)k_3(s) \\
e_3(k_1 k_5) &= \lambda k_1(s) + (\lambda - 1)k_5(s) \\
e_4(k_2 k_4) &= \lambda k_2(s) + (\lambda - 1)k_4(s) \\
e_5(k_2 k_6) &= \lambda k_2(s) + (\lambda - 1)k_6(s) \\
e_6(k_3 k_4) &= \lambda k_3(s) + (\lambda - 1)k_4(s) \\
e_7(k_3 k_7) &= \lambda k_3(s) + (\lambda - 1)k_7(s) \\
e_8(k_4 k_8) &= \lambda k_4(s) + (\lambda - 1)k_8(s) \\
e_9(k_5 k_6) &= \lambda k_5(s) + (\lambda - 1)k_6(s) \\
e_{10}(k_5 k_7) &= \lambda k_5(s) + (\lambda - 1)k_7(s) \\
e_{11}(k_6 k_8) &= \lambda k_6(s) + (\lambda - 1)k_8(s) \\
e_{12}(k_7 k_8) &= \lambda k_7(s) + (\lambda - 1)k_8(s)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Örnek 3.5

Lineer belirsiz yapıda bir polinom düşünelim [20];

$$P(s, q) = s^3 + (8 + q_2)s^2 + (2 + 3q_1 + 5q_2 + q_3)s + 2q_1 + 5q_3 \tag{3.26}$$

bu polinom;

$Q = \{q = [q_1, q_2, q_3]^T : q_1 \in [1, 2], q_2 \in [9, 11], q_3 \in [15, 18]\}$ aralığında olsun.

Dolayısıyla polinom,

$$P(s, q) = s^3 + (8 + [9, 11])s^2 + (2 + 3[1, 2] + 5[9, 11] + [15, 18])s + 2[1, 2] + 5[15, 18]$$

şeklini alır.

Yukarıda verilen belirsiz polinomda Kharitonov teoremini kullanamayacağımız açıkça belli olmaktadır. Fakat diğer taraftan bu polinomda kenar teoremi kullanılabilir. Bu polinomda üç tane belirsiz ($q=3$) parametre vardır. Bu üç adet belirsiz parametreden dolayı; $2^3 = 8$ tane köşe, $3 \times 2^{3-1} = 12$ tane kenar polinomu elde edilir.

Köşe polinomları aşağıda belirtildiği şekilde elde edilir:

$$k_1(s) = s^3 + (8 + \underline{q_2})s^2 + (2 + 3\underline{q_1} + 5\underline{q_2} + \underline{q_3})s + 2\underline{q_1} + 5\underline{q_3} = s^3 + 17s^2 + 65s + 77$$

$$k_2(s) = s^3 + (8 + \underline{q_2})s^2 + (2 + 3\underline{q_1} + 5\underline{q_2} + \overline{q_3})s + 2\underline{q_1} + 5\overline{q_3} = s^3 + 17s^2 + 68s + 92$$

$$k_3(s) = s^3 + (8 + \overline{q_2})s^2 + (2 + 3\underline{q_1} + 5\overline{q_2} + \underline{q_3})s + 2\underline{q_1} + 5\underline{q_3} = s^3 + 19s^2 + 75s + 77$$

$$k_4(s) = s^3 + (8 + \overline{q_2})s^2 + (2 + 3\underline{q_1} + 5\overline{q_2} + \overline{q_3})s + 2\underline{q_1} + 5\overline{q_3} = s^3 + 19s^2 + 78s + 92$$

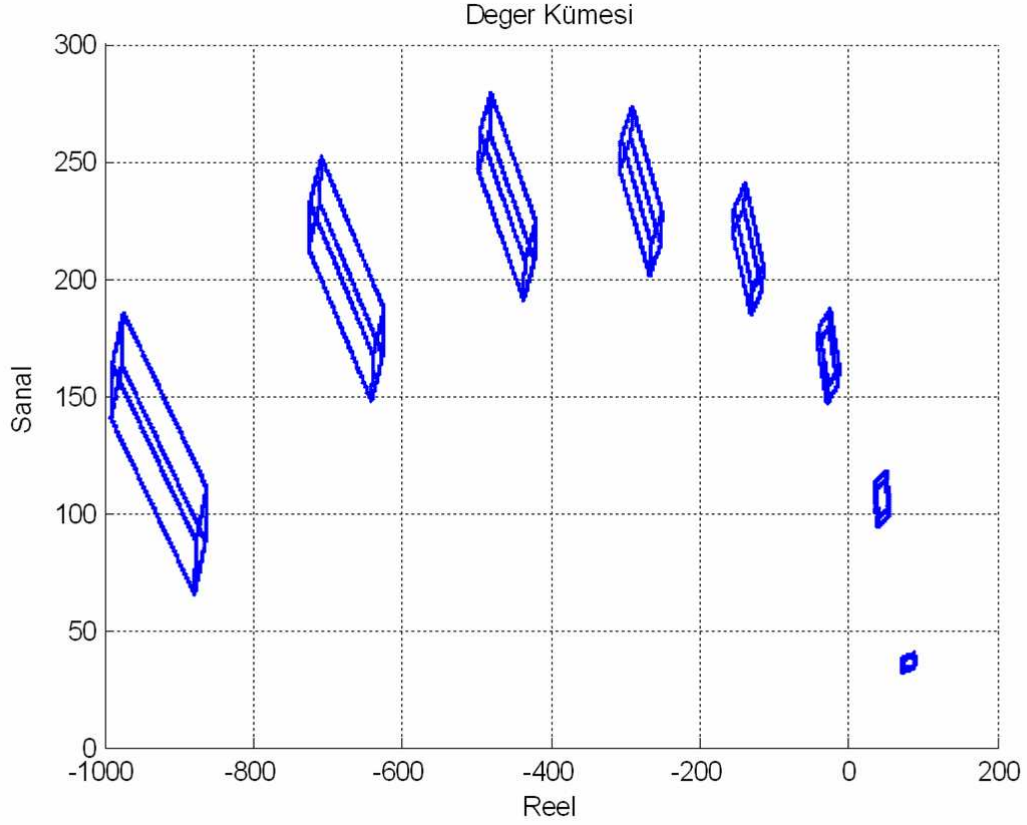
$$k_5(s) = s^3 + (8 + \underline{q_2})s^2 + (2 + 3\overline{q_1} + 5\underline{q_2} + \underline{q_3})s + 2\overline{q_1} + 5\underline{q_3} = s^3 + 17s^2 + 68s + 79$$

$$k_6(s) = s^3 + (8 + \underline{q_2})s^2 + (2 + 3\overline{q_1} + 5\underline{q_2} + \overline{q_3})s + 2\overline{q_1} + 5\overline{q_3} = s^3 + 17s^2 + 71s + 94$$

$$k_7(s) = s^3 + (8 + \overline{q_2})s^2 + (2 + 3\overline{q_1} + 5\overline{q_2} + \underline{q_3})s + 2\overline{q_1} + 5\underline{q_3} = s^3 + 19s^2 + 78s + 79$$

$$k_8(s) = s^3 + (8 + \overline{q_2})s^2 + (2 + 3\overline{q_1} + 5\overline{q_2} + \overline{q_3})s + 2\overline{q_1} + 5\overline{q_3} = s^3 + 19s^2 + 81s + 94$$

Bulduğumuz bu köşe polinomlarını kullanarak kenar polinomlarını bulabiliriz. Örneğin; köşe polinomları $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ aynı yapıya sahiptir. Fakat q_1 parametresi $k_1(s)$ 'de alt, $k_2(s)$ 'de üst değere sahiptir. İşte aradaki bu farktan dolayı iki köşe arasında bir kenar oluşmaktadır. Kenar polinomunu $e_1(k_1, k_2) = \lambda k_1(s) + (\lambda - 1)k_2(s)$ ile bulunur. Diğer kenarlar (3.25) denkleminde faydalanılarak bulunabilir. (3.25) denklemini kullanılarak elde edilen oniki kenarın değer kümesi şekil 3.7 'de gösterilmiştir.



Şekil 3.8 (3.26) polinomunun değer kümesi.

3.8. Onaltı Kharitonov Transfer Fonksiyonu

Parametreleri kesin olarak bilinmeyen fakat değer aralıklarında açıkça verildiği farzedilen bir aralık fonksiyonudur. Yani;

$$G(s,q,r) = \frac{N(s,r)}{D(s,q)} = \frac{r_m s^m + r_{m-1} s^{m-1} + \dots + r_0}{q_n s^n + q_{n-1} s^{n-1} + \dots + q_0} \quad (3.27)$$

'dir. Burada,

$$Q = \{ q : q_i \in [\underline{q}_i, \bar{q}_i], i = 0, 1, 2, \dots, n \}$$

ve

$$R = \{ r : r_i \in [\underline{r}_i, \bar{r}_i], i = 0, 1, 2, \dots, m \}$$

sırasıyla q ve r vektörlerini sınırlamaktadır. Aralık polinomları olan pay ve payda polinomları $N(s,r)$ ve $D(s,q)$ olsun. Kharitonov teoreminden faydalanılarak, pay için dört Kharitonov polinomları ,

$$\begin{aligned}
N_1(s) &= \underline{r_0} + \underline{r_1}s + \overline{r_2}s^2 + \overline{r_3}s^3 + \underline{r_4}s^4 + \underline{r_5}s^5 + \dots \\
N_2(s) &= \underline{r_0} + \underline{r_1}s + \overline{r_2}s^2 + \overline{r_3}s^3 + \underline{r_4}s^4 + \overline{r_5}s^5 + \dots \\
N_3(s) &= \overline{r_0} + \underline{r_1}s + \underline{r_2}s^2 + \overline{r_3}s^3 + \overline{r_4}s^4 + \underline{r_5}s^5 + \dots \\
N_4(s) &= \overline{r_0} + \overline{r_1}s + \underline{r_2}s^2 + \underline{r_3}s^3 + \overline{r_4}s^4 + \overline{r_5}s^5 + \dots
\end{aligned} \tag{3.28}$$

ve payda için dört Kharitonov polinomları,

$$\begin{aligned}
D_1(s) &= \underline{q_0} + \underline{q_1}s + \overline{q_2}s^2 + \overline{q_3}s^3 + \underline{q_4}s^4 + \underline{q_5}s^5 + \dots \\
D_2(s) &= \underline{q_0} + \overline{q_1}s + \overline{q_2}s^2 + \overline{q_3}s^3 + \underline{q_4}s^4 + \overline{q_5}s^5 + \dots \\
D_3(s) &= \overline{q_0} + \underline{q_1}s + \underline{q_2}s^2 + \overline{q_3}s^3 + \overline{q_4}s^4 + \underline{q_5}s^5 + \dots \\
D_4(s) &= \overline{q_0} + \overline{q_1}s + \underline{q_2}s^2 + \underline{q_3}s^3 + \overline{q_4}s^4 + \overline{q_5}s^5 + \dots
\end{aligned} \tag{3.29}$$

gibidir. $i, j = 1, 2, 3, 4$, için $N_i(s)$ ve $D_j(s)$ 'in tüm kombinasyonları düşünüldüğünde Onaltı Kharitonov transfer fonksiyonu ailesi elde edilir.

$$G_{\kappa}(s) = \left\{ G_{ij}(s) = \frac{N_i(s)}{D_j(s)} \right\} \tag{3.30}$$

$i, j = 1, 2, 3, 4$.

Örnek 3.6

$$G(s) = \frac{r_1s + r_0}{s^3 + q_2s^2 + q_1s + q_0} \tag{3.31}$$

$r_0 \in [1, 2]$, $r_1 \in [3, 4]$, $q_0 \in [5, 6]$, $q_1 \in [8, 10]$, $q_2 \in [12, 15]$ aralıklara sahip olan bu sistemin kararlılığına bakacak olursak;

$$G(s) = \frac{[3, 4]s + [1, 2]}{s^3 + [12, 15]s^2 + [8, 10]s + [5, 6]} \text{ şeklini alır.}$$

(3.28) ve (3.29) denklemlerini kullanarak N_i ve D_j değerleri bulunur.

$$\begin{aligned}
N_1(s) &= 3s + 1 & D_1(s) &= s^3 + 15s^2 + 8s + 5 \\
N_2(s) &= 4s + 1 & D_2(s) &= s^3 + 15s^2 + 10s + 5 \\
N_3(s) &= 3s + 2 & D_3(s) &= s^3 + 12s^2 + 8s + 6 \\
N_4(s) &= 4s + 2 & D_4(s) &= s^3 + 12s^2 + 10s + 6
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Elde edilen bu polinomları (3.30) denkleminde yerlerine koyarak onaltı Kharitonov transfer fonksiyonu bulunur. Elde edilen bu onaltı sistemin hepsinin kararlılığı kontrol edilir ve sonuçta sistemin kararlı olup olmadığına karar verilir.

3.9. Otuziki Sistem

Daha önceki bölümlerde belirtildiği üzere Kharitonov teoremi, bağımsız ve belirsiz yapıya sahip polinomların kararlılık problemleriyle ilgilidir. Bu teoremi sabit kontrolörlü bir kontrol sisteme ve interval (aralıklı) plente uygulama girişimlerinde çeşitli zorluklar ile karşılaşılabilmektedir. Bu zorluk öncelikle karakteristik polinomun katsayılarından bağımsız olarak bozmayacağı gereğine dayanır. Böyle durumlarda kenar teoremi kullanılabilir. Bununla beraber, kenar teoreminden elde edilen sonuç için, belirsiz parametrelerin sayısına bağlı olarak değişen bütün etkin kenarların kontrol edilmesi gerekir. Genel olarak Kharitonov teoremi, 3.33 eşitliğinde verilen polinom şekillerinin dayanıklı kararlılıklarıyla ilgilenir.

$$K(s) = F_1(s)P_1(s, q_1) + F_2(s)P_2(s, q_2) + \dots + F_m(s)P_m(s, q_m) \tag{3.33}$$

Burada $F_1(s), F_2(s), \dots, F_m(s)$ sabit polinomlardır ve $P_1(s, q_1), P_2(s, q_2), \dots, P_m(s, q_m)$

ise interval polinomlardır.

3.27 eşitliğinde verilen interval transfer fonksiyon ailesi, $N_1(s), N_2(s), N_3(s)$ ve $N_4(s)$ pay kısımları ve $D_1(s), D_2(s), D_3(s)$ ve $D_4(s)$ payda kısımlarından oluşan Kharitonov polinomlarıyla gösterilebilir. Daha sonra pay için bu dört Kharitonov segmenti

$$(1 - \lambda)N_i(s) + \lambda N_j(s) \tag{3.34}$$

ve payda için dört Kharitonov segmenti

$$(1 - \lambda)D_i(s) + \lambda D_j(s) \quad (3.35)$$

olarak; $\lambda \in [0,1]$ ve $(i, j) \in \{(1,2), (1,3), (2,4), (3,4)\}$ 'in olduğu yerde hesaplanır. Pay ve payda için Kharitonov segmentlerini ve Kharitonov polinomlarını kullanarak, aşağıda belirtilen 32 altkümeden oluşan polinom ailesi,

$$G_E(s) = \frac{N_i(s)}{(1 - \lambda)D_j(s) + \lambda D_k(s)} \cup \frac{(1 - \lambda)N_j(s) + \lambda N_k(s)}{D_i(s)} \quad (3.36)$$

$\lambda \in [0,1]$, $i = 1, 2, 3, 4$ ve $(j, k) \in \{(1,2), (1,3), (2,4), (3,4)\}$ olduğu yerde elde edilir. Sabit kontrolörlü ve interval plantli bir kontrol sistemin Bode, Nyquist ve Nichols zarfları (envelopes) bu otuziki sistemden yararlanılarak elde edilebilir. Yüksek dereceli bir kontrolörlü ve interval plantli bir kontrol sistemin kararlılığı için, $C(s)G_E(s)$ 'in kararlılığı gereklidir [15].

3.10. Sonuç

Tezin bu bölümünde belirsiz parametrelili polinomların dayanıklı kararlılığı problemi üzerinde durulmuştur. Bu bölümde; Kharitonov teoremi kullanılarak aralıklı (interval) polinomların kararlılığının, dört Kharitonov polinomlarının kararlılığının kontrol edilerek bulunabileceği üzerinde durulmuştur. Bununla beraber, katsayı bozulmaları bağımsız olmadığı zaman bu teorem uygulanabilir değildir. Değer kümesi konsepti, sıfır dışarı prensibi ve segment lemma, belirsiz polinomların dayanıklı kararlılığının çözümünde parametrik dayanıklı kontrol alanında kullanılan üç önemli araçtır. Onaltı Kharitonov plant ailesi ve otuz-iki sistem, parametrik belirsizlikleri olan kontrol sistemlerinin tasarım ve analiz alanında kullanılan önemli gelişmelerdendir.

BÖLÜM 4

DİJİTAL KONTROL SİSTEMLERİNDE DAYANIKLI KARARLILIK ANALİZİ

- 4.1.** Giriş
- 4.2.** Kharitonov Teoremi ve Dijital İnterval Polinomlar
- 4.3.** Dijital İnterval Polinomların Değer Kümesi ve Kararlılığı
 - 4.3.1.** Kenar Teoremi
- 4.4.** Sonuç

4.1. Giriş

Kontrol sistemlerinin analiz ve tasarımı yapılırken belirsizliğin hesaba katılması sistemin dayanıklılığı açısından önem arz etmektedir. Genellikle kontrol sistemlerinde parametre belirsizliği ve model belirsizliği olmak üzere iki çeşit belirsizlik yapısından bahsedilir [20]. Parametre belirsizliği konusu özellikle Kharitonov teoremi [14] ile beraber önem kazanmış ve bu alanda birçok çalışmalar yapılmıştır. Kharitonov teoremi aralık (interval) belirsizlik yapısı içeren bir interval polinomun kararlılığının kümedeki dört Kharitonov polinomun kararlılığının test edilmesiyle elde edilebileceğini ifade etmektedir. Dolayısıyla kararlılık problemi sonsuz bir kümeden sonlu ve sadece dört tane polinom içeren bir kümeye indirgenmiştir. Fakat bu önemli teorem interval dijital kontrol sistemlerine uygulanamamaktadır. Çünkü Kharitonov teoremi, kararlılık bölgesi sol yarı düzlem olan sürekli zamanlı kontrol sistemleri için geçerlidir. Bu tip sistemlerin kararlılığına Hurwitz kararlılık denir. Bir dijital kontrol sisteminde ise kararlılık bölgesi birim çemberdir ve bu çeşit sistemlerin kararlılığına Schur kararlılık denir [21]. Dolayısıyla Kharitonov teoremini kullanarak interval bir ayrık zamanlı polinom kümesinin bütün köklerinin birim çemberin içerisinde olup olmadığını kontrol edemeyiz. Belirsiz bir ayrık zamanlı polinom kümesinin kararlılığı için kullanılacak bir metot da, tezin üçüncü bölümünde anlatılan kenar (edge) teoremidir [22]. Bu teoremden yararlanarak parametre belirsizliği içeren kontrol sistemlerinin analizi yapılabilir.

Tezin bu bölümünde ayrık zamanlı interval polinomların kararlılığı incelenecek ve değer kümelerinin hesaplanabilmesi için bir yöntem önerilecek. İnterval dijital kontrol sistemlerinin dayanıklılık analizi ile ilgili çalışmalar yapılacak ve parametre belirsizliği içeren dijital kontrol sistemlerinin dayanıklılık analizi için kullanılacak gerekli programlar MATLAB ortamında yazılacaktır.

4.2. Kharitonov Teoremi ve Dijital İnterval Polinomlar

Kharitonov teoremi, sürekli zamanlı sistemlerde kararlılık analizinde oldukça yoğun bir şekilde kullanılan bir yöntemdir. Özellikle interval yani aralık polinomlarında kararlılık analizinde, sonsuz sayıdaki polinomun kararlılığının analiz edilmesi yerine dört Kharitonov polinomunun kararlılığının incelenmesi üzerinde çalışılan sistemin kararlılığının belirlenmesine yetmektedir. Bununla beraber, sürekli zamanlı sistemlerde sık sık kullanılan Kharitonov teoremi dijital interval sistemlerde kullanılamamaktadır. Çünkü sürekli zamanlı sistemlerde kararlılık alanı sol yarı düzlem iken, dijital sistemlerde birim çemberin içidir.

Örnek 4.1

Altıncı dereceden bir interval polinomu ele alalım [23];

$$P(s, q) = q_0 + q_1s + q_2s^2 + q_3s^3 + q_4s^4 + q_5s^5 + s^6 \quad (4.1)$$

denklemleri verilmiş olsun. Burada $q_0 \in [0.45, 0.55]$, $q_1 \in [1.95, 2.05]$,

$q_2 \in [2.95, 3.05]$, $q_3 \in [5.95, 6.05]$, $q_4 \in [3.95, 4.05]$ ve $q_5 \in [3.95, 4.05]$ olsun.

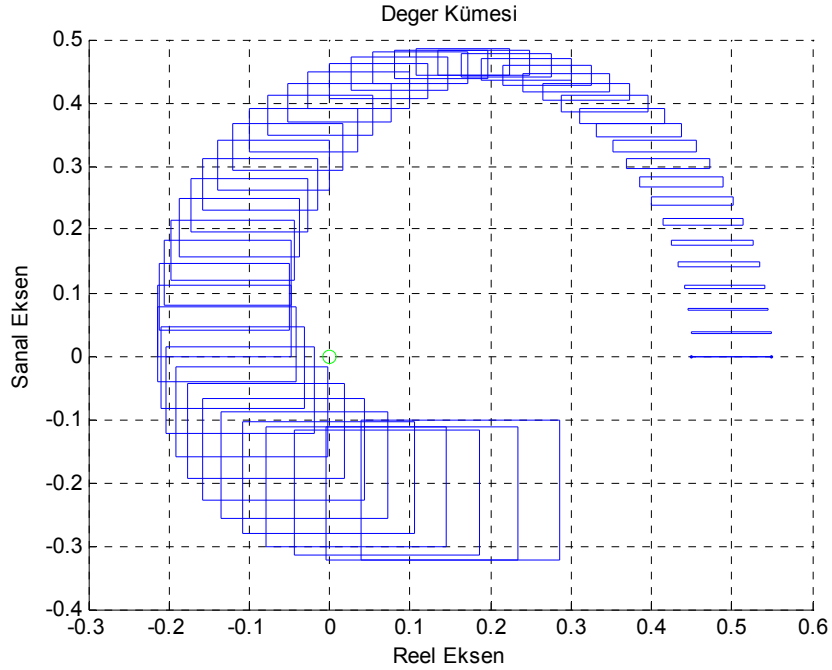
$s = jw$ yerine konursa,

$$P(jw, q) = -w^6 + q_4w^4 - q_2w^2 + j(q_5w^5 - q_3w^3 + q_1w) \quad (4.2)$$

elde edilir. Burada reel ve sanal kısımda görülen belirsiz parametrelerin birbirinden bağımsız olduğu görülmektedir. Dolayısıyla her bir frekans değerinde $P(jw, q)$ 'nin değer kümesi kenarları reel ve sanal eksene paralel olan bir dikdörtgendir. Bu polinom kümesinin değer kümeleri $0 \leq w \leq 0.9$ aralığında 50 frekans değerinde şekil 4.1 'de görülmektedir. Sıfır değer kümesinin içinde olmadığı için bu belirsiz polinom kümesi kararlı olduğunu söylemek mümkündür. Bu kümenin dört Kharitonov polinomu;

$$\begin{aligned} p_1(s) &= 0.45 + 1.95s + 3.05s^2 + 6.05s^3 + 3.95s^4 + 3.95s^5 + s^6 \\ p_2(s) &= 0.45 + 2.05s + 3.05s^2 + 5.95s^3 + 3.95s^4 + 4.05s^5 + s^6 \\ p_3(s) &= 0.55 + 1.95s + 2.95s^2 + 6.05s^3 + 4.05s^4 + 3.95s^5 + s^6 \\ p_4(s) &= 0.55 + 2.05s + 2.95s^2 + 5.95s^3 + 4.05s^4 + 4.05s^5 + s^6 \end{aligned} \quad (4.3)$$

şeklinde yazılabilir. Bu dört polinomunda kararlılığı test edilebilir. Dolayısıyla sürekli zamanlı bir interval polinomun kararlılığı, dört Kharitonov polinomunun kararlılığı test edilerek bulunabilir.



Şekil 4.1 Denklem (4.1) 'deki interval polinomun $0 \leq w \leq 0.9$ için değer kümesi.

Yukarıda verdiğimiz örnekten çıkardığımız sonuç, ayrık zamanlı interval polinomlar için yani, dijital kontrol sistemler için geçerli değildir. Bu görüşün ispatı için başka bir örnek ele alalım.

Örnek 4.2

$$P(z, k) = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad (4.4)$$

polinomunu incelersek; burada,

$a_0 = 0.0096$, $a_1 \in [-0.16, -0.1]$, $a_2 \in [0.42, 0.5]$, $a_3 \in [-1.3, -1]$ ve $a_4 = 1$. Dört Kharitonov polinomunu bularak,

$$\begin{aligned}
p_1(z) &= z^4 - z^3 + 0.5z^2 - 0.16z + 0.0096 \\
p_2(z) &= z^4 - 1.3z^3 + 0.5z^2 - 0.1z + 0.0096 \\
p_3(z) &= z^4 - z^3 + 0.42z^2 - 0.16z + 0.0096 \\
p_4(z) &= z^4 - 1.3z^3 + 0.42z^2 - 0.1z + 0.0096
\end{aligned} \tag{4.5}$$

bu polinomların kararlılığı test edildiğinde Schur kararlı olduğu görülür. Fakat kümeye ait olan $p(z) = z^4 - 1.28z^3 + 0.42z^2 - 0.15z + 0.0096$ polinomu Schur kararlı değildir. Dolayısıyla dijital interval polinomlar için Kharitonov polinomlarının kararlı olması yeterli değildir. Bunun nedeni polinomda $z = e^{j\omega T}$ (burada 'T' örnekleme periyotudur) yazıldığında belirsiz parametreler reel ve sanal kısımda birbirlerine bağımlı olarak görüleceklerdir.

$z = e^{j\omega T}$ ise;

$$p(e^{j\omega T}) = e^{4j\omega T} - 1.28e^{3j\omega T} + 0.42e^{2j\omega T} - 0.15e^{j\omega T} + 0.0096 \text{ olur.}$$

Dolayısıyla değer kümesi kenarları reel ve sanal eksenlere paralel olan dikdörtgen değildir. Bundan dolayı; dijital bir interval polinomun kararlılığının test edilebilmesi için değer kümesinin hesaplanması gerekmektedir. Dijital bir interval polinomun değer kümesinin hesaplanması için kenar (edge) teoremi kullanılabilir [21].

4.3. Dijital İnterval Polinomların Değer Kümesi ve Kararlılığı

4.3.1. Kenar Teoremi

Dijital interval polinomların değer kümesinin hesaplanması ve kararlılığının analizinde kenar teoremi kullanılan başlıca yöntemdir. Dijital kontrol sistemlerde kenar teoremi ile ilgili yapılacak hesaplamalar sürekli zamanlı sistemlerde yapılan hesaplamalar ile aynıdır. Kenar teoremi ile ilgili bilgilere tezin üçüncü bölümünde kapsamlı olarak değinilmiştir.

n tane belirsiz parametre içeren bir polinom ailesinin herhangi bir sabit frekanstaki değer kümesi bir poligondur ve bu poligonun 2^n tane köşesi ve $n2^{n-1}$ tane de etkin (exposed) kenarı vardır. Böyle bir polinom kümesinin Schur

kararlı olabilmesi için etkin kenarların Schur kararlı olması gerekir veya değer kümesinin sıfırı içine almaması gerekir [16, 24].

Örnek 4.3

Bir dijital interval polinom şu şekilde verilsin

$$P(z, k) = [1.5, 2]z^3 - 0.35z^2 - 0.85z + 0.08 \quad (4.6)$$

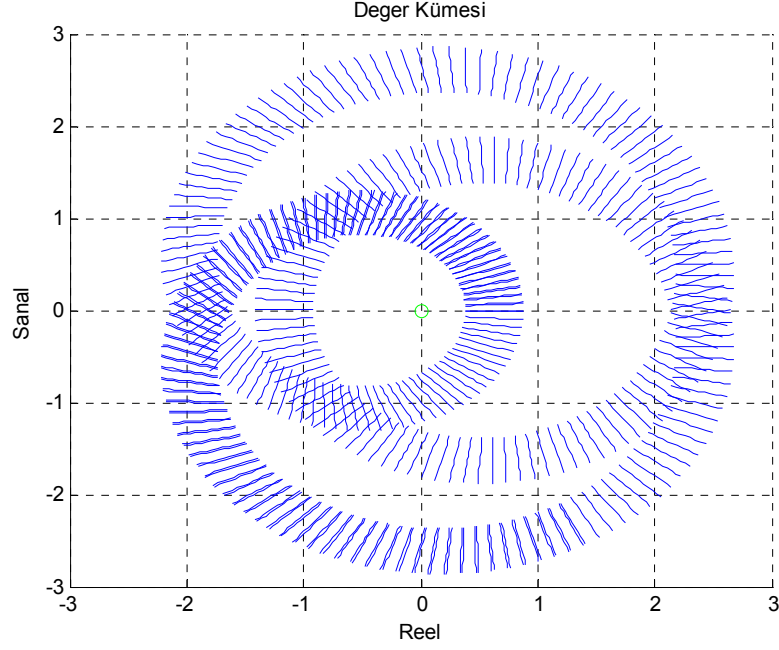
görüldüğü gibi bu interval polinom kümesi sadece bir tane parametre belirsizliği içermektedir. Dolayısıyla bu polinom kümesi için iki tane köşe polinomu ve bir tane kenar elde edilebilir. Köşe polinomları;

$$\begin{aligned} c_1(z) &= 1.5z^3 - 0.35z^2 - 0.85z + 0.08 \\ c_2(z) &= 2z^3 - 0.35z^2 - 0.85z + 0.08 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$c_1(z)$ ve $c_2(z)$ 'in Schur kararlı olduğu, Jury kararlılık testini uygulayarak veya $c_1(z)$ ve $c_2(z)$ 'in köklerini bularak test edilebilir. Köşe veya uç polinomlarını kullanarak;

$$\begin{aligned} e(c_1, c_2) &= \lambda c_1(z) + (1 + \lambda)c_2(z) \\ &= (2 - 0.5\lambda)z^3 - 0.35z^2 - 0.85z + 0.08 \end{aligned} \quad (4.8)$$

etkin kenarı elde edilebilir, burada $\lambda \in [0, 1]$ 'dir. Bu kenarın $0 \leq w \leq 80$ için değer kümesi şekil 4.2'de görülmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere '0' (sıfır) değer kümesinin dışında kalmaktadır. Dolayısıyla verilen polinom kümesi Schur kararlıdır.



Şekil 4.2 Denklem (4.8)'deki kenar polinomunun değer kümesi.

Örnek 4.4

İki tane belirsiz parametresi olan bir dijital interval polinomu incelersek;

$$P(z, k) = a_1 z + a_0 \quad (4.9)$$

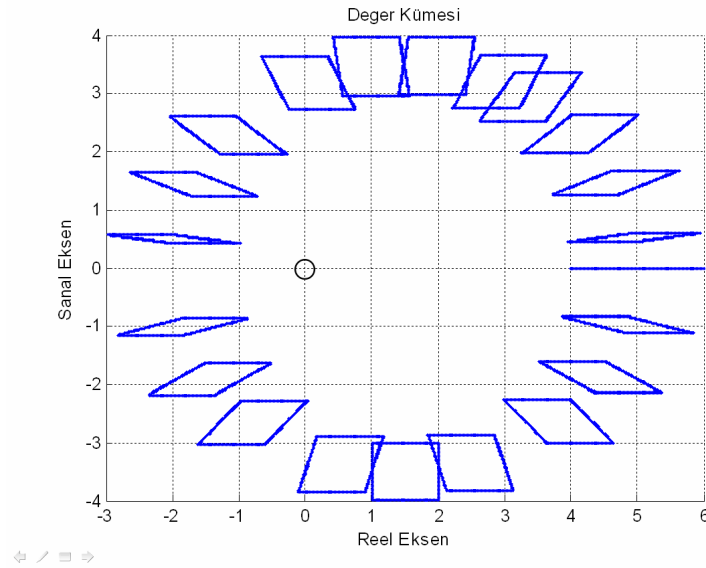
polinomu verilsin. Burada $a_0 \in [1, 2]$ ve $a_1 \in [3, 4]$ olsun. Dolayısıyla, $n = 2$ olduğundan $2^2 = 4$ tane köşe polinomu ve $2 \times 2^{2-1} = 4$ tane de etkin kenarı vardır. Bu polinomun köşeleri;

$$\begin{aligned} c_1(z) &= 3z + 1 \\ c_2(z) &= 3z + 2 \\ c_3(z) &= 4z + 1 \\ c_4(z) &= 4z + 2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

olarak bulunur. Etkin kenarları ise $e_1(z) = \lambda c_1(z) + (1 - \lambda)c_2(z)$ denklemini kullanılarak;

$$\begin{aligned}
e(c_1, c_2) &= 3z + 2 - \lambda \\
e(c_1, c_3) &= (4 - \lambda)z + 1 \\
e(c_2, c_4) &= (4 - \lambda)z + 2 \\
e(c_3, c_4) &= 4z + 2 - \lambda
\end{aligned} \tag{4.11}$$

olarak bulunur. Burada $z = e^{j\omega T}$ yazılır; ayrıca, $\lambda = [0, 1]$ ve bu etkin kenarların $0 \leq \omega \leq 20$ için değer kümesi şekil 4.3 'de görülmektedir.



Şekil 4.3 Denklem (4.9)'daki dijital polinomun değer kümesi.

Şekil 4.3'den anlaşılacağı üzere sistem kararlıdır. Çünkü, değer kümesi içine '0' (sıfır)'ı almamıştır. Ayrıca, köşe polinomlarının kökleri kontrol edildiğinde bütün köklerin birim çember içerisinde olduğu görülmektedir. Bütün köklerin birim çember içerisinde olması sistemin kararlı olduğunu belirtir. Eğer, köklerden bir tanesi dahi birim çember dışında olursa sistem kararsız olur.

Örnek 4.5

Üç adet belirsiz parametresi olan bir dijital interval sistemi incelersek [12];

$$G(z) = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.368z + 0.368} \tag{4.12}$$

sistemi verilsin. Öncelikle bu dijital sistemin karakteristik denklemini buluruz.

