T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HÖLDER UZAYLARINDA BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

DOKTORA TEZİ

İlyas DAL

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ömer Faruk TEMİZER

TEMMUZ 2022

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HÖLDER UZAYLARINDA BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

DOKTORA TEZİ

İlyas DAL
(23613140421)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ömer Faruk TEMİZER

TEMMUZ 2022

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Tezin başından sonuna kadarki süreçte yardımını esirgemeyen başta danışman hocam Prof. Dr. Ömer Faruk TEMİZER olmak üzere, Prof. Dr. Bilal ALTAY, Prof. Dr. Ali ÖZDEŞ ve Doç. Dr. Ümit ÇAKAN'a minnet ve şükranlarımı sunarım.
Yine tez süresince manevi desteğini yanımda hissettiğim kıymetli aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Hölder Uzaylarında Bazı İntegral Denklemlerin Çözülebilirliği " başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

İlyas DAL

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ .... **i**
ONUR SÖZÜ .... **ii**
İÇİNDEKİLER .... **iii**
SEMBOLLER VE KISALTMALAR .... **iv**
ÖZET .... **v**
ABSTRACT .... **vi**
1. GİRİŞ **1**
1.1 İntegral Denklemlerin Önemi ve Sınıflandırılması 1
2. TEMEL KAVRAMLAR **6**
2.1 Süreklilik Modülü İle Türetilen Fonksiyon Uzayı 13
2.2 Hölder Uzayı ve Bazı Özellikleri 19
2.3 $C_\omega(X)$ Uzayında Rölatif Kompaktlık İçin Yeter Koşul 23
3. $H_\alpha[0,1]$ HÖLDER UZAYINDA LİNEER OLMAYAN BİR FREDHOLM KUADRATİK İNTEGRAL DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI **31**
3.1 Ön Hazırlıklar 31
3.2 Temel Sonuç 34
3.3 Örnekler 43
4. $C_\omega[a,b]$ UZAYINDA LİNEER OLMAYAN BİR FREDHOLM KUADRATİK İNTEGRAL DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI **53**
4.1 Ön Hazırlıklar 53
4.2 Temel Sonuç 58
4.3 Örnek 66
KAYNAKLAR **73**
ÖZGEÇMİŞ **76**

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

N	: Doğal sayılar kümesi,
R	: Reel sayılar kümesi,
$\mathbf{R}_+$	: $[0,\infty)$ aralığındaki Reel sayılar kümesi,
C	: Kompleks sayılar kümesi,
maks	: Maksimum,
min	: Minimum,
sup	: Supremum,
inf	: İnfimum,
B(X)	: X üzerinde tanımlı reel değerli sınırlı fonksiyonların uzayı,
C(X)	: X üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı,
C[a,b]	: $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı,
$\boldsymbol{L_p}(X)$	: X kümesinde p. kuvvetten Lebesque anlamında integrallenebilen fonksiyonlar kümesi,
$\mathbf{BC}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$	: $\mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı reel değerli, sınırlı ve sürekli fonksiyonların uzayı,
$\mathbf{diam}X$	: X kümesinin çapı,
$\|\cdot\|$	: Norm fonksiyonu,
B(x,r)	: x merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar,
B[x,r]	: x merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar,
$\boldsymbol{B_r^\theta}$	: θ (sıfır) merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,
$\overline{\mathbf{A}}$	: A kümesinin kapanışı,
$\boldsymbol{H_\alpha}[a,b]$	: α üslü Hölder uzayı,
$\boldsymbol{C_\omega}[a,b]$	: ω süreklilik modülünün türettiği $[a,b]$ de tanımlı fonksiyonların uzayı,

ÖZET

Doktora Tezi

HÖLDER UZAYLARINDA BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

İLYAS DAL

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

76+vi sayfa

2022

Danışman: Prof. Dr. Ömer Faruk TEMİZER

Dört bölümden oluşan bu tezin ilk bölümünde, integral denklemlerin tarihsel gelişimi ve kullanım alanları hakkında genel bilgiler ve bu denklemlere ilişkin bazı tanımlar verilerek, tez çalışmasının literatürdeki yeri ve önemi vurgulanmıştır.

Tezin ikinci bölümünde, ileriki bölümlerde ele alacağımız (3.0.1) ve (4.0.1) denklemleriyle ilgili olan α üslü $H_\alpha[a,b]$ Hölder uzayı ve ω süreklilik modülünün doğurduğu $C_\omega[a,b]$ uzayları ile ilgili tanımlar ve bu uzaylarla ilgili bazı özellikler verildi. Diğer bölümlerin anlaşılmasını sağlayacak bazı temel tanımlar ve teoremler verildi. Ayrıca bazı teoremler ispatlarıyla verildi.

Çalışmanın orijinal kısmını üçüncü ve dördüncü bölüm oluşturmaktadır.

Tezin üçüncü bölümünde, son zamanlarda yapılan çalışmalar ve ilerlemeler araştırılarak; Hölder uzaylarında önceden çalışılan (1.1.15)-(1.1.17) denklemlerinden daha genel olan (3.0.1) Fredholm tipi kuadratik integral denkleminin çözümü için bir varlık teoremi verilmiş ve bu teoremin uygulanabilirliği ile ilgili iki örnek sunulmuştur.

Tezin dördüncü bölümünde ise tezin üçüncü bölümünde ele aldığımız denklemin kısmen daha geneli olan (4.0.1) Fredholm tipi kuadratik integral denkleminin çözümü, tezin üçüncü bölümündeki α üslü $H_\alpha[0,1]$ Hölder uzayından farklı olarak ω süreklilik modülünün doğurduğu $C_\omega[a,b]$ uzayında araştırıldı ve bir varlık teoremi elde edildi. Bu sonuca varabilmek için $C_\omega[a,b]$ uzayında rölatif kompaktlık ve Schauder sabit nokta teoreminden yararlanıldı. Akabinde bu teoremin uygulanabilirliği ile ilgili bir örnek sunuldu.

Anahtar Kelimeler: İntegral denklemler, Hölder uzayı, Schauder sabit nokta teoremi, Rölatif kompaktlık.

ABSTRACT

Phd. Thesis

SOLVABILITY OF SOME INTEGRAL EQUATIONS IN HÖLDER SPACES

İlyas DAL

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

76+vi pages

2022

Supervisor: Prof. Dr. Ömer Faruk TEMİZER

In the first part of this thesis, which consists of four chapters, general information about the historical development and usage areas of integral equations and some definitions about these equations were given, and the place and importance of the thesis study in the literature was emphasized.

In the second part of the thesis, some definitions and some properties were given about both the $H_\alpha[a,b]$ Hölder space and the $C_\omega[a,b]$ spaces formed by the modulus of continuity ω, which are related to the (3.0.1) and (4.0.1) equations. Some basic definitions and theorems were given to help understand the other chapters. In addition, some theorems were given with their proofs.

The third and fourth chapters constitute the original part of the study.

In the third part of the thesis, by researching the recent studies and developments; An existence theorem was given for the solution of the (3.0.1) Fredholm type quadratic integral equation, which is more general than the previously studied (1.1.15)-(1.1.17) equations in the Hölder spaces, and two examples of the applicability of this theorem was presented.

In the fourth part of the thesis, the solution of the (4.0.1) Fredholm type quadratic integral equation, which is partly more general of the equation we discussed in the third part of the thesis, was investigated in $C_\omega[a,b]$ space, which is different from the $H_\alpha[a,b]$ Hölder space in the third part of the thesis, and an existence theorem was obtained. Relative compactness in $C_\omega[a,b]$ space and Schauder fixed point theorem were used to reach this conclusion. Afterwards, an example of the applicability of this theorem was presented.

Keywords: Integral equations, Hölder space, Schauder's fixed point theorem, Relative compactness.

1. GİRİŞ

Bu bölümde, integral denklemlerin tarihsel gelişimi, önemi ve uygulama alanlarına yer verilerek, integral denklemlerin çeşitleri ile tez çalışmamızın literatürdeki diğer çalışmalarla ilgisi ve farklılığına değineceğiz.

1.1 İntegral Denklemlerin Önemi ve Sınıflandırılması

İntegral denklemlerle ilgili ilk inceleme ve araştırmalara 19. yüzyılın başlarında başlanmıştır. İlk başlarda gelişigüzel ve seyrek araştırmalar yapılmış. Ancak 19. yüzyılın sonlarında daha sistemli ve uygulanabilir araştırmaların başlandığı anlaşılmaktadır. İlk olarak bir integral denkleme Abel'in 1823 yılında rastlamış olduğu bilinmektedir. Ancak integral denklem ismini 1888 yılında bir çalışmasında ilk kez De Bois Reymond kullanmıştır [7].