$p(z) = 1 + G(z) = 0$ ' dan karakteristik denklemi bulunur. Dolayısıyla;

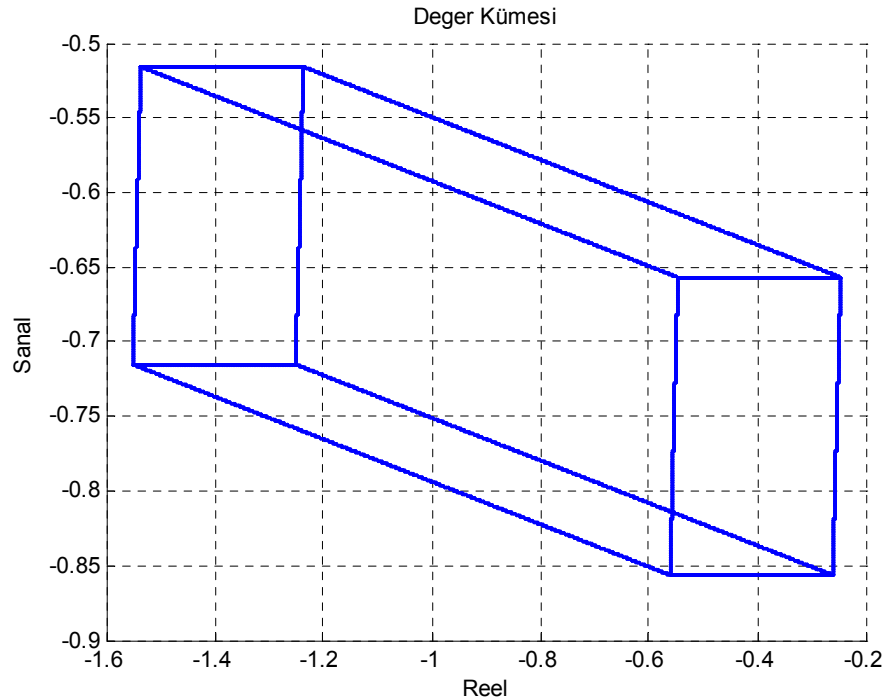
$$p(z) = 1 + G(z) = 1 + \frac{a_1 z + a_0}{b_2 z^2 + b_1 z + b_0} = 0$$

$$p(z) = b_2 z^2 + (a_1 + b_1)z + (a_0 + b_0) \quad (4.13)$$

polinomu elde edilir. Burada $a_0 \in [0.1, 0.4]$, $a_1 = 0.4$, $b_0 = 0.4$,

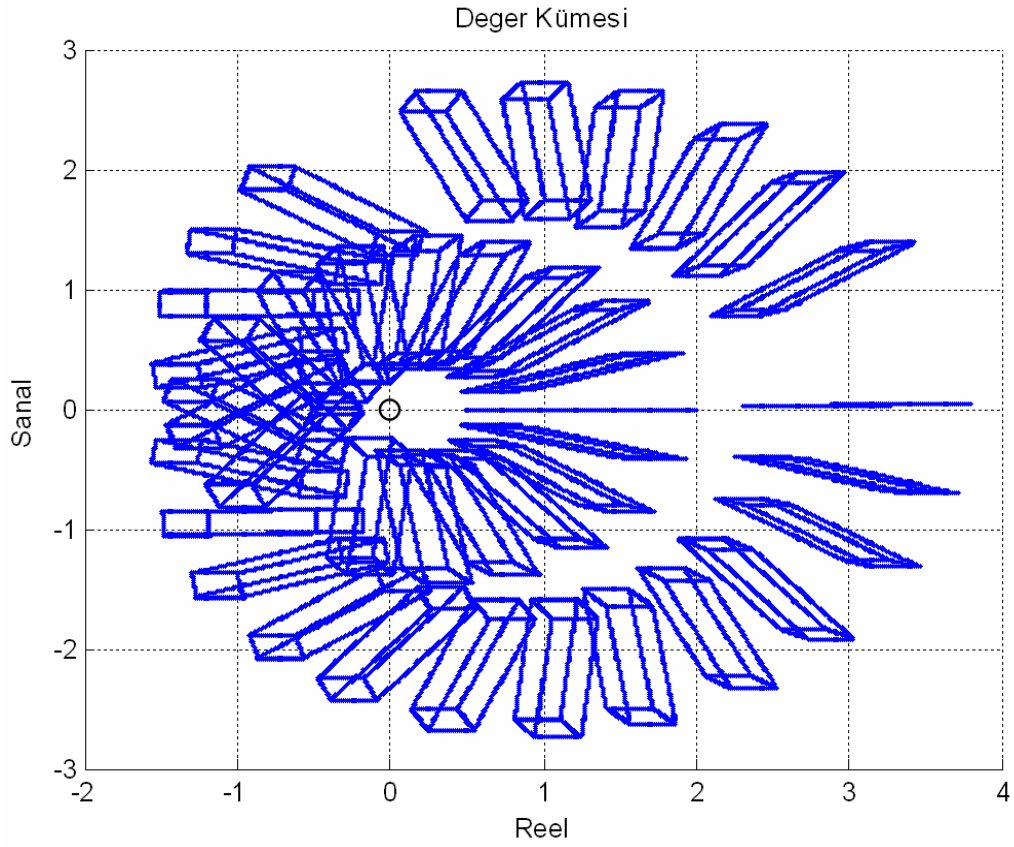
$b_1 \in [-1.4, -1.2]$ ve $b_2 \in [1, 2]$ olsun. Dolayısıyla, $n = 3$ olduğundan $2^3 = 8$ tane köşe polinomu ve $3 \cdot 2^{3-1} = 12$ tane de etkin kenarı vardır. Bu polinomun köşe polinomları (3.24) eşitliğinden ve etkin kenarları (3.25) eşitliğinden bulunur.

(3.25) eşitliği kullanılarak elde edilen etkin kenarları kullanarak denklem (4.10)'da ki dijital interval polinomun değer kümesi elde edilebilir. Şekil 4.4'te $w = 1.5 \text{ rad} / sn$ için değer kümesi görülmektedir.



Şekil 4.4 Denklem (4.13)' deki dijital interval polinomun $w = 1.5 \text{ rad} / sn$ 'deki değer kümesi.

$0 \leq w \leq 40$ için denklem (4.13)'de ki interval polinomun değer kümeleri şekil 4.5'te görülmektedir.



Şekil 4.5 Denklem (4.13)' de ki dijital interval polinomun değer kümesi.

Şekil 4.5, denklem (4.12)'de ki dijital kontrol sisteminin kararlı olduğunu yani karakteristik denklemin bütün köklerinin birim çemberin içerisinde olduğunu ifade etmektedir. Bununla beraber, sistemin değer kümesinin '0' (sıfır)'ı içine almadığı da şekilden anlaşılmaktadır. Ayrıca, kenar teoremine göre etkin kenarların kök uzayı, interval polinomun kök uzayını içine alır. Denklem (4.14) deki interval polinomun etkin kenarlarının kök uzayı şekil 4.6 'da verilmiştir.

Örnek 4.6

Üç adet belirsiz parametresi olan bir dijital interval kontrol sistemi incelersek [12];

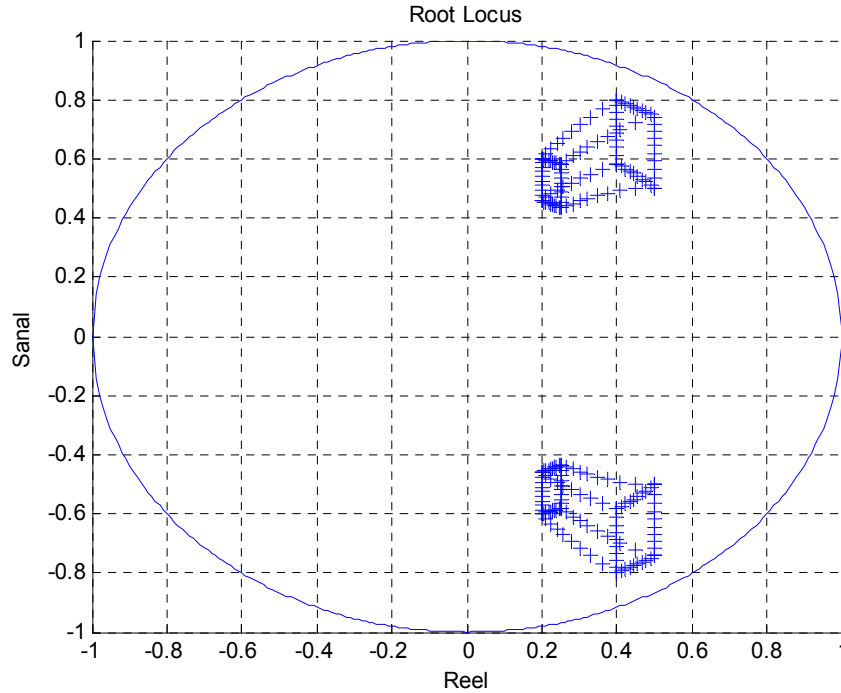
$$G(z) = \frac{K * (0.368z + 0.264)}{z^2 - 1.368z + 0.368} \quad (4.14)$$

sistemi verilsin. Sistemin karakteristik denklemini bulunur.

$$\begin{aligned} \rho(z) = 1 + G(z) &= 1 + \frac{K(a_1z + a_0)}{b_2z^2 + b_1z + b_0} = 0 \\ \rho(z) &= b_2z^2 + (Ka_1 + b_1)z + (Ka_0 + b_0) \end{aligned} \quad (4.15)$$

polinomu elde edilir. Burada; $a_0 \in [0.1, 0.4]$, $a_1 = 0.4$, $b_0 = 0.4$, $b_1 \in [-1.4, -1.2]$ ve $b_2 \in [1, 2]$ olsun. Üç adet belirsiz parametre olduğundan yani $n = 3$ olduğundan, 8 adet köşe polinomu ve 12 adet etkin kenar vardır.

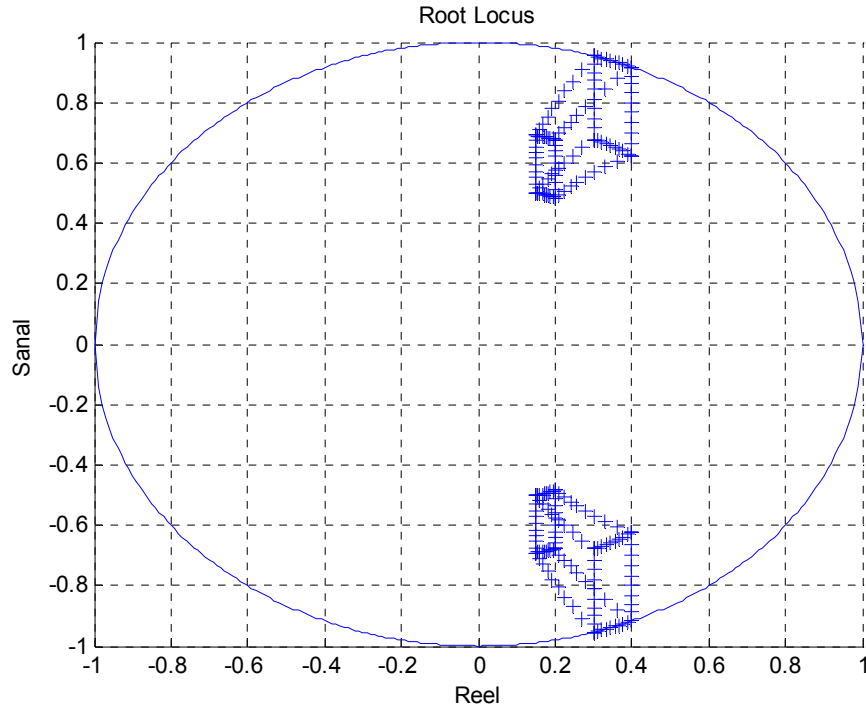
K=1 için;



Şekil 4.6 Denklem (4.14)'deki dijital kontrol sistemin karakteristik denkleminin K=1 için kök uzayı.

Denklem (4.14)'deki dijital interval polinomun etkin kenarlarının kök uzayı şekil 4.6'da belirtilmiştir. Şekilden de anlaşıldığı üzere kök uzayı birim çemberin içinde kalmaktadır. Eğer, sistemin köşe polinomlarının köklerini inceleyecek olursak yine birim çemberin içinde olduğunu görülür. Bu durum, dijital sistemin kararlı olduğunu gösterir.

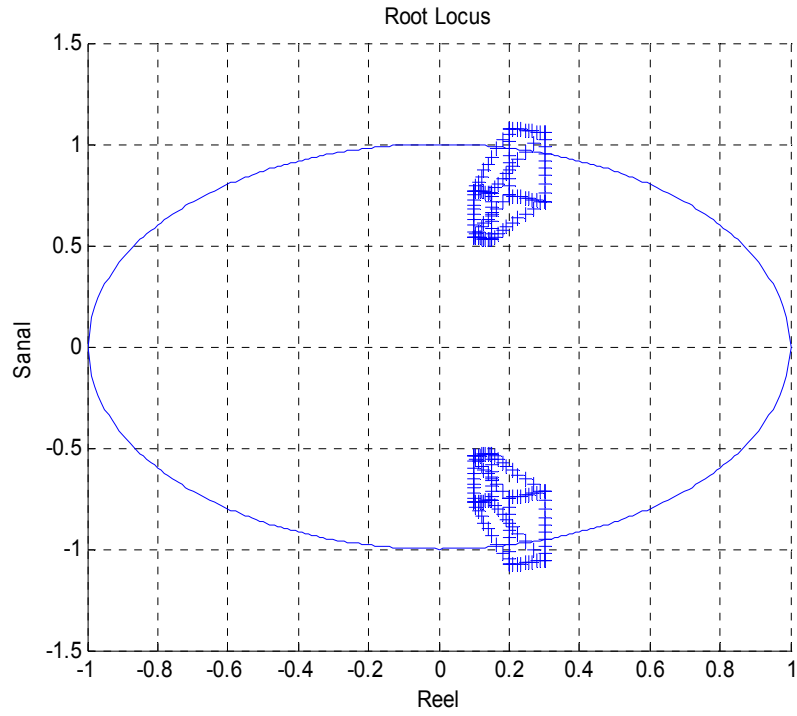
K=1.5 için;



Şekil 4.7 Denklem (4.14)'deki dijital kontrol sistemin karakteristik denkleminin K=1.5 için kök uzayı.

K=1.5 olarak alındığında sistemin bazı köklerinin birim çemberin sınırları üzerinde olduğu şekil 4.7 'de görülmektedir.

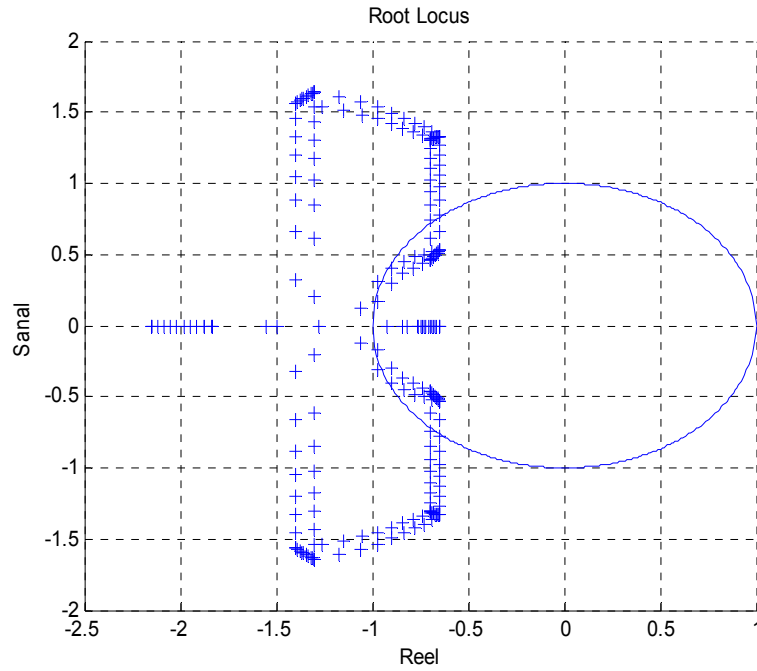
K=2 için;



Şekil 4.8 Denklem (4.14)'deki dijital kontrol sistemin karakteristik denkleminin K=2 için kök uzayı.

Şekil 4.8 'de sistemin bazı köklerinin birim çember dışında olduğu görülmektedir. Yani, K=2 için sistem kararsız hale gelmiştir.

K=10 için;



Şekil 4.9 Denklem (4.14)'deki dijital kontrol sistemin karakteristik denkleminin K=10 için kök uzayı.

Sonuç olarak; denklem (4.14) 'de verilen dijital interval polinomun $0 < K < 1.5$ için kararlı olduğunu, bu sınırlar dışında ise sistemin kararsız olduğunu söyleyebiliriz.

Örnek 4.7

Birim geribeslemeli bir dijital interval kontrol sisteminde;

$$G(z) = \frac{a_1 z + a_0}{z^2 (z + a_2)} \quad (4.16)$$

$a_0 \in [-0.06, 0.053]$, $a_1 \in [-0.05, 0.05]$ ve $a_2 \in [0.045, 0.15]$ ise, dijital kontrol sisteminin kararlılığını inceleyelim. Öncelikle sistemin karakteristik denklemini

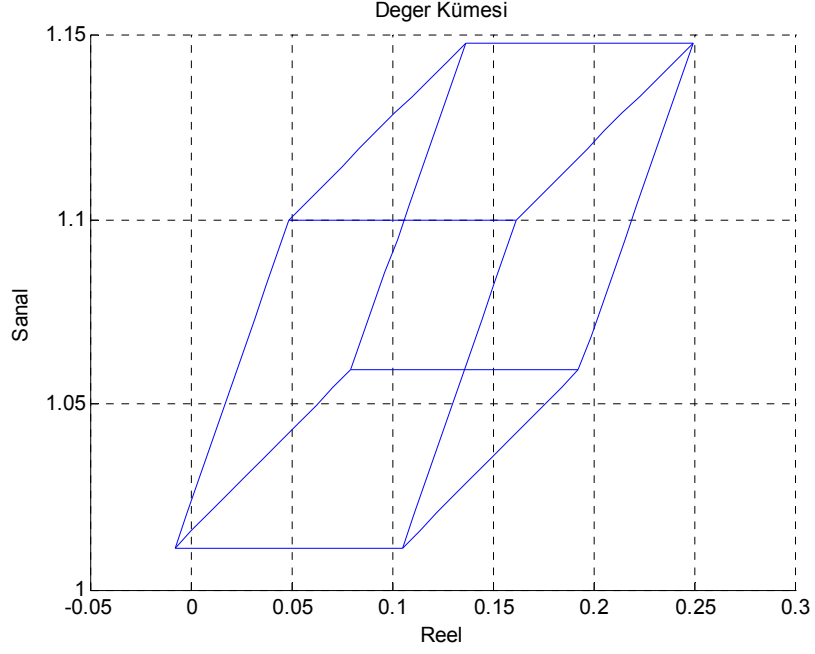
$$P(z, k) = 1 + G(z) = 0 \quad (4.17)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan;

$$P(z, k) = z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad (4.18)$$

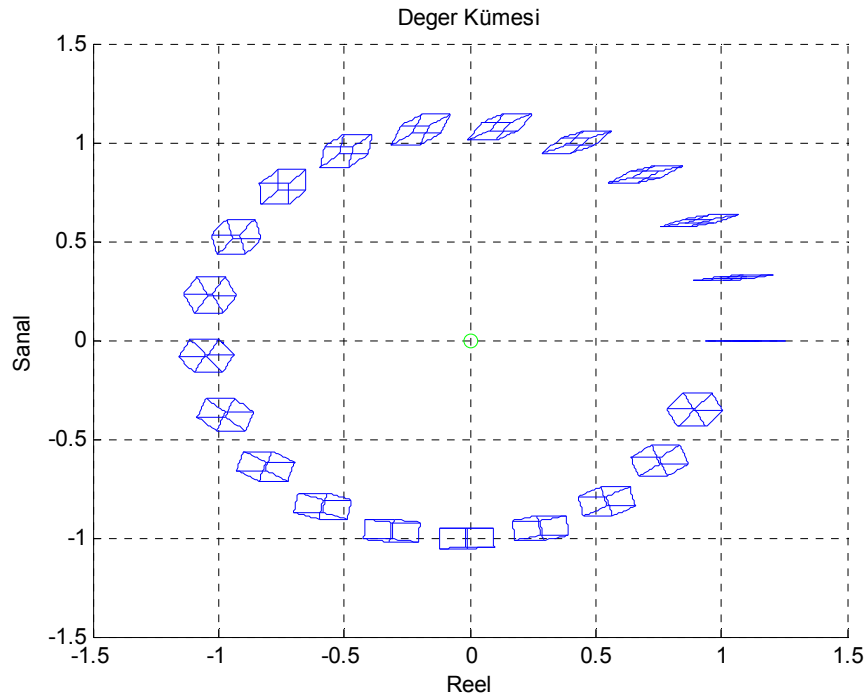
elde edilir. Dolayısıyla dijital interval kontrol sisteminin kararlılık problemi, dijital interval polinomların kararlılık problemine dönüştürülmüş oldu. Denklem (4.18)'de ki belirsiz polinom kümesinin kararlılığını test edebilmek için değer kümesi yaklaşımı kullanılabilir. $n = 3$ olduğundan $2^3 = 8$ tane köşe polinomu ve $3 \times 2^{3-1} = 12$ tane de etkin kenarı vardır. Bu polinomun köşe polinomları (3.24) eşitliğinden ve etkin kenarları (3.25) eşitliğinden bulunur.

(3.25) eşitliği kullanılarak elde edilen etkin kenarları kullanarak denklem (4.18)'de ki dijital interval polinomun değer kümesi elde edilebilir. Şekil 4.10'da $w = 5 \text{ rad} / sn$ için değer kümesi görülmektedir.



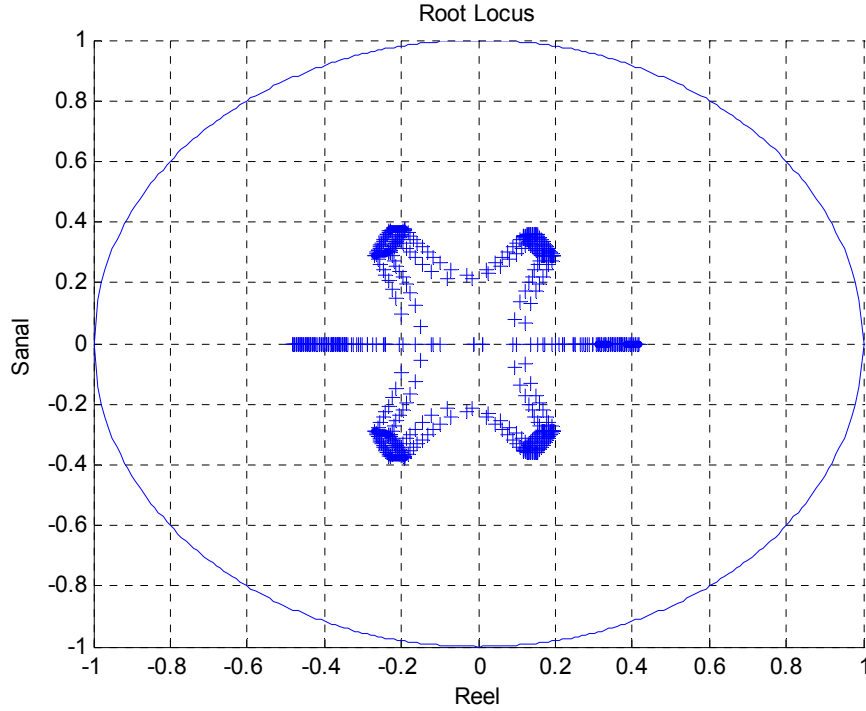
Şekil 4.10 Denklem (4.18)'deki dijital interval polinomun $w = 5 \text{ rad} / \text{sn}$ 'deki değer kümesi.

$0 \leq w \leq 20$ için denklem (4.18)'de ki interval polinomun değer kümeleri şekil 4.11'de görülmektedir. Şekil 4.11 bize dijital kontrol sisteminin bütün köklerinin birim çemberin içerisinde olduğunu yani kararlı olduğunu ifade etmektedir.



Şekil 4.11 Denklem (4.18)'de ki dijital interval polinomun değer kümesi.

Denklem (4.18)'deki polinomun kenar teoremine göre etkin kenarları kontrol edilirse, bütün etkin kenarların kök uzayı interval polinomun kök uzayı içinde yer aldığı görülür. Denklem (4.18)'deki interval polinomun etkin kenarlarının kök uzayı şekil 4.12'de verilmiştir.



Şekil 4.12 Denklem (4.18)'deki dijital kontrol sistemin karakteristik denkleminin kök uzayı.

4.4. Sonuç

Tezin bu bölümünde parametre belirsizliği içeren dijital kontrol sistemlerinin dayanıklı kararlılık analizini inceledik. Kharitonov teoreminin, dijital interval polinomların kararlılık analizi için geçerli bir yöntem olmadığını gördük. Kenar teoremi kullanarak bir dijital interval polinomun değer kümesinin elde edilebileceği görüldü. Değer kümesiyle beraber, sıfırın dışlanması kuralını kullanarak bir dijital interval polinomun Schur kararlılığının test edilebileceği gösterildi. MATLAB ortamında gerekli yazılımlar yapılmış olup, bu yazılımlar parametre belirsizliği içeren dijital kontrol sistemlerinin analizi için kullanılabilir. Tezin beşinci bölümünde, belirsizlik içeren dijital kontrol sistemlerinin frekans cevabı analizi yani Bode, Nyquist ve Nichols diyagramları incelenecektir.

BÖLÜM 5

PARAMETRE BELİRSİZLİĞİ İÇEREN DİJİTAL KONTROL SİSTEMLERİNDE NYQUIST, BODE VE NICHOLS DİYAGRAMLARI

5.1. Giriş

5.2. Nyquist Kararlılık Kriteri

5.3. Bode Diyagramı

5.3.1. Bode Diyagramının Üstünlükleri ve Sakıncaları

5.4. Nichols Diyagramı

5.5. Sonuç

5.1. Giriş

Pratikte bir kontrol sisteminin davranışı, en gerçekçi ve doğru olarak ancak zaman tanım bölgesi kıstasları ile belirlenir. Bunun başta gelen sebebi, kontrol sistemlerinde davranışların genellikle sisteme verilen test işaretleri etkisindeki sistem yanıtlarına göre değerlendirilmesidir [13]. Kontrolün bazı alanlarında frekans yanıtı metodunun temel rolü vardır. Özellikle haberleşme sistemlerinde ve sinyal işlemede, işlenen işaretlerin sinüzoidal olması ya da sinüzoidal bileşenlerden oluşması nedeniyle, sistemlerin analiz ve tasarımında frekans yanıtının önemi büyüktür [20]. Frekans tanım bölgesi analizinde ve tasarımında, doğrusal ve zamanda bağımsız (LTI) kontrol sistemlerinde grafiksel ve yarı grafiksel teknikler kullanılabilir [25]. Klasik kontrol, kontrol sistemlerinin frekans tanım bölgesi özellikleri üzerine yoğunlaşır ve Nyquist, Bode ve Nichols gibi basit yapılı, fakat güçlü grafiksel araçlar içeren tasarım metotları geliştirir. Bu teknikler, mühendislikte yoğun bir şekilde kullanılan ve iyi bilinen tekniklerdir.

Bir kontrol sisteminin tasarımında geçici cevap performansı genellikle çok önemlidir. Frekans cevabı yaklaşımında geçici cevap performansını dolaylı bir yolla belirleriz. Geçici cevap performansı kazanç payı, faz payı, rezonans tepesi büyüklüğü (ki bunlar sistem sönümünün kaba taslak bir tahminini verirler), kazanç geçiş frekansı, rezonans frekansı, band genişliği (bunlar geçici cevap hızının kabaca bir tahminini verirler) ve statik hata sabitleri (bunlar ise kalıcı durum doğruluğunu verirler) terimleriyle belirlenir. Geçici cevap ve frekans cevabı arasındaki ilişki endirekt olmasına rağmen frekans tanım bölgesi kıstasları Bode diyagramı yaklaşımında rahatlıkla karşılanabilir.

Frekans cevabı çizimi, geçici cevap karakteristiklerinin doğru ve tam bir tahmini yapılamamasına rağmen sistemde değiştirilmesi gereken yolu açıkça gösterir. Frekans cevabı yaklaşımı sistemlere veya dinamik karakteristikleri frekans cevabı verileri biçiminde olan elemanlara uygulanabilir. Pnömatik ve hidrolik elemanlar gibi belirli elemanların düzenleyici denklemlerinin türetilmesindeki zorluklar sebebiyle, bu tür elemanların dinamik karakteristikleri genellikle deneysel olarak frekans cevabı testleriyle belirlenir. Deneysel olarak elde edilen frekans cevabı çizimleri Bode diyagramı yaklaşımı kullanıldığı zaman diğer çizimlerle kolaylıkla kombine edilebilir. Ayrıca yüksek frekans gürültüleriyle ilgileniliyorsa frekans cevabı yaklaşımının diğer yaklaşımlardan

çok daha kullanışlı olduğu görülür [6]. Parametre belirsizliği içeren kontrol sistemlerinin frekans cevapları ile ilgili detaylı çalışmalara [26, 27, 28, 29]'da ulaşılabilir.

Tezin bu bölümünde ayrı zamanlı interval sistemlerin kararlılığını; Nyquist kararlılık kriteri, Bode ve Nichols diyagramları kullanılarak incelenecektir. İnterval dijital kontrol sistemlerinin dayanıklılık analizi ile ilgili çalışmalar yapılacak ve parametre belirsizliği içeren dijital kontrol sistemlerinin dayanıklılık analizi için kullanılacak gerekli programlar MATLAB ortamında yazılacaktır.

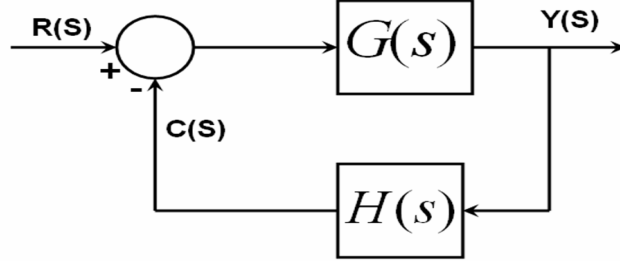
5.2. Nyquist Kararlılık Kriteri

Nyquist kararlılık kriteri bir kapalı çevrim sistemin, açık çevrim frekans cevabından ve açık çevrim kutuplarından kararlılığını belirlemeye yarar. Sistem transfer fonksiyonu $G(s)$ 'de, s yerine jw yazılarak elde edilen $G(jw)$ ya çoğu defa sinüzoidal girişle ilgili olduğu için "sinüzoidal transfer fonksiyonu"da denir. Nyquist diyagramı, sinüzoidal transfer fonksiyonu $G(jw)$ 'nin modülünün ve açısının, w sıfırdan sonsuza değiştirilirken, $\text{Im}-\text{Re}$ düzleminde gösterilmesi ile elde edilir. Diğer bir deyişle, Nyquist diyagramı $|G(jw)|$ vektörünün w sıfırdan sonsuza değişirken $\text{Im}-\text{Re}$ düzleminde çizdiği geometrik yerdir. Nyquist diyagramı çizilirken pozitif faz açıları, pozitif reel eksenden itibaren saat yönüne ters ölçülür. Negatif faz açıları ise reel eksenden başlayarak saat yönünde alınır [2]. Kontrol sistemlerinin analiz ve tasarımında, Nyquist kriterinin aşağıda belirtilen özellikleri, yaklaşımı alternatif bir yöntem olarak çekici kılar [13].

a. Nyquist kriteri, Routh-Hurwitz kriterinde olduğu gibi, sistemin mutlak kararlılığı, kararlı sistemin görece kararlılığı ve kararsız sistemin kararsızlığı konusunda bilgi sağlar. Ayrıca gerektiğinde sistem kararlılığının nasıl düzeltilebileceği konusunda aydınlatıcı olur.

b. $G(s)H(s)$ Nyquist eğrisi, özellikle bilgisayar yardımıyla çok kolay oluşturulabilir.

c. Nyquist yer eğrileri ile, Routh-Hurwitz kriteriyle incelenemeyen ve kök yer eğrileriyle güçlkle işlenebilen ölü zamanlı sistemler kolaylıkla değerlendirilebilir.



Şekil 5.1 Geribeslemeli bir kontrol sistemi

Şekil 5.1'de gösterilen kapalı çevrim sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu;

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (5.1)$$

Kararlılık için karakteristik denklem $1 + G(s)H(s) = 0$ 'ın tüm kökleri sol yarı s düzleminde yer almalıdır. Eğer kapalı çevrim transfer fonksiyonunun tüm kutupları diğer bir tanımla karakteristik denklemin kökleri sol yarı s düzleminde yer alıyorsa açık çevrim transfer fonksiyonu $G(s)H(s)$ 'in kutupları ve sıfırları sağ yarı s düzleminde yer alsa bile sistem kararlıdır.

Nyquist kararlılık kriteri $1 + G(s)H(s)$ 'in sağ yarı s düzleminde yer alan kutup ve sıfırlarının sayısı ile açık çevrim frekans cevabı $G(j\omega)H(j\omega)$ arasında ilişki kurar. Nyquist kararlılık kriterine göre kapalı çevrim bir sistemin kararlılığı açık çevrim frekans cevabı $G(j\omega)H(j\omega)$ kutupsal eğrisinin $-1 + j0$ noktasını çevreleyip çevrelemediğini inceleyerek belirlenebilir.

Nyquist kararlılık kriterine göre:

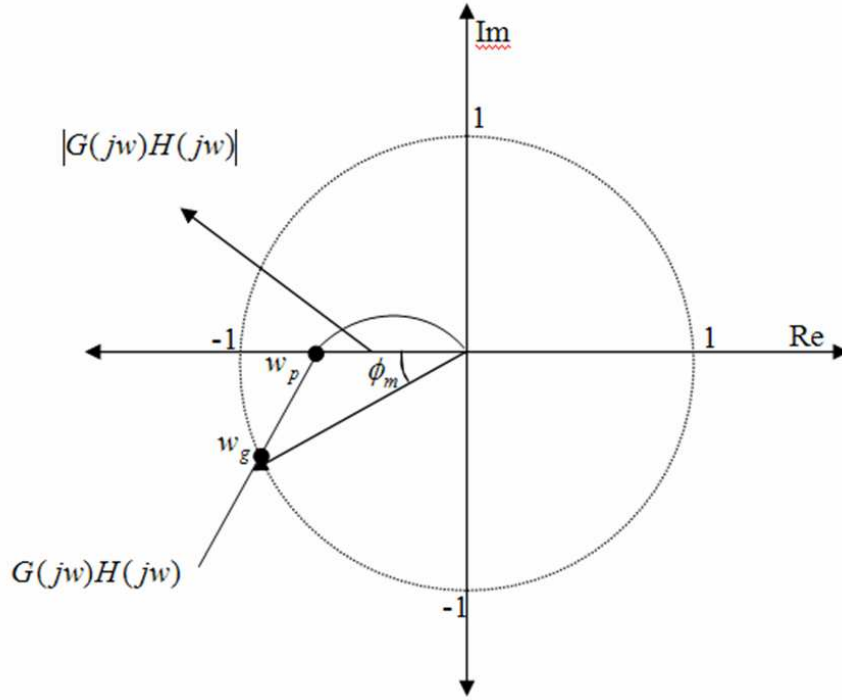
Z : $1 + G(s)H(s)$ 'in sağ yarı s düzlemindeki sıfırlarının sayısı

N : $G(j\omega)H(j\omega)$ 'nin $-1 + j0$ noktasını çevreleme sayısı

P : $G(s)H(s)$ 'in sağ yarı s düzlemindeki kutuplarının sayısı

olmak üzere kapalı çevrim bir sistemin kararlı olabilmesi için $Z = N + P$ bağıntısında $Z = 0$ ya da başka bir deyişle $N = -P$ olmalıdır.

Bunların yanı sıra Nyquist eğrisinden kazanç payı, faz payı, faz kesim frekansı ve kazanç kesim frekansı gibi ifadeleri de elde etmek mümkündür.



Şekil 5.2 Nyquist eğrisi

Kazanç payı $G(jw)H(jw)$ açık çevrim frekans eğrisinin negatif reel eksenini kestiği noktadaki genlik değerinin çarpıma göre tersi olarak tanımlanabilir. Yani kazanç payı

$$g_m = \frac{1}{|G(jw_p)H(jw_p)|} \quad (5.2)$$

bağıntısıyla belirlenir.

Faz payı ise $G(jw)H(jw)$ eğrisinin birim çemberi kestiği noktadan $-1 + j0$ noktasına ulaşabilmek için tamamlaması gereken açı değeri olarak tanımlanabilir ve $\phi_m = \angle G(jw_g)H(jw_g) \pm 180$ bağıntısıyla hesaplanır. Faz kesim frekansı, $G(jw)H(jw)$ 'nin negatif reel eksenini kestiği noktadaki w_p frekans

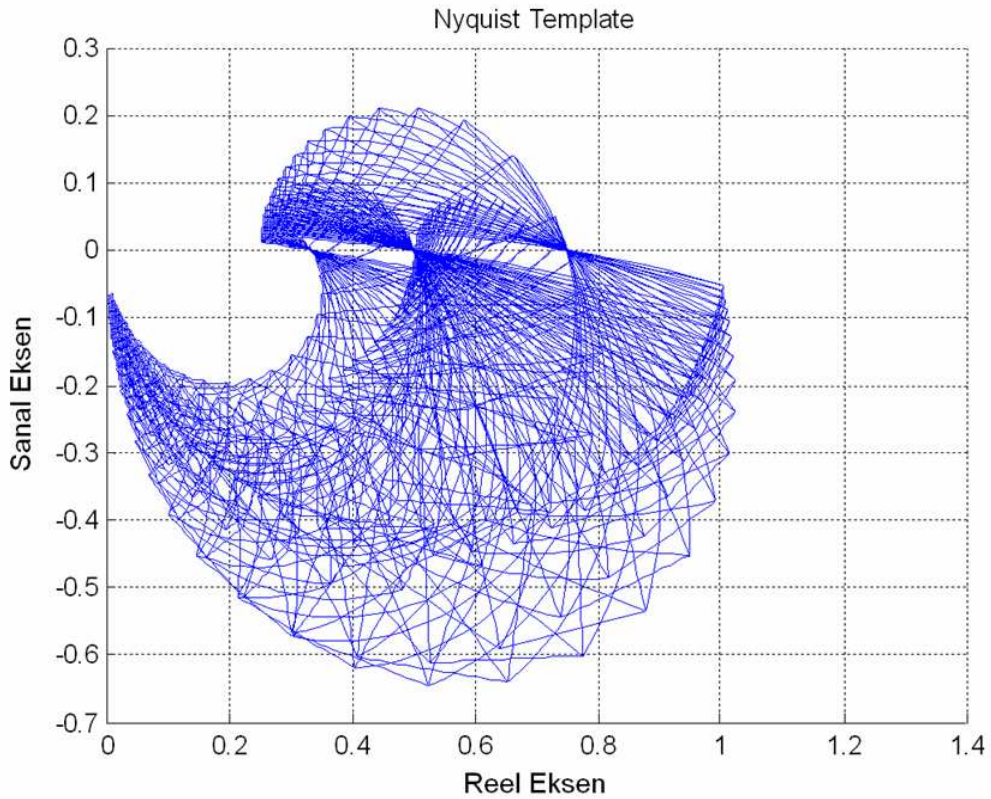
değeridir. Kazanç kesim frekansı ise $G(j\omega)H(j\omega)$ 'nın birim çemberi kestiği noktadaki ω_g frekans değeridir.

Örnek 5.1

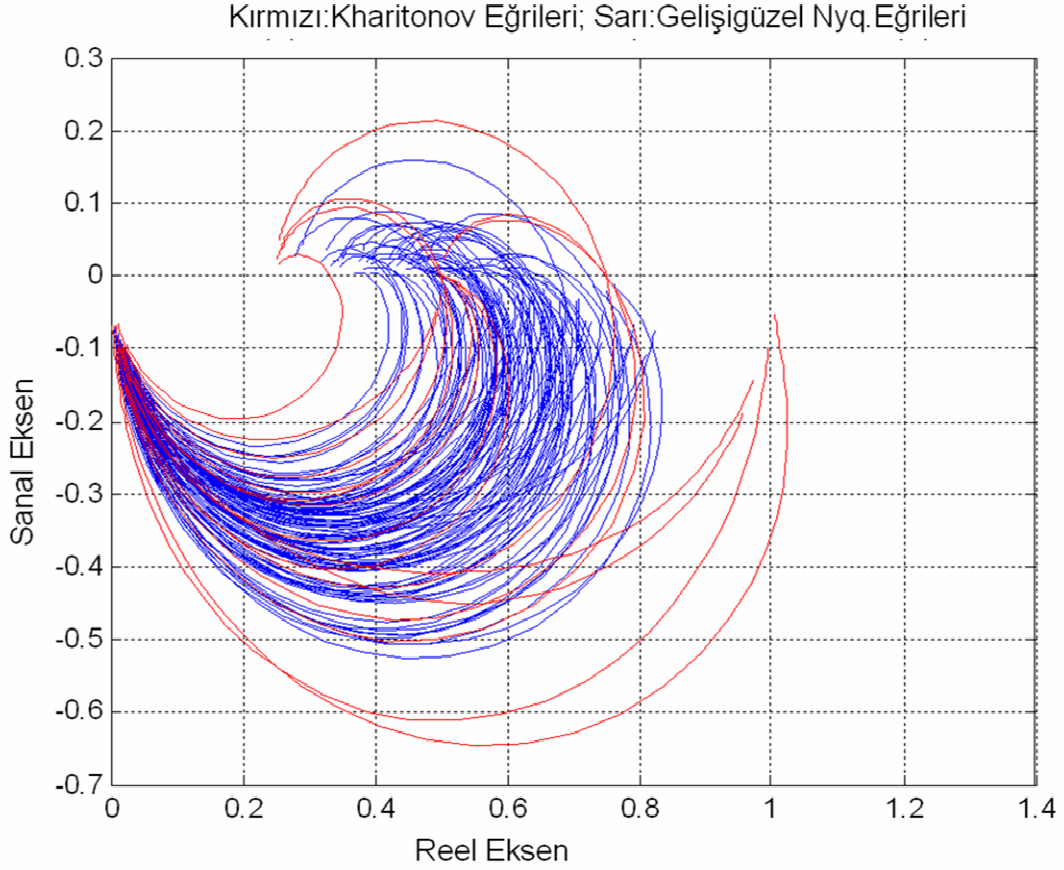
Belirsiz bir interval sistemi inceleyelim.

$$G(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0} \quad (5.3)$$

Yukarıdaki sistem katsayıları $a_0 \in [1, 2]$, $a_1 \in [2, 3]$, $b_2 \in [2, 3]$, $b_1 \in [4, 6]$ ve $b_0 \in [2, 4]$ interval aralıklarında verilmiş olsun. Bu belirsiz interval sistemin her bir frekans değeri için bir Nyquist template çizilebilir. Denklem (5.3)'ün $0.1 < \omega < 30 \text{ rad/sn}$ aralığında çizilmiş olan Nyquist template eğrileri şekil 5.3'de belirtilmiştir.



Şekil 5.3 Örnek 5.1'e ait Nyquist template eğrileri.



Şekil 5.4 Örnek 5.1'e ait gelişigüzel Nyquist yer eğrileri.

Yine aynı şekilde belirtilen aralıklarda gelişigüzel (random) Nyquist eğrileri çizilebilir. Her bir frekans değeri için bir random Nyquist eğrisi çizilir. $0.1 < \omega < 30 \text{ rad/sn}$ için denklem (5.3)'ün rastgele çizilmiş Nyquist yer eğrileri Şekil 5.4'te belirtilmiştir. Şekil 5.4'te ayrıca eğrilerin dış sınırlarını gösteren Kharitonov polinomlarının eğrileri de belirtilmiştir.

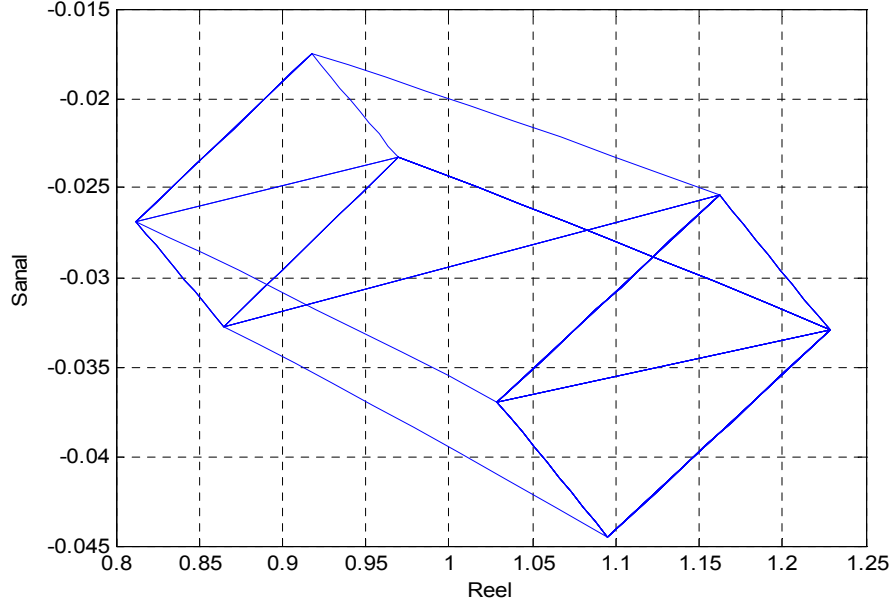
Örnek 5.2

Aşağıda verilen dijital interval bir sistemi inceleyelim;

$$G(z) = \frac{\delta_2 z^2 + \delta_0}{z(z^2 + \delta_1)} \quad (5.4)$$

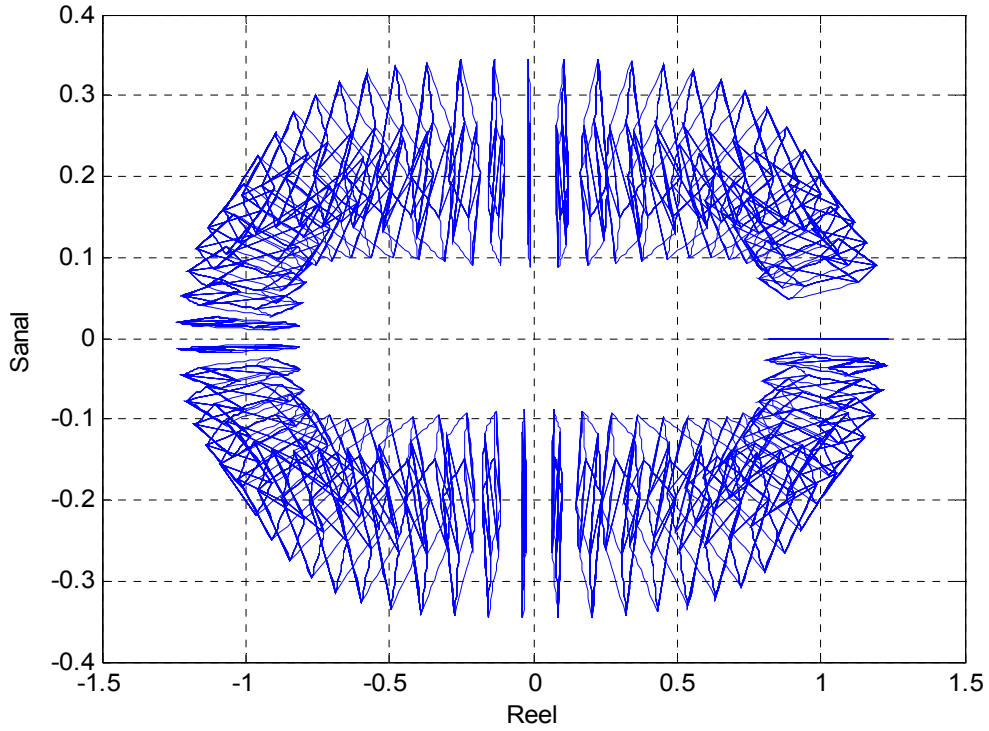
Verilen sistemin $\delta_0 \in [9.5, 10.5]$, $\delta_1 \in [14, 18]$ ve $\delta_2 \in [6, 8]$ belirsizlik aralıklarında değiştiğini kabul edelim. Yukarıda verilen dijital interval sistemi

belirli bir frekans aralığında çizebiliriz. Her bir frekans değeri için bir Nyquist çizilebilir. Bu kapsamda; denklem (5.4)'ün $w = 0 \text{ rad/sn}$ 'daki hali şekil 5.5'te belirtilmiştir.



Şekil 5.5 Örnek 5.2'nin $w = 0 \text{ rad/sn}$ için şekli.

Şekil 5.6'da belirtilen şekil $0 < w < 60 \text{ rad / sn}$ için denklem (5.4)'te verilen sistemin Nyquist kararlılık aralığı gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere incelenen dijital sistem kararlıdır. Çünkü sistemin değer kümesinin '0' (sıfır)'ı içine almadığı da şekilden anlaşılmaktadır. Bu yüzden karakteristik denklemin bütün köklerinin birim çemberin içerisinde olduğunu söylemek mümkündür.



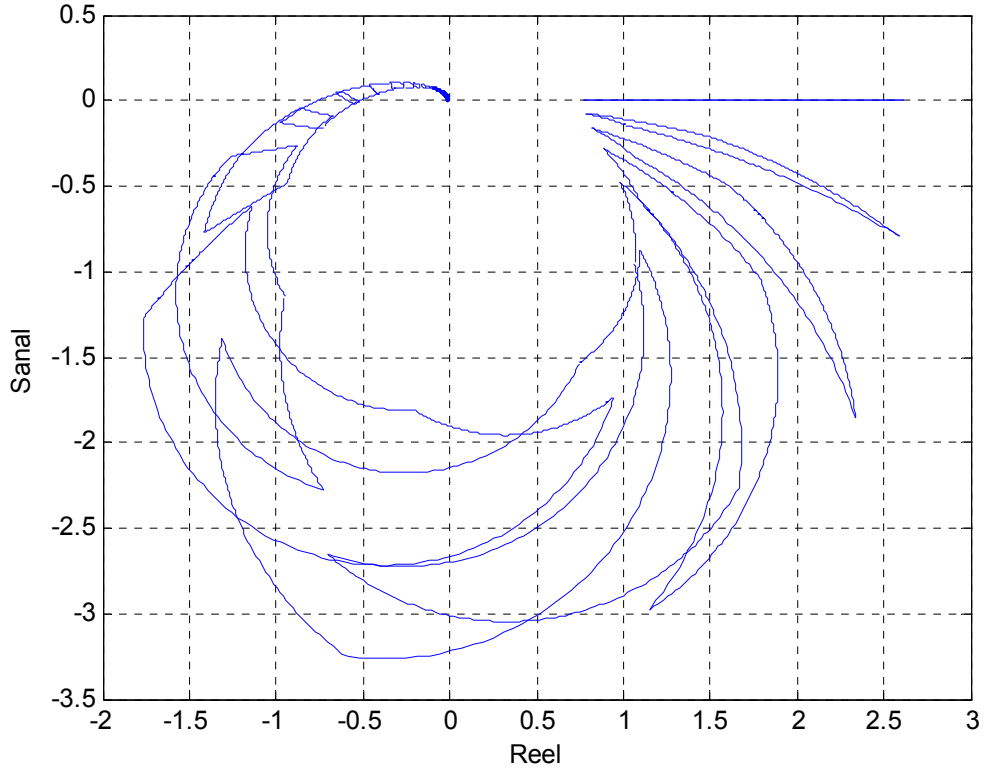
Şekil 5.6 Örnek 5. $0 < w < 60 \text{ rad / sn}$ için şekli.

Örnek 5.3

Aşağıda belirtilen sistemi inceleyelim;

$$G(z) = \frac{0.17z + 0.15}{z^2 + y_1z + y_0} \quad (5.5)$$

burada sistem katsayıları $y_1 \in [-1.57, -1.37]$ ve $y_0 \in [0.7, 0.8]$ aralıklarında değiştiğini farzedelim. Belirtilen aralıklar için her bir frekans değerinde bir çizim yapılabilir. Şekil 5.7'de $0 < w < 60 \text{ rad / sn}$ frekans aralığında sistemin değer kümesi görülmektedir.



Şekil 5.7 Örnek 5. $0 < \omega < 60 \text{ rad / sn}$ için sistemin şekli.

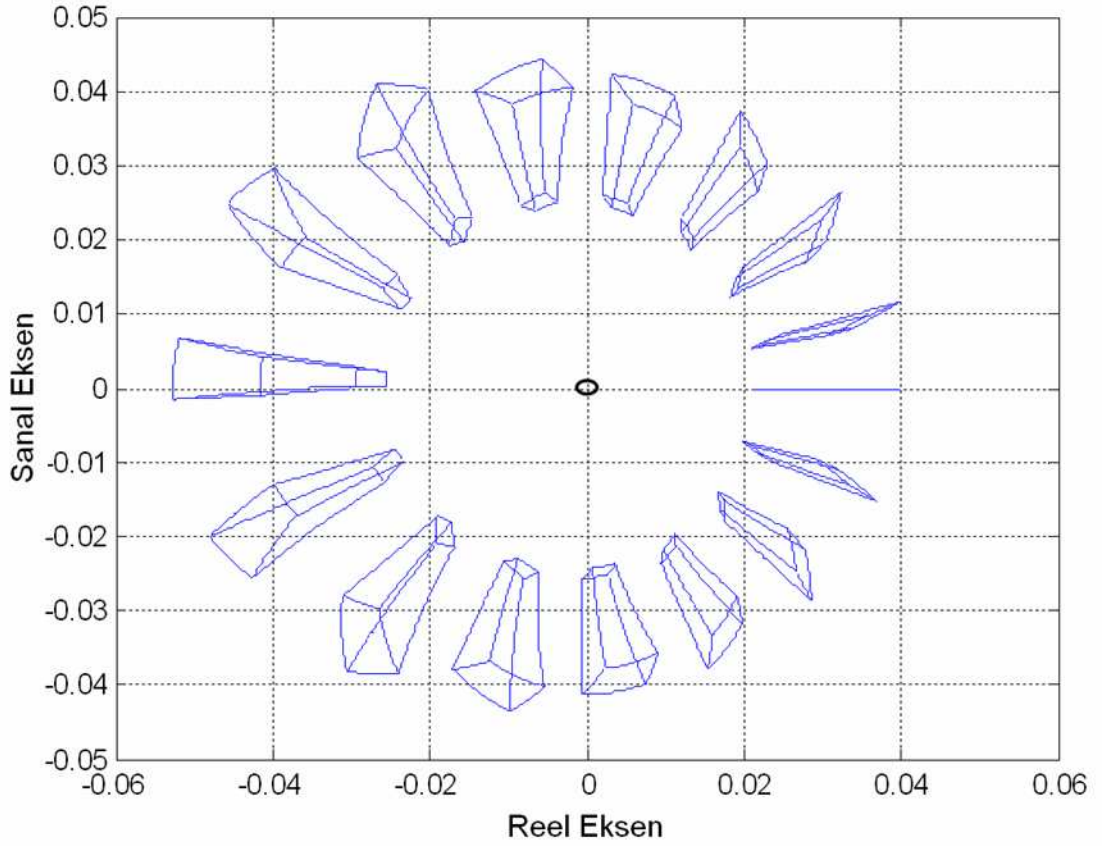
Örnek 5.4

Aşağıda belirtilen sistemi;

$$G(z) = \frac{0.1}{y_2 z^2 + y_1 z + y_0} \quad (5.6)$$

$y_2 \in [2.5, 4]$, $y_1 \in [-0.1, 0.2]$ ve $y_0 \in [0.1, 0.6]$ belirsizlik aralıklarında inceleyelim.

Yukarıda belirtilen sistemin kararlılığını incelerken paydanın kenarları kullanılacak. Sistemin belirsizlik aralıklarından paydanın köşeleri elde edilerek, köşelerden paydanın kenarları bulunacak sistemin kararlılığı incelenecek.



Şekil 5.8 Denklem (5.6)'daki dijital interval sistemin $0 < w < 30 \text{ rad} / \text{sn}$ 'deki değer kümeleri.

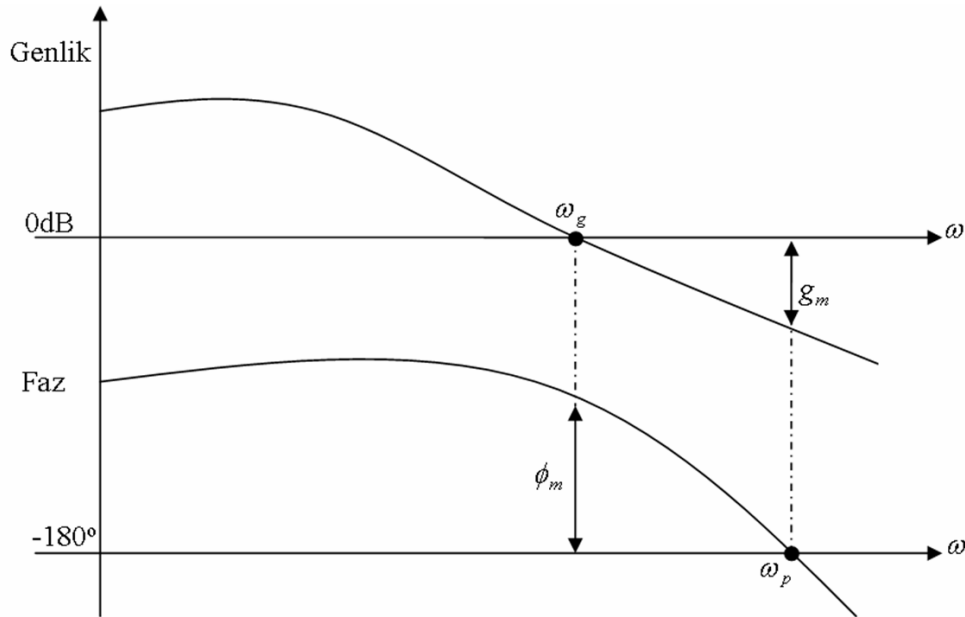
Şekil 5.8'den de görüldüğü üzere denklem (5.6)'da belirtilen dijital kontrol sistemi Schur kararlıdır, yani karakteristik denklemin bütün kökleri birim çemberin içindedir. Bununla beraber, sistemin değer kümesinin '0' (sıfır)'ı içine almadığı şekilde görülmekte, yani sistemin kararlı olduğu şekilden anlaşılmaktadır.

5.3. Bode Diyagramı

$G(jw)$ fonksiyonunun Bode diyagramı iki çizimden oluşur. Bunlardan birincisi $G(jw)$ genliğinin sinüzoidal transfer fonksiyonunun desibel cinsinden değeri, diğeri ise $G(jw)$ fazının derece cinsinden $\log_{10} w$ ya da w 'ya bağlı çizimidir [13]. Her iki eğri de logaritmik ölçekte frekansa karşı çizilir. Yani genlik ve faz eğrileri, frekans yani yatay eksen için logaritmik ölçek ve düşey eksen için lineer ölçek kullanılarak yarı logaritmik olarak alt alta çizilirler [6].

Bode diyagramında, $G(j\omega)$ 'nin genliği dB cinsinden ifade edildiğinden, $G(j\omega)$ 'de çarpılan ve bölünen faktörler toplam ve farklara dönüşür. Faz ilişkileri de cebirsel eklenip çıkarılan büyüklükler şeklindedir. $G(j\omega)$ 'nin genliğine ilişkin Bode diyagramı, yaklaşık doğru parçacıkları şeklinde ifade edilebildiğinden, diyagram fazla hesap gerektirmeden basitçe çizilebilir [13]. Bu yöntem asimptotik çizimlere dayanır. Düz çizgiler tarafından oluşturulan bu çizimler frekans cevabı karakteristiklerinin sadece kabaca bir bilgisine ihtiyaç olduğunda oldukça yararlıdır. Eğer tam eğri isteniyorsa bu asimptotik çizimler kolaylıkla düzeltilebilir. Logaritmik ölçekte alçak frekans aralığı kullanılmaktadır ve pratik sistemlerde alçak frekans aralığı karakteristikleri çok önemli olduğundan bu yöntem oldukça avantaj sağlamaktadır.

Nyquist eğrisinden elde ettiğimiz kazanç payı, faz payı, kazanç geçiş frekansı, faz geçiş frekansı gibi ifadeleri Bode diyagramı üzerinde de görebiliriz. Bu niceliklerin Bode diyagramı üzerinde yerleşimi şekil 5.9'da gösterilmiştir [6].



Şekil 5.9 Bode diyagramı ve kazanç payı, faz payı, kazanç-faz geçiş frekansı ifadelerinin gösterimi

Örnek 5.5

Verilen bir transfer fonksiyonunun Bode diyagramını çizmek için aşağıda belirtilen basamaklar takip edilir.

Genel olarak bir transfer fonksiyonu;

$$G(s) = \frac{K_1(s+b)}{s(s+a)(s^2 + 2\zeta s + w_n^2)} \quad (5.7)$$

verilsin. Bode diyagramını çizmek için öncelikle b, a ve w_n^2 değerleri 1'e

eşitlenir. $K = \frac{K_1 b}{a w_n^2}$ $T_a = \frac{1}{a}$ $T_b = \frac{1}{b}$ $s = jw$ dönüşümleri yapılarak;

$$G(jw) = \frac{K(T_b jw + 1)}{jw(T_a jw + 1)(1 - \frac{w^2}{w_n^2} + j2\zeta \frac{w}{w_n})} \quad (5.8)$$

elde edilir. Bundan sonra $G(jw)$ sadece beş farklı basit çarpan terim kapsar. Bode diyagramını çizmek için bu beş terimi sırasıyla çizmek gerekir. Bunlar;

1. Gerçek Sabit Kazanç "K"

$$\begin{aligned} \text{MdB;} & \quad 20 \log(K) \\ \phi; & \quad \arg(K) = \begin{cases} 0^\circ & K > 0 \\ -180^\circ & K < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2. Reel Sıfır "(jT_bw + 1)"

$$\begin{aligned} \text{MdB;} & \quad 20 \log \sqrt{T_b^2 w^2 + 1} = \begin{cases} 20 \log 1 = 0, & w T_b < 1 \\ 20 \log(w T_b), & w T_b > 1 \end{cases} \\ \phi; & \quad \arg(j T_b w + 1) = -\tan^{-1}\left(\frac{T_b w}{1}\right) = \begin{cases} 0^\circ, & w T_b < 1 \\ 90^\circ, & w T_b > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

3. Orijindeki Kutup "(jw)"

$$\begin{aligned} \text{MdB;} & \quad -20 \log(w) \\ \phi; & \quad -\arg(jw) = -90^\circ \end{aligned}$$

4. Reel Kutup "(jT_aw + 1)"

$$\begin{aligned} \text{MdB;} & \quad -20 \log \sqrt{j T_a w + 1} = \begin{cases} -20 \log 1 = 0, & w T_a < 1 \\ -20 \log(w T_a), & w T_a > 1 \end{cases} \\ \phi; & \quad -\arg(j T_a w + 1) = -\tan^{-1}\left(\frac{T_a w}{1}\right) = \begin{cases} 0^\circ, & w T_a < 1 \\ -90^\circ, & w T_a > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

5. Kompleks Kutuplar $(1 - \frac{W^2}{W_n^2} + j2\zeta \frac{W}{W_n})$

$$MdB; \quad 20 \log \sqrt{(1 - \frac{W^2}{W_n^2})^2 + (2\zeta \frac{W}{W_n})^2} = \begin{cases} -20 \log 1 = 0, & \frac{W}{W_n} < 1 \\ -40 \log(\frac{W}{W_n}), & \frac{W}{W_n} > 1 \end{cases}$$

$$\phi; \quad -\arg(1 - \frac{W^2}{W_n^2} + (j2\zeta \frac{W}{W_n})^2) = -\tan^{-1}(\frac{2\zeta \frac{W}{W_n}}{1 - \frac{W^2}{W_n^2}}) = \begin{cases} 0^\circ, & \frac{W}{W_n} < 1 \\ -180^\circ, & \frac{W}{W_n} > 1 \end{cases}$$

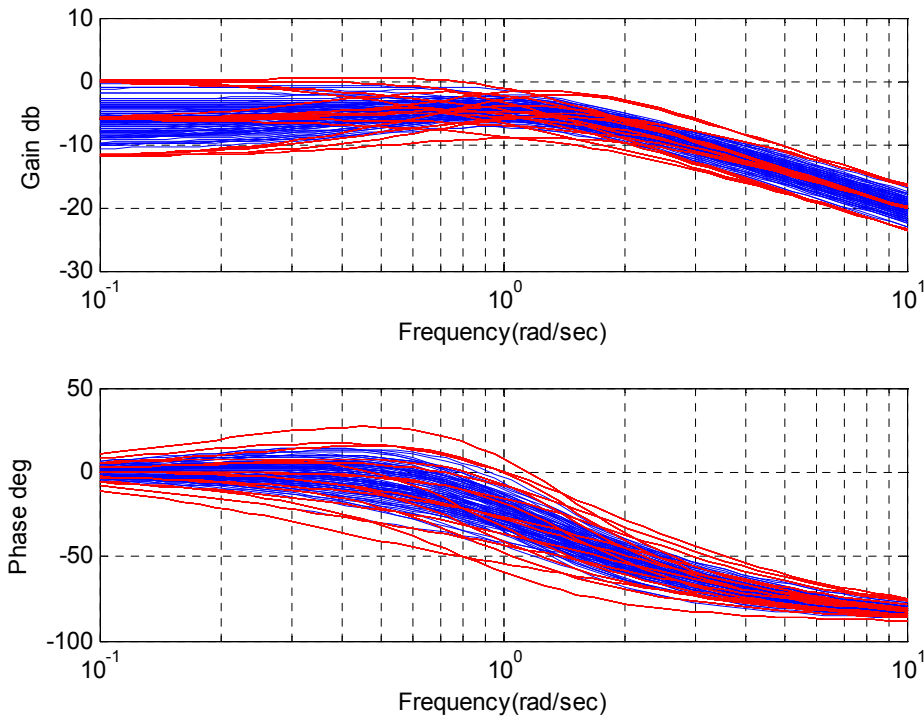
Sonuç olarak, yukarıda belirtilen işlem sırası takip edilerek şekil 5.8'de gösterilen genlik-faz diyagramı elde edilir.

Örnek 5.6

Denklem (5.3)'de verilen;

$$G(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$$

Yukarıda belirtilen sistemin katsayıları $a_0 \in [1, 2]$, $a_1 \in [2, 3]$, $b_2 \in [2, 3]$, $b_1 \in [4, 6]$ ve $b_0 \in [2, 4]$ interval aralıklarında verilmiş olsun. Bu belirsiz interval sistemin Bode diyagramını inceleyelim.



Şekil 5.10 Denklem (5.3)'de belirtilen sistemin Bode diyagramları.

Şekil 5.10'da, incelenen sistemin her bir belirsiz interval aralığında alınan yüz adet noktadan genli eğrileri ve faz eğrileri olarak iki farklı çizimden oluşan bode diyagramları görülmektedir. Bode diyagramlarından anlaşıldığı üzere sistem kararlıdır.