İntegral denklemler yaşadığımız dünyanın bazı problemlerine çözüm üretmek için doğal olarak ortaya çıkmış ve gelişmiştir. Lineer olmayan integral denklemler daha çok tıp, ekonomi, mekanikte birçok çok problemin modellenmesinde kullanılır [30], [3], [1], [19], [39], [31]. Kuadratik integral denklemler birçok gerçek dünya poblemlerinin modellenmesinde ve çözümlenmesinde kullanılmaktadır. Örneğin radyasyon transfer teorisinde, gazların kinetik teorisinde, nötron transferi teorisinde yaygın olarak kullanılmaktadır [11], [12], [21], [25].

Tanım 1.1.1. *İntegral işareti altında bilinmeyen bir fonksiyonu içeren denkleme* ***integral denklem*** *denir [20]. Örneğin; β, g ve K verilen fonksiyonlar, λ verilen bir parametre ve x bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere;*

$$g(u) = \lambda \int_a^b K(u,t)x(t)dt, \tag{1.1.1}$$

$$x(u) = g(u) + \lambda \int_a^b K(u,t)x(t)dt, \tag{1.1.2}$$

$$\beta(u)x(u) = g(u) + \lambda \int_a^b K(u,t)x(t)dt, \tag{1.1.3}$$

$$g(u) = \lambda \int_a^u K(u,t)x(t)dt, \tag{1.1.4}$$

$$x(u) = g(u) + \lambda \int_a^u K(u,t)x(t)dt, \tag{1.1.5}$$

$$\beta(u)x(u) = g(u) + \lambda \int_a^u K(u,t)x(t)dt, \tag{1.1.6}$$

$$x(u) = g(u) + \lambda \int_0^\infty K(u-t)x(t)dt \tag{1.1.7}$$

$$x(u) = \int_0^u \frac{x(t)}{(u-t)^\alpha} dt, \ (0 < \alpha < 1) \tag{1.1.8}$$

integral denklem örnekleridir. Bu integral denklemlerdeki K fonksiyonuna **çekirdek** adı verilir [20].

Tanım 1.1.2. *Bilinmeyen fonksiyon bir integral denklemde sadece lineer formdaysa denkleme **lineer integral denklem** şayet bilinmeyen fonksiyon lineer değilse denkleme **lineer olmayan integral denklem** denir [20].*

Buna göre, (1.1.1)−(1.1.8) lineer integral denklemlerdir. x bilinmeyen fonksiyon g, v ve K bilinen fonksiyonlar olmak üzere;

$$x(u) = g(u) + \lambda \int_0^u K(u,t) x^n(t) dt, \ (n \neq 1), \tag{1.1.9}$$

$$x(u) = g(u) + \lambda \int_0^u \tan(x(t))\, dt \tag{1.1.10}$$

$$x(u) = g(u) + \lambda \int_0^u v(u,t,x(t)) dt \tag{1.1.11}$$

denklemleri lineer olmayan integral denklem tiplerine örnektir [36].

Tanım 1.1.3. *Bir integral denklemin sınırlarında değişken yoksa buna **Fredholm tipi integral denklem** adı verilir. İntegral sınırlarından en az biri değişkense denkleme **Volterra integral denklemi** denir [37].*

Bu tanımdan, yukarıdaki (1.1.1)-(1.1.11) denklemlerinden, (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) ve (1.1.7) Fredholm tipi, diğerleri ise Volterra integral denklemleridir.

Tanım 1.1.4. *Bir integral denklemde integralin dışında, bilinmeyen fonksiyon haricinde herhangi bir fonksiyon yoksa denkleme **homojen integral denklem,** bunun dışındakilere **homojen olmayan integral denklem** denir [37].*

Yukarıdaki (1.1.1)-(1.1.11) integral denklemlerinden sadece (1.1.8) homojen integral denklemdir.

Tanım 1.1.5. *İntegral denklemlerde bilinmeyen fonksiyon; yanlızca integral işaretinin içinde yer alıyorsa integral denkleme **I. çeşit integral denklem**, integral işaretinin içinde ve dışında yer alıyorsa integral denkleme **II. çeşit integral denklem**, integralin dışındaki bilinmeyen fonksiyon başka bir fonksiyonla çarpım şeklindeyse integral denkleme **III. çeşit integral denklem** denir [37].*

Tanımlara göre, yukarıdaki integral denklemlerinden, (1.1.1) ve (1.1.4) I. çeşit integral denklem, diğerleri II. çeşit integral denklemlere örnektir. Bunlardan (1.1.3) ve (1.1.6) III. çeşit integral denklemlere örnektir.

Tanım 1.1.6. *Bir integral denklemde denklemin çekirdeği olan K tanım bölgesindeki bir noktada sınırlı değil veya integral sınırlarından en az biri sonsuz ise denkleme* ***singüler (tekil) integral denklem*** *denir [20].*

Bu tanıma göre, (1.1.7) ve (1.1.8) singüler integral denklem, diğerleri de singüler olmayan integral denklemlerdir.

Volterra integral denklemleriyle alakalı ilk çalışmalar İtalyan matematikçi Vito Volterra (1860-1940) tarafından yapılmıştır. Daha sonra bu denklemlerin bazı fiziksel problemlerle ilgili olduğu farkedilmiştir [37].

Bir salgın hastalığın değişimini, zaman ve uzayla ilgili, parabolik sınır değer problemleri gibi çeşitli biyolojik, fiziksel ve matematiksel modellemelerde kullanılan **Volterra ve Fredholm integral denklemlerinden,** günümüzde

$$u(x) = g(x,u(x)) \int_0^x v(x,t,u(t))dt,$$

$$u(x) = (Tu)(x) \int_0^x v(x,t,u(t))dt,$$

$$u(x) = a(x) + u(x) \int_0^x v(x,t,u(t))dt$$

ve

$$u(x) = a(x) + (Tu)(x) \int_0^x g(\phi(x,s))\varphi(u(t))dt$$

gibi incelenmiş tipleri vardır [23].

Mouffak Benchohra ve Mohamed Abdalla Darwish (2007),

$$x(t) = f(t) + (Ax)(t) \int_0^t u(t,s,x(s),x(\alpha s))ds, \quad t \in [0,\infty) \qquad (1.1.12)$$

tipindeki modifiye edilmiş kuadratik integral denklemin, Frechet uzayındaki çözümünün varlığı için yeter şartlar araştırmışlardır [6].

J. Caballero, B. Lopez ve K. Sadarangani (2007), Cauchy poblemiyle bağlantılı $C[0,1]$ uzayında,

$$x(t) = a(t) + (Tx)(t) \int_0^{\sigma(t)} u(t,s,x(s),x(\lambda s))ds, \quad \lambda \in (0,1) \qquad (1.1.13)$$

integral denkleminin en az bir çözümü veren yeter şartları vermişlerdir [9].

A. M. A. EL-Sayed, H. H. G. Hashem (2009),

$$x(t) = a(t) + g(t, x(t)) \int_0^t k(t,s) f(s, x(s)) ds, \quad t \in [0,1] \tag{1.1.14}$$

kuadratik integral denkleminin Caratheodory koşulu altında en az bir $x \in L_1$ çözümünün var olduğunu göstermişler [32].

Jozef Banaś ve Rafal Nalepa (2013),

$$x(t) = p(t) + x(t) \int_a^b k(t,\tau) x(\tau) d\tau, \quad t \in [a,b] \tag{1.1.15}$$

Fredholm tipi kuadratik integral denklemini $H_\alpha[a,b]$ Hölder uzayında incelemişler ve en az bir çözümü veren yeter şartları vermişlerdir [2].

J. Caballero Mena, R. Nalepa ve K. Sadarangani (2014),

$$x(t) = p(t) + x(t) \int_0^1 k(t,\tau) \{ \max_{\eta \in [0, r(\tau)]} |x(\eta)| \} d\tau, \quad t \in [0,1] \tag{1.1.16}$$

Fredholm tipi kuadratik integral denklemini $H_\alpha[0,1]$ Hölder uzayında incelemişler ve en az bir çözümü veren yeter şartları elde etmişlerdir [10].

J. Caballero, M. Abdalla Darwish ve K. Sadarangani (2014),

$$x(t) = p(t) + x(t) \int_0^1 k(t,\tau)\, x(q(\tau)) d\tau, \quad t \in [0,1] \tag{1.1.17}$$

Fredholm tipi kuadratik integral denklemini $H_\alpha[0,1]$ Hölder uzayında incelemişler ve en az bir çözümü veren yeter şartları bulmuşlardır [8].