Örnek 5.7

Aşağıda belirtilen dijital interval sistemin Bode diyagramlarını incelersek;

$$K * G(z) = K * \frac{(a_1 z + a_0)}{b_2 z^2 - b_1 z + b_0} \quad (5.9)$$

burada sistemin $a_0 \in [0.1, 0.4]$, $a_1 = 0.4$, $b_0 = 0.4$, $b_1 \in [-1.4, -1.2]$ ve $b_2 \in [1, 2]$ aralıklarında olduğunu kabul edelim. $G(jw)$ fonksiyonunun Bode diyagramı iki çizimden oluşur. Bunlardan birincisi $G(jw)$ genliğinin sinüzoidal transfer fonksiyonunun desibel cinsinden değeri, diğeri ise $G(jw)$ fazının derece cinsinden $\log_{10} w$ ya da w 'ya bağlı çizimi olduğu daha önce belirtilmişti. Bu yüzden yukarıda belirtilen denklem (5.9)'un ' w ' dönüşümü alınır. ' w ' dönüşümünü yapmak için sırasıyla;

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} = \frac{2 + Ts}{2 - Ts} \Rightarrow \quad (5.10)$$

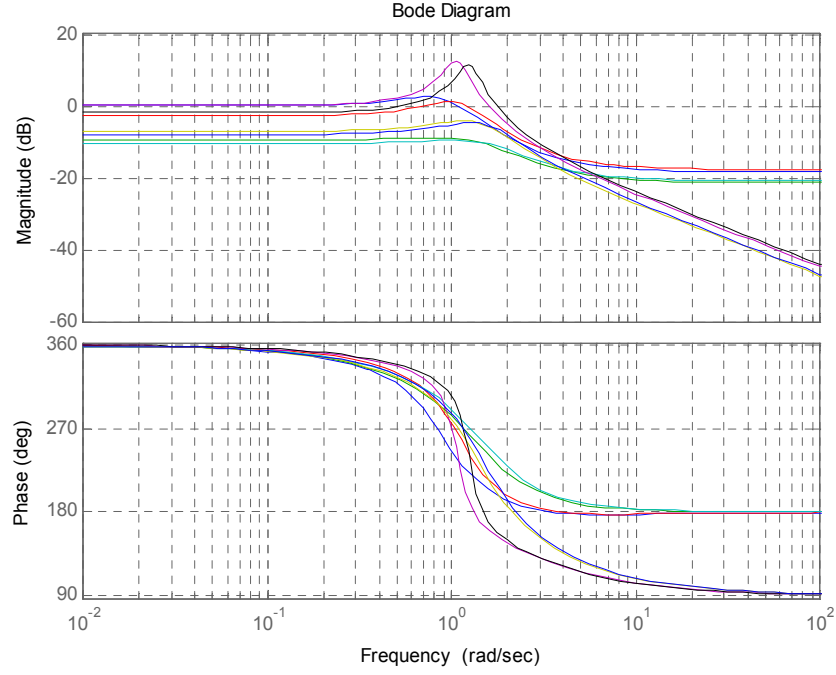
$$K * G(s) = K * \frac{(a_1 \frac{2 + Ts}{2 - Ts} + a_0)}{b_2 (\frac{2 + Ts}{2 - Ts})^2 + b_1 \frac{2 + Ts}{2 - Ts} + b_0} \quad (5.11)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K * G(s)}{1 + K * G(s)} = \frac{K * \frac{(a_1 \frac{2 + Ts}{2 - Ts} + a_0)}{b_2 (\frac{2 + Ts}{2 - Ts})^2 + b_1 \frac{2 + Ts}{2 - Ts} + b_0}}{1 + K * \frac{(a_1 \frac{2 + Ts}{2 - Ts} + a_0)}{b_2 (\frac{2 + Ts}{2 - Ts})^2 + b_1 \frac{2 + Ts}{2 - Ts} + b_0}} \Rightarrow \quad (5.12)$$

işlemleri yapılır ve sonuç olarak,

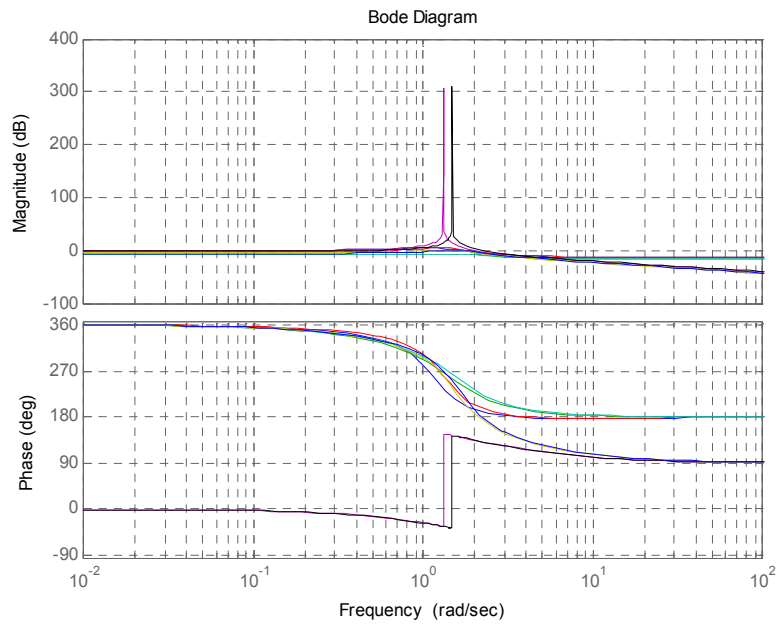
$$= \frac{(a_0 - a_1)KT^2s^2 - 4Ka_0Ts + 4K(a_0 + a_1)}{[b_2 - b_1 + b_0 + 4(a_0 - a_1)]T^2s^2 + (b_2 - b_0 - Ka_0)4Ts + [b_2 + b_1 + b_0 + K(a_0 + a_1)]4} \quad (5.13)$$

denklemin elde edilir. Şimdi elde edilen bu denklemin Bode diyagramı çizilebilir.



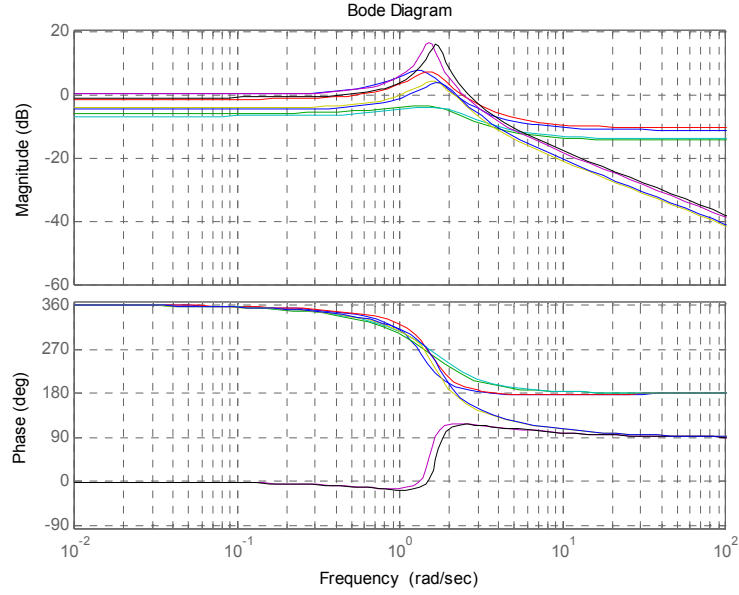
Şekil 5.11 Denklem (5.13)'ün $K = 1$ için Bode diyagramı.

Şekil 5.11'de görülen Bode diyagramını çizmek için takip edilen basamaklar sonucunda $K = 1$ için sistemin kararlı olduğu sonucuna varılabilir.



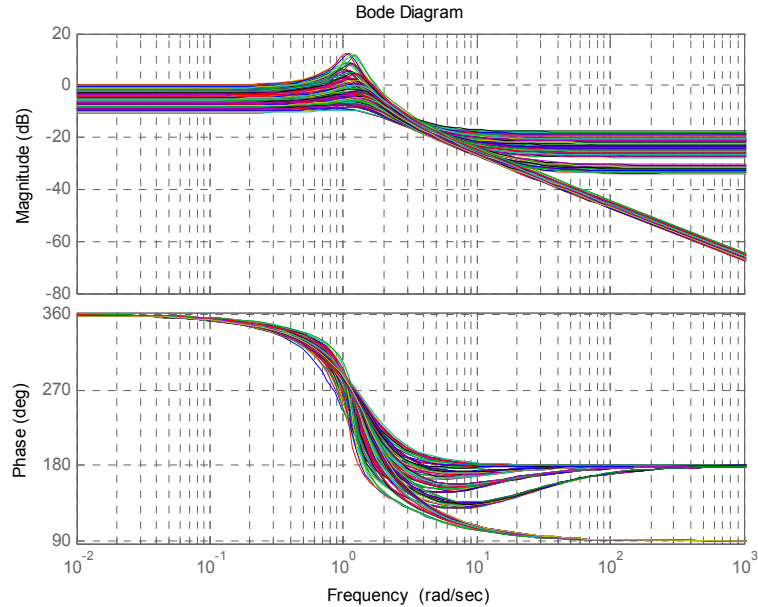
Şekil 5.12 Denklem (5.13)'ün $K = 1.5$ için Bode diyagramı.

Şekil 5.12'de görüldüğü üzere $K = 1.5$ Bode diyagramlarında bir bozulma söz konusudur. Yapılan analiz sonucunda $K = 1.5$ 'un sistemin kararlılık sınırı olduğu görülür.



Şekil 5.13 Denklem (5.13)'ün $K = 2$ için Bode diyagramı.

Şekil 5.13'de görüldüğü üzere $K = 2$ için sistemde bir bozulma söz konusu, yani sistem kararsız hale gelmiştir.



Şekil 5.14 Denklem (5.13)'ün $K = 1$ için Bode diyagramları.

Şekil 5.14'de her bir interval aralığında alınan beş noktada ($ns = 5$) çizilen Bode diyagramları görülmektedir. $K = 1$ için sistem kararlıdır.

5.3.1. Bode Diyagramının Üstünlükleri ve Sakıncaları

Bode diyagramları, kontrol sistemlerindeki güncel çalışmalara dikkat edildiğinde, aşağıda belirtilen üstünlük ve sakıncalar sürekli göz önünde bulundurularak değerlendirilmelidir.

Bode diyagramının üstünlükleri;

a. Bilgisayar kullanma imkanı olmadığına dahi Bode diyagramının genlik ve faz eğrileri doğru parçaları ile yaklaşık olarak çizme imkanı vardır.

b. Kazanç ve faz geçiş noktaları, kazanç ve faz payları Bode diyagramlarında Nyquist yer eğrilerine göre daha kolay belirlenebilir.

c. Bir sistem tasarlarken sisteme eklenen kontrolörler ve parametrelerinin etkisi Bode diyagramlarında Nyquist yer eğrisine göre daha açık görüntülenebilir.

Diğer yer eğrilerine göre üstünlükleri belirtilen Bode diyagramının bazı sakıncaları ise;

a. Bode diyagramları ile sadece minimum fazlı transfer fonksiyonlarının mutlak ve görece kararlılığı analiz edilebilir.

b. Ancak Nyquist yer eğrisindeki bazı açıların Bode diyagramında neyi ifade ettiği söylenemez.

5.4. Nichols Diyagramı (Genlik-Faz Eğrisi)

Nichols diyagramı ya da genlik-faz eğrisi, frekans tanım bölgesi analiz ve tasarımlarında bazı üstünlükler sağlayan bir frekans tanım bölgesi çizimidir. $G(jw)$ 'nın genlik-faz eğrisi, w parametre olmak üzere, $[dB]$ boyutunda $|G(jw)|$ genliğinin, $[derece]$ boyutunda $\angle G(jw)$ fazına göre çizimidir. Transfer fonksiyonunda K kazancı değiştiğinde eğri K 'nın $[dB]$ karşılığı kadar dikey ekseninde aşağı yukarı kayar. Ancak Bode diyagramında olduğu gibi eğrinin tek tek çarpanlarının toplamından oluşma özelliği yoktur.

$G(j\omega)$ Nyquist yer eğrisinde kutupsal koordinatlarda çalışmasının bazı sakıncaları vardır. Bunlardan biri, sistemde çevrim kazancının değiştirilmesi gibi basit bir işlem yapıldığında eğrinin ilk özgün biçimini korumamasıdır. Tasarımda genellikle, çevrim kazancını değiştirmek ve sisteme seri kontrolör eklemek gerekebilir. $G(j\omega)$ 'nın faz özelliği kazançtan bağımsız değiştirildiğinde genlik-faz yer eğrisi sadece yatay doğrultuda etkilenir [13].

Bir Nichols diyagramında;

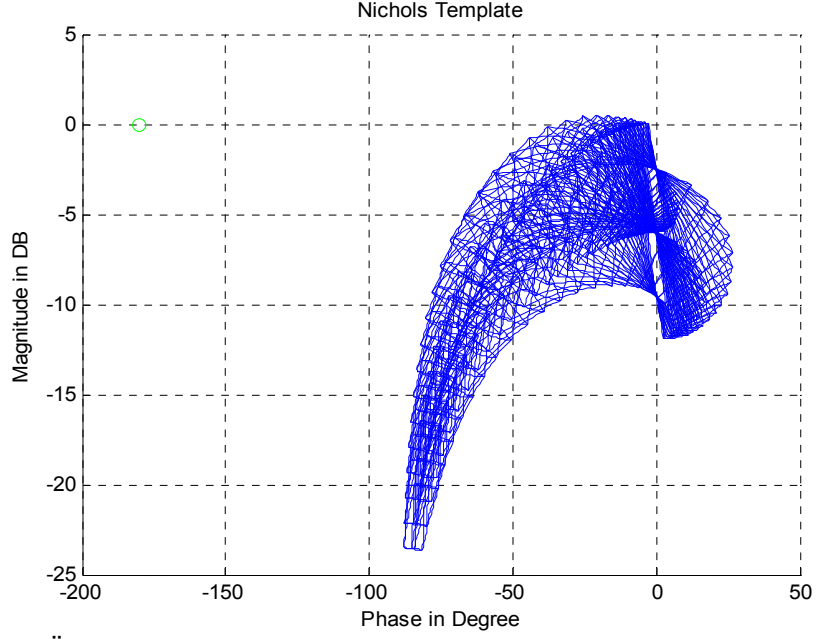
- Kritik nokta 0 dB eksenini ile -180° eksenlerinin kesiştiği yerdir.
- Faz kesim noktası yer eğrisinin -180° eksenini kestiği yerdir.
- Kazanç kesim noktası yer eğrisinin 0 dB eksenini kestiği yerdir.
- Kazanç payı, faz kesim noktası ile kritik nokta arasında, $[\text{dB}]$ olarak ölçülen düşey mesafedir.
- Faz payı, kazanç kesim noktası ile kritik nokta arasında, $[\text{derece}]$ olarak ölçülen yatay mesafedir.

Örnek 5.8

Denklem (5.3)'de verilen;

$$G(s) = \frac{[2, 3]s + [1, 2]}{[2, 3]s^2 + [4, 6]s + [2, 4]}$$

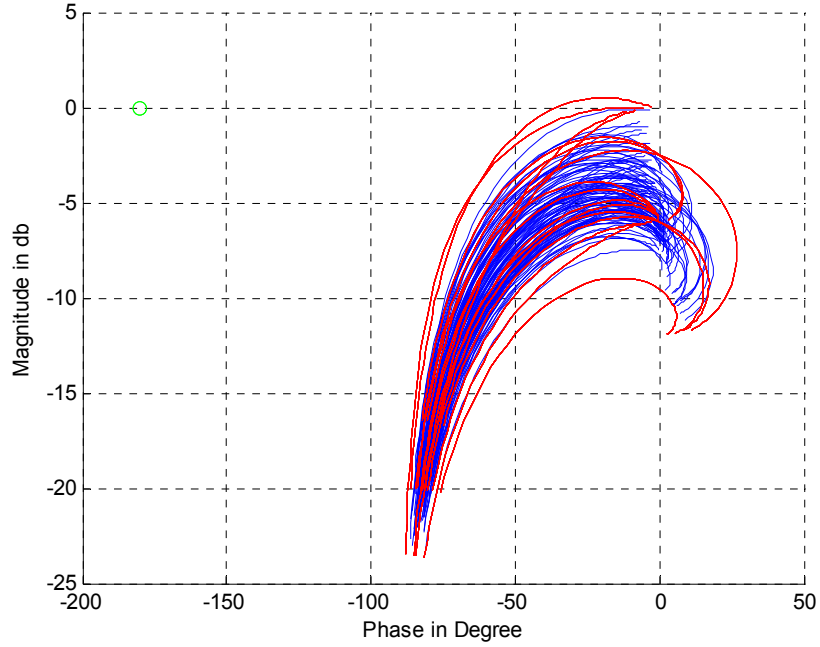
belirsiz interval aralıklarında verilen sistemin Nichols diyagramını inceleyelim. Belirtilen aralıklarda alınan noktalarda her bir frekans için bir adet Nichols template çizilebilir.



Şekil 5.15 Örnek 5.8 için çizilen Nichols template eğrileri.

Şekil 5.15’de $0.1 < w < 30.1 \text{ rad/sn}$ frekans aralığında çizilmiş olan Nichols template eğrileri görülmektedir.

Şekil 5.15’te yine $0.1 < w < 30.1 \text{ rad/sn}$ frekans aralığında gelişigüzel çizilen Nichols eğrileri görülmektedir.



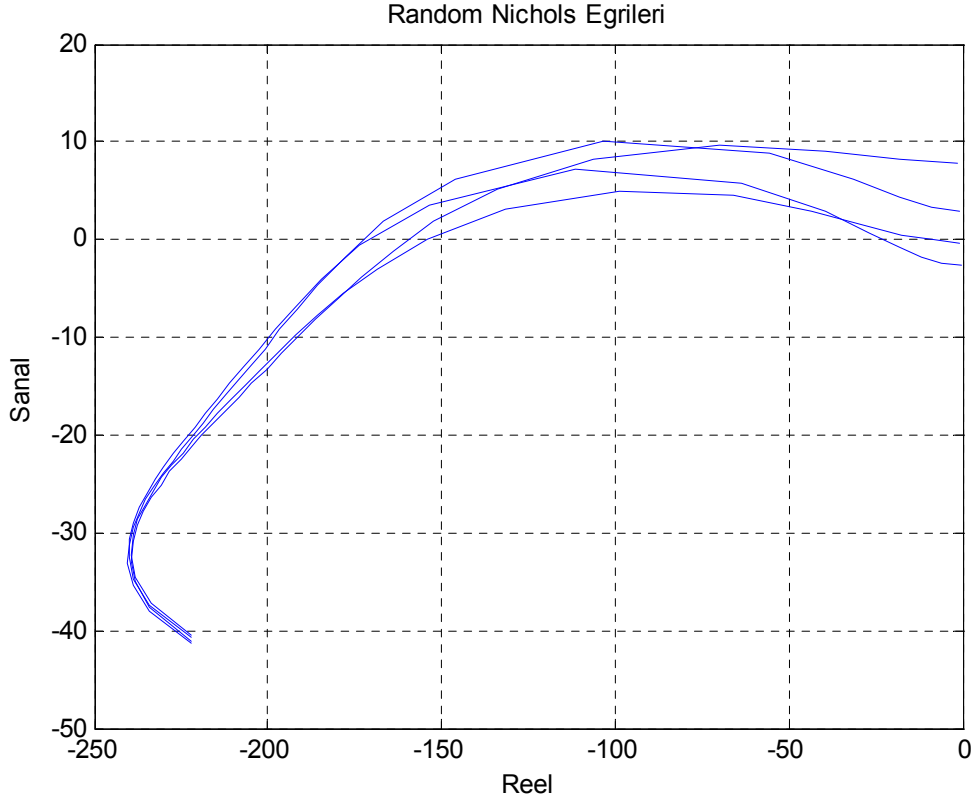
Şekil 5.16 Örnek 5.8 için gelişigüzel çizilen Nichols eğrileri.

Örnek 5.9

Denklem (5.5) aşağıda belirtilen sistemi inceleyelim;

$$G(z) = \frac{0.17z + 0.15}{z^2 + y_1z + y_0}$$

burada sistemin katsayıları $y_1 \in [-1.57, -1.37]$ ve $y_0 \in [0.7, 0.8]$ aralıklarında değiştiğini farzedelim. Bu belirsizlik aralıklarında alınan noktalarda her bir frekans için bir random Nichols eğrisi çizilebilir. Şekil 5.17'de denklem (5.5) için çizilmiş random Nichols eğrileri görülmektedir.



Şekil 5.17 Örnek 5.9 için gelişigüzel (random) Nichols eğrileri

5.5. Sonuç

Tezin bu kısmında dijital kontrol sistemlerinin frekans yanıtı incelenmiştir. Uygulamada sürekli sistemler için tanımlanmış olan tüm frekans tanım bölgesi kistasları dijital verili sistemler için de geçerlidir. Dijital kontrol sistemlerinin

frekans yanıtı; T örnekleme periyodu olmak üzere, z – dönüşüm değişkeni z yerine $e^{j\omega T}$ yazılarak elde edilebileceği konularına değinildi. Dijital kontrol sistemlerinde Bode diyagramlarının, w – dönüşümü uygulayarak da elde edilebileceği gösterildi. Birçok örnek içeren bu bölümde; örnekler Nyquist, Bode ve Nichols diyagramları kullanılarak incelendi. Elde edilen sonuçlara dikkat edilerek, kullanılan kararlılık analiz teknikleri ile ilgili olarak yorumlar yapıldı.

BÖLÜM 6

DİJİTAL PID KONTROLÖR TASARIMI

- 6.1.** Giriş
- 6.2.** Kontrol Sisteminin Özellikleri
 - 6.2.1.** Kararlı Hal Doğruluğu
 - 6.2.2.** Geçici Cevap
 - 6.2.3.** Kararlılık
 - 6.2.4.** Hassaslık
 - 6.2.5.** Bozukluğu Reddetme (Disturbance Rejection)
 - 6.2.6.** Kontrol Eforu
- 6.3.** Sürekli Kontrolörlerin Dijital Gerçekleştirilmesi
 - 6.3.1.** 'P', 'I' ve 'D' Kontrolörlerinin Karakteristikleri
 - 6.3.2.** PID Kontrolörlerin Dijital Gerçekleştirilmesi
 - 6.3.2.1.** Yamuk İntegrasyon
 - 6.3.2.2.** İleri Dikdörtgen İntegrasyon
 - 6.3.2.3.** Geri Dikdörtgen İntegrasyon
- 6.4.** Sonuç

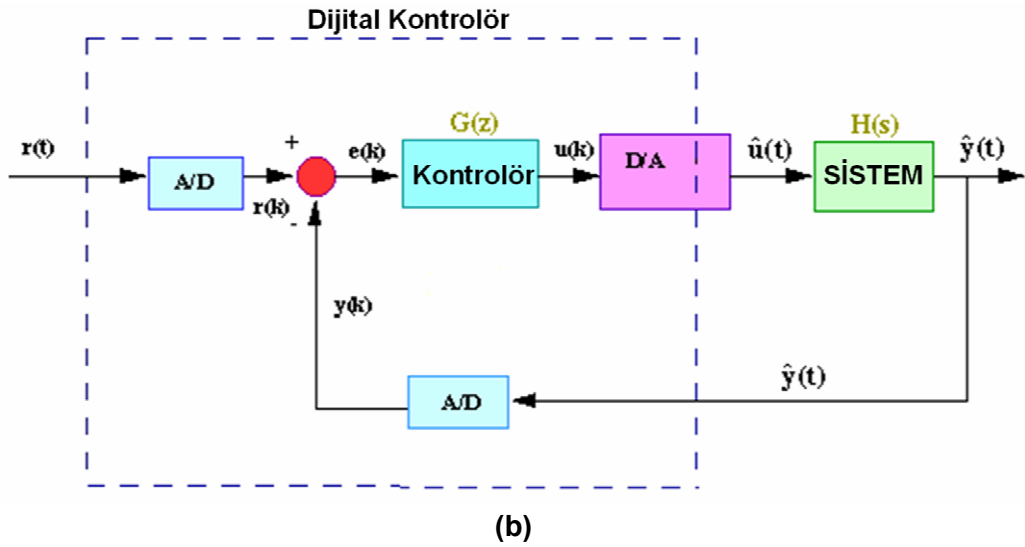
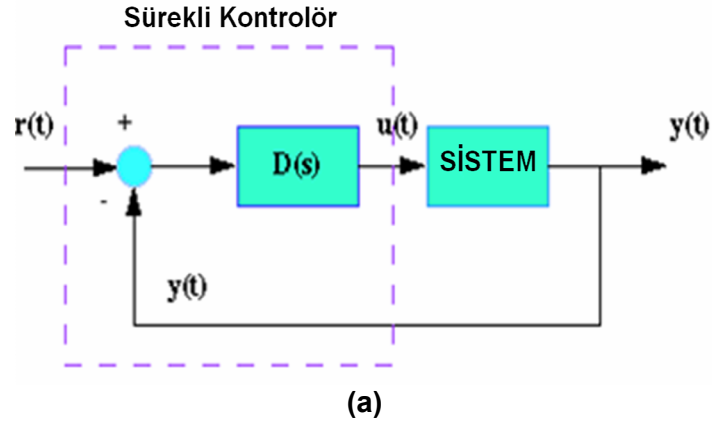
6.1. Giriş

Son zamanlarda; mikrobilgisayar, mikroişlemciler ve kontrol işlem sanayisindeki ilerlemeler, dijital kontrol sistemlerindeki gelişimi insan hayatına aşılacaktır [30]. Dijital kontrol sistemlerinin tasarımı sürekli kontrol sistemlerinin tasarım prensibine eşdeğerdir. Gerçekte kontrol edilen sistem hep aynıdır, aradaki tek fark dijital yani ayrık verili sistemlerde kontrolörün örneklenmiş ya da sayısal veriyi işleyebilecek yetenekte olmasıdır. Burada hedef, sistemi kısıtlara uygun bir şekilde davranmaya yönelten, bir kontrolör tasarlamaktır. Dijital kontrol sistemlerinin tasarımı, sürekli sistemlerde olduğu gibi zaman tanım bölgesinde veya frekans tanım bölgesinde gerçekleştirilebilir [13].

Arzu edilen sistem karakteristiklerine sahip bir kontrol sistemi elde etmek için değişken sistem parametrelerinden ve/veya kompensatör yani kontrolör adı verilen alt sistemlerden oluşan bir kontrol sistemi tasarlanmalıdır. Arzu edilen sistem karakteristikleri veya performans özellikleri genellikle; kalıcı hal hatası, geçici cevap, bağımlı (görel) kararlılık, hassaslık ve bozukluğu reddetme (disturbance rejection) ile alakalıdır.

Kontrol sorununu çözmek için;

1. İstenen geri besleme sinyallerini ölçecek sensörlerin seçilmesi,
2. Sistemi çalıştıracak operatörlerin seçilmesi,
3. Sistem, sensör ve operatör denklemlerinin geliştirilmesi,
4. Kontrol kriteri ve gelişmiş denklemlere dayalı olarak kontrolörleri tasarlamak,
5. Simülasyon yaparak, denklemleri analitik olarak değerlendirmek ve en sonunda fiziki sistemi test etmek,
6. Bu işlemi, tatmin edici bir fiziki sistem yanıtı elde edinceye kadar tekrarlamak gerekmektedir [12].



Şekil 6.1 (a) Sürekli kontrol sistem blok diyagramı.
(b) Dijital kontrol sistem blok diyagramı.

Şekil 6.1’de bir dijital kontrol sistemine ait blok diyagram görülmektedir. Sürekli kontrolör ile dijital kontrolörler arasındaki en temel farklılık dijital sistemlerin ayrık sinyaller üzerinde işlem yapmasıdır [31].

Açıklanan bu kriterler ve tasarım yöntemleri göz önüne alındığında, dijital kontrol sistemlerinin alışılmış kontrol sistemlerinden aşağıda belirtilen özelliklerde büyük üstünlükler sağladığı görülmektedir:

- a. Dijital kontrol sistemleri diğer kontrol sistemlerine oranla daha güvenilirdir.
- b. Kontrol edilen çıkış büyüklüğü giriş büyüklüğünü daha küçük hata (daha büyük duyarlılıkla) ile izler.
- c. Sistem parametre değişimlerine daha az duyarlıdır.

d. Dış ve iç bozucu etkilerden daha az etkilenir.

e. Mikroelektronik ve mikrobilgisayarlarda meydana gelen son teknolojik değişimler nedeni ile dijital kontrol sistemlerindeki kontrol ediciler daha hafif, küçük ve ucuzdur [10].

Tüm bunların yanında; yazılım hataları, sinyal gecikmeleri, yeniden yapılandırılmış sinyal bilgilerinin kaybı, sistem kararlılık derecesinin düşmesi ve çok karmaşık tasarımlar gibi bazı dezavantajları da vardır [30].

Tezin bu bölümünde, bir dijital kontrol sisteminin tasarım aşamalarına kısaca değinilecektir.

6.2. Kontrol Sistemlerinin Özellikleri

Kontrol sistem tasarımı, arzu edilen sistem karakteristiklerini elde etmek için bazı sistem parametrelerinin değiştirilmesini veya alt sistemler (kontrolör gibi) eklenmesini içerir. Arzu edilen karakteristikler veya performans özellikleri genel olarak kalıcı hal doğruluğu, geçici cevap, kararlılık, sistem parametrelerindeki değişim hassaslığı ve bozukluğu reddetme (disturbance rejection) ile ilişkilidir.

6.2.1. Kararlı Hal Doğruluğu

Eğer $z=1$ 'deki kutuplar açık çevrim fonksiyonuna eklenirse veya açık çevrim kazancı artarsa kalıcı hal doğruluğu artmış olur. Bununla birlikte, açık çevrim fonksiyonuna $z=1$ 'de eklenmiş kutuplar açık çevrim frekans cevabında faz gecikmesini sağlar, kararlılık aralığının azalması ile sonuçlanır. Bundan dolayı kararlılık problemleri ortaya çıkmaktadır. Ayrıca, açık çevrim kazancındaki yükselme yine kararlılık problemlerini ortaya çıkarır. Böylece bir kontrol sistem tasarımı, kalıcı hal doğruluğu ile kabul edilebilir bağımlı (görelî) kararlılık (kabul edilebilir kararlılık aralığı) arasındaki alış-veriş (trade-off) diyebiliriz.

6.2.2. Geçici Cevap

Bir kontrol sisteminin zaman cevabı $c(t)$ genellikle iki bölümde incelenir. Bunlar geçici cevap $c_t(t)$ ve kalıcı hal cevabı $c_{ss}(t)$,

$$c(t) = c_t(t) + c_{ss}(t) \quad (6.1)$$

Kalıcı hal cevabı, sistem cevabının sonsuza giden bölümü olarak tanımlanabilir. Geçici cevap ise; sistemin yüksek değerler için sıfıra gittiği bölümün cevabı yani $\lim_{t \rightarrow \infty} c_t(t) = 0$ olarak tanımlanabilir [32].

6.2.3. Kararlılık

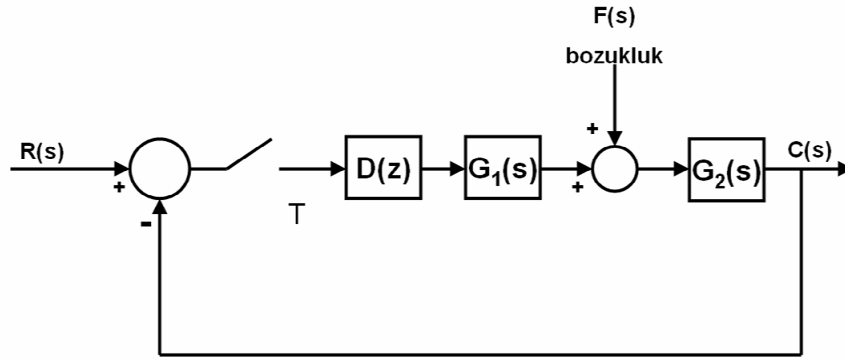
Tasarlanacak olan kontrol sisteminin en önemli karakteristiklerinden biri kararlılıktır. Kararsız bir sistem, sınırlandırılmamış, kullanışsız ve arzu edilmeyen çıkış cevapları üretir [12]. Kararlı bir sistemin çıkış cevabı, geçici cevaptan sonra zamanın büyük değerleri için kesin bir kalıcı hal değerine ulaşır. Bir kontrol sisteminin kararlılığını analiz etmek tezin daha önceki bölümlerinde de anlatılan birçok grafiksel metot ve cebirsel metot vardır. Bunlardan Routh-Hurwitz kriteri en popüler cebirsel kararlılık testidir. Kompleks düzlem üzerinde açık çevrim frekans cevabını gösteren Nyquist Kriteri en popüler grafiksel kararlılık test metodudur [32].

6.2.4. Hassaslık

Genel olarak herhangi bir kontrol sistemi sıcaklık, nem, yükseklik, kullanım ömrü ...vs. gibi nedenlerden dolayı sürekli değişebilen parametreler içerebilmektedir. Buna rağmen kontrol sisteminin karakteristiğinin bu parametrelerdeki değişiklikler gibi değişmesi istenmeyen bir durumdur. Sistem karakteristikleri sistem parametrelerinin bir fonksiyonudur, fakat bazı durumlarda sistem karakteristiklerindeki parametre değişikliği hassasiyeti azaltabilir [12]. Her zaman bir sistemde bazı belirsizlikler ve bilinmeyen bölümler vardır. Bununla beraber kapalı çevrim bir kontrol sistemindeki dayanıklılık bu belirsizliklere bağlıdır [32].

6.2.5. Bozukluğu Reddetme (Disturbance Rejection)

Bir kontrol sistemi genel olarak, sistem çıkışını kontrol eden girişlere sahiptir. Şekil 6.2'de ayrık kontrol sistemi gösterilmiştir. Burada $F(s)$ bir bozukluktur [12]. Bir kontrol sisteminde, arzu edilen çıkış cevabını elde etmek için verilen referans girdinin yanında bazı başka girdilerde olabilmektedir. İstenmeyen bu girdiler *bozukluk* (*disturbance*) olarak adlandırılırlar. Geribeslemeli kontrol sistemleri genellikle çıkış cevabına minimum düzeyde etki eden bu bozukluklarla tasarlanırlar [32].



Şekil 6.2 Ayrık kontrol sistem.

6.2.6. Kontrol Eforu

Kontrol sisteminde tasarımında düşünülmesi gereken başka bir kıstas da *kontrol eforudur*. Örneğin; bir radar tarama sisteminde radar antenini çevirmek için elektrik motoru kullanılır. Herhangi bir motor, gerçekleştirilmiş maksimum tork sahibi olmalıdır. Eğer bu kontrol çabasına (tork) $u(t)$ dersek. $|u(t)|$ sınırlandırılmış olur. Sistem tasarımında bu sınırlandırmayı içeren bir işlemi yapmak, mümkün olan maksimum torku düşünmeden yapılan bir tasarım olur. Bir sonraki adım olarak, maksimum torka karar verebilmek için tasarlanmış olan sistemin çok kötü şartlarda denemesi yapılır. Ve son olarak maksimum değerde torku üretecek olan motor seçilir [12].

6.3. Sürekli Kontrolörlerin Dijital Gerçekleştirilmesi

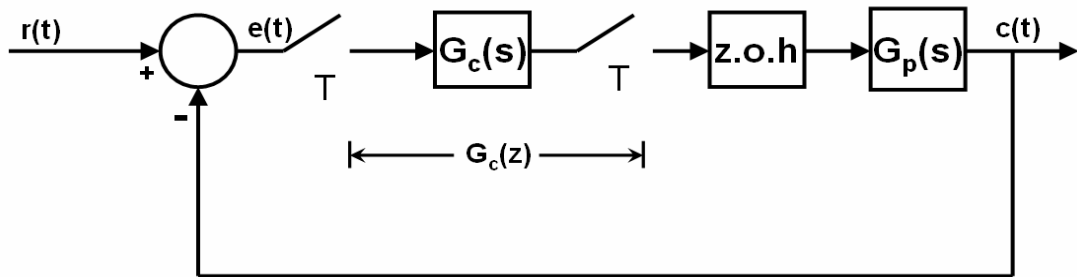
Sürekli kontrol sistemleri mühendisler tarafından dijital kontrol sistemlerine tercih edilirler. Çünkü kişiler sürekli kontrol sistemlerini dijital kontrol sistemlerinden önce öğrenirler. Bir sistemde dijital kontrol uygulamaya karar verildiğinde, sistem ve kontrolör dinamiği z -transfer fonksiyonları ya da diferans denklemleriyle ifade edilebilecek şekilde düzenlenmiş olmalıdır. Bununla beraber daha önceleri tasarlanmış sürekli kontrolörlerin yerine daha üstün dijital kontrolörlerinin kullanılması istenebilir. Bundan dolayı tezin bu kısmında incelenecek konuların iki yönü vardır; birincisi PID, faz ilerlemeli, faz gerilemeli ve benzeri sürekli kontrolörlerin dijital kontrolörlerle nasıl ifade edileceğinin belirlenmesi, ikincisi ise dijital kontrolörlerin dijital işlemcilerle nasıl gerçekleştirilebileceğinin incelenmesidir.

Örnek 6.1

Şekil 6.3'de bir dijital kontrol sistemin blok diyagramı görülmektedir. Kontrol işlemi,

$$G_p(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)} \quad (6.2)$$

denklemleri ile ifade edilmiştir.



Şekil 6.3 Dijital kontrolörlü bir dijital sistem.

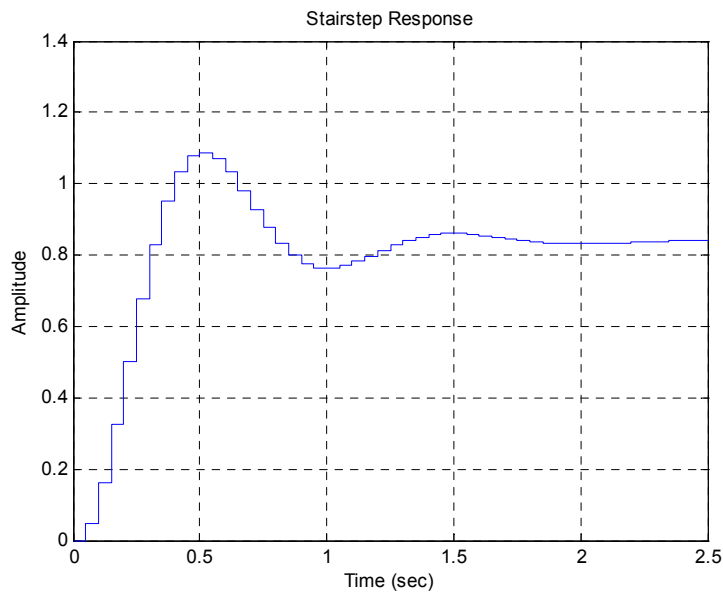
$T = 0.1$ sn olduğunda açık çevrim transfer fonksiyonunun z -dönüşümünü aldığımızda;

$$G_{ho}G_p(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{10}{s(s+1)(s+2)}\right] = \frac{0.0453(z+0.904)}{(z-0.905)(z-0.819)} \quad (6.3)$$

denklemini elde edilir. Kapalı çevrim transfer fonksiyonu ise;

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.0453(z + 0.904)}{z^2 - 1.679z + 0.782} \quad (6.4)$$

şeklinde ifade edilir. Karakteristik denkleminde sistemin kökleri $z_1 = 0.84 + j0.278$ ve $z_2 = 0.84 - j0.278$ olduğu görülür. Sistemin kararlılığı daha önceki bölümlerde bahsedilen metotlarla test edildiğinde sistemin kararlı olduğu sonucuna varılır.



Şekil 6.4 Denklem (6.4)'ün basamak cevabı.

6.3.1. 'P', 'I' ve 'D' Kontrolörlerinin Karakteristikleri

Oransal kontrolör (K_p) sistemin yükselme zamanını azaltıcı yönde etki yapar, fakat elimine etmez. İntegral kontrolör (K_i) sistemin kalıcı hal hatasını elimine eder, fakat geçici cevabı daha da kötü yapar. Türevsel kontrolör (K_d) ise sistemin kararlılığını artırır, yüzde aşımı azaltır ve geçici cevabını geliştirir.

Tablo 1' de, bir "PID" kontrolördeki oransal terim, integral terim ve türevsel terimin artırılması ile sistemde meydana gelecek değişikliklerin hangi yönde olacağı belirtilmiştir

Tablo 4 'P', 'I' ve 'D' Kontrolörlerinin Karakteristikleri					
	Yükselme Zamanı	Overshoot (Yüzde Aşım)	Settling Time (Kalıcı hale geçme zamanı)	Steady-State Error (Kalıcı Durum Hatası)	Stability (Kararlılık)
K_P 'nin arttırılması	Azalır	Artar	Az Artar	Azalır	Bozulur
K_I 'nin arttırılması	Az Azalır	Artar	Artar	Büyük Oranda Azalır	Bozulur
K_D 'nin arttırılması	Az Azalır	Azalır	Azalır	Küçük Oranda Değişir	Düzelir

6.3.2. PID Kontrolörlerin Dijital Gerçekleştirilmesi

Sürekli PID (proportional-integral-derivative) kontrolörleri,

$$G_c(s) = K_P + K_D s + \frac{K_I}{s} = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} \quad (6.5)$$

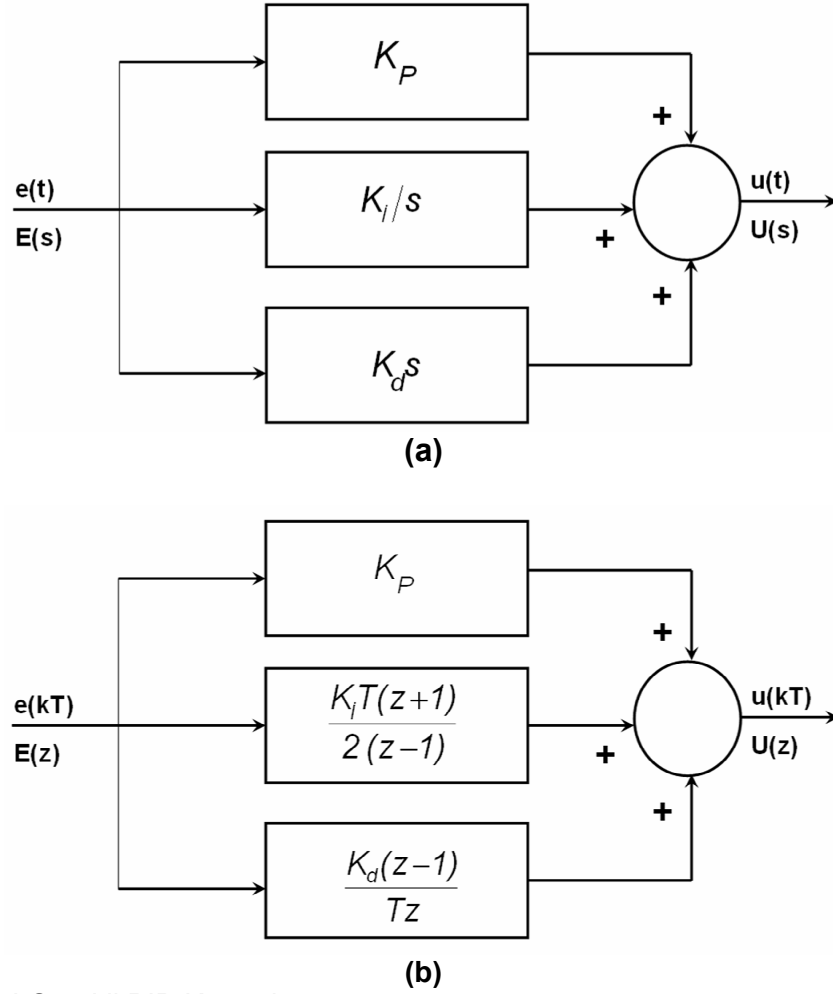
transfer fonksiyonu ile ifade edilir. Burada;

K_P = Oransal kazanç,

K_I = İntegral kazanç,

K_D = Türevsel kazançtır [33].

K_P oranı elemanı sayısal olarak K_P sabit kazancı ile oluşturulur. Dijital kontrolde oransal kontrol, sürekli kontrol sistemlerde olduğu gibi oransal sabit K_P 'yi ifade eder [25]. Dijital bir bilgisayar ya da işlemcinin kelime uzunluğu sonlu olduğundan K_P sonsuz ayrıştırılamaz [13]. Ayrıca integrasyon ve türevi dijital olarak ifade edecek birçok yol vardır.



Şekil 6.5 (a) Sürekli PID Kontrolör
(b) Dijital PID Kontrolör.

Şekil 6.5a'da sürekli zaman PID kontrolörün blok diyagramı, şekil 6.5b'de ise dijital PID kontrolörün blok diyagramı görülmektedir [25].

Bir $f(t)$ fonksiyonunun $t = kT$ arasındaki zaman türevi geri fark kuralı ile ifade edilebilir, buna göre $f(t)$ 'nin $t = kT$ ve $(k-1)T$ ölçü değerleri ile;

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=kT} \cong \frac{1}{T} (f(kT) - f[(k-1)T]) \quad (6.6)$$

yazılabilir. Yukarıdaki türev işleminin z -transfer fonksiyonunu bulmak için denklem (6.6)'nin z -dönüşümü alınır;

$$Z \left(\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=kT} \right) = \frac{1}{T} (1 - z^{-1}) F(z) = \frac{z-1}{Tz} F(z) \quad (6.7)$$

elde edilir. Buna göre K_D bir orantı katsayısı olmak üzere;

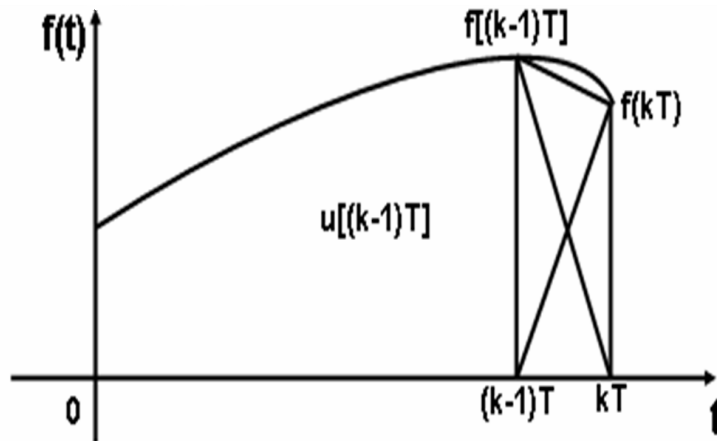
$$G_D(z) = K_D \frac{(z-1)}{Tz} \quad (6.8)$$

şeklindedir. Eğer denklem (6.8)'de z yerine e^{Ts} yazılır ve T örnekleme periyodu sıfıra yaklaştırılırsa, $G_D(z)$ 'nin sürekli türev işlemine karşı düşen $K_D s$ transfer fonksiyonuna yakınsadığı görülür. Örnekleme periyodunun seçimi çok önemlidir. Sayısal yaklaşımın doğruluğu için T örnekleme periyodu yeterli derecede küçük olmalıdır.

İntegral işlemi K_I/s 'i yaklaşık sayısal ifade etmek için çok sayıdaki nümerik integrasyon yönteminden yararlanılabilir. Bir fonksiyon alanını sayısal yaklaşık elde etmenin temel üç yöntemi vardır; *yamuk integrasyon*, *ileri dikdörtgen integrasyon* ve *geri dikdörtgen integrasyon*'dur [13].

6.3.2.1. Yamuk İntegrasyon

Yamuk integrasyon kuralı $f(t)$ fonksiyonunun altındaki alanı şekil 6.6'da belirtildiği gibi bir dizi yamukla yaklaşık ifade eder.



Şekil 6.6 Yamuk İntegrasyon Kuralı.

$f(t)$ 'nin $t = kT$ anındaki integralini $u(kT)$ ile ifade edelim. Eğer $(k-1)T \leq t \leq kT$ için $f(t)$ 'nin altındaki alan bir yamukla ifade edilirse;

$$u(kT) \cong u[(k-1)T] + \frac{T}{2} \{f(kT) + f[(k-1)T]\} \quad (6.9)$$

$$G_i(z) = K_i \frac{U(z)}{F(z)} = \frac{K_i T(z+1)}{2(z-1)} \quad (6.10)$$

olarak elde edilir.

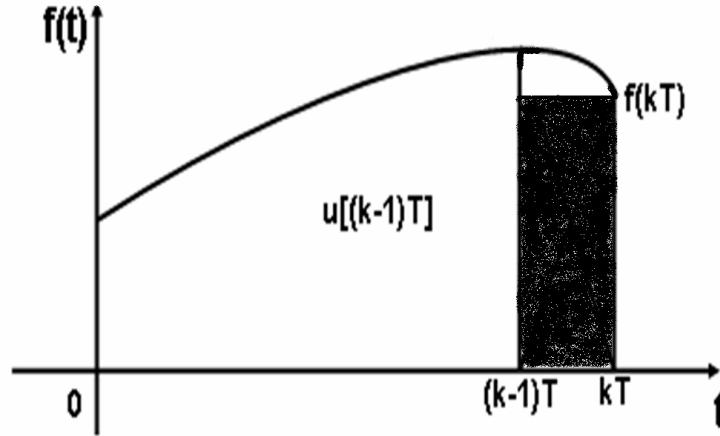
6.3.2.2. İleri Dikdörtgen İntegrasyon

İleri dikdörtgen integrasyonda $f(t)$ altındaki alan şekil 6.3'te olduğu gibi dikdörtgenlerle yaklaşık ifade edilir. Buna göre $f(t)$ 'nin $t = kT$ anındaki integral değeri;

$$u(kT) \equiv u[(k-1)T] + Tf(kT) \quad (6.11)$$

şeklinde yaklaşık elde edilebilir. Eğer denklem (6.11)'in z -dönüşümü alınırsa, ileri dikdörtgen integrasyon kuralı ile integre eden sayısal integratörün transfer fonksiyonu;

$$G_i(z) = K_i \frac{U(z)}{F(z)} = \frac{K_i Tz}{z-1} \quad (6.12)$$



Şekil 6.7 İleri Dikdörtgen İntegrasyon Kuralı.

6.3.2.3. Geri Dikdörtgen İntegrasyon

Geri dikdörtgen integrasyonda geçerli kural şekil 6.8'de belirtildiği gibidir. Buna göre $f(t)$ 'nin $t = kT$ anındaki integral değeri;

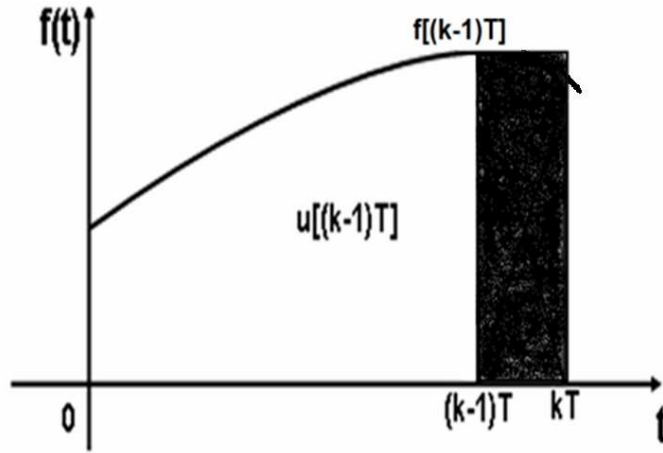
$$u(kT) \equiv u[(k-1)T] + Tf[(k-1)T] \quad (6.13)$$

şeklinde yaklaşık ifade edilebilir. Geri dikdörtgen integrasyon kuralını kullanan sayısal integratörün z -transfer fonksiyonu;

$$G_i(z) = K_i \frac{U(z)}{F(z)} = \frac{K_i T}{z-1} \quad (6.14)$$

olarak elde edilir.

Yukarıda açıklanan oran, türev ve integral alma işlemleri birleştirilirse, bir dijital PID kontrolörünün farklı transfer fonksiyonlarıyla modellenebileceği görülür.



Şekil 6.8 Geri Dikdörtgen İntegrasyon Kuralı .

Yamuk İntegrasyon [11];

$$G(z) = \frac{(K_P + TK_I/2 + K_D/T)z^2 + (TK_I/2 - K_P - 2K_D/T)z + K_D/T}{z(z-1)} \quad (6.15)$$

İleri Dikdörtgen İntegrasyon [34];

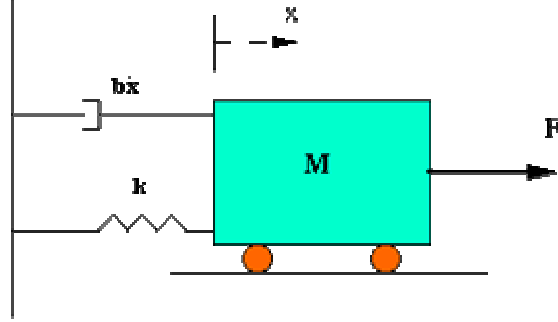
$$G(z) = \frac{(K_P + K_D/T + TK_I)z^2 - (K_P + 2K_D/T)z + K_D/T}{z(z-1)} \quad (6.16)$$

Gerçek Dikdörtgen İntegrasyon [11];

$$G(z) = \frac{(K_P + K_D/T)z^2 + (TK_I - K_P - 2K_D/T)z + K_D/T}{z(z-1)} \quad (6.17)$$

Örnek 6.2

Sürekli zaman PID kontrolörler için şekil 6.9'da verilen basit bir kütle-yay örneğini inceleyelim [33,,,,].



Şekil 6.9 Basit bir kütle-yay modeli.

Bu sistemin denklemleri;

$$M \ddot{x} + b \dot{x} + kx = F \quad (6.18)$$

dir. Bu denklemin Laplace dönüşümü alınarak,

$$Ms^2 X(s) + bsX(s) + kX(s) = F(s) \quad (6.19)$$

denklemleri elde edilir. Buradan $X(s)$ ile $F(s)$ 'in transfer fonksiyonu olarak

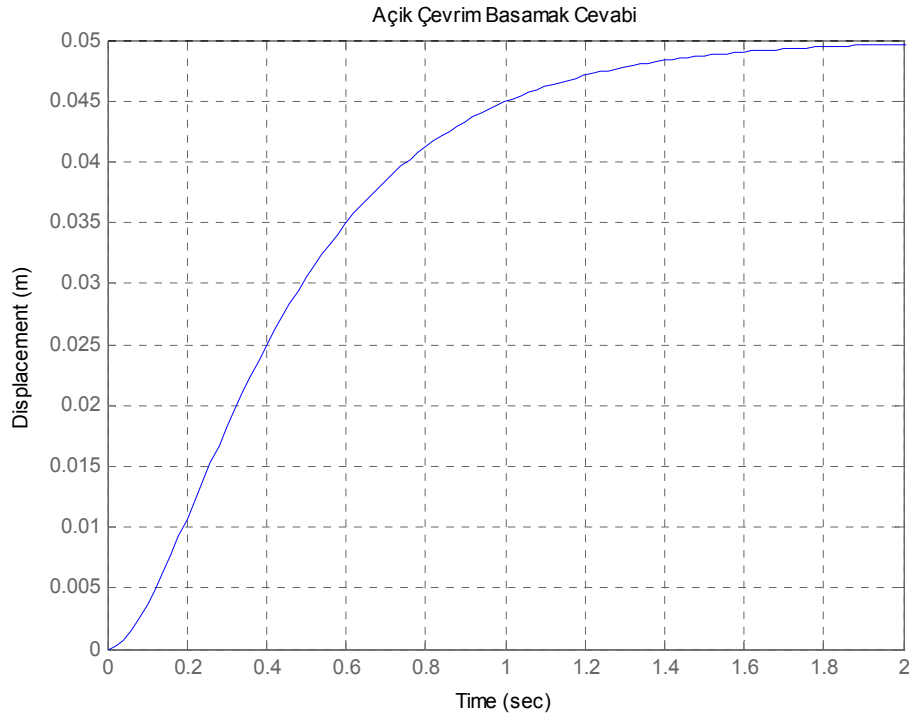
$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k} \quad (6.20)$$

bulunur. Sistemdeki büyüklükler $M = 1\text{kg}$, $b = 10\text{ N.s/m}$, $k = 20\text{ N/m}$ ve $F(s) = 1$ olarak kabul edilirse;

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + 10s + 20} \quad (6.21)$$

sonucuna ulaşılır.

Şekil 6.10'da görüldüğü üzere çıkışın son değeri 0.05'dir. Buna göre sistemin kalıcı hal hatası 0.95, yükselme zamanı yaklaşık olarak 1 sn ve kalıcı hale geçme zamanı 1.5 sn'dir. Bu sistemin yükselme zamanını ve kalıcı hale geçme zamanını düşürecek ve kalıcı hal hatasının elimine edecek bir PID kontrolör tasarlanması istensin.

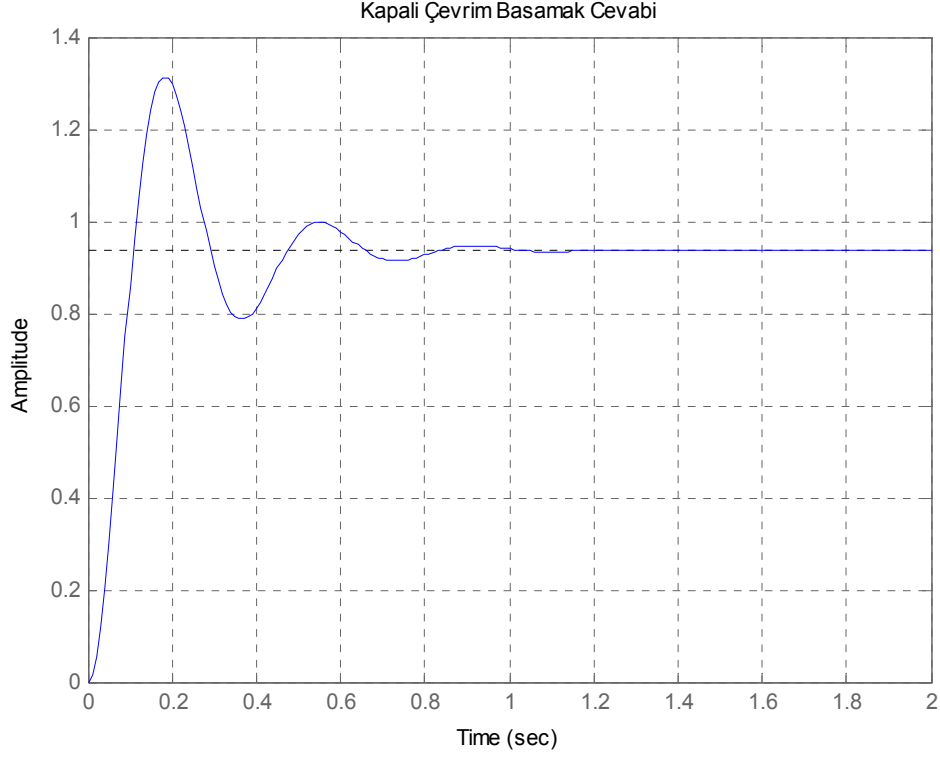


Şekil 6.10 Denklem (6.21)'in açık çevrim basamak cevabı.

Öncelikle sisteme bir oransal kontrolör (K_p) eklensin. Oransal kontrolör; yükselme zamanını ve kalıcı hal hatasını düşürecek, yüzde aşımı yükseltecektir. Sisteme oransal kontrolör eklendiğinde sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu,

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{K_p G(s)}{1 + K_p G(s)} = \frac{K_p}{s^2 + 10s + (20 + K_p)} \quad (6.22)$$

olur. $K_p = 300$ için sistemin kapalı çevrim basamak cevabı şekil 6.11'de belirtilmiştir.

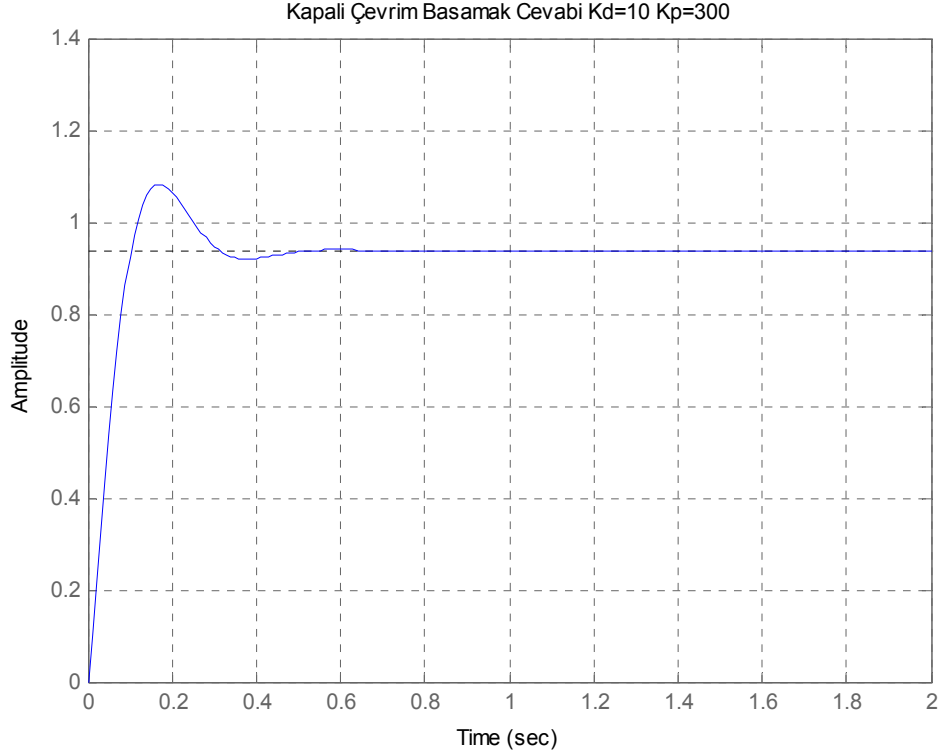


Şekil 6.11 Denklem (6.22)'nin kapalı çevrim basamak cevabı.

Sisteme 'PD' yani oransal-türevsel kontrolör eklendiğinde; türevsel kontrolör (K_D) yüzde aşımı ve kalıcı hale geçme zamanını düşürecektir. Sisteme PD kontrolör eklendiğinde sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu,

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{K_D s + K_P}{s^2 + (10 + K_D)s + (20 + K_P)} \quad (6.23)$$

olur. $K_P = 300$ ve $K_D = 10$ için sistemin kapalı çevrim basamak cevabı şekil 6.12'de belirtilmiştir.

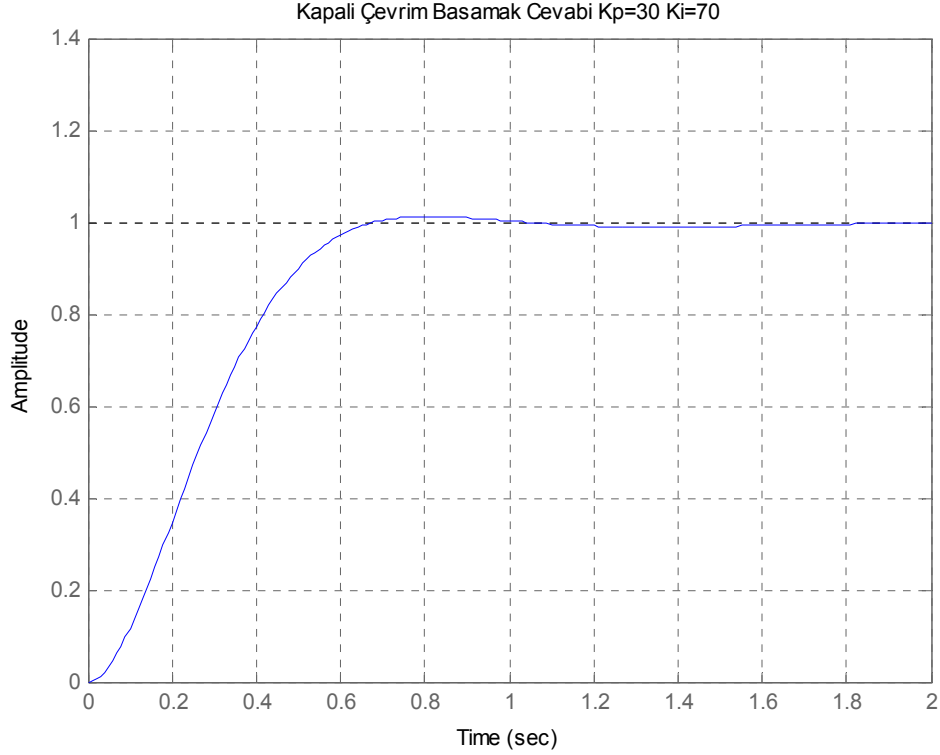


Şekil 6.12 Denklem (6.23)'ün kapalı çevrim basamak cevabı.

Şimdi ise sisteme 'PI' yani oransal-İntegral kontrolör eklendiğinde; integral kontrolör (K_i) yüzde aşımı ve kalıcı hale geçme zamanını yükseltecek, yükselme zamanını düşürecek ve kalıcı hal hatasını ortadan kaldıracaktır. Sisteme PI kontrolör eklendiğinde sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu,

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{K_p s + K_i}{s^3 + 10s^2 + (20 + K_p)s + K_i} \quad (6.24)$$

olur. $K_p = 300$ ve $K_D = 10$ için sistemin kapalı çevrim basamak cevabı şekil 6.13'de belirtilmiştir.

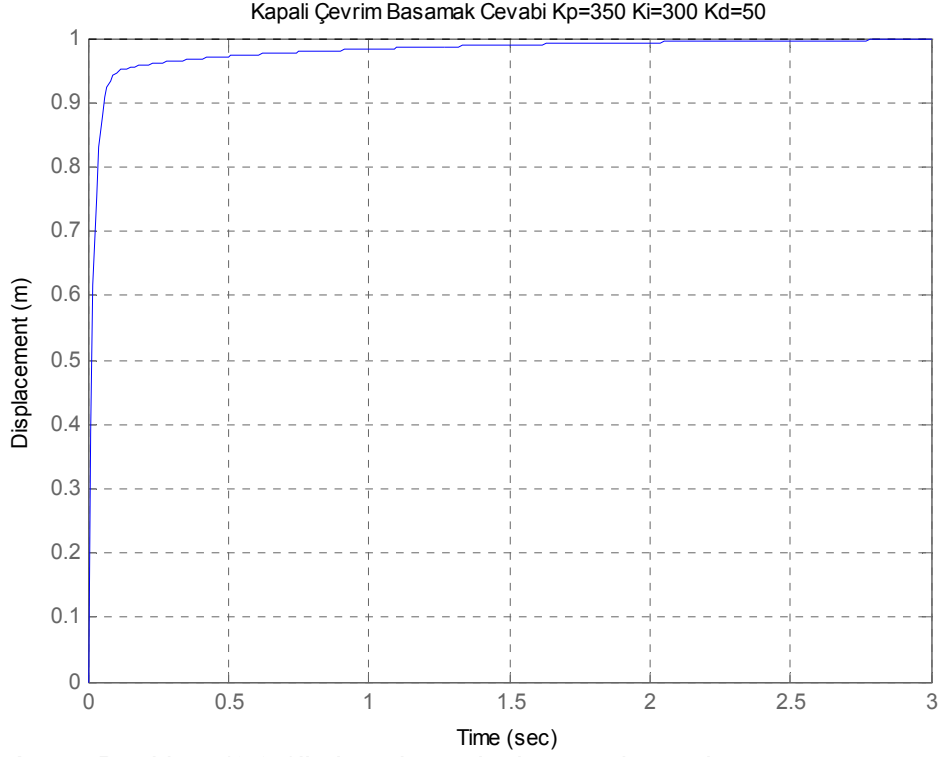


Şekil 6.13 Denklemler (6.24)'ün kapalı çevrim basamak cevabı.

Son olarak, PID kontrolörünü ($C(s)$) sisteme ($G(s)$) eklediğimizde sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu olarak

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s^3 + (10 + K_D)s^2 + (20 + K_P)s + K_I} \quad (6.25)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde $K_P = 350$, $K_I = 300$ ve $K_D = 50$ değerleri kullanıldığında sistemin basamak cevabı Şekil 6.14'te belirtildiği şekilde olacaktır.

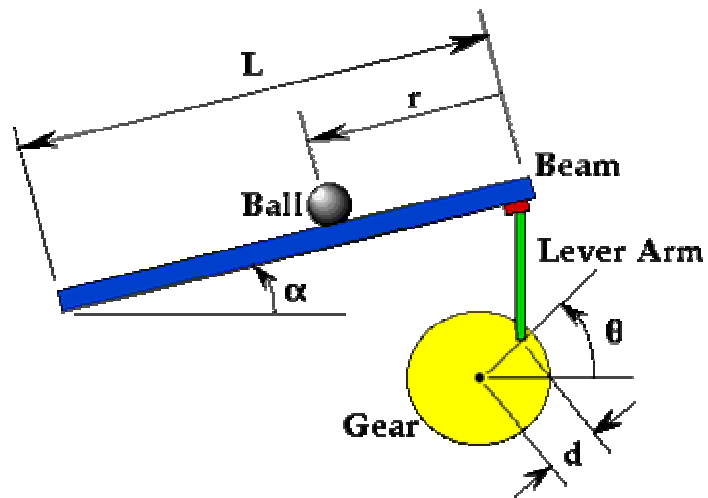


Şekil 6.14 Denklem (6.25)'in kapalı çevrim basamak cevabı.

Şekil 6.14'de belirtildiği gibi kullandığımız PID kontrolör ile sistemin yükselme zamanı hızlandı, yüzde aşım ve kalıcı hal hatası ortadan kaldırıldı.

Örnek 6.3

Dijital PID kontrolörler için şekil 6.15'de verilmiş örneği inceleyelim [35]



Şekil 6.15 Basit bir sistem.

Bu sistemin denklemini;

$$\frac{R(s)}{Q(s)} = \frac{mgd}{L\left(\frac{J}{R^2} + m\right)} \frac{1}{s^2} \quad (6.26)$$

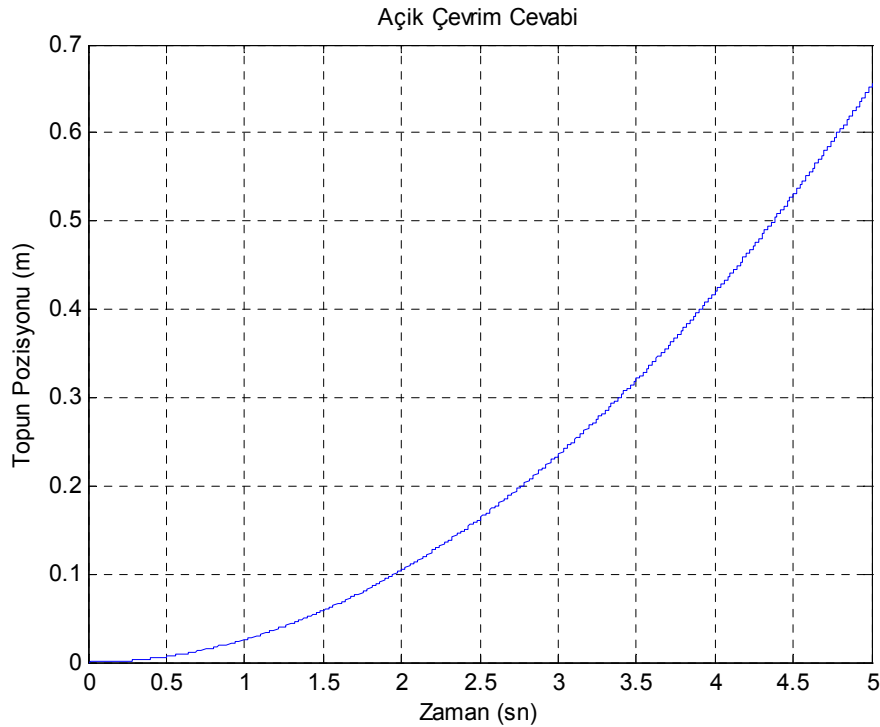
m : 0.11 kg	L : 1.0 m	R(s)
g : 9.8 m/s ²	R : 0.015 m	theta(s) : 0.25 rad
d : 0.03 m	J : 9.99e-6 kgm ²	

Bu problem için tasarım kısıtları; kalıcı hale geçme zamanı 3 sn'den az ve yüzde aşım %5'ten az olacaktır.