Tezin ikinci bölümünde, ele alacağımız (3.0.1) ve (4.0.1) denklemleriyle ilgili olan α üslü $H_\alpha[a,b]$ Hölder uzayı ve ω süreklilik dualinin doğurduğu $C_\omega[a,b]$ uzayları ile ilgili tanımlar ve bazı özellikler verildi.

Tezin üçüncü bölümünde, son zamanlarda yapılan çalışmalar ve ilerlemeler araştırılarak; daha önceden çalışılmış uzaylardan farklı olarak $H_\alpha[0,1]$ Hölder uzaylarında bir denklem ele alınmış, Hölder uzayında çalışılan (1.1.15)-(1.1.17) denklemlerinden daha genel olan

$$x(t) = q(t) + (Tx)(t) \int_0^1 z(t,\tau)\, x(p(\tau)) d\tau, \; t \in I = [0,1]$$

Fredholm tipi kuadratik integral denklemin α üslü $H_\alpha[0,1]$ Hölder uzayında çözümü için bir varlık teoremi verilmiş ve bu teoremin uygulanabilirliği ile ilgili iki örnek sunulmuştur.

Tezin dördüncü bölümünde ise tezin üçüncü bölümünde ele aldığımız denklemin kısmen daha geneli olan

$$x(t) = p(t) + (Rx)(t) \int_a^b k(t,\tau)\, x(q(\tau))d\tau, \;\; t \in I = [a,b]$$

Fredholm tipi kuadratik integral denklemin çözümü $H_\alpha [a,b]$ Hölder uzayından farklı olarak $C_\omega [a,b]$ uzayında araştırıldı ve bir varlık teoremi elde edildi. Akabinde bu teoremin uygulanabilirliği ile ilgili bir örnek sunuldu.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, üçüncü ve dördüncü bölümlerin kolay anlaşılmasını sağlamak için temel tanımlar ve teoremler verilecektir. Söz konusu bu bölümlerdeki teoremlerin ispatında kullanacağımız gerekli teoremler ile integral denklemin çözümünün araştırılacağı $H_\alpha[a,b]$ Hölder uzayı ve ω süreklilik modülü ile türetilmiş $C_\omega[a,b]$ fonksiyon uzayının özellikleri sunulacaktır.

Tanım 2.0.1. *X boştan farklı bir küme olmak üzere;*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu, her $a,b,c \in X$ için,

(M$_1$) $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$,

(M$_2$) $d(a,b) = d(b,a)$,

(M$_3$) $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$

koşullarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X kümesinde bir ***metrik*** *ve (X,d) ikilisine de* ***metrik uzay*** *denir [5].*

Örnek 2.0.1. *$[a,b] \subset \mathbb{R}$ ve $C[a,b] = \{f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ sürekli}\}$ olmak üzere, $d(f,g) = \text{maks}\{|f(t) - g(t)| : t \in [a,b]\}$ ise d fonksiyonu $C[a,b]$ uzayında bir metriktir [4].*

Örnek 2.0.2. *$B(\mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ve } f,\ \mathbb{R} \text{ üzerinde sınırlı fonksiyon}\}$ uzayında tanımlanan, $d(f,g) = \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in \mathbb{R}\}$ fonksiyonu $B(\mathbb{R})$ de bir metriktir [5].*

Tanım 2.0.2. *d fonksiyonu X kümesi üzerinde bir metrik, $r \in \mathbb{R}^+$ ve $x_0 \in X$ olmak üzere;*

$$B(x_0,r) = \{x \in X : d(x_0,x) < r\},$$

$$B[x_0,r] = \{x \in X : d(x_0,x) \leq r\},$$

$$S(x_0,r) = \{x \in X : d(x_0,x) = r\}$$

şeklindeki kümelere sırasıyla, x_0 merkezli r yarıçaplı ***açık yuvar,*** *x_0 merkezli r yarıçaplı* ***kapalı yuvar*** *ve x_0 merkezli r yarıçaplı* ***yuvar yüzeyi*** *denir [4].*

Tanım 2.0.3. *(X,d) bir metrik uzay ve $x_0 \in A \subseteq X$ olsun. $B(x_0,r) \subseteq A$ olacak şekilde bir $r > 0$ reel sayısı varsa A kümesine x_0 elemanının bir* ***komşuluğu*** *adı verilir. Bir küme tüm elemanlarının bir komşuluğundaysa bu kümeye* ***açık küme****, tümleyeni açık olan kümeye de* ***kapalı küme*** *denir [24], [16].*

Tanım 2.0.4. *(X,d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $A \subseteq X$ olmak üzere, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $(B(x_0,\varepsilon)\setminus\{x_0\})\cap A$ kümesi boş kümeden farklı ise x_0 elemanına A kümesinin bir* ***yığılma noktası*** *adı verilir. A kümesinin tüm yığılma noktalarının oluşturduğu küme A' ile gösterilir [34], [16].*

Tanım 2.0.5. *(X,d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesi ve A kümesinin yığılma noktalarının oluşturduğu kümenin birleşimine A' nın* ***kapanışı*** *denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir [34], [16]. Bu tanımdan $\overline{A} = A \cup A'$ yazılabilir.*

Tanım 2.0.6. *A kümesi X kümesinin boş olmayan bir alt kümesi ve (X,d) bir metrik uzay olmak üzere, $d(A) = \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}$ değerine A kümesinin* ***çapı*** *denir [24], [16].*

Tanım 2.0.7. *A kümesi X kümesinin boş olmayan bir alt kümesi ve (X,d) bir metrik uzay olmak üzere, her x, $y \in A$ için $d(x,y) \leq M$ olmasını sağlayan bir $M \geq 0$ sayısı varsa A* ***kümesine sınırlıdır*** *denir [22].*

Tanım 2.0.8. *(X,d) bir metrik uzay ve $f : A \to X$ fonksiyon olmak üzere, fonsiyonun $f(A)$ görüntü kümesi X' de sınırlıysa f* ***fonksiyonuna sınırlıdır*** *denir [35].*

Tanım 2.0.9. *(X,d) ve (Y,ρ) birer metrik uzay olmak üzere, $f : A \subseteq X \to Y$ fonksiyonu ile $x_0 \in A$ verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $d(x,x_0) < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in A$ için $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(x_0,\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, f fonksiyonu x_0* ***noktasında süreklidir*** *denir. f fonksiyonu A kümesindeki her noktada sürekli ise f fonksiyonu A* ***üzerinde süreklidir*** *ya da kısaca A* ***da süreklidir*** *denir. Eğer bu tanımda δ sayısı, $x_0 \in A$ noktalarına bağlı olmadan sadece ε' a bağlı olarak bulunabiliyorsa f fonksiyonu A* ***üzerinde düzgün süreklidir*** *denir [34], [16].*

Tanım 2.0.10. *(X,d) ve (Y,ρ) metrik uzaylar olmak üzere, fonksiyonların bir sınıfı $\mathscr{F} = \{f \mid f : X \to Y \text{ } f \text{ bir fonksiyon } \}$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $d(x,y) < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x,y \in X$ ve her $f \in \mathscr{F}$ için $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $\mathscr{F}$* ***sınıfına eşsüreklidir*** *denir [17].*

Tanım 2.0.11. *(f_n), X kümesinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi ve f de X kümesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için (sadece bu ε' na bağlı) bir N pozitif tam sayısı vardır öyle ki $\forall n > N$ ve $\forall x \in X$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa bu takdirde (f_n)* ***fonksiyon dizisi*** *f* ***fonksiyonuna*** *X üzerinde* ***düzgün yakınsaktır*** *denir [22].*

Teorem 2.0.1. *Bir (f_n) fonksiyon dizisi, f fonksiyonuna bir M metrik uzayı üzerinde düzgün yakınsak olsun. Eğer M' deki bir a noktasında her bir f_n* ***sürekli ise bu takdirde*** *f* ***de*** *a* ***noktasında süreklidir*** *[22].*

Sonuç 2.0.1. *(f_n), bir M metrik uzayı üzerinde, sürekli olan fonksiyonların bir dizisi olsun. (f_n) sürekli fonksiyonların dizisi, f fonksiyonuna M üzerinde düzgün yakınsak ise f* ***fonksiyonu*** *M* ***de süreklidir*** *[22].*

Tanım 2.0.12. *Her n pozitif tam sayısı ve her $x \in X$ için $|f_n(x)| < S$ olacak şekilde bir S pozitif sayısı varsa bu takdirde (f_n) fonksiyon dizisine, X* ***üzerinde düzgün sınırlı (eşsınırlı) bir dizidir*** *denir [22].*

Tanım 2.0.13 (Metrik uzaylarda bir dizinin yakınsaklığı). *(X,d) bir metrik uzay, $(x_n) \subset X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı için $n > n_0$ iken $d(x_n,x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyor veya buna denk olarak*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$$

ise (x_n) dizisine (X,d) metrik uzayında bir ***yakınsak dizi*** *ve x elemanına da* ***bu dizinin limiti*** *denir [4].*

Tanım 2.0.14. *(X,d) bir metrik uzay ve $(x_n) \subset X$ bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $m,n > n_0$ olan her $m,n \in \mathbb{N}$ için $d(x_m,x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine* ***Cauchy dizisi*** *denir. X metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsaksa X' e* ***tam metrik uzay*** *denir [4].*

Tanım 2.0.15. *(X,d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ ve I herhangi bir indis kümesi olmak üzere, X' in alt kümelerinin $A \subseteq \cup_{i\in I} G_i$ şartını sağlayan $\mathscr{G} = \{G_i : i \in I\}$ ailesi varsa bu $\mathscr{G}$ ailesine A için bir* ***örtüdür*** *denir. $\mathscr{G}$ ailesinin her bir öğesi açık küme ise $\mathscr{G}$' ye* ***açık örtü,*** *$\mathscr{G}$ ailesi sonlu ise* ***sonlu örtü,*** *$\mathscr{G}$ ailesinin öğeleri sayılabilir ise* ***sayılabilir örtü*** *denir. Eğer bir $J \subseteq I$ için $A \subseteq \cup_{i\in J} G_i$ ise $\{G_i : i \in J\}$ ailesine $\mathscr{G}$ örtüsünün bir* ***alt örtüsü*** *denir [34], [16].*

Örnek 2.0.3. *$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesini alışılmış metrik ile düşünelim. Bu durumda; $\mathscr{G} = \{(-n,n) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi $\mathbb{R}$ için bir açık örtü ve $\{(-k,k) : k = 2n \text{ ve } n \in \mathbb{N}\}$ ailesi de $\mathscr{G}$' nin bir alt örtüsüdür [16].*

Tanım 2.0.16. *(X,d) bir metrik uzay ve $K \subseteq X$ olmak üzere, K' nın her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahip ise K kümesine* ***kompakttır*** *denir. Özel olarak X kompakt ise (X,d)' ye* ***kompakt metrik uzay*** *denir [34], [16].*

Tanım 2.0.17. *(X,d) bir metrik uzay ve $K \subseteq X$ olmak üzere, K kümesinden alınan her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa K kümesine* ***dizisel kompakttır*** *denir [34].*

Tanım 2.0.18. *(X,d) bir metrik uzay ve $K \subseteq X$ olmak üzere, K kümesinin her sayılabilir açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa K kümesine* ***sayılabilir kompakttır*** *denir [34].*

Önerme 2.0.1. *Metrik uzaylarda kompaktlık, dizisel kompaktlık ve sayılabilir kompaktlık kavramları birbirine denktir [34].*

Teorem 2.0.2. *$K \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin kompakt olması için$\Leftrightarrow$ kapalı ve sınırlı olmasıdır [18].*

Teorem 2.0.3. *$K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt bir küme olmak üzere; $f : K \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekliyse bu fonksiyon K üzerinde düzgün süreklidir [16], [28].*

Tanım 2.0.19. *(X,d) bir metrik uzay ve $K \subseteq X$ olmak üzere, K' nın kapanışı yani $\overline{K}$ kümesi kompakt ise K' ya* ***rölatif kompakt (ön kompakt)*** *küme denir [16], [29].*

Teorem 2.0.4. *Bir (X,d) metrik uzayı ile boş olmayan bir alt kümesi $Y \subset X$ verilsin.*

(i) $x \in \overline{Y} \Leftrightarrow Y$ içinde $(x_n) \to x$ olacak biçimde bir (x_n) dizisinin var olmasıdır.

(ii) Y kümesinin kapalı olması için$\Leftrightarrow$ $(x_n) \subset Y$ ve $(x_n) \to x$ iken $x \in Y$ olmasıdır [33].

Tanım 2.0.20 (Vektör uzayı). *A boş olmayan bir küme ve $\mathbb{K}$, reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Adına sırasıyla vektör toplamı ve skalerle çarpma işlemi diyeceğimiz*

$$+ : A \times A \to A$$
$$+(a,b) = a+b,$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times A \to A$$
$$\cdot(\lambda,b) = \lambda \cdot b$$

işlemleri aşağıdaki şartları sağlıyorsa A kümesine $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir ***vektör uzayı (lineer uzay)*** *denir.*

(a) *A, $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur.*

(b) *$a,b \in A$ ve $\lambda,\beta \in \mathbb{K}$ olmak üzere;*

(1) $\lambda a \in A$

(2) $(\lambda+\beta)a = \lambda a + \beta a,$

(3) $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$,

(4) $(\lambda\beta)a = \lambda(\beta a)$,

(5) $1a = a$.

Ayrıca $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ *ise A reel (kompleks) vektör uzay adını alır [4].*

Örnek 2.0.4. *Aşağıdaki fonksiyon kümelerinin her biri* $(u+v)(t) = u(t)+v(t)$ *ve* $(\lambda u)(t) = \lambda u(t)$, $(\lambda \in \mathbb{R})$ *işlemleriyle birlikte birer reel vektör uzayıdır [4].*

$$B(S) = \{u|\ u : S \to \mathbb{R} \text{ sınırlı}\},$$

$$C[a,b] = \{u|\ u : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ sürekli}\},$$

$$C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) = \{u|\ u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ sürekli}\},$$

$$BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) = \{u|\ u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ sınırlı ve sürekli}\},$$

$$L_p[a,b] = \left\{u|\ u : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ Lebesque ölçülebilir ve } \int_a^b |u(t)|^p\, dt < \infty\right\}.$$

Tanım 2.0.21 (Normlu uzay). *X, reel veya kompleks* $\mathbb{K}$ *cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer her* $x,y \in X$ *ve* $a \in \mathbb{K}$ *için*

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{K}$$

fonksiyonu aşağıda verilen $(N1)-(N4)$ *koşullarını sağlarsa,* $\|\cdot\|$ *fonksiyonuna X ' de bir* ***norm*** *ve* $(X,\|\cdot\|)$ *çiftine ise* ***normlu uzay*** *denir [26].*

(N1) $\|x\| \geq 0$,

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ *(Burada* θ*, X deki + işleminin birim elemanıdır),*

(N3) $\|ax\| = |a|\|x\|$,

(N4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Örnek 2.0.5. $C[a,b]$, $H_\alpha[a,b]$ *Hölder (Bak. Tanım 2.2.1) ve* ω *süreklilik modülünün doğurduğu* $C_\omega[a,b]$ *(Bak. Tanım 2.1.2) uzayları sırasıyla*

$$\|x\| = \underset{s\in[a,b]}{maks}|x(s)|$$

$$\|x\|_\alpha = |x(a)| + \sup\left\{\frac{|x(t)-x(s)|}{|t-s|^\alpha} : t,s \in [a,b], t \neq s \text{ ve } 0 < \alpha \leq 1\right\}$$

$$\|x\|_\omega = |x(a)| + \sup\left\{\frac{|x(t)-x(s)|}{\omega(d(t,s))} : t,s \in [a,b], t \neq s\right\}$$

normları ile beraber birer normlu uzaydır [2], [15].

Tanım 2.0.22. *X bir vektör uzayı ve $K \subseteq X$ olsun. Her $x,\ y \in K$ olmak üzere, $\lambda + \eta = 1$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için $\lambda x + \eta y \in K$ oluyorsa K' ya* ***konveks küme*** *denir [15], [16].*

Tanım 2.0.23. *$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun.*

$$d : XxX \to \mathbb{R},\ d(x,y) = \|x - y\|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. Bu metriğe ***normun belirlediği (indirgediği)*** *metrik veya kısaca* ***norm metriği*** *denir [4].*

Teorem 2.0.5. *Bir S normlu uzayı sonlu boyutlu ve $K \subset S$ olsun. K alt kümesinin kompakt olması için $\Leftrightarrow$ K' nın kapalı ve sınırlı olmasıdır [4].*

Teorem 2.0.6. *Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayının sonlu boyutlu olması için $\Leftrightarrow$*

$$\overline{B}(\theta, 1) = \{x : x \in X \text{ ve } \|x\| \leq 1\ \}$$

kapalı birim yuvarının kompakt olmasıdır [33].