Sistemin ayırık zaman transfer fonksiyonu,

$$\frac{R(z)}{Q(z)} = \frac{0.0001(0.42z - 0.42)}{z^2 - 2z - 1} \quad (6.27)$$

dir. Bu transfer fonksiyonunun açık çevrim basamak cevabı şekil 6.16'da belirtilmiştir. Şekilden de anlaşılacağı üzere sistemin açık çevrim basamak cevabı kararsızdır.



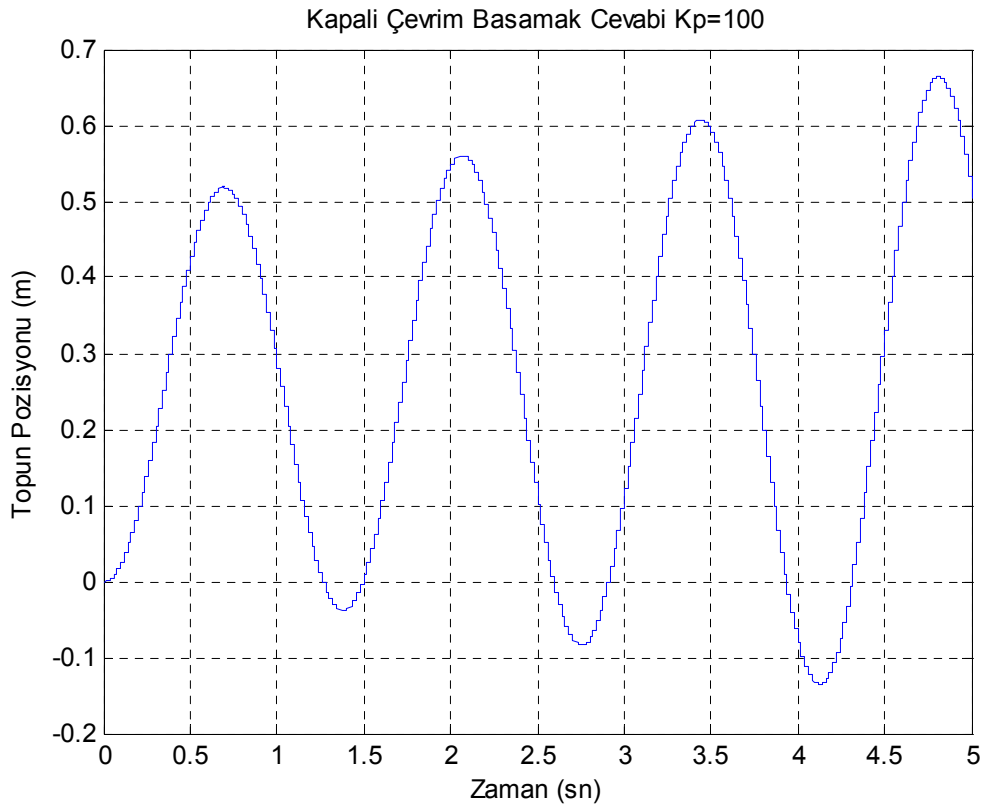
Şekil 6.16 Denklem (6.27)'nin açık çevrim basamak cevabı.

Burada yapılması gereken işlem, bu sistemin kararsız durumunu kararlı hale getirecek uygun bir kontrolör tasarlamaktır. Uygun kontrolörün tasarımı esnasında birçok deneme yapılabilir. Burada önemli olan tasarlanan bu kontrolörler arasında arzu edilen sonucu veren en uygun kontrolörü kullanmaktır.

Sisteme *oransal kontrolör* (K_p) eklendiğinde sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu;

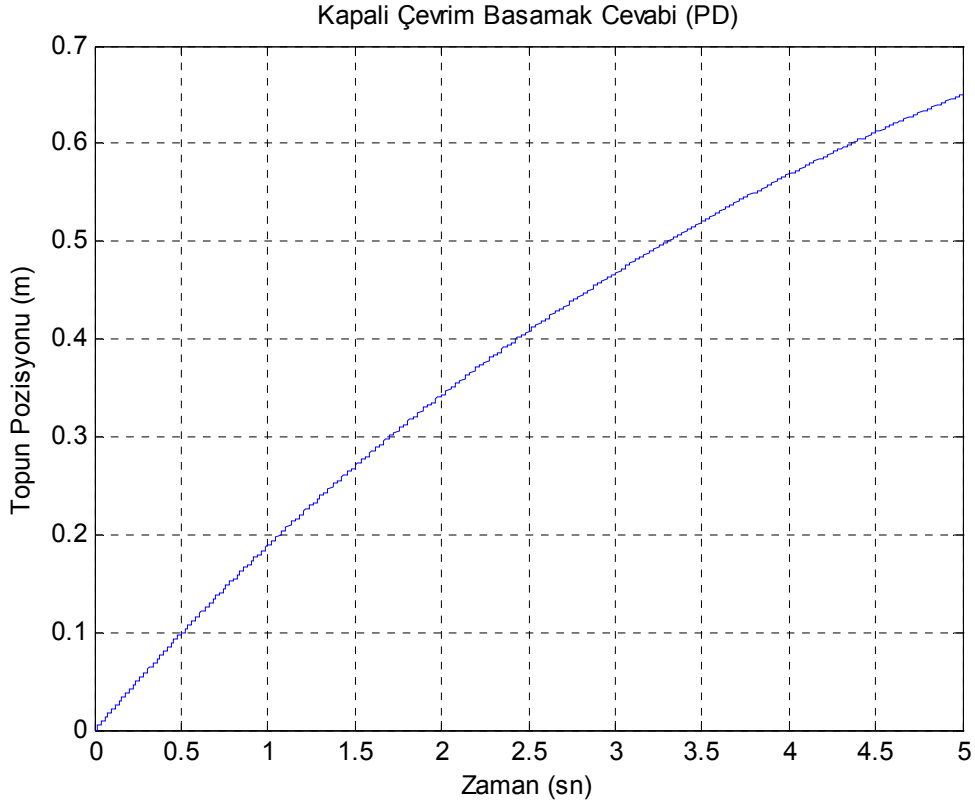
$$\frac{R(z)}{Q(z)} = \frac{0.0001K_p(0.42z - 0.42)}{z^2 + (0.000042K_p - 2)z + (-0.000042K_p - 1)} \quad (6.28)$$

elde edilir. Bu denklemde $K_p = 100$ değeri kullanıldığında sistemin kapalı çevrim basamak cevabı şekil 6.17'de belirtildiği şekilde olacaktır. Şekil 6.17'de görüldüğü üzere sistem kararsızdır. K_p değerini artırdığımızda sistemin kararsızlık durumunda bir değişme olmayacak olup, sistem kararsızlığını koruyacaktır. Sistemi kararlı duruma getirmek için bazı ilave kontrolörlerin sisteme eklenmesi söz konusu olacaktır.

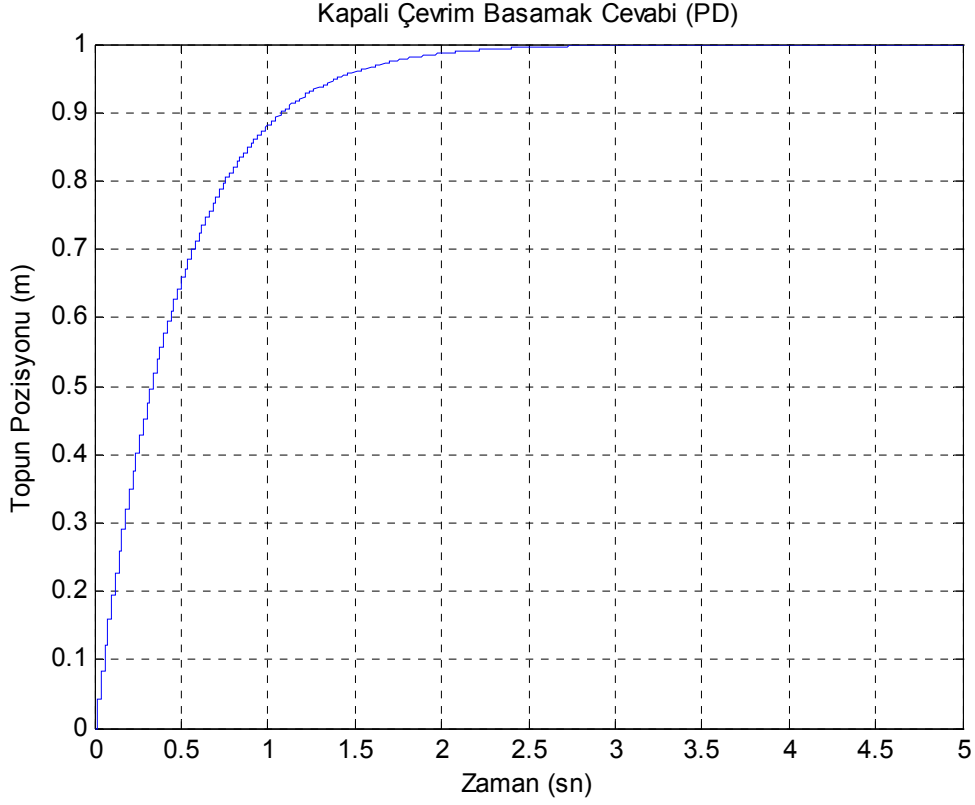


Şekil 6.17 Denklem (6.28)'in kapalı çevrim basamak cevabı.

Şimdi sisteme oransal kontrolörün (K_p) yanına ek olarak türevsel (K_D) kontrolör ekleyelim. Yani sistemde *PD kontrolörü* için $K_p = 100$ ve $K_D = 10$ değerleri kullanıldığında sistemin kapalı çevrim basamak cevabı şekil 6.18'de belirtildiği şekilde olacaktır. Şekil 6.18'de görüldüğü üzere sistem kararlı duruma gelmiştir. Fakat sistemin yükselme zamanı çok uzundur. Yükselme zamanını azaltmak için oransal kontrolörün artırılması gerekmektedir. Bu sebeple oransal kontrolörü $K_p = 100$ yerine $K_p = 1000$ aldığımız zaman yükselme zamanı azalacak olup, şekil 6.19'de görüldüğü üzere tatmin edici bir sonuç ortaya çıkacaktır.

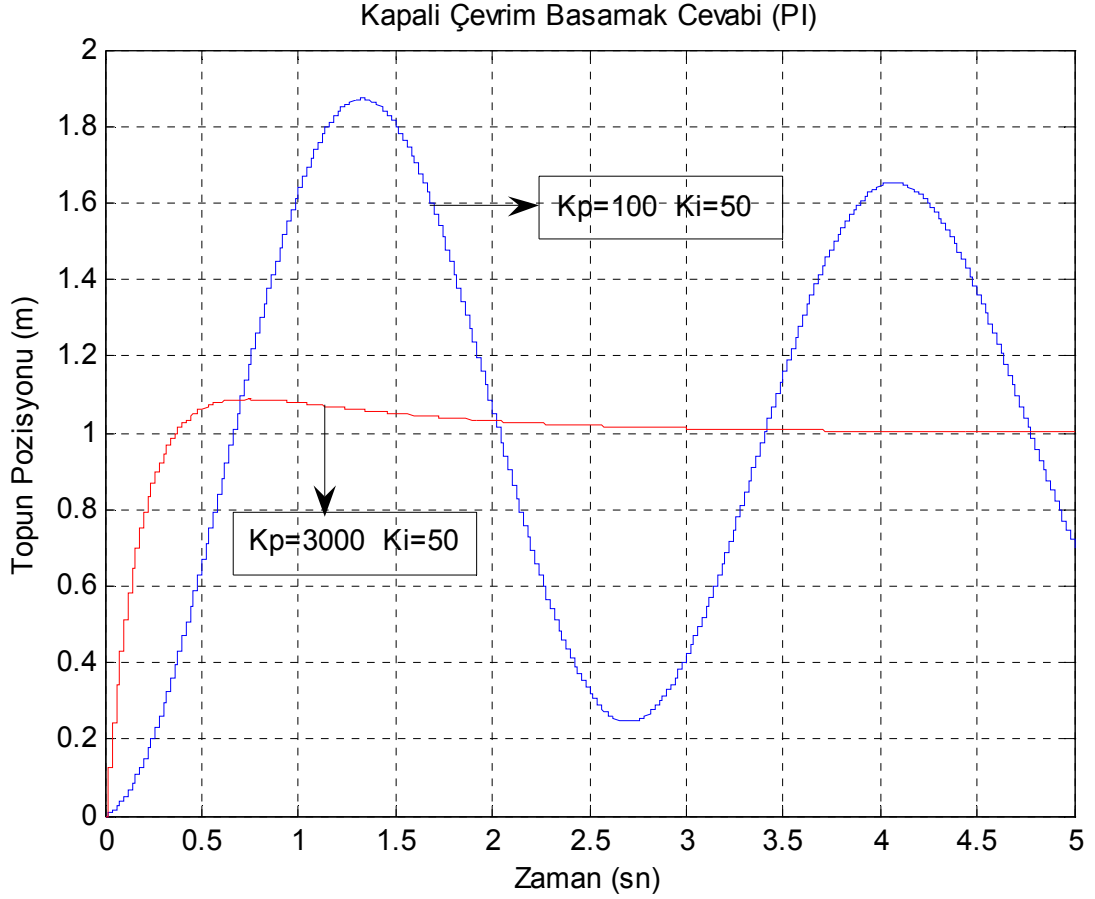


Şekil 6.18 PD kontrolörlü sistemin $K_p = 100$ ve $K_D = 10$ için kapalı çevrim basamak cevabı.



Şekil 6.19 PD kontrolörlü sistemin $K_p = 1000$ ve $K_D = 10$ için kapalı çevrim basamak cevabı.

Şekil 6.18 ve 6.19'da görüldüğü üzere PD kontrolörü eklenen bir sistemde oransal kontrolörün artırılması sistemin kararlılığını olumlu yönde etkilemiştir. Şimdi sisteme oransal kontrolörün (K_p) yanına ek olarak integral (K_i) kontrolör eklensin. Sistemde, *PI kontrolörü* için $K_p = 100$ ve $K_i = 50$ değerleri kullanıldığında sistemin kapalı çevrim basamak cevabı şekil 6.20'de belirtildiği şekilde olacaktır. Şekil 6.20'de görüldüğü üzere kontrolör değerleri $K_p = 100$ ve $K_i = 50$ kullanıldığında sistemin kararlı olduğu görülüyor, fakat tatmin edici bir sonuç ortaya çıkmamaktadır. Yine oransal kontrolörü artırıp, $K_p = 3000$ olarak kabul ettiğimizde tatmin edici bir sonuç ortaya çıkmaktadır.

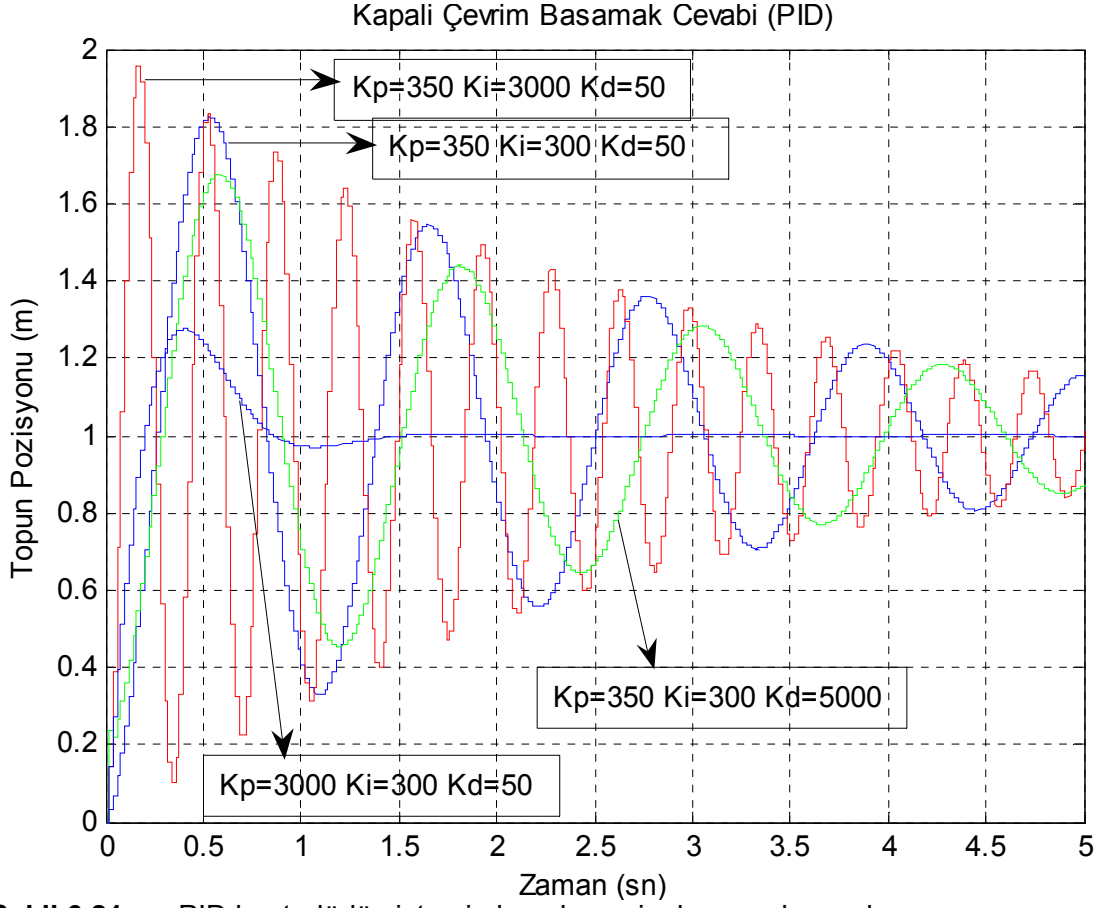


Şekil 6.20 PI kontrolörlü sistemin kapalı çevrim basamak cevabı.

Sisteme PID kontrolör eklenerek, sistemin kapalı çevrim basamak cevabı elde edilir. Sisteme eklenecek olan PID kontrolör

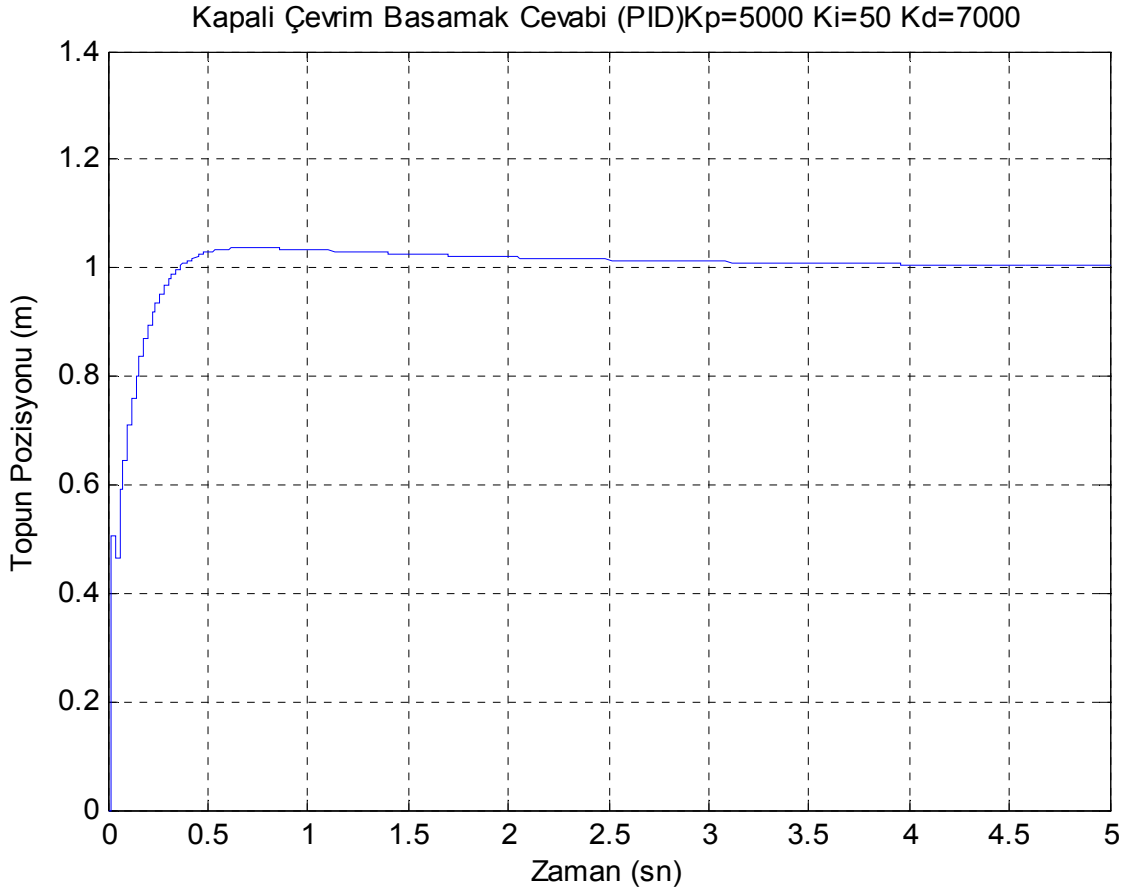
$$K_P + K_I \frac{z}{z-1} + K_D \frac{z-1}{z} = \frac{(K_P + K_I + K_D)z^2 - (K_P + 2K_D)z + K_D}{z^2 - z} \quad (6.29)$$

dir. Dijital PID kontrolörünün, sisteme olan etkisi şekil 6.21'de görülmektedir. Değişik 'P, I ve D' değerleri için sistemin kararlılığı etkilenmektedir. Tatmin edici bir sonuç elde etmek için 'P, I ve D' kombinasyonlarından oluşan birçok farklı denemeler yapmak gerekebilir. Yapılan bu denemeler sonucunda sistemin kararlılığını istenen yönde düzenleyen kontrolörün seçimi yapılır ve sistemden arzu edilen verim alınır.



Şekil 6.21 PID kontrolörlü sistemin kapalı çevrim basamak cevabı.

Örnek olarak şekil 6.22'yi incelediğimizde, elde edilen sonuç için kullanılan $K_p = 5000$, $K_i = 50$ ve $K_d = 7000$ değerlerinde sistem kararlılığını görmek mümkündür. Uygun kontrolörü elde etmek için yapılan kararlılık denemelerini grafiksel olarak ifade eden şekil 6.21'den yola çıkarak, şekil 6.22'de belirtilen ve arzu edilen kararlılık seviyesine yakın bir kontrolör elde edilebilir.



Şekil 6.22 Değişik 'P, I ve D' değerleri için PID kontrolörlü sistemin kapalı çevrim basamak cevabı.

6.4. Sonuç

Kontrolör olarak kullanılan bilgisayarlarda son yıllarda büyük ilerlemeler kaydedilmiştir. Analog koşullara oranla dijital koşullardaki sistem yapılarında daha iyi sonuçlar elde edilmektedir. Bu sebepten dolayı insanoğlunun kullandığı sistemlerde dijital kontrol sistemlerinin yeri giderek artmaktadır. Bilim ve teknolojiye bu ilerlemeler kas gücü kullanımını azaltmaktadır. Örneğin; bilgisayarlı takım tezgâhlarında (CNC) nerdeyse çalışan sistem üzerinde insan denetimi yok denecek düzeydedir. Ürünler bilgisayarlarda çizilerek üretilmektedir [3]

Tezin bu bölümünde dijital PID kontrolör tasarımı işlenmiştir. Zaman tanım bölgesinde veya frekans tanım bölgesinde dijital PID kontrolör tasarlanırken analog PID kontrolör tasarımıyla benzer işlemler uygulanır. Fakat dijital PID kontrolör tasarlanırken örnekleme zamanı kullanılır [31]. Son zamanlarda dayanıklı PID kontrolörler ile ilgili önemli çalışmalar, [34, 36, 37, 38, 39] kaynaklarından araştırılabilir.

BÖLÜM 7

7. SONUÇ

Kontrolör olarak kullanılan bilgisayarlarda son yıllarda büyük ilerlemeler kaydedilmiştir. Analog koşullara oranla dijital koşullardaki sistem yapılarında daha iyi sonuçlar elde edilmektedir. Bu sebepten dolayı insanoğlunun kullandığı sistemlerde dijital kontrol sistemlerinin yeri giderek artmaktadır. Bilim ve teknolojiye bu ilerlemeler kas gücü kullanımını azaltmakta, dolayısıyla kullanılan dijital sistemlerin arzu edilen çalışma kararlılığına sahip olması gerekmektedir.

Yapılan bu tez çalışmasının birinci bölümünde kontrol sistemlerine kısa bir giriş yapıldı ve kontrol sistemleri ile ilgili terimlere kısaca değinilerek çeşitli tanımlamalar yapıldı. İlerleyen bölümlerde dijital kontrol sistemleri ve dijital sistemlerine geçişi hızlandıran konular üzerinde duruldu. Klasik ve dijital kontrol metotları üzerinde çalışmalar yapılarak; bu metotlar ile ilgili çeşitli uygulamalar yapıldı ve sonuçları üzerinde yorumlar yapıldı. Parametre belirsizliği içeren dijital kontrol sistemlerin dayanıklı kararlılık analizi ile ilgili Kharitonov teoremi ve kenar teoremi başta olmak üzere çeşitli metotlar incelendi ve ortaya çıkan sonuçlar doğrultusunda dayanıklı kararlılık analizi için kullanılacak bir yöntem elde edildi.

Yapılan bu analizler sonucunda Kharitonov teoreminin dijital interval sistemlerinin kararlılık analizinde kullanılamayacağı, dolayısıyla sadece analog sistemlerin kararlılık analizinde kullanılabileceği görüldü. Kenar teoremini kullanarak bir dijital interval polinomun değer kümesi elde edilebileceği gösterildi. Değer kümesiyle beraber sıfırın dışlanması kuralını kullanarak bir dijital interval polinomun Schur kararlılığının test edilebileceği gösterildi.

Tezin son bölümünde mevcut bulunan bir sistemin dayanıklı kararlılığını sağlamak için ihtiyaç duyulan dijital bir PID (Oransal, İntegral, Türevsel)

kontrolörünün tasarımı üzerinde duruldu. Kontrolör tasarımı esnasında karşılaşılabilecek sorunlar ve bu sorunları gidermek için yapılması gereken işlemler anlatıldı.

Yapılan bu çalışma ile ilgili olarak “DİJİTAL KONTROL SİSTEMLERİNDE DAYANIKLI KARARLILIK ANALİZİ” başlığı altında EK-2’de belirtilen bir yayın hazırlanarak; 23 - 25 Mayıs 2007 tarihleri arasında Samsun’da düzenlenen “IV. OTOMASYON SEMPOZYUMU” na iştirak edildi ve bahse konu yayının sempozyumda yayınlanması sağlandı.

Ayrıca MATLAB ortamında gerekli yazılımlar geliştirilmiş olup; bu yazılımlar parametre belirsizliği içeren dijital kontrol sistemlerinin analizi için kullanılabilir.

Geleceğe yönelik olarak farklı belirsizlik yapılarına sahip (örneğin; afine lineer, multilineer ve polinom belirsizlik yapıları gibi) dijital kontrol sistemlerinin dayanıklı kararlılık analizleri incelenebilir. Bu konularda araştırma yapmaya katkı sağlayacak kullanıcı dostu programlar hazırlanabilir. Ayrıca belirsizlik içeren dijital kontrol sistemler için dayanıklı kontrolör tasarım tekniklerinin geliştirilmesi üzerinde çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] <http://www.bilimonline.8k.com/kontrol/kontrol.htm>
- [2] M. N. Özdaş, A. Kuzucu ve A. T. Dinibütün, *Otomatik Kontrol Temelleri*, Birsen Yayınevi, 1988.
- [3] <http://uzak.mersin.edu.tr/UZAK/TP/EndElo/EIn-235/ss-5.pdf>
- [4] http://www.kontrol.itu.edu.tr/duyuru/sunum/Kontrol_Muhendisligi_Programi_Tanitim_Genel.ppt#1
- [5] M. N. Özyetkin, *Dayanıklı Lag/Lead Kontrolör Tasarımı*, Yüksek Lisans Tezi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği, İnönü Üniversitesi, Malatya, 2006.
- [6] F. Yıkan, *Dayanıklı PID Kontrolör Metotlarının Araştırılması ve Geliştirilmesi*, Yüksek Lisans Tezi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği, İnönü Üniversitesi, Malatya, 2005.
- [7] <http://www.kontrol.itu.edu.tr/?k=tarihce&t=onculer>
- [8] S. Bennet, *A Brief History of Automatic Control*, IEEE Control Systems, 16:3 (1996) 17-24.
- [9] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, 2002.
- [10] M. K. Sarıoğlu, *Dijital Kontrol Sistemleri*, Sistem Yayıncılık, 1995.
- [11] R. C. Dorf and R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, Prentice Hall, 2005.
- [12] C. L. Phillips and H. T. Nagle, *Digital Control Systems Analysis and Design*, Prentice Hall, 1995.
- [13] A. Bir, *Otomatik Kontrol Sistemleri*,. Literatür Yayınları, 1999.
- [14] V. L. Kharitonov, *Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of A Family of Systems of Linear Differential Equations*, Differential Equations, Vol. 14, pp. 1483-1485, 1979.
- [15] H. Chapellat and S. P. Bhattacharyya, *A Generalization of Kharitonov's Theorem: Robust Stability of Interval Plants*, IEEE Trans. On Automat. Contr., Volume 34, pp. 306-311, 1989.
- [16] N. Tan, *Robust Analysis And Design of Control Systems With Parametric Uncertainty*, PhD Thesis, School of Engineering, University of Sussex, Brighton, UK, 1999.
- [17] B. R. Barmish, *New Tools for Robustness of Linear Systems*, MacMillan, NY, 1994.

- [18] L. A. Zadeh and C. A. Desoer, *Linear System Theory-A State Space Approach*, McGraw Hill, New York, 1963.
- [19] B. D. O. Anderson, E. I. Jury and M. Mansour, *On Robust Hurwitz Polynomials*, IEEE Trans. On Automat. Control, Volume 32, pp. 909-913, 1986.
- [20] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat and L. H. Keel, *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice Hall, 1995. 188 – 191.
- [21] N. Tan ve Y. Karataş, *Dijital Kontrol Sistemlerinde Dayanıklı Kararlılık Analizi*, 4 ncü Otomasyon Sempozyumu, Samsun, 2007.
- [22] A. C. Bartlett, C. V. Hollot and H. Lin, *Root Location of an Entire Polytope of Polynomials: It Suffices to Check the Edges*, Mathematics of Controls, Signals and Systems., Vol. 1, 1988, 61-71.
- [23] <http://www.laas.fr/~henrion/courses/polyrobust/polyrobustl2.pdf>
- [24] A. Katbab and E. I. Jury, *Robust Schur-Stability of Control Systems with Interval Plants*, Int. J. of Control, Vol. 51, 1990, 1343-1352.
- [25] B. C. Kuo, *Digital Control Systems*,. Holt, Rinehart and Winston, INC. 1980.
- [26] A. C. Bartlett, A. Tesi and A. Vicino, *Frequency Response of Uncertain Systems with Interval Plants*, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 38, 1993, 929-933.
- [27] C. V. Hollot and A. C. Bartlett, *On The Nyquist Envelope of an Interval Plant Family*, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 31, 1986, 355-356.
- [28] N. Tan and D. P. Atherton, *Frequency Response of Uncertain Systems: A 2q-Convex Parpolygonal Approach*, IEE Proc., Control Theory and Application, Vol. 147, 2000, 547-555.
- [29] N. Tan and D. P. Atherton, *Describing Function Analysis of Nonlinear Discrete Interval Systems*, School of Engineering, University of Sussex, Brighton, UK, 1999.
- [30] Lu-Sa Su, *Dijital Controller-Its Design Techniques*, IMTC'94 May 12-14, Hamamatsu, 1994, 841-844.
- [31] <http://meweb.ecn.purdue.edu/%7Eme475/ctm/PID/PID.html>
- [32] A. Uraz, *Lecture Notes on Control Systems*, Hacettepe Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, 1993.
- [33] <http://meweb.ecn.purdue.edu/~me475/ctm/pid/pid.html>
- [34] F. Kiani and M. Bozorg, *Design of Digital PID Controllers Using the Parameter Space Approach*, International Journal of Control Vol. 79, No. 6, June 2006, 624-629.

- [35] <http://meweb.ecn.purdue.edu/~me475/ctm/examples/ball/digBBPID.html>
- [36] N. Tan, *Computation Of Stabilizing PI And PID Controllers For Processes With Time Delay*, ISA Transactions, 2005, 44, 213-223.
- [37] N. Tan, I. Kaya and D. P. Atherton, *Computation of Stabilizing PI and PID Controllers*, Proc. of the 2003 IEEE Conf. on the Contr. Appl., CCA 2003.
- [38] M. T. Söylemez, N. Munro and H. Baki, *Fast Calculation of Stabilizing PID Controllers*, Automatica, 2003, 39, 121-126.
- [39] N. Tan and D. P. Atherton, *Feedback Stabilization Using the Hermite-Biehler Theorem*, International Conf. on the Control of Industrial Processes, Newcastle, UK, 1999.