Tanım 2.0.24. *$(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve $S \subset X$ olsun. Her $x \in S$ için $\|x\| \leq k$ olacak şekilde bir $k \geq 0$ sayısı varsa S* ***kümesine sınırlıdır*** *denir [13].*

Tanım 2.0.25. *$(A, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay olsun. Bu uzaydan alınan her (a_n) Cauchy dizisi yakınsak oluyorsa A normlu uzayına* ***Banach uzayı (tam normlu uzay)*** *denir [29].*

Tanım 2.0.26. *$\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ bir X vektör uzayı üzerinde iki norm olsun. Her $x \in X$ için*

$$m\|.\|_1 \leq \|.\|_2 \leq n\|.\|_1$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde m ve n pozitif sayıları varsa $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normlarına ***denk normlar*** *denir [33].*

Önerme 2.0.2. *Sonlu boyutlu bir X vektör uzayı üzerinde tüm normlar birbirine denktir [33].*

Tanım 2.0.27. *Bir normlu uzayın Banach uzayı olmasını sağlayan norma* ***Banach normu*** *denir.*

Sonuç 2.0.2. *$\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$' nin bir X vektör uzayı üzerinde iki Banach normu olduğunu ve $(X, \|.\|_1)$ uzayından $(X, \|.\|_2)$ uzayına özdeşlik fonksiyonunun sürekli olduğunu varsayalım. O zaman bu iki norm denktir [27].*

Tanım 2.0.28. *$C[a,b]$ deki bir (x_n) fonksiyon dizisi* ***eşsüreklidir*** *denir $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için (sadece bu ε' na bağlı) bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki her x_n ve her $s_1, s_2 \in [a,b]$ için $|s_1 - s_2| < \delta$ iken $|x_n(s_1) - x_n(s_2)| < \varepsilon$ oluyordur [24].*

Teorem 2.0.7 (Ascoli Teoremi). *$C[a,b]$ deki sınırlı, eşsürekli bir (x_n) fonksiyon dizisi $C[a,b]$ deki norma göre yakınsak bir alt diziye sahiptir [24].*

Tanım 2.0.29. *Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı ve $Y \subset X$ alt kümesi verilsin. X normlu uzayındaki normun $\|\cdot\|_Y = \|\cdot\|_{\rfloor Y}$ kısıtlaması Y üzerinde bir normdur. Buna Y üzerine* ***indirgenmiş norm*** *ve $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ikilisine de X normlu uzayın bir* ***alt uzayı*** *denir. Eğer Y kapalı ise $(Y, \|\cdot\|_Y)$ alt uzayına* ***kapalı alt uzay*** *adı verilir. Bir X normlu uzayın her alt uzayı da normlu bir uzaydır [33].*

Teorem 2.0.8. *Bir X Banach uzayının Y alt uzayının Banach uzayı olması için $\Leftrightarrow$ Y kümesinin X içinde kapalı olmasıdır [24].*

Teorem 2.0.9 (Schauder sabit nokta teoremi). *$(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayınında L kümesi X' in boş olmayan, konveks ve kompakt bir alt kümesi olmak üzere; $T : L \to L$ sürekli bir dönüşüm ise T dönüşümü L' de en az bir noktayı sabit bırakır [38].*

Örnek 2.0.6. *$C[a,b]$, $H_\alpha[a,b]$ Hölder (Bak. Tanım 2.2.1) ve ω süreklilik modülünün doğurduğu $C_\omega[a,b]$ (Bak. Tanım 2.1.2) uzayları sırasıyla*

$$\|x\| = \underset{s\in[a,b]}{maks} |x(s)|$$

$$\|x\|_\alpha = |x(a)| + \sup\left\{ \frac{|x(t)-x(s)|}{|t-s|^\alpha} : t,s \in [a,b], t \neq s \text{ ve } 0 < \alpha \leq 1 \right\}$$

$$\|x\|_\omega = |x(a)| + \sup\left\{ \frac{|x(t)-x(s)|}{\omega(d(t,s))} : t,s \in [a,b], t \neq s \right\}$$

normları ile birlikte birer Banach uzayıdır [2], [15].

Tanım 2.0.30. *Bir $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Her $u,v \in \mathbb{R}_+$ için $f(u+v) \leq f(u) + f(v)$ şartı sağlanırsa f' ye* ***alt toplamsaldır*** *denir [8].*

Lemma 2.0.1. *Eğer $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu alt toplamsal ve $v \leq u$ ise $f(u) - f(v) \leq f(u-v)$ dır [8].*

Uyarı 2.0.1. *Eğer $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu alt toplamsal ise Lemma 2.0.1' den her $u,v \in \mathbb{R}_+$ için $|f(u) - f(v)| \leq f(|u-v|)$ dır [8].*

Lemma 2.0.2. *$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ bir konkav fonksiyon ve f orjinde sıfır değerini alsın. O zaman f alt toplamsaldır [8].*

Tanım 2.0.31. *X ve Y bir K cismi uzerinde vektör uzaylarıyken $D(T)$ ise X' in alt vektör uzayı olsun. $D(T)$' den Y' ye giden bir fonksiyona* ***bir operatör (dönüşüm)*** *denir. Bu operatör*

*$T : D(T) \to Y$ ile gösterilir. Ayrıca $D(T)$' ye T' nin **tanım bölgesi** ve Y' nin alt vektör uzayı olan $R(T) = \{T(u) : u \in D(T)\}$ kümesine de **görüntü bölgesi** adı verilir. Buna göre $T : D(T) \to R(T)$ operatörü de örten olur [15].*

Tanım 2.0.32. *U ve V normlu uzaylar, $F : U \to V$ operatör ve $u_0 \in D(F)$ olsun. Aşağıda verilen koşullardan biri sağlandığında, F **operatörü (dönüşümü)** $u_0 \in D(F)$ **noktasında süreklidir** denir [29].*

(a) *Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı alındığında, $\|u - u_0\| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall u \in D(F)$ için $\|F(u) - F(u_0)\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε ve u_0 bağlı bir $\delta > 0$ sayısı vardır.*

(b) *$n \to \infty$ iken $(u_n) \to u_0$ olan her $(u_n) \subset D(F)$ dizisi için $n \to \infty$ iken $(F(u_n)) \to F(u_0)$ dır.*

*Eğer F operatörü her $u \in D(F)$ için sürekliyse F, $D(F)$ de **süreklidir** denir.*

Tanım 2.0.33. *U ve V normlu uzaylar, $F : U \to V$ operatör olmak üzere; $\forall \varepsilon > 0$ sayısı alındığında, $\|u - v\| < \delta$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde $\forall u, v \in U$ için $\|Tu - Tv\| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan sadece ε' na bağlı $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa F **operatörüne U üzerinde düzgün süreklidir** denir [14].*

Tanım 2.0.34. *U ve V normlu uzaylar, $F : U \to V$ operatör olmak üzere; $\forall u \in D(F)$ için $\|Fu\| \leq c\|u\|$ eşitsizliğini sağlayan sabit bir $c > 0$ sayısı bulunabilirse T **operatörüne** $D(F)$ **üzerinde sınırlıdır** denir [29].*

2.1 Süreklilik Modülü İle Türetilen Fonksiyon Uzayı

Bu kısımda ω süreklilik modülü ile türetilen $C_\omega[a,b]$ fonksiyon uzayının tanımı ve özellikleri ile ilgili bilgiler vereceğiz. Daha sonra özel bir süreklilik modülü ve metrik seçimi ile $C_\omega[a,b]$ uzayının özel bir hali olan α üslü $H_\alpha[a,b]$ Hölder uzayının özellikleri sunulacaktır.

Tanım 2.1.1. *$\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ olmak üzere $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu; $\mathbb{R}_+$ üzerinde azalmayan, $\omega(0) = 0$ ve $\varepsilon > 0$ için $\omega(\varepsilon) > 0$ koşullarını sağlıyorsa ω fonksiyonuna bir **süreklilik modülü** adı verilir [2].*

Genellikle, $\omega = \omega(\varepsilon)$ süreklilik modülünün $\varepsilon = 0$ noktasında sürekli olduğu, yani, $\varepsilon \to 0$ iken $\omega(\varepsilon) \to 0$ olduğu kabul edilir.

(X,d) metrik uzayı sınırlı olsun (Aksi belirtilmedikçe metriği sınırlı olarak düşüneceğiz). X üzerinde tanımlı, reel değerli ve sürekli olan bütün fonksiyonların kümesini $C(X)$ ile gösterelim.

$x \in C(X)$, keyfi fakat sabit bir fonksiyon olmak üzere, keyfi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\omega(x,\varepsilon) = \sup\{|x(u) - x(v)| : u, v \in X \text{ ve } d(u,v) \leq \varepsilon\}$$

*olmak üzere; $\varepsilon \to \omega(x,\varepsilon)$ fonksiyonuna x **fonksiyonunun süreklilik modülü** denir [2].*

Bu tanımdaki fikirden hareketle $C(X)$ yerine X üzerinde tanımlı, reel değerli ve sınırlı bütün fonksiyonların kümesi olan $B(X)$ alındığında da yani $x \in B(X)$ için $\varepsilon \to \omega(x,\varepsilon)$ fonksiyonu x' in bir süreklilik modülü olur. Bu durumda açıktır ki $\varepsilon \to \omega(x,\varepsilon)$ fonksiyonunun $\varepsilon = 0$ noktasında sürekli olması için $\Leftrightarrow$ x fonksiyonunun X üzerinde düzgün sürekli olmasıdır [2].

Tanım 2.1.2. *(X,d) sınırlı bir metrik uzay ve ω bir süreklilik modülü olsun. Bir $x : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için her $t,s \in X$ iken*

$$|x(t) - x(s)| \leq K_x \omega(d(t,s))$$

*eşitsizliğini sağlayacak bir $K_x > 0$ sayısı mevcut ise bu şekildeki x fonksiyonlarının oluşturduğu kümeye ω **süreklilik modülünün doğurduğu küme** denir ve bu küme $C_\omega(X)$ ile gösterilir. Bu durum daha açık olarak*

$$x \in C_\omega(X) \Leftrightarrow \sup_{t,s \in X} \left\{ \frac{|x(t) - x(s)|}{\omega(d(t,s))} : t \neq s \right\} < \infty$$

ile ifade edilir [2].
Bu tanımdan aşağıdaki önerme çıkarılabilir.

Önerme 2.1.1. *$x \in C_\omega(X)$ olması için $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için*

$$\omega(x,\varepsilon) \leq K_x \omega(\varepsilon)$$

koşulunu sağlayan bir $K_x > 0$ sayısının olmasıdır [2].

Önerme 2.1.2. *$C_\omega(X)$, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $C(X)$ sürekli fonksiyonlar uzayının da bir alt vektör uzayıdır [2].*

Önerme 2.1.3. *$t_0 \in X$ keyfi bir sabit ve $x \in C_\omega(X)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere,*

$$\|x\|_\omega = |x(t_0)| + \sup_{t,s \in X} \left\{ \frac{|x(t) - x(s)|}{\omega(d(t,s))} : t \neq s \right\}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon $C_\omega(X)$ de bir normdur [2].

Buna göre $C_\omega(X)$ uzayı bir normlu uzaydır. Dikkat edilirse $x \in C_\omega(X)$ için $\|x\|_\omega < \infty$ olduğu görülür.

Önerme 2.1.4. $(C_\omega(X), \|.\|_\omega)$ *uzayı bir Banach uzayıdır [2].*

İspat: $C_\omega(X)$ uzayında bir (x_n) Cauchy dizisi alalım. M sayısını $M = maks\{1, \omega(diamX)\}$ biçiminde gösterirsek, Cauchy dizisi tanımından keyfi bir sabit $\varepsilon > 0$ verildiğinde $n, m \geq n_0$ için $\|x_n - x_m\|_\omega \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ olacak şekilde n_0 doğal sayısı bulabiliriz. Önerme 2.1.3' den, her $t, s \in X, t \neq s$ ve $t_0 \in X$ keyfi sabiti için

$$|x_n(t_0) - x_m(t_0)| + \sup\left\{\frac{|[x_n(t) - x_m(t)] - [x_n(s) - x_m(s)]|}{\omega(d(t,s))}\right\} \leq \frac{\varepsilon}{2M} \tag{2.1.1}$$

olur. Bu (2.1.1) eşitsizliğinden

$$|x_n(t_0) - x_m(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1.2}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $\{x_n(t_0)\}$ dizisinin doğal metrik ile $\mathbb{R}$ de Cauchy dizisi olduğu anlaşılmış olur. $\mathbb{R}$ tam metrik uzay olduğundan bu dizi $x(t_0)$ gibi bir reel sayıya yakınsar yani $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t_0) = x(t_0)$ dır. Şimdi yine (2.1.1) eşitsizliğinden

$$\sup_{t,s\in X}\left\{\frac{|[x_n(t) - x_m(t)] - [x_n(s) - x_m(s)]|}{\omega(d(t,s))} : \ t \neq s\right\} \leq \frac{\varepsilon}{2M} \tag{2.1.3}$$

yazabiliriz. Bu (2.1.3) eşitsizliğinde s yerine t_0 alınarak sabit tutulursa, her $t \in X$ için

$$\left\{\frac{|[x_n(t) - x_m(t)] - [x_n(t_0) - x_m(t_0)]|}{\omega(d(t,t_0))} : t \neq t_0\right\} \leq \frac{\varepsilon}{2M}$$

elde edilir. Buradan da

$$|[x_n(t) - x_m(t)] - [x_n(t_0) - x_m(t_0)]| \ \leq \frac{\varepsilon}{2M}\omega(d(t,t_0)) \tag{2.1.4}$$

bulunur. (2.1.4) eşitsizliğinden, keyfi $t \in X$ ve $m, n \geq n_0$ doğal sayıları için

$$|[x_n(t) - x_m(t)] - [x_n(t_0) - x_m(t_0)]| \ \leq \frac{\varepsilon}{2M}\omega(d(t,t_0)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Böylece, keyfi $t \in X$ ve $m, n \geq n_0$ doğal sayıları için

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leq |x_n(t_0) - x_m(t_0)| + \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1.5}$$

dir. (2.1.2) ve (2.1.5) birlikte düşünüldüğünde

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leq \varepsilon \tag{2.1.6}$$

elde edilir. Böylece $(x_n(t))$ dizisi reel Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan bu dizi $\mathbb{R}$ de yakınsaktır. Bu dizinin limitini $x(t)$ olarak tanımlarsak,

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$$

olur. (2.1.6) eşitsizliğinde $m \to \infty$ için her iki tarafın limitini alırsak, her $t \in X$ ve her $n \geq n_0$ için

$$|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon$$

olur. Buradan, $C_\omega(X)$ uzayındaki (x_n) Cauchy dizisi doğal metrik ile x fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

Şimdi $x \in C_\omega(X)$ olduğunu gösterelim. (x_n) dizisi $C_\omega(X)$ uzayında bir Cauchy dizisi olduğundan sınırlıdır. O halde sabit bir $S > 0$ ve her $n \in N$ sayısı için $\|x_n\|_\omega \leq S$ yazabiliriz. Yani

$$\|x_n\|_\omega = |x(t_0)| + \sup_{t,s\in X}\left\{\frac{|x_n(t) - x_n(s)|}{\omega(d(t,s))} : t \neq s\right\} \leq S \tag{2.1.7}$$

dır. Keyfi $t, s \in X$, $t \neq s$ ve her $n \in N$ sayısı için (2.1.7)' den

$$\sup\left\{\frac{|x_n(t) - x_n(s)|}{\omega(d(t,s))}\right\} \leq S$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizlikten de her $t, s \in X$ ve her $n \in N$ sayısı için

$$|x_n(t) - x_n(s)| \leq S\omega(d(t,s)) \tag{2.1.8}$$

olur. Şimdi (2.1.8) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa, keyfi $t,\ s \in X$ için

$$|x(t) - x(s)| \leq S\omega(d(t,s))$$

dır. Bunun anlamı $x \in C_\omega(X)$ olmasıdır.