EKLER

EK 1 (TEZDE KULLANILAN MATLAB PROGRAMLARI)

BÖLÜM 3 PARAMETRE BELİRSİZLİĞİ İLE İLGİLİ METOTLAR

1) $P(s,q)=s^3+[6,8]s^2+6s+5$ polinomunun "değer kümesini" gösteren program.

```
function ysnvs
re=[], im=[]
for w= 0:0.05:5
    for lamda= 0:0.01:1
        ec1c2= -j*w^3-(6-2*lamda)*w^2+6*j*w+5;
        re= real(ec1c2); im= imag(ec1c2);
        hold on
        plot(re,im)
    end
end
xlabel('Reel');
ylabel('Sanal');
title('Deger Kümesi');
re=0;
im=0;
plot(re,im,'go');
grid
```

2) örnek 3.2 segment lemma.

```
function ysnsl
re=[], im=[]
for w= 0:0.15:4.5
    for lamda= 0:0.001:1
        ec1c2= -(1+lamda)*j*w^3-
(3+lamda)*w^2+(4.4+lamda)*j*w+(1.25+lamda);
        re= real(ec1c2); im= imag(ec1c2);
        hold on
        plot(re,im)
    end
end
xlabel('Reel');
ylabel('Sanal');
title('Deger Kümesi');
re=0;
im=0;
plot(re,im,'go');
grid
```

3) $P(s,q)=[0.25,1.25]s^3+[2.75,3.25]s^2+[0.75,1.25]s+[0.25,1.25]$ polinomunun Kharitonov dikdörtgenlerini gösteren program.

```
function vsetpysn(prnp,luw)
%
%VSETP is the m-file which generate required value set for the given
interval
%polynomial over the frequency range of luw.
%
%prnp:interval polynomials
```

```

%luwp=[a b c]; a:initial frequency, b:end frequency, c:no. of
frequency
%
%calculate the Kharitonov polynomials
%
xx=[];xx=prnp;
[polyk1,polyk2,polyk3,polyk4,nokp]=khfind(xx);

%create a frequency vector
ww1=linspace(luw(1),luw(2),luw(3));
%calculate value set
if nokp==4
    for m=1:length(ww1)
        w=j*ww1(m);

real=[];imal=[];rea2=[];ima2=[];rea3=[];ima3=[];rea4=[];ima4=[];

        vp1=polyval(polyk1,w);
        vp2=polyval(polyk2,w);
        vp3=polyval(polyk3,w);
        vp4=polyval(polyk4,w);

        real(1)=real(vp1);
        real(2)=real(vp3);
        ima1(1)=imag(vp1);
        ima1(2)=imag(vp3);

        rea2(1)=real(vp1);
        rea2(2)=real(vp2);
        ima2(1)=imag(vp1);
        ima2(2)=imag(vp2);

        rea3(1)=real(vp4);
        rea3(2)=real(vp2);
        ima3(1)=imag(vp4);
        ima3(2)=imag(vp2);

        rea4(1)=real(vp4);
        rea4(2)=real(vp3);
        ima4(1)=imag(vp4);
        ima4(2)=imag(vp3);

        hold on
        plot(real,imal)
        hold on
        plot(rea2,ima2)
        hold on
        plot(rea3,ima3)
        hold on
        plot(rea4,ima4)
    end
elseif nokp==2

    for m=1:length(ww1)
        w=j*ww1(m);
        real=[];imal=[];
        vp1=polyval(polyk1,w);

```

```

        vp2=polyval (polyk2,w);

        real(1)=real (vp1);
        real(2)=real (vp2);
        imal(1)=imag (vp1);
        imal(2)=imag (vp2);

        hold on
        plot(real1,imal)
    end
else
    for m=1:length (ww1)
        w=j*ww1 (m);
        real=[];imal=[];
        vp1=polyval (polyk1,w);

        real(1)=real (vp1);
        imal(1)=imag (vp1);

        hold on
        plot(real1,imal)
    end
end
re=0;
im=0;
hold on
plot(re,im,'go')
grid;
xlabel('Reel Eksen'),ylabel('Sanal Eksen')
title('Deger Kümesi')

```

4) $P(s,q)=s^3+(8+[9,11])s^2+(2+3[1,2]+5[9,11]+[15,18])s+2[1,2]+5[15,18]$ polinomunun kenar teoremine göre etkin kenarlarını gösteren program.

```

function ysnedge
re=[], im=[]
for w= 0.5:1:7.5
    for lamda= 0:0.001:1
        ec1c2= -j*w^3-17*w^2+(68-3*lamda)*j*w+92-15*lamda;
        re= real(ec1c2); im= imag(ec1c2);
        hold on
        plot(re,im)
    end
    for lamda= 0:0.001:1
        ec1c3= -j*w^3-(19-2*lamda)*w^2+(75-10*lamda)*j*w+77;
        re= real(ec1c3); im= imag(ec1c3);
        hold on
        plot(re,im)
    end
    for lamda= 0:0.001:1
        ec1c5= -j*w^3-17*w^2+(68-3*lamda)*j*w+79-2*lamda;
        re= real(ec1c5); im= imag(ec1c5);
        hold on
        plot(re,im)
    end
    for lamda= 0:0.001:1
        ec2c4= -j*w^3-(19-2*lamda)*w^2+(78-10*lamda)*j*w+92;

```

```

re= real(ec2c4); im= imag(ec2c4);
hold on
plot(re,im)
end
for lamda= 0:0.001:1
ec2c6= -j*w^3-17*w^2+(71-3*lamda)*j*w+94-2*lamda;
re= real(ec2c6); im= imag(ec2c6);
hold on
plot(re,im)
end
for lamda= 0:0.001:1
ec3c4= -j*w^3-19*w^2+(78-3*lamda)*j*w+92-15*lamda;
re= real(ec3c4); im= imag(ec3c4);
hold on
plot(re,im)
end
for lamda= 0:0.001:1
ec3c7= -j*w^3-19*w^2+(78-3*lamda)*j*w+79-2*lamda;
re= real(ec3c7); im= imag(ec3c7);
hold on
plot(re,im)
end
for lamda= 0:0.001:1
ec4c8= -j*w^3-19*w^2+(81-3*lamda)*j*w+94-2*lamda;
re= real(ec4c8); im= imag(ec4c8);
hold on
plot(re,im)
end
for lamda= 0:0.001:1
ec5c6= -j*w^3-17*w^2+(71-3*lamda)*j*w+94-15*lamda;
re= real(ec5c6); im= imag(ec5c6);
hold on
plot(re,im)
end
for lamda= 0:0.001:1
ec5c7= -j*w^3-(19-2*lamda)*w^2+(78-10*lamda)*j*w+79;
re= real(ec5c7); im= imag(ec5c7);
hold on
plot(re,im)
end
for lamda= 0:0.001:1
ec6c8= -j*w^3-(19-2*lamda)*w^2+(81-10*lamda)*j*w+94;
re= real(ec6c8); im= imag(ec6c8);
hold on
plot(re,im)
end
for lamda= 0:0.001:1
ec7c8= -j*w^3-19*w^2+(81-3*lamda)*j*w+94-15*lamda;
re= real(ec7c8); im= imag(ec7c8);
hold on
plot(re,im)
end
end
plot(re,im,'go')
xlabel('Reel');
ylabel('Sanal');
title('Deger Kümesi')
grid

```

BÖLÜM 4 DİJİTAL KONTROL SİSTEMLERİNDE DAYANIKLI KARARLILIK ANALİZİ

1) Örnek 4.1'in Kharitonov dikdörtgenleri

```
%prnp=[1 1 4.05 3.95 4.05 3.95 6.05 5.95 3.05 2.95 2.05 1.95 0.55  
0.45];
```

```
%luw=[0 0.9 50]; için yazılan program.
```

```
function vsetpysn(prnp,luw)  
%VSETP is the m-file which generate required value set for the given  
interval  
%polynomial over the frequency range of luw.  
%  
%prnp: interval polynomials  
%luwp=[a b c]; a:initial frequency, b:end frequency, c:no. of  
frequency  
%  
%calculate the Kharitonov polynomials  
%  
xx=[];xx=prnp;  
[polyk1,polyk2,polyk3,polyk4,nokp]=khfind(xx);  
  
%create a frequency vector  
ww1=linspace(luw(1),luw(2),luw(3));  
%calculate value set  
if nokp==4  
    for m=1:length(ww1)  
        w=j*ww1(m);  
  
        real=[];imal=[];rea2=[];ima2=[];rea3=[];ima3=[];rea4=[];ima4=[];  
  
        vp1=polyval(polyk1,w);  
        vp2=polyval(polyk2,w);  
        vp3=polyval(polyk3,w);  
        vp4=polyval(polyk4,w);  
  
        real(1)=real(vp1);  
        real(2)=real(vp3);  
        ima1(1)=imag(vp1);  
        ima1(2)=imag(vp3);  
  
        rea2(1)=real(vp1);  
        rea2(2)=real(vp2);  
        ima2(1)=imag(vp1);  
        ima2(2)=imag(vp2);  
  
        rea3(1)=real(vp4);  
        rea3(2)=real(vp2);  
        ima3(1)=imag(vp4);  
        ima3(2)=imag(vp2);  
  
        rea4(1)=real(vp4);  
        rea4(2)=real(vp3);  
        ima4(1)=imag(vp4);  
        ima4(2)=imag(vp3);  
  
        hold on
```

```

        plot(real, ima1)
        hold on
        plot(rea2, ima2)
        hold on
        plot(rea3, ima3)
        hold on
        plot(rea4, ima4)
    end
elseif nokp==2

    for m=1:length(ww1)
        w=j*ww1(m);
        real=[]; ima1=[];
        vp1=polyval(polyk1,w);
        vp2=polyval(polyk2,w);

        real(1)=real(vp1);
        real(2)=real(vp2);
        ima1(1)=imag(vp1);
        ima1(2)=imag(vp2);

        hold on
        plot(real, ima1)
    end
else
    for m=1:length(ww1)
        w=j*ww1(m);
        real=[]; ima1=[];
        vp1=polyval(polyk1,w);

        real(1)=real(vp1);
        ima1(1)=imag(vp1);

        hold on
        plot(real, ima1)
    end

end

re=0;
im=0;
hold on
plot(re, im, 'go')
grid;
xlabel('Reel Eksen'), ylabel('Sanal Eksen')
title('Deger Kümesi')

```

2) %örnek 4.2'nin $T_s=0.1$ için değer kümesi

```

function ysn28(Ts)
d=[1]
for w=0:0.2:80
    rea=[];
    ima=[];
    k=1;
    for la=0:0.1:1
        n=[-0.5*la+2 -0.35 -0.85 0.08];
        [re, im, w]=dnyquist(n, d, Ts, w);
        rea(k)=re; ima(k)=

```

```

k=k+1;
    end
    hold on
    plot(rea, ima)
end
xlabel('Reel');
ylabel('Sanal');
title('Deger Kümesi');
re=0;
im=0;
plot(re, im, 'go');
grid

```

3) %örnek 4.3'ün T=1 için etkin kenarları.

```

function yasin21(T)
re=[], im=[]
for w= 0:0.1:20
    for lamda= 0:0.01:1
        ec1c2= 3*cos(w*T)+j*3*sin(w*T)-lamda+2;
        re= real(ec1c2); im= imag(ec1c2);
        hold on
        plot(re, im)
    end
end
hold on
re=[], im=[]
for w= 0:0.1:20
    for lamda= 0:0.01:1
        ec1c3= (4-lamda)*cos(w*T)+j*(4-lamda)*sin(w*T)+1;
        re= real(ec1c3); im= imag(ec1c3);
        hold on
        plot(re, im)
    end
end
hold on
re=[], im=[]
for w= 0:0.1:20
    for lamda= 0:0.01:1
        ec2c4= (4-lamda)*cos(w*T)+j*(4-lamda)*sin(w*T)+2;
        re= real(ec2c4); im= imag(ec2c4);
        hold on
        plot(re, im)
    end
end
hold on
re=[], im=[]
for w= 0:0.1:20
    for lamda= 0:0.01:1
        ec3c4= 4*cos(w*T)+j*4*sin(w*T)-lamda+2;
        re= real(ec3c4); im= imag(ec3c4);
        hold on
        plot(re, im)
    end
end
end

```

4) %örnek 4.4'ün T=1 için etkin kenarları.

```

function yasin55(T)
re=[], im=[]
for w=0:1:40

```

```

    for lamda= 0:0.01:1
        ec1c2= cos(2*w*T)+j*sin(2*w*T)-cos(w*T)-j*sin(w*T)-
0.3*lamda+0.8;
        re= real(ec1c2); im= imag(ec1c2);
        hold on
        plot(re,im)
    end
end
re=[], im=[]
for w=0:1:40
    for lamda= 0:0.01:1
        ec1c3= cos(2*w*T)+j*sin(2*w*T)+(-0.2*lamda-0.8)*cos(w*T)+j*(-
0.2*lamda-0.8)*sin(w*T)+0.5;
        re= real(ec1c3); im= imag(ec1c3);
        hold on
        plot(re, im)
    end
end
re=[], im=[]
for w=0:1:40
    for lamda= 0:0.01:1
        ec1c5= (-lamda+2)*cos(2*w*T)+j*(-lamda+2)*sin(2*w*T)-cos(w*T)-
j*sin(w*T)+0.5;
        re= real(ec1c5); im= imag(ec1c5);
        hold on
        plot(re, im)
    end
end
re=[], im=[]
for w=0:1:40
    for lamda= 0:0.01:1
        ec2c4= cos(2*w*T)+j*sin(2*w*T)+(-0.2*lamda-0.8)*cos(w*T)+j*(-
0.2*lamda-0.8)*sin(w*T)+0.8;
        re= real(ec2c4); im= imag(ec2c4);
        hold on
        plot(re, im)
    end
end
re=[], im=[]
for w=0:1:40
    for lamda= 0:0.01:1
        ec2c6= (-lamda+2)*cos(2*w*T)+j*(-lamda+2)*sin(2*w*T)-cos(w*T)-
j*sin(w*T)+0.8;
        re= real(ec2c6); im= imag(ec2c6);
        hold on
        plot(re, im)
    end
end
re=[], im=[]
for w=0:1:40
    for lamda= 0:0.01:1
        ec3c4= cos(2*w*T)+j*sin(2*w*T)-0.8*cos(w*T)-j*0.8*sin(w*T)-
0.3*lamda+0.8;
        re= real(ec3c4); im= imag(ec3c4);
        hold on
        plot(re, im)
    end
end
re=[], im=[]
for w=0:1:40
    for lamda= 0:0.01:1

```

```

        ec3c7= (-lamda+2)*cos(2*w*T)+j*(-lamda+2)*sin(2*w*T)-
0.8*cos(w*T)-j*0.8*sin(w*T)+0.5;
        re= real(ec3c7); im= imag(ec3c7);
        hold on
        plot(re, im)
    end
end
re=[], im=[]
for w=0:1:40
    for lamda= 0:0.01:1
        ec4c8= (-lamda+2)*cos(2*w*T)+j*(-lamda+2)*sin(2*w*T)-
0.8*cos(w*T)-j*0.8*sin(w*T)+0.8;
        re= real(ec4c8); im= imag(ec4c8);
        hold on
        plot(re, im)
    end
end
re=[], im=[]
for w=0:1:40
    for lamda= 0:0.01:1
        ec5c6= 2*cos(2*w*T)+j*2*sin(2*w*T)-cos(w*T)-j*sin(w*T)-
0.3*lamda+0.8;
        re= real(ec5c6); im= imag(ec5c6);
        hold on
        plot(re, im)
    end
end
re=[], im=[]
for w=0:1:40
    for lamda= 0:0.01:1
        ec5c7= 2*cos(2*w*T)+j*2*sin(2*w*T)+(-0.2*lamda-
0.8)*cos(w*T)+j*(-0.2*lamda-0.8)*sin(w*T)+0.5;
        re= real(ec5c7); im= imag(ec5c7);
        hold on
        plot(re, im)
    end
end
re=[], im=[]
for w=0:1:40
    for lamda= 0:0.01:1
        ec6c8= 2*cos(2*w*T)+j*2*sin(2*w*T)+(-0.2*lamda-
0.8)*cos(w*T)+j*(-0.2*lamda-0.8)*sin(w*T)+0.8;
        re= real(ec6c8); im= imag(ec6c8);
        hold on
        plot(re, im)
    end
end
re=[], im=[]
for w=0:1:40
    for lamda= 0:0.01:1
        ec7c8= 2*cos(2*w*T)+j*2*sin(2*w*T)-0.8*cos(w*T)-
j*0.8*sin(w*T)-0.3*lamda+0.8;
        re= real(ec7c8); im= imag(ec7c8);
        hold on
        plot(re, im)
    end
end
xlabel('Reel');
ylabel('Sanal');
title('Deger Kümesi')
grid

```

5) %örnek 4.5'in K=1 için etkin kenarlarının kök uzayı. (ns=nokta sayısı)

```
function yasin55rlocus(ns)
c1=[1 -1 0.5];
c2=[1 -1 0.8];
c3=[1 -0.8 0.5];
c4=[1 -0.8 0.8];
c5=[2 -1 0.5];
c6=[2 -1 0.8];
c7=[2 -0.8 0.5];
c8=[2 -0.8 0.8];
lamda=linspace(0,1,ns);
for j=1:length(lamda)
    den=lamda(j)*c1+(1-lamda(j))*c2;
    r=roots(den);
    for i=1:length(r);
        re=real(r(i));
        im=imag(r(i));
        hold on
        plot(re,im,'+')
    end
end
for j=1:length(lamda)
    den=lamda(j)*c1+(1-lamda(j))*c3;
    r=roots(den);
    for i=1:length(r);
        re=real(r(i));
        im=imag(r(i));
        hold on
        plot(re,im,'+')
    end
end
for j=1:length(lamda)
    den=lamda(j)*c1+(1-lamda(j))*c5;
    r=roots(den);
    for i=1:length(r);
        re=real(r(i));
        im=imag(r(i));
        hold on
        plot(re,im,'+')
    end
end
for j=1:length(lamda)
    den=lamda(j)*c2+(1-lamda(j))*c4;
    r=roots(den);
    for i=1:length(r);
        re=real(r(i));
        im=imag(r(i));
        hold on
        plot(re,im,'+')
    end
end
for j=1:length(lamda)
    den=lamda(j)*c2+(1-lamda(j))*c6;
    r=roots(den);
    for i=1:length(r);
        re=real(r(i));
        im=imag(r(i));
        hold on
        plot(re,im,'+')
    end
end
```

```

end
for j=1:length(lamda)
    den=lamda(j)*c3+(1-lamda(j))*c4;
    r=roots(den);
    for i=1:length(r);
        re=real(r(i));
        im=imag(r(i));
        hold on
        plot(re,im,'+')
    end
end
for j=1:length(lamda)
    den=lamda(j)*c3+(1-lamda(j))*c7;
    r=roots(den);
    for i=1:length(r);
        re=real(r(i));
        im=imag(r(i));
        hold on
        plot(re,im,'+')
    end
end
for j=1:length(lamda)
    den=lamda(j)*c4+(1-lamda(j))*c8;
    r=roots(den);
    for i=1:length(r);
        re=real(r(i));
        im=imag(r(i));
        hold on
        plot(re,im,'+')
    end
end
for j=1:length(lamda)
    den=lamda(j)*c5+(1-lamda(j))*c6;
    r=roots(den);
    for i=1:length(r);
        re=real(r(i));
        im=imag(r(i));
        hold on
        plot(re,im,'+')
    end
end
for j=1:length(lamda)
    den=lamda(j)*c5+(1-lamda(j))*c7;
    r=roots(den);
    for i=1:length(r);
        re=real(r(i));
        im=imag(r(i));
        hold on
        plot(re,im,'+')
    end
end
for j=1:length(lamda)
    den=lamda(j)*c6+(1-lamda(j))*c8;
    r=roots(den);
    for i=1:length(r);
        re=real(r(i));
        im=imag(r(i));
        hold on
        plot(re,im,'+')
    end
end
end

```

```

for j=1:length(lamda)
    den=lamda(j)*c7+(1-lamda(j))*c8;
    r=roots(den);
    for i=1:length(r);
        re=real(r(i));
        im=imag(r(i));
        hold on
        plot(re,im,'+')
    end
end
end
x=[-1:0.01:1];
y=sqrt(1-x.^2);
hold on
plot(x,y)
y=-y;
hold on
plot(x,y)
title('Root Locus')
xlabel('Reel');
ylabel('Sanal');
grid

```

BÖLÜM 5 PARAMETRE BELİRSİZLİĞİ İÇEREN DİJİTAL KONTROL SİSTEMLERİNDE BODE, NYQUIST VE NICHOLS DİYAGRAMLARI

1) %örnek 5.1'in Nyquist diyagramı

```

prnum=[3 2 2 1];
prden=[3 2 6 4 4 2];
luwt=[0.1 10 30 20];
nytp(prnum,prden,luwt)

```

```

function nytp(prnum,prden,luwt)
xx=[];xx=prnum;
[polyk1,polyk2,polyk3,polyk4,nokp]=khfind(xx);
if nokp==4
xnum=[polyk1;polyk2;polyk3;polyk4];rn=4;
elseif nokp==2
xnum=[polyk1;polyk2];rn=2;
else
xnum=[polyk1];rn=1;
end
xx=[];xx=prden;
[polyk1,polyk2,polyk3,polyk4,nokp]=khfind(xx);
if nokp==4
yden=[polyk1;polyk2;polyk3;polyk4];rd=4;
elseif nokp==2
yden=[polyk1;polyk2];rd=2;
else
yden=[polyk1];rd=1;
end
ww1=logspace(log10(luwt(1)),log10(luwt(2)),luwt(3));
lamda=linspace(0,1,luwt(4));

for k=1:length(ww1);
for i=1:rn
num=xnum(i,:);

```

```

w=ww1(k);

real=[];ima1=[];rea2=[];ima2=[];rea3=[];ima3=[];rea4=[];ima4=[];
if rd==1
    den=yden(1,:);
    [re,im,w]=nyquist(num,den,w);
    hold on
    plot(re,im)
elseif rd==2
    for j=1:length(lamda)
        denn=lamda(j)*yden(1, :)+(1-lamda(j))*yden(2, :);
        [re(j),im(j),w]=nyquist(num,denn,w);
    end
    hold on
    plot(re,im)
else
    for j=1:length(lamda)
        denn1=lamda(j)*yden(1, :)+(1-lamda(j))*yden(2, :);
        denn2=lamda(j)*yden(1, :)+(1-lamda(j))*yden(3, :);
        denn3=lamda(j)*yden(4, :)+(1-lamda(j))*yden(3, :);
        denn4=lamda(j)*yden(4, :)+(1-lamda(j))*yden(2, :);
        [real(j),ima1(j),w]=nyquist(num,denn1,w);
        [rea2(j),ima2(j),w]=nyquist(num,denn2,w);
        [rea3(j),ima3(j),w]=nyquist(num,denn3,w);
        [rea4(j),ima4(j),w]=nyquist(num,denn4,w);
    end
    hold on
    plot(real,ima1)
    hold on
    plot(rea2,ima2)
    hold on
    plot(rea3,ima3)
    hold on
    plot(rea4,ima4)
end
end

for i=1:rd
    den=yden(i,:);
    w=ww1(k);

real=[];ima1=[];rea2=[];ima2=[];rea3=[];ima3=[];rea4=[];ima4=[];
if rn==1
    num=xnum(1,:);
    [re,im,w]=nyquist(num,den,w);
    hold on
    plot(re,im)
elseif rn==2
    for j=1:length(lamda)
        nenn=lamda(j)*xnum(1, :)+(1-lamda(j))*xnum(2, :);
        [re(j),im(j),w]=nyquist(nenn,den,w);
    end
    hold on
    plot(re,im)
else
    for j=1:length(lamda)
        nenn1=lamda(j)*xnum(1, :)+(1-lamda(j))*xnum(2, :);
        nenn2=lamda(j)*xnum(1, :)+(1-lamda(j))*xnum(3, :);
        nenn3=lamda(j)*xnum(4, :)+(1-lamda(j))*xnum(3, :);
        nenn4=lamda(j)*xnum(4, :)+(1-lamda(j))*xnum(2, :);
        [real(j),ima1(j),w]=nyquist(nenn1,den,w);

```

```

        [rea2(j), ima2(j), w]=nyquist(nenn2, den, w);
        [rea3(j), ima3(j), w]=nyquist(nenn3, den, w);
        [rea4(j), ima4(j), w]=nyquist(nenn4, den, w);
    end
    hold on
    plot(rea1, ima1)
    hold on
    plot(rea2, ima2)
    hold on
    plot(rea3, ima3)
    hold on
    plot(rea4, ima4)
end
end
grid;
xlabel('Real Axis'), ylabel('Imaginary Axis')
title('Nyquist Template')
hold off;

```

2) %örnek 5.1'e ait gelişigüzel Nyquist yer eğrileri

```

prnum=[3 2 2 1];
prden=[3 2 6 4 4 2];
luw=[0.1 10 50];
NoP=100;
rnyp(prnum, prden, luw, NoP)

```

```

function rnyp(prnum, prden, luw, NoP)

```

```

%
%RNYP is the m-file which is used to plot the random Nyquist plots
with the %Nyquist plots of the Kharitonov plants.
%
%prnum:parameters range vector for numerator;
%parameters range vector for denominator;
%luw:frequency vector;
%NoP:no. of random plots
%
%generates a vector which contain variation rate for denominator
%
w=logspace(log10(luw(1)), log10(luw(2)), luw(3));
[numx, denx, nranx, dranx]=rvrm(prnum, prden, NoP);
%%%
PXX=denx; PYY=numx;
%
for i=1:NoP
    for j=1:length(PXX)
        denx(j)=denx(j)+denx(j)*dranx(i, j);
    end
    for j=1:length(PYY)
        numx(j)=numx(j)+numx(j)*nranx(i, j);
    end

    [re, im, w]=nyquist(numx, denx, w);
    plot(re, im)
    hold on
    denx=PXX;

```

```

        numx=PYY;
end
%
nypkp(prnum,prden,luw)
title('Random Nyquist Plots : Kırmızı:Kharitonov Eğrileri;
Sarı:Gelişigüzel Nyq. Eğrileri')

3)      %örnek 5.2'ye ait
T=0.1;
ls=10;
function ysndnyq(ls,T)
lamda=linspace(0,1,ls)
for w=0:1:60
    rea=[];
    ima=[];
    k=1;
    for i=1:length(lamda)
        n=[6 0 9.5];
        d=[1 0 18-4*lamda(i) 0];
        [re,im,w]=dnyquist(n,d,T,w);
        rea(k)=re;
        ima(k)=im;
        k=k+1;
    end
    plot(rea,ima)
    hold on
    k=1;
    for i=1:length(lamda)
        n=[6 0 10.5];
        d=[1 0 18-4*lamda(i) 0];
        [re,im,w]=dnyquist(n,d,T,w);
        rea(k)=re;
        ima(k)=im;
        k=k+1;
    end
    plot(rea,ima)
    hold on
    k=1;
    for i=1:length(lamda)
        n=[8 0 9.5];
        d=[1 0 18-4*lamda(i) 0];
        [re,im,w]=dnyquist(n,d,T,w);
        rea(k)=re;
        ima(k)=im;
        k=k+1;
    end
    plot(rea,ima)
    hold on
    k=1;
    for i=1:length(lamda)
        n=[8 0 10.5];
        d=[1 0 18-4*lamda(i) 0];
        [re,im,w]=dnyquist(n,d,T,w);
        rea(k)=re;
        ima(k)=im;
        k=k+1;
    end
    plot(rea,ima)
    hold on
    for i=1:length(lamda)
        n=[6 0 10.5-lamda(i)];

```

```

        d=[1 0 14 0];
        [re,im,w]=dnyquist(n,d,T,w);
        rea(k)=re;
        ima(k)=im;
        k=k+1;
end
plot(rea,ima)
hold on
for i=1:length(lamda)
    n=[8-2*lamda(i) 0 9.5];
    d=[1 0 14 0];
    [re,im,w]=dnyquist(n,d,T,w);
    rea(k)=re;
    ima(k)=im;
    k=k+1;
end
plot(rea,ima)
hold on
for i=1:length(lamda)
    n=[8-2*lamda(i) 0 10.5];
    d=[1 0 14 0];
    [re,im,w]=dnyquist(n,d,T,w);
    rea(k)=re;
    ima(k)=im;
    k=k+1;
end
plot(rea,ima)
hold on
for i=1:length(lamda)
    n=[8 0 10.5-lamda(i)];
    d=[1 0 14 0];
    [re,im,w]=dnyquist(n,d,T,w);
    rea(k)=re;
    ima(k)=im;
    k=k+1;
end
plot(rea,ima)
hold on
for i=1:length(lamda)
    n=[6 0 10.5-lamda(i)];
    d=[1 0 18 0];
    [re,im,w]=dnyquist(n,d,T,w);
    rea(k)=re;
    ima(k)=im;
    k=k+1;
end
plot(rea,ima)
hold on
for i=1:length(lamda)
    n=[8-2*lamda(i) 0 9.5];
    d=[1 0 18 0];
    [re,im,w]=dnyquist(n,d,T,w);
    rea(k)=re;
    ima(k)=im;
    k=k+1;
end
plot(rea,ima)
hold on
for i=1:length(lamda)
    n=[8-2*lamda(i) 0 10.5];
    d=[1 0 18 0];

```

```

        [re, im, w]=dnyquist (n, d, T, w);
        rea(k)=re;
        ima(k)=im;
        k=k+1;
    end
    plot (rea, ima)
    hold on
    for i=1:length(lamda)
        n=[8 0 10.5-lamda(i)];
        d=[1 0 18 0];
        [re, im, w]=dnyquist (n, d, T, w);
        rea(k)=re;
        ima(k)=im;
        k=k+1;
    end
    plot (rea, ima)
    hold on
end
xlabel ('Reel');
ylabel ('Sanal');
grid
4)    %örnek 5.3'e ait
T=0.1
ls=10

function ysndnyqt (ls, T)
lamda=linspace (0, 1, ls)
for w=0:1:30
    rea=[];
    ima=[];
    k=1;
    for i=1:length(lamda)
        n=[0.17 0.15];
        d=[1 -1.57 0.8-0.1*lamda(i)];
        [re, im, w]=dnyquist (n, d, T, w);
        rea(k)=re;
        ima(k)=im;
        k=k+1;
    end
    plot (rea, ima)
    hold on
    k=1;
    for i=1:length(lamda)
        n=[0.17 0.15];
        d=[1 -1.37-0.2*lamda(i) 0.7];
        [re, im, w]=dnyquist (n, d, T, w);
        rea(k)=re;
        ima(k)=im;
        k=k+1;
    end
    plot (rea, ima)
    hold on
    k=1;
    for i=1:length(lamda)
        n=[0.17 0.15];
        d=[1 -1.37-0.2*lamda(i) 0.8];
        [re, im, w]=dnyquist (n, d, T, w);
        rea(k)=re;
        ima(k)=im;
        k=k+1;
    end
end

```

```

plot(rea, ima)
hold on
k=1;
for i=1:length(lamda)
    n=[0.17 0.15];
    d=[1 -1.37 0.8-0.1*lamda(i)];
    [re, im, w]=dnyquist(n, d, T, w);
    rea(k)=re;
    ima(k)=im;
    k=k+1;
end
plot(rea, ima)
hold on
end
xlabel('Reel');
ylabel('Sanal');
grid

```

5) %örnek 5.4'e ait
Ts=0.1

```

function vsGZ01(Ts)
l=[0:0.01:1];
d1=[2.5 -0.1 0.1];
d2=[2.5 -0.1 0.6];
d3=[2.5 0.2 0.1];
d4=[2.5 0.2 0.6];
d5=[4 -0.1 0.1];
d6=[4 -0.1 0.6];
d7=[4 0.2 0.1];
d8=[4 0.2 0.6];
n=[0.1];
for w=0:2:30
    rea=[];
    ima=[];
    k=1;
    for i=1:length(l)
        den=l(i)*d1+(1-l(i))*d2;
        [re, im, w]=dnyquist(n, den, Ts, w);
        rea(k)=re;
        ima(k)=im;
        k=k+1;
    end
    plot(rea, ima)
    hold on
    k=1;
    for i=1:length(l)
        den=l(i)*d1+(1-l(i))*d3;
        [re, im, w]=dnyquist(n, den, Ts, w);
        rea(k)=re;
        ima(k)=im;
        k=k+1;
    end
    plot(rea, ima)
    hold on
    k=1;
    for i=1:length(l)
        den=l(i)*d1+(1-l(i))*d5;
        [re, im, w]=dnyquist(n, den, Ts, w);
        rea(k)=re;

```

```

        ima(k)=im;
        k=k+1;
end
plot(rea, ima)
hold on
k=1;
for i=1:length(l)
    den=l(i)*d2+(1-l(i))*d4;
    [re, im, w]=dnyquist(n, den, Ts, w);
    rea(k)=re;
    ima(k)=im;
    k=k+1;
end
plot(rea, ima)
hold on
k=1;
for i=1:length(l)
    den=l(i)*d2+(1-l(i))*d6;
    [re, im, w]=dnyquist(n, den, Ts, w);
    rea(k)=re;
    ima(k)=im;
    k=k+1;
end
plot(rea, ima)
hold on
k=1;
for i=1:length(l)
    den=l(i)*d3+(1-l(i))*d4;
    [re, im, w]=dnyquist(n, den, Ts, w);
    rea(k)=re;
    ima(k)=im;
    k=k+1;
end
plot(rea, ima)
hold on
k=1;
for i=1:length(l)
    den=l(i)*d3+(1-l(i))*d7;
    [re, im, w]=dnyquist(n, den, Ts, w);
    rea(k)=re;
    ima(k)=im;
    k=k+1;
end
plot(rea, ima)
hold on
k=1;
for i=1:length(l)
    den=l(i)*d4+(1-l(i))*d8;
    [re, im, w]=dnyquist(n, den, Ts, w);
    rea(k)=re;
    ima(k)=im;
    k=k+1;
end
plot(rea, ima)
hold on
k=1;
for i=1:length(l)
    den=l(i)*d5+(1-l(i))*d6;
    [re, im, w]=dnyquist(n, den, Ts, w);
    rea(k)=re;
    ima(k)=im;

```

```

        k=k+1;
    end
    plot(rea, ima)
    hold on
    k=1;
    for i=1:length(l)
        den=l(i)*d5+(1-l(i))*d7;
        [re, im, w]=dnyquist(n, den, Ts, w);
        rea(k)=re;
        ima(k)=im;
        k=k+1;
    end
    plot(rea, ima)
    hold on
    k=1;
    for i=1:length(l)
        den=l(i)*d6+(1-l(i))*d8;
        [re, im, w]=dnyquist(n, den, Ts, w);
        rea(k)=re;
        ima(k)=im;
        k=k+1;
    end
    plot(rea, ima)
    hold on
    k=1;
    for i=1:length(l)
        den=l(i)*d7+(1-l(i))*d8;
        [re, im, w]=dnyquist(n, den, Ts, w);
        rea(k)=re;
        ima(k)=im;
        k=k+1;
    end
    plot(rea, ima)
    hold on
    k=1;
end
grid

```

6) %örnek 5.7'ye ait
%K=1, ns=5 ve T=1 için; ybode1.m

```

function ybode1(ns, T, K)
a0=linspace(0.1, 0.4, ns);
b1=linspace(-1.4, -1.2, ns);
b2=linspace(1, 2, ns);
for i=1:length(a0)
    for j=1:length(b1)
        for k=1:length(b2)
            n=[(a0(i)-0.4)*K*T^2 -4*K*a0(i)*T 4*K*(a0(i)+0.4)];
            d=[(b2(k)-b1(j)+0.4+K*(a0(i)-0.4))*T^2 (b2(k)-0.4-K*a0(i))*4*T
            (b2(k)+b1(j)+0.4+K*(a0(i)+0.4))*4];
            bode(n, d)
            hold on
        end
    end
end
end
grid

```

7) %örnek 5.8'e ait Nchols Template
%

```

prnum=[3 2 2 1];
prden=[3 2 6 4 4 2];

```

```

luwt=[0.1 10 30 20];
nictp(prnum,prden,luwt)
%
function nictp(prnum,prden,luwt)
%
%NICTP is the m-file which is used to plot Nichols template of an
interval plant
%
%prnum:parameters range for numerator;
%prden:parameters range for deniominator;
%luwt=[a b c d]; a:initila frequency; b:end frequency; c:no of
frequency; d:no %of points between 0 and 1.

%
%calculate the Kharitonov polynomials of numerator and denominator
%

xx=[];xx=prnum;
[polyk1,polyk2,polyk3,polyk4,nokp]=khfind(xx);

%put numerator polynomials into an array

if nokp==4
xnum=[polyk1;polyk2;polyk3;polyk4];rn=4;
elseif nokp==2
xnum=[polyk1;polyk2];rn=2;
else
xnum=[polyk1];rn=1;
end
%
xx=[];xx=prden;
[polyk1,polyk2,polyk3,polyk4,nokp]=khfind(xx);

%put the denominator polynomials into an array

if nokp==4
yden=[polyk1;polyk2;polyk3;polyk4];rd=4;
elseif nokp==2
yden=[polyk1;polyk2];rd=2;
else
yden=[polyk1];rd=1;
end

%
%
ww1=logspace(log10(luwt(1)),log10(luwt(2)),luwt(3));
lamda=linspace(0,1,luwt(4));

for k=1:length(ww1);
for i=1:rn
num=xnum(i,:);
w=ww1(k);

mag1=[];phase1=[];mag2=[];phase2=[];mag3=[];phase3=[];mag4=[];phase4=[
];
if rd==1
den=yden(1,:);
[mag,phase,w]=bode(num,den,w);
mag=20*log10(mag);
hold on

```

```

        plot(phase,mag)
elseif rd==2
    for j=1:length(lamda)
        denn=lamda(j)*yden(1,:)+(1-lamda(j))*yden(2,:);
        [mag(j),phase(j),w]=bode(num,denn,w);
        mag(j)=20*log10(mag(j));
    end
    hold on
    plot(phase,mag)
else
    for j=1:length(lamda)
        denn1=lamda(j)*yden(1,:)+(1-lamda(j))*yden(2,:);
        denn2=lamda(j)*yden(1,:)+(1-lamda(j))*yden(3,:);
        denn3=lamda(j)*yden(4,:)+(1-lamda(j))*yden(3,:);
        denn4=lamda(j)*yden(4,:)+(1-lamda(j))*yden(2,:);
        [mag1(j),phase1(j),w]=bode(num,denn1,w);
        mag1(j)=20*log10(mag1(j));
        [mag2(j),phase2(j),w]=bode(num,denn2,w);
        mag2(j)=20*log10(mag2(j));
        [mag3(j),phase3(j),w]=bode(num,denn3,w);
        mag3(j)=20*log10(mag3(j));
        [mag4(j),phase4(j),w]=bode(num,denn4,w);
        mag4(j)=20*log10(mag4(j));
    end
    hold on
    plot(phase1,mag1)
    hold on
    plot(phase2,mag2)
    hold on
    plot(phase3,mag3)
    hold on
    plot(phase4,mag4)
end
end

for i=1:rd
    den=yden(i,:);
    w=ww1(k);

mag1=[];phase1=[];mag2=[];phase2=[];mag3=[];phase3=[];mag4=[];phase4=[
];
    if rn==1
        num=xnum(1,:);
        [mag,phase,w]=bode(num,den,w);
        mag=20*log10(mag);
        hold on
        plot(phase,mag)
    elseif rn==2
        for j=1:length(lamda)
            nenn=lamda(j)*xnum(1,:)+(1-lamda(j))*xnum(2,:);
            [mag(j),phase(j),w]=bode(nenn,den,w);
            mag(j)=20*log10(mag(j));
        end
        hold on
        plot(phase,mag)
    else
        for j=1:length(lamda)
            nenn1=lamda(j)*xnum(1,:)+(1-lamda(j))*xnum(2,:);
            nenn2=lamda(j)*xnum(1,:)+(1-lamda(j))*xnum(3,:);
            nenn3=lamda(j)*xnum(4,:)+(1-lamda(j))*xnum(3,:);
            nenn4=lamda(j)*xnum(4,:)+(1-lamda(j))*xnum(2,:);

```

```

        [mag1(j), phase1(j), w]=bode(nenn1, den, w);
        mag1(j)=20*log10(mag1(j));
        [mag2(j), phase2(j), w]=bode(nenn2, den, w);
        mag2(j)=20*log10(mag2(j));
        [mag3(j), phase3(j), w]=bode(nenn3, den, w);
        mag3(j)=20*log10(mag3(j));
        [mag4(j), phase4(j), w]=bode(nenn4, den, w);
        mag4(j)=20*log10(mag4(j));
    end
        hold on
        plot(phase1, mag1)
        hold on
        plot(phase2, mag2)
        hold on
        plot(phase3, mag3)
        hold on
        plot(phase4, mag4)
    end
end
end
phase=-180; mag=0;
hold on
plot(phase, mag, 'go')
xlabel('Phase in Degree'), ylabel('Magnitude in DB')
title('Nichols Template')
grid
hold off;

```

8) %örnek 5.8'e ait Random Nchols

```

prnum=[3 2 2 1];
prden=[3 2 6 4 4 2];
luw=[0.1 10 50];
NoP=100;
rnic(prnum, prden, luw, NoP)
%

function rnic(prnum, prden, luw, NoP)
%
%RNIC is the m-file which is used to plot the random Nichols plots
with the %Nichols plots of the Kharitonov plants.
%
%prnum:parameters range vector for numerator;
%prden:parameters range vector for denominator;
%luwp:frequency vector;
%NoP: no. of random plants
%

w=logspace(log10(luw(1)), log10(luw(2)), luw(3));

[numx, denx, nranx, dranx]=rvrm(prnum, prden, NoP);
%
PXX=denx; PYY=numx;
%

for i=1:NoP
    for j=1:length(PXX)
        denx(j)=denx(j)+denx(j)*dranx(i, j);
    end
end

```

```

for j=1:length(PYY)
    numx(j)=numx(j)+numx(j)*nranx(i,j);
end

[mag,phase,w]=bode(numx,denx,w);
mag=20*log10(mag);
hold on
plot(phase,mag)
denx=PXX;
numx=PYY;
end
phase=-180;mag=0;
hold on
plot(phase,mag,'go')
xlabel('Phase in Degree')
ylabel('Magnitude in db')
nickp(prnum,prden,luw)

```

9) %örnek 6.2'ye (Dijital PID Tasarımına) ait

```

function ykPID
Kp=350;
Ki=300;
Kd=50;
numDz = 0.0001*[0.42 0.42];
denDz = [1 -2 1];
numpd = [Kp+Ki+Kd -Kp-2*Kd Kd];
denpd = [1 1 0];
numDnew = conv(numDz,numpd);
denDnew = conv(denDz,denpd);
[numDnewC,denDnewC] = cloop(numDnew,denDnew);
[x] = dstep(numDnewC,denDnewC,251);
t=0:0.02:5;
stairs(t,x)
xlabel('Zaman (sn)')
ylabel('Topun Pozisyonu (m)')
title('Kapali Çevrim Basamak Cevabi (PID)')
grid

```

DİJİTAL KONTROL SİSTEMLERİNDE DAYANIKLI KARARLILIK ANALİZİ

Yasin KARATAŞ¹ ve Nusret TAN²

¹Yüksek Lisans Öğrencisi

²İnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü,
44280, Malatya. e-posta: ntan@inonu.edu.tr

Anahtar sözcükler: Parametre belirsizliği, Kararlılık, Kharitonov teoremi, Kenar teorem, Dijital interval polinomlar, Değer kümesi

ABSTRACT

This paper deals with the robust stability analysis of digital control systems with uncertainties. It is well known that the uncertainties in the physical systems is an unavoidable fact. Therefore, taking uncertainties into account while analysing control systems gives advantages. In this work, the methods related to the stability of digital control systems with parametric uncertainty are studied.

1. GİRİŞ

Kontrol sistemlerinin analiz ve tasarımı yapılırken belirsizliğin hesaba katılması sistemin dayanıklılığı açısından önem arz etmektedir. Genellikle kontrol sistemlerinde parametre belirsizliği ve model belirsizliği olmak üzere iki çeşit belirsizlik yapısından bahsedilir [1]. Parametre belirsizliği konusu özellikle Kharitonov teoremi [2] ile beraber önem kazanmış ve bu alanda birçok çalışmalar yapılmıştır [3-15]. Kharitonov teoremi aralık(interval) belirsizlik yapısı içeren bir interval polinomun kararlılığının kümedeki dört Kharitonov polinomun kararlılığının test edilmesiyle elde edilebileceğini ifade etmektedir. Dolayısıyla kararlılık problemi sonsuz bir kümeden sonlu ve sadece dört tane polinom içeren bir kümeye indirgenmiştir. Fakat bu önemli teorem interval dijital kontrol sistemlerine uygulanamamaktadır. Çünkü Kharitonov teoremi kararlılık bölgesi sol yarı düzlem olan sürekli zamanlı kontrol sistemleri için geçerlidir. Bu tip sistemlerin kararlılığına Hurwitz kararlılık denir. Bir dijital kontrol sisteminde ise kararlılık bölgesi birim çemberdir ve bu çeşit sistemlerin

kararlılığına da Schur kararlılık denir [13]. Dolayısıyla Kharitonov teoremini kullanarak interval bir ayrık zamanlı polinom kümesinin bütün köklerinin birim çemberin içerisinde olum olmadığını test edemeyiz. Belirsiz bir ayrık zamanlı polinom kümesinin kararlılığı için kullanılacak bir metot kenar(edge) teoremidir [15]. Bu teoremden yararlanarak parametre belirsizliği içeren dijital kontrol sistemlerinin analizi yapılabilir.

Bu çalışmada ayrık zamanlı interval polinomların kararlılığı incelendi. Değer kümelerinin hesaplanabilmesi için bir yöntem önerildi. İnterval dijital kontrol sistemlerinin dayanıklılık analizi ile ilgili çalışmalar yapıldı. Parametre belirsizliği içeren dijital kontrol sistemlerinin dayanıklı analizi için kullanılacak gerekli programlar Matlab ortamında yazıldı.

2. KHARİTONOV TEOREMİ VE DİJİTAL İNTERVAL POLİNOMLAR

Bir sürekli zamanlı interval polinom kümesi şu formda yazılabilir

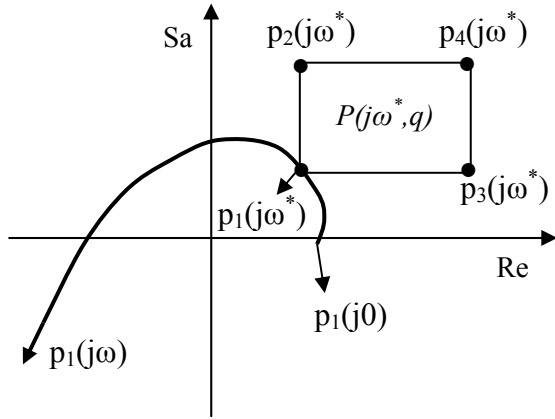
$$P(s, q) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + \dots + a_ns^n \quad (1)$$

burada $q = [a_0, a_1, \dots, a_n]$, $a_i \in [\underline{a}_i, \overline{a}_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, \underline{a}_i ve \overline{a}_i i . belirsizlik a_i 'nin alt ve üst limitlerini göstermektedir. Bu polinom kümesinin kararlı olabilmesi için Kharitonov teoremine göre dört Kharitonov polinomunun kararlı olması yeterlidir.

Dört Kharitonov polinomu şu şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} p_1(s) &= \underline{a_0} + \underline{a_1}s + \overline{a_2}s^2 + \overline{a_3}s^3 + \dots \\ p_2(s) &= \overline{a_0} + \underline{a_1}s + \underline{a_2}s^2 + \overline{a_3}s^3 + \dots \\ p_3(s) &= \overline{a_0} + \underline{a_1}s + \underline{a_2}s^2 + \overline{a_3}s^3 + \dots \\ p_4(s) &= \underline{a_0} + \underline{a_1}s + \underline{a_2}s^2 + \underline{a_3}s^3 + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Bu sonuç aslında Mikhailov kriterini kullanarak kolayca ispatlanabilir. Mikhailov kriterine göre n . dereceden bir $p(s)$ polinomunun kararlı olabilmesi için $p(j\omega)$ 'nin pozitif reel eksenden başlayarak saat yönünün tersinde n eksenini kesmesi gerekir. Yani sıfırın dışlanması kuralına (zero exclusion principle) [1] göre $p(j\omega)$ 'nin orijinden geçmemesi gerekir. Dolayısıyla, bir interval polinomun herhangi bir sabit frekanstaki değer kümesinin şekil 1 de görüldüğü gibi kenarları reel ve sanal eksene paralel olan bir dikdörtgen olduğu kolayca gösterilebilir. Bu dikdörtgenin köşelerini Kharitonov polinomları oluşturur ve bu dikdörtgene Kharitonov dikdörtgeni denir. Bu dikdörtgenin kenarları reel ve sanal eksene paralel olduğu için orijinin dikdörtgensel değer kümesinin içinde veya dışında kalması köşe noktalarını kullanarak kolayca test edilebilir. Şekil 1 de de görüldüğü gibi köşe noktaları Kharitonov polinomlarına karşılık gelmektedir.



Şekil 1: Kharitonov dikdörtgeni ve $p_1(s)$ 'in Mikhailov eğrisi

Örneğin ikinci dereceden bir interval polinom

$$P(s, q) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 \quad (3)$$

verilmiş olsun burada $a_0 \in [3,6]$, $a_1 \in [8,10]$, $a_2 \in [4,8]$ ve $a_3 \in [1,2]$. $s = j\omega$ yerine konursa,

$$P(j\omega, q) = a_0 - a_2\omega^2 + j(-a_3\omega^3 + a_1\omega) \quad (4)$$

elde edilir. Burada reel ve sanal kısımda görülen belirsiz parametrelerin birbirinden bağımsız olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, her bir frekans değerinde

$P(j\omega, q)$ 'nin değer kümesi kenarları reel ve sanal eksene paralel olan bir dikdörtgendir. Bu polinom kümesinin değer kümeleri $0 \leq \omega \leq 4$ aralığında 50 frekans değerinde Şekil 2 de görülmektedir. Sıfır değer kümesinin içinde olmadığı için bu belirsiz polinom kümesi karardır. Bu kümenin dört Kharitonov polinomu

$$\begin{aligned} p_1(s) &= 3 + 8s + 8s^2 + 2s^3 \\ p_2(s) &= 3 + 10s + 8s^2 + 1s^3 \\ p_3(s) &= 6 + 8s + 4s^2 + 2s^3 \\ p_4(s) &= 6 + 10s + 4s^2 + 1s^3 \end{aligned} \quad (5)$$

şeklinde yazılabilir. Bu dört polinomun da kararlı olduğu test edilebilir. Dolayısıyla sürekli zamanlı bir interval polinomun kararlılığı dört Kharitonov polinomun kararlılığı test edilerek bulunabilir.

Bu sonucun ayrık zamanlı interval polinomlar için geçerli olmadığını aşağıdaki interval polinomun kararlılığında görebiliriz.

$$P(z, k) = a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 \quad (6)$$

burada $a_0 = 0.0096$, $a_1 \in [-0.16, -0.1]$, $a_2 \in [0.42, 0.5]$, $a_3 \in [-1.3, -1]$ ve $a_4 = 1$. Dört Kharitonov polinomunun yani

$$\begin{aligned} p_1(z) &= z^4 - z^3 + 0.5z^2 - 0.16z + 0.0096 \\ p_2(z) &= z^4 - 1.3z^3 + 0.5z^2 - 0.1z + 0.0096 \\ p_3(z) &= z^4 - z^3 + 0.42z^2 - 0.16z + 0.0096 \\ p_4(z) &= z^4 - 1.3z^3 + 0.42z^2 - 0.1z + 0.0096 \end{aligned} \quad (7)$$

Schur kararlı olduğu test edilebilir. Fakat kümeyle ait olan

$$p(z) = z^4 - 1.28z^3 + 0.42z^2 - 0.155z + 0.0096$$

polinomu Schur kararlı değildir. Dolayısıyla dijital interval polinomlar için Kharitonov polinomlarının kararlı olması yeterli değildir. Bunun nedeni polinomda $z = e^{j\omega T}$, burada T örnekleme periyodudur, yazıldığında belirsiz parametreler reel ve sanal kısımda birbirlerine lineer bağımlı olarak görüleceklerdir. Dolayısıyla değer kümesi kenarları reel ve sanal eksenlere paralel olan dikdörtgen değildir. Öyleyse dijital bir interval polinomun kararlılığının test edilebilmesi için polinomun değer kümesinin hesaplanabilmesi gerekir. Bunun için kenar(edge) teoremi kullanılabilir.

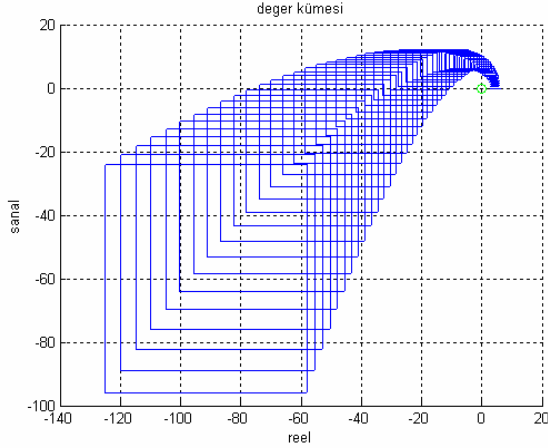
3. DİJİTAL İNTERVAL

POLİNOMLARIN DEĞER KÜMESİ VE KARARLILIĞI

Bir dijital interval polinom kümesi

$$P(z, k) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n \quad (9)$$

formunda gösterilebilir. Burada $k = [a_0, a_1, \dots, a_n]$, $a_i \in [\underline{a}_i, \overline{a}_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, \underline{a}_i ve \overline{a}_i i . belirsizlik a_i 'nin alt ve üst limitlerini göstermektedir. Kenar teoremine göre n tane belirsiz parametre içeren bir polinom ailesinin herhangi bir sabit frekanstaki değer kümesi bir poligonudur ve bu poligonun 2^n tane



Şekil 2: Denklem (3)'teki interval polinomun $0 \leq \omega \leq 4$ için değer kümesi

köşesi ve $n2^{n-1}$ tane de etkin(exposed) kenarı vardır. Böyle bir polinom kümesinin Schur kararlı olabilmesi için bütün etkin kenarların Schur kararlı olması gerekir veya değer kümesinin sıfırı içine almaması gerekir. Örneğin üç tane belirsiz parametre içeren bir polinomun parametre düzlemindeki belirsizlik küpü ve kompleks düzlemdeki yansıması Şekil 3(a) ve (b) de görülmektedir.

Denklem (9) daki polinomun 2^n tane köşe polinomu aşağıdaki düzende yazılabilir.

$$\begin{aligned} c_1(z) &= \underline{a}_0 + \underline{a}_1 z + \underline{a}_2 z^2 + K + \underline{a}_n z^n \\ c_2(z) &= \overline{a}_0 + \underline{a}_1 z + \underline{a}_2 z^2 + K + \underline{a}_n z^n \\ c_3(z) &= \underline{a}_0 + \overline{a}_1 z + \underline{a}_2 z^2 + K + \underline{a}_n z^n \end{aligned} \quad (10)$$

M

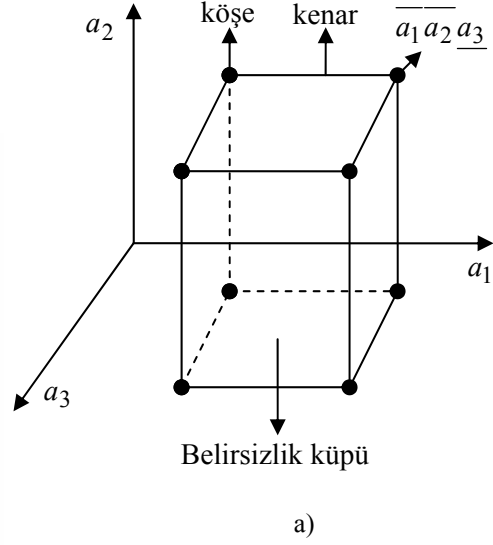
$$c_n(z) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 z + \overline{a}_2 z^2 + K + \overline{a}_n z^n$$

Etkin kenarlar elde edilirken köşe polinomlarından yararlanılır. Örneğin denklem (10)'a baktığımızda $c_1(z)$ ve $c_2(z)$ polinomlarında sadece a_0 parametresi alt ve üst limitlerdeki değerleri almaktadır ve diğer parametreler belirsizliğin alt limitindeki değerlerinde sabitlenmişlerdir. Öyleyse uç noktaları $c_1(z)$ ve $c_2(z)$ olan bir etkin kenar mevcuttur. Bu etkin kenar şu şekilde gösterilebilir

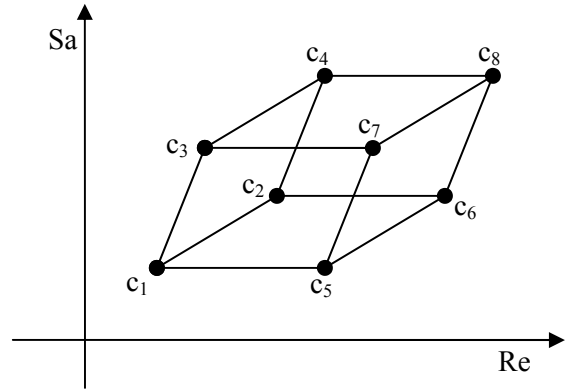
$$e(c_1, c_2) = \lambda c_1(z) + (1 - \lambda) c_2(z), \quad \lambda \in [0, 1] \quad (11)$$

Böyle bir etkin kenar bir ayırt(segment) diye de adlandırılır. Benzer şekilde diğer etkin kenarlar da

oluşturulabilir. Bu etkin kenarlar kullanılarak dijital interval polinomun değer kümesi elde edilir.



a)



b)

Şekil 3: Üç tane belirsiz parametre içeren bir polinomun a) parametre düzlemindeki belirsizlik küpü ve b) kompleks düzlemdeki yansıması

4. ÖRNEKLER

Örnek 1: Bir dijital interval polinom şu şekilde verilsin

$$P(z, k) = [1.5, 2]z^3 - 0.35z^2 - 0.85z + 0.08 \quad (12)$$

görüldüğü gibi bu interval polinom kümesi sadece bir tane parametre belirsizliği içermektedir. Dolayısıyla bu polinom kümesi için 2 tane köşe polinomu ve bir tane kenar elde edilebilir. Köşe polinomları

$$c_1(z) = 1.5z^3 - 0.35z^2 - 0.85z + 0.08 \quad (13)$$

$$c_2(z) = 2z^3 - 0.35z^2 - 0.85z + 0.08$$

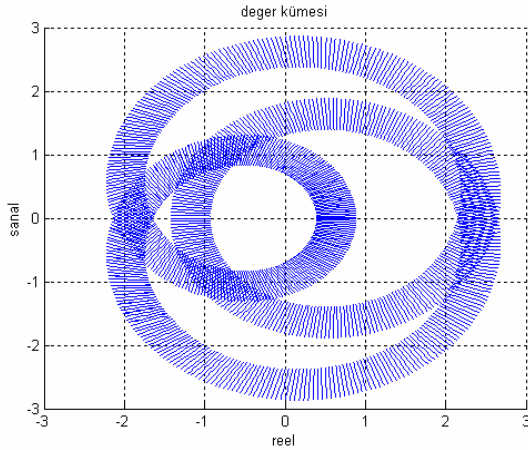
$c_1(z)$ ve $c_2(z)$ 'in Schur kararlı olduğu Jury testini uygulayarak veya $c_1(z)$ ve $c_2(z)$ 'in köklerini bularak test edilebilir. Bütün polinom kümesinin kararlı olup olmadığını test edebilmek için önceki

bölümde verilen yöntem kullanılabilir. Köşe veya uç polinomlarını kullanarak

$$e(c_1, c_2) = \lambda c_1(z) + (1 - \lambda)c_2(z) \quad (14)$$

$$= (2 - 0.5\lambda)z^3 - 0.35z^2 - 0.85z + 0.08$$

etkin kenarı elde edilebilir, burada $\lambda \in [0,1]$. Bu kenarın $0 \leq \omega \leq 40$ için değer kümesi Şekil 4 de görülmektedir. Şekilde de gözlemlendiği gibi sıfır değer kümesinin dışında kalmaktadır. Dolayısıyla verilen polinom kümesi Schur kararlıdır.



Şekil 4: Denlem (12)'de verilen polinomun $0 \leq \omega \leq 40$ için değer kümesi

Örnek 2: Birim geribeslemeli bir dijital interval kontrol sisteminde

$$G(z) = \frac{a_1 z + a_0}{z^2(z + a_2)} \quad (15)$$

$$a_0 \in [-0.06, 0.053], \quad a_1 \in [-0.05, 0.05] \quad \text{ve}$$

$$a_2 \in [0.045, 0.15] \quad \text{ise kontrol sisteminin kararlılığını}$$

inceleyelim. Sistemin karakteristik denklemi

$$P(z, k) = 1 + G(z) = 0 \quad (16)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

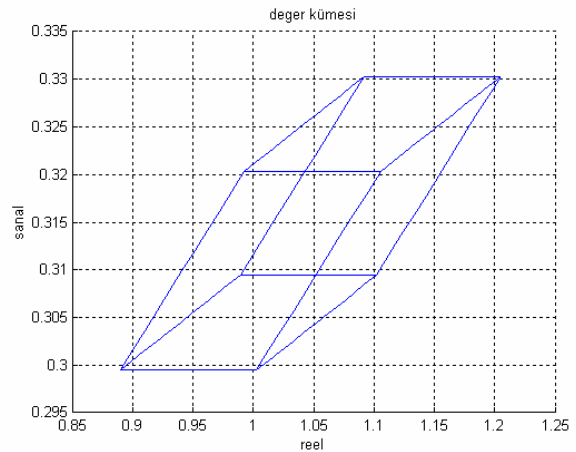
$$P(z, k) = z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad (17)$$

elde edilir. Dolayısıyla dijital interval kontrol sisteminin kararlılık problemi dijital interval polinomların kararlılık problemine dönüştürülmüş oldu. Denklem (17) deki belirsiz polinom kümesinin kararlılığını test edebilmek için değer kümesi yaklaşımı kullanılabilir. Bu polinomda 3 tane belirsiz parametre olduğu için $2^3=8$ tane köşe polinomu ve $3 \times 2^2=12$ tane de etkin kenar elde edilebilir. Köşe polinomları

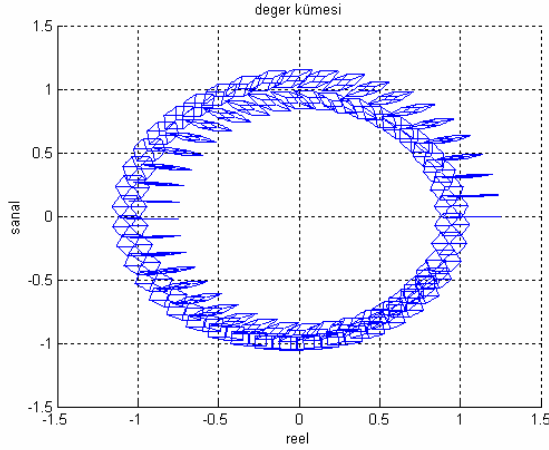
$$\begin{aligned} c_1(z) &= -0.06 - 0.05z + 0.045z^2 + z^3 \\ c_2(z) &= 0.053 - 0.05z + 0.045z^2 + z^3 \\ c_3(z) &= -0.06 + 0.05z + 0.045z^2 + z^3 \\ c_4(z) &= 0.053 + 0.05z + 0.045z^2 + z^3 \\ c_5(z) &= -0.06 - 0.05z + 0.15z^2 + z^3 \\ c_6(z) &= 0.053 - 0.05z + 0.15z^2 + z^3 \\ c_7(z) &= -0.06 + 0.05z + 0.15z^2 + z^3 \\ c_8(z) &= 0.053 + 0.05z + 0.15z^2 + z^3 \end{aligned} \quad (18)$$

ve denklem (11) den yararlanarak $e(c_1, c_2)$, $e(c_1, c_3)$, $e(c_1, c_5)$, $e(c_2, c_4)$, $e(c_2, c_6)$, $e(c_3, c_4)$, $e(c_3, c_7)$, $e(c_4, c_8)$, $e(c_5, c_6)$, $e(c_5, c_7)$, $e(c_6, c_8)$ ve $e(c_7, c_8)$ etkin kenarları elde edilir.

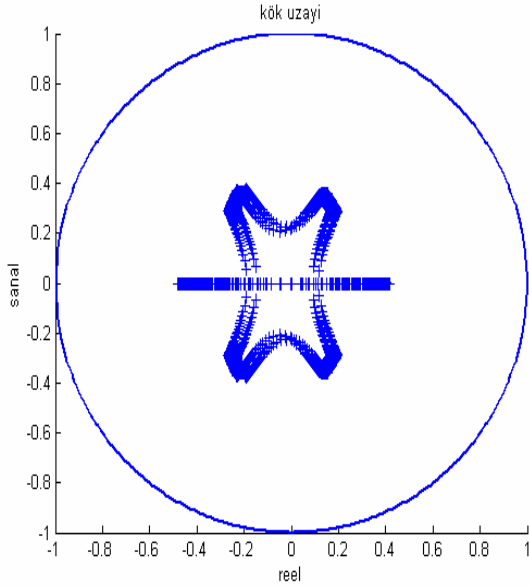
Bu etkin kenarları kullanarak denklem (17) deki interval polinomun değer kümesi elde edilebilir. Örneğin $\omega = 2$ rad/sn için değer kümesi Şekil 5 te görülmektedir. $0 \leq \omega \leq 80$ için değer kümeleri Şekil 6 da görülmektedir. Şekil 6 bize dijital kontrol sisteminin kararlı olduğunu yani karakteristik denklemin bütün köklerinin birim çemberin içerisinde olduğunu ifade etmektedir. Ayrıca, kenar teoremine göre etkin kenarların kök uzayı interval polinomun kök uzayını içine alır. Denklem (17) deki interval polinomun etkin kenarlarının kök uzayı Şekil 7 de verilmiştir. Şekilde de görüleceği gibi kök uzayı birim çemberin içinde kalmaktadır. Dolayısıyla sistem kararlıdır.



Şekil 5: Denlem (17)'deki polinomun $\omega = 2$ rad/sn deki değer kümesi



Şekil 6: Denklem (17)'deki polinomun $0 \leq \omega \leq 80$ için değer kümesi



Şekil 7: Denklem (15)'deki dijital kontrol sistemin karakteristik denkleminin kök uzayı

5. SONUÇLAR

Bu bildiriye parametre belirsizliği içeren dijital kontrol sistemlerin dayanıklı kararlılık analizi incelendi. Kharitonov teoremi dijital interval polinomların kararlılık analizi için geçerli değildir. Kenar teoremini kullanarak bir dijital interval polinomun değer kümesi elde edilebilir. Değer kümesiyle beraber sıfırın dışlanması kuralını kullanarak bir dijital interval polinomun Schur kararlılığının test edilebileceği gösterildi. Matlab ortamında gerekli yazılımlar geliştirilmiş olup bu yazılımlar parametre belirsizliği içeren dijital kontrol sistemlerinin analizi için kullanılacaktır. İleriye yönelik olarak belirsizlik içeren dijital kontrol sistemlerinin frekans cevabı analizi yani Bode, Nyquist ve Nichols diyagramları incelenecektir.

KAYNAKLAR

- [1] Bahattacharyya, S. P., Chapellat, H., Keel, L. H., *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice Hall, 1995.
- [2] Kharitonov, V. L., "Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations", *Differential Equations*, Vol. 14, 1979, 1483-1485.
- [3] Bartlett, A. C., Tesi, A., Vicino, A.: "Frequency Response of Uncertain Systems with Interval Plants", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 38, 1993, 929-933.
- [4] Holot, C. V., Bartlett, A. C., "On the Nyquist Envelope of an Interval Plant Family", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 39, 1994, 391-396.
- [5] Tan, N., Atherton, D. P., "Frequency Response of Uncertain Systems: A 2q-Convex Parpolygonal Approach", *IEE Proc., Control Theory and Application*, Vol. 147, 2000, 547-555.
- [6] Tan, N., "Computation of the Frequency Response of Multilinear Affine Systems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 47, 2002, 1691-1696.
- [7] Tan, N., Atherton, D. P., "Stability and Performance Analysis in an Uncertain World", *Computing and Control Engineering Journal*, Vol. 11, 2000, 91-101.
- [8] Fu, M.: 'Computing the Frequency response of Linear Systems with Parametric Perturbations,' *Syst. Contr. Lett.*, Vol. 15, 1990, 45-52.
- [9] Barmish, B. R., *New Tools for Robustness of Linear Systems*, MacMillan, NY, 1994.
- [10] Djaferis, T. E., *Robust Control Design: A Polynomial Approach*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1995.
- [11] Ackermann, J., *Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters*, Springer-Verlag, 1993.
- [12] Holot, C. V., Bartlett, A. C., "On the Nyquist Envelope of an Interval plant family", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 31, 1986, 355-356.
- [13] Katbab, A., Jury, E. I., "Robust Schur-Stability of Control Systems with Interval Plants", *Int. J. of Control*, Vol. 51, 1990, 1343-1352.
- [14] Katbab, A., Jury, E. I., "Generalization and Comparison of Two Recent Frequency Domain Stability Robustness Results", *Int. J. of Control*, Vol. 53, 1991, 463-475.
- [15] Bartlett, A. C., Holot, C. V., Lin, H., "Root Location of an Entire Polytope of Polynomials: It Suffices to Check the Edges", *Mathematics of Controls, Signals and Systems.*, Vol. 1, 1988, 61-71.

Yasin KARATAŞ: 1979 Sivas Gürün doğumludur. Yüksek öğrenimini 2003 yılında tamamladı. İnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü'nde 2005 yılında yüksek lisans eğitimine başladı. Şu anda yüksek lisans tez aşamasında çalışmalarını sürdürmektedir. Kontrol sistemleri ve uygulanmaları ile ilgilenmektedir.

Nusret TAN: 1971 yılında Malatya Doğanşehir doğumludur. 1994 yılında Hacettepe Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü'nden mezun oldu. 1995 yılında İnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Aynı yıl doktora eğitimi için İngiltere de Sussex Üniversitesine gitti. Doktora eğitimini 2000 yılında tamamlayarak tekrar İnönü Üniversitesine döndü. 2004 yılında doçentlik ünvanını aldı. Genel olarak kontrol sistemlerinin analizi ve tasarımıyla ilgilenmektedir.

ÖZGEÇMİŞ

13 EYLÜL 1979 yılında Sivas'ta doğdum. İlkokulu Osmaniye Atatürk İlkokulu'nda, ortaokulu Osmaniye Anadolu Lisesi orta kısmında okudum. Liseyi İzmir'de Maltepe Askeri Lisesi'nde tamamladım. Müteakiben girdiğim Hava Harp Okulu'nda, Elektronik Mühendisliği bölümünden 2003 yılında mezun oldum. 2005 yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Mühendislik Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği bölümünde yüksek lisans eğitime başladım. Yüksek lisans boyunca Robust Kontrol, İleri Dijital Kontrol Sistemleri, Robot Mühendisliği, Sayısal Sinyal İşaret İşleme, Elektromanyetik Alan Teorisi, İleri Düzey Yarıiletken Elemanlar ve Bilgisayar Destekli Katı Modelleme derslerini aldım.

Yüksek lisans öğrenimi içerisinde sempozyumlarda yayınlanan bildiriler:

4 ncü Otomasyon Sempozyumu, 23 - 25 Mayıs 2007, SAMSUN.