Şimdi de (x_n) dizisinin $\|.\|_\omega$ normuyla x fonksiyonuna yakınsadığını gösterelim. Keyfi $t, s \in X$, $t \neq s$ ile keyfi $m, n \in N$ ve $m, n \geq n_0$ için yine (2.1.1) eşitsizliği kullanılarak,

$$\sup\left\{\frac{|[x_n(t) - x_m(t)] - [x_n(s) - x_m(s)]|}{\omega(d(t,s))}\right\} \leq \frac{\varepsilon}{2M}$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{|[x_n(t) - x_m(t)] - [x_n(s) - x_m(s)]|}{\omega(d(t,s))} \leq \frac{\varepsilon}{2M} \tag{2.1.9}$$

olur. (2.1.9) eşitsizliğinde t ve s sabit tutularak $m \to \infty$ için limit alırsak,

$$\frac{|[x_n(t) - x(t)] - [x_n(s) - x(s)]|}{\omega(d(t,s))} \leq \frac{\varepsilon}{2M} \tag{2.1.10}$$

elde edilir. Böylece (2.1.10) eşitsizliğinde keyfi $t,s \in X$, $t \neq s$ ve $n \geq n_0$ için her iki tarafın supremum' u alınarak,

$$\sup\left\{\frac{|[x_n(t)-x(t)]-[x_n(s)-x(s)]|}{\omega(d(t,s))}\right\} \leq \frac{\varepsilon}{2M} \tag{2.1.11}$$

yazılabilir. Benzer şekilde (2.1.1) eşitsizliği kullanılarak, keyfi $m,n \in N$ ve $m,n \geq n_0$ için

$$|x_n(t_0)-x_m(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \tag{2.1.12}$$

yazılabilir. (2.1.12) eşitsizliğinde $m \to \infty$ için limit alırsak,

$$|x_n(t_0)-x(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \tag{2.1.13}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi (2.1.11) ve (2.1.13) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanıp Önerme 2.1.3 dikkate alındığında, her $n \geq n_0$ için

$$\|x_n - x\|_\omega \leq \frac{\varepsilon}{M} \leq \varepsilon$$

dır. Bu son eşitsizlik $C_\omega(X)$ uzayındaki keyfi (x_n) Cauchy dizisinin yine bu uzayın bir elemanı olan x fonksiyonuna $\|.\|_\omega$ normuna göre yakınsadığını gösterir. O halde $C_\omega(X)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

Aşağıda bazı ω süreklilik modülleriyle bunların doğurduğu C_ω uzaylarının ne olduğunu görelim.

Örnek 2.1.1. *$\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ için $\omega_L(\varepsilon) = \varepsilon$ şeklinde aldığımız fonksiyon süreklilik modülüdür. Burada $x \in C_{\omega_L}(X)$ olması için gerek ve yeter koşul her $t,s \in X$ için*

$$\begin{aligned}|x(t)-x(s)| &\leq L_x\omega(d(t,s))\\ &= L_x d(t,s)\end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $L_x > 0$ sayısının mevcut olmasıdır. Yani $C_{\omega_L}(X)$ uzayı $x : X \to \mathbb{R}$ olan ve Lipschitz koşulunu sağlayan x fonksiyonlarından oluşur. Önerme 2.1.3' den $C_{\omega_L}(X)$ uzayı için norm

$$\begin{aligned}\|x\|_{\omega_L} &= |x(t_0)| + \sup_{t,s\in X}\left\{\frac{|x(t)-x(s)|}{\omega(d(t,s))} : t \neq s\right\}\\ &= |x(t_0)| + \sup_{t,s\in X}\left\{\frac{|x(t)-x(s)|}{d(t,s)} : t \neq s\right\}\end{aligned}$$

dır [2].

Örnek 2.1.2. *α sayısı $(0,1]$ aralığında sabit bir sayı ve $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ için $\omega_H(\varepsilon) = \varepsilon^{\alpha}$ şeklinde aldığımız fonksiyon bir süreklilik modülüdür. $x \in C_{\omega_H}(X)$ olması için gerek ve yeter koşul her $t,s \in X$ için*

$$|x(t) - x(s)| \leq H_x (d(t,s))^{\alpha}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $H_x > 0$ sayısının mevcut olmasıdır. Yani $C_{\omega_H}(X)$ uzayı $x : X \to \mathbb{R}$ olan ve Hölder koşulunu (Bak. Tanım 2.2.1) sağlayan x fonksiyonlarından oluşan α üslü $H_{\alpha}(X)$ Hölder uzayını doğurur. Önerme 2.1.3' den $C_{\omega_H}(X)$ uzayındaki norm

$$\|x\|_{\omega_H} = |x(t_0)| + \sup_{t,s \in X} \left\{ \frac{|x(t) - x(s)|}{(d(t,s))^{\alpha}} : t \neq s \right\}$$

şeklindedir [2].

Örnek 2.1.3. *ω fonksiyonunu*

$$\omega(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \varepsilon = 0 \text{ için} \\ 1, & \varepsilon > 0 \text{ için} \end{cases}$$

biçiminde tanımlarsak bunun süreklilik modülü olacağı açıktır. $x \in C_{\omega}(X)$ olması için gerek ve yeter koşul her $t,s \in X$ için

$$|x(t) - x(s)| \leq K_x \omega(d(t,s)) \leq K_x \tag{2.1.14}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $K_x > 0$ sayısının mevcut olmasıdır. Açıkça görüleceği gibi bu koşul x fonksiyonunun sınırlı olmasına denk bir koşuldur. Gerçekten de sabit bir $t_0 \in X$ için (2.1.14) de s yerine t_0 yazarsak, her $t \in X$ için

$$|x(t)| - |x(t_0)| \leq |x(t) - x(t_0)| \leq K_x$$

olur. Her $t \in X$ için bu son eşitsizlikten

$$|x(t)| \leq |x(t_0)| + K_x < \infty$$

olur. Aynı zamanda sınırlı bir x fonksiyonu (2.1.14) koşulunu sağlar. Böylece $C_{\omega}(X)$ uzayı $x : X \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan sınırlı fonksiyonlardan oluşur. Yani bu örneğimizdeki ω için $C_{\omega}(X) = B(X)$ dir. Bu takdirde $C_{\omega}(X)$ uzayındaki norm tanımı: $t,s \in X$ ve $t \neq s$ için

$$\|x\|_{\omega} = |x(t_0)| + \sup \left\{ \frac{|x(t) - x(s)|}{\omega(d(t,s))} \right\} = |x(t_0)| + \sup |x(t) - x(s)|$$

şeklindedir. Bundan dolayı

$$\|x\|_{\omega} = |x(t_0)| + \sup_{t,s \in X} |x(t) - x(s)| \leq \sup_{t \in X} |x(t)| + \sup_{t \in X} |x(t)| + \sup_{s \in X} |x(s)| \leq 3\|x\|_{\infty} \tag{2.1.15}$$

dır. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\|x\|_\infty &= \sup_{t\in X}|x(t)| = \sup_{t\in X}|x(t)-x(t_0)+x(t_0)| \le |x(t_0)| + \sup_{t\in X}|x(t)-x(t_0)| \\
&\le |x(t_0)| + \sup_{t,s\in X}|x(t)-x(s)| \\
&= |x(t_0)| + \sup_{t,s\in X}\left\{\frac{|x(t)-x(s)|}{\omega(d(t,s))} : t\neq s\right\} \\
&= \|x\|_\omega
\end{aligned}
\tag{2.1.16}
$$

olur. (2.1.15) ve (2.1.16) göz önüne alındığında

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_\omega \le 3\|x\|_\infty$$

eşitsizliğinin doğruluğu elde edilmiş olur. Dolayısıyla bu norm $B(X)$ uzayındaki klasik $\|x\|_\infty = \sup_{t\in X}|x(t)|$ normuna denktir [2].

2.2 Hölder Uzayı ve Bazı Özellikleri

Bundan sonraki değerlendirmeleri basitleştirmek için fonksiyonlarımızı $[a,b]$ aralığında tanımlayacağız. $[a,b]$ üzerinde sürekli ve reel değerli, $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının oluşturduğu $C[a,b]$ uzayını $\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)| : t\in[a,b]\}$ normuyla birlikte düşünelim.

α sayısı $(0,1]$ aralığında sabit bir sayı olmak üzere Örnek 2.1.2' de X kümesini $[a,b]$ aralığı, $d(t,s) = |t-s|$ ve ω süreklilik modülü $\omega_H = \varepsilon^\alpha$ olarak alınırsa, bu yeni $C_{\omega_H}([a,b])$ uzayı $H_\alpha[a,b]$ sembolü ile gösterilecek. Bu husus daha açık olarak aşağıdaki tanımda belirtilmiştir.

Tanım 2.2.1. *α sayısı $(0,1]$ aralığında sabit bir sayı olmak üzere, $x\in H_\alpha[a,b] \iff \forall t,s\in[a,b]$ için*

$$|x(t)-x(s)| \le H|t-s|^\alpha \tag{2.2.1}$$

*eşitsizliğini sağlayan bir $H>0$ sayısı vardır, **(Hölder Koşulu)** [2].*

Yani $H_\alpha[a,b]$ ile gösterilen **Hölder kümesi**, Hölder koşulunu sağlayan $[a,b]$ üzerinde tanımlı tüm reel değerli x fonksiyonlarından oluşur.

Buna göre Önerme 2.1.2' den $H_\alpha[a,b]$ kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $C[a,b]$ sürekli fonksiyonlar uzayının da bir alt vektör uzayıdır.

$x\in H_\alpha[a,b]$ için (2.2.1) eşitsizliğini sağlayan en küçük sabit sayıyı H_x^α ile gösterirsek

$$H_x^\alpha = \sup\left\{\frac{|x(t)-x(s)|}{|t-s|^\alpha} : t,s\in[a,b], t\neq s\right\} \tag{2.2.2}$$

olacak şekilde elde edilir.

Dikkat edilirse $\alpha = 1$ olarak alırsak, $H_1[a,b]$ uzayı $[a,b]$ üzerinde Lipschitz koşulunu sağlayan x fonksiyonlarından oluşur. Yani $x \in H_1[a,b]$ ve $t,s \in [a,b]$ için

$$|x(t) - x(s)| \leq L_x |t-s|$$

koşulunu sağlayan $L_x > 0$ sayısı vardır. Bu uzay $Lip[a,b]$ biçiminde ifade edilir. O halde $H_1[a,b] = Lip[a,b]$ dir.

Şimdi temel amacımız: $H_\alpha[a,b]$ Hölder uzayı $C[a,b]$ uzayının lineer bir alt uzayı olmakla birlikte, $\alpha \in (0,1]$ için $H_\alpha[a,b]$ Hölder uzayının $\|.\|_\infty$ normuyla $C[a,b]$ uzayının bir kapalı alt uzayı olmadığını göstermektir. Bunu kanıtlamak için $H_\alpha[a,b]$ uzayın Örnek 2.1.2' de ifade edilen doğal normuyla birlikte düşünülecektir. Yani $x \in H_\alpha[a,b]$ için

$$\|x\|_\alpha = |x(a)| + \sup\left\{ \frac{|x(t) - x(s)|}{|t-s|^\alpha} : \; t,s \in [a,b] \;, t \neq s \right\} \tag{2.2.3}$$

dır. (2.2.2) ve (2.2.3) birlikte düşünüldüğünde,

$$\|x\|_\alpha = |x(a)| + H_x^\alpha$$

bağıntısı elde edilir. Önerme 2.1.4' ün bir sonucu olarak $(H_\alpha[a,b], \|\cdot\|_\alpha)$' nın bir Banach uzayı olduğu görülür.

Keyfi sabit $x \in H_\alpha[a,b]$ ve keyfi $t,s \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leq |x(t) - x(a)| + |x(a)| \\
&\leq |x(a)| + \sup\{|x(t) - x(a)|\} \\
&\leq |x(a)| + \sup\{|x(t) - x(s)|\} \\
&= |x(a)| + \sup\left\{ \frac{|x(t) - x(s)|\,|t-s|^\alpha}{|t-s|^\alpha} : t \neq s \right\} \\
&\leq |x(a)| + (b-a)^\alpha \sup\left\{ \frac{|x(t) - x(s)|}{|t-s|^\alpha} : t \neq s \right\} \\
&\leq maks\left\{1, (b-a)^\alpha\right\} \left\{ |x(a)| + \sup\left\{ \frac{|x(t) - x(s)|}{|t-s|^\alpha} : t \neq s \right\} \right\}
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\|x\|_\infty \leq maks\left\{1, (b-a)^\alpha\right\} \|x\|_\alpha \tag{2.2.4}$$

dır. Buradan $\|.\|_\infty$ normunun $\|.\|_\alpha$ normu tarafından sınırlandırıldığını (Domine edildiğini) söyleyebiliriz. Teorem 2.0.8' den eğer $H_\alpha[a,b]$ uzayı $\|.\|_\infty$ normuyla $C[a,b]$ uzayının kapalı alt uzayı olsaydı $H_\alpha[a,b]$ uzayı $\|.\|_\infty$ normuyla bir Banach uzayı olurdu. Böylece $H_\alpha[a,b]$ uzayı hem $\|.\|_\infty$ normuyla hem de $\|.\|_\alpha$ normuyla bir Banach uzayı olacaktı. (2.2.4) ve Sonuç 2.0.2 (normlar arasındaki sınırlandırma (Domine etme) teoremi)' den $H_\alpha[a,b]$ uzayında $\|.\|_\infty$ ve $\|.\|_\alpha$ normlarının denk olduğunu söyleyebilirdik.

Şimdi bu sonucun doğru olmadığını yani bu iki normun birbirine denk olmadığını göstereceğiz. Bunu göstermek için sabit bir $\alpha \in (0,1]$ sayısını ve $[0,1]$ aralığında aşağıdaki gibi tanımlı (x_n) reel fonksiyon dizisini düşünelim.

$$x_n(t) = \begin{cases} n^\alpha t^\alpha, & t \in \left[0, \frac{1}{n}\right) \text{ ise} \\ 1, & t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun tanımdan $n = 1,2,...$ için $(x_n) \subset C[0,1]$ ve $\|x_n\|_\infty = 1$ dir. Diğer taraftan $n = 1,2,...$ için

$$\begin{aligned}
\|x_n\|_\alpha &= |x_n(0)| + \sup_{t,s\in[0,1]} \left\{ \frac{|x_n(t) - x_n(s)|}{|t-s|^\alpha} : t \neq s \right\} \\
&= |x_n(0)| + \sup_{t,s\in[0,1]} \left\{ \frac{|x_n(t) - x_n(0)|}{|t-s|^\alpha} : t \neq s \right\} \\
&= |x_n(0)| + \sup \left\{ \frac{|x_n(t) - x_n(0)|}{|t|^\alpha} : t \in (0,1] \right\} \\
&= \sup \left\{ \frac{|x_n(t)|}{|t|^\alpha} : t \in (0,1] \right\} \\
&= maks \left\{ \sup \left\{ \frac{|x_n(t)|}{|t|^\alpha} : t \in \left(0, \frac{1}{n}\right] \right\}, \sup \left\{ \frac{|x_n(t)|}{|t|^\alpha} : t \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \right\} \right\} \\
&= maks \left\{ \sup \left\{ \frac{n^\alpha t^\alpha}{t^\alpha} : t \in \left(0, \frac{1}{n}\right] \right\}, \sup \left\{ \frac{1}{t^\alpha} : t \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \right\} \right\} \\
&= maks \left\{ \sup \left\{ n^\alpha : t \in \left(0, \frac{1}{n}\right] \right\}, \sup \left\{ n^\alpha : t \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \right\} \right\} = n^\alpha
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

dir. (2.2.5)' den $n = 1,2,...$için $\|x_n\|_\alpha = n^\alpha$ olduğu görülür. Böylece

$$\frac{\|x_n\|_\infty}{\|x_n\|_\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \text{ veya } \|x_n\|_\alpha = n^\alpha \|x_n\|_\infty \tag{2.2.6}$$

olur. (2.2.6)' de $n \to \infty$ için limit alınırsa $\frac{\|x_n\|_\infty}{\|x_n\|_\alpha} \to 0$ olur. Buradan da $\|.\|_\alpha$ normunun $\|.\|_\infty$ normu tarafından sınırlandırılamadığı (Domine edilemediği) görülür. Yani $H_\alpha[0,1]$ Hölder uzayında $\|.\|_\infty$ ve $\|.\|_\alpha$ normlarının denk olmadığı görülür. Açıkça buradaki örnekte $[0,1]$ aralığı yerine keyfi bir $[a,b]$ aralığı alınabileceğinden, Sonuç 2.0.2' den $H_\alpha[a,b]$ Hölder uzayı $\|.\|_\infty$ normuyla Banach uzayı olamayacağından $C[a,b]$ uzayının kapalı alt uzayı da değildir.

Ayrıca, $0 < \alpha < \gamma \leq 1$ için

$$H_\gamma[a,b] \subset H_\alpha[a,b] \subset C[a,b] \tag{2.2.7}$$

kapsama bağıntıları sağlanır. Özel olarak, $\gamma = 1$ alırsak $H_1[a,b] = Lip[a,b]$ yazarak, (2.2.7) bağıntısı $0 < \alpha < \gamma \leq 1$ için

$$Lip[a,b] \subset H_\gamma[a,b] \subset H_\alpha[a,b] \subset C[a,b]$$

biçiminde yazılır. Bu kapsama bağıntısının doğruluğunu gösterelim.

Her $x \in H_\gamma[a,b]$ ve $\forall s,t \in [a,b]$ için,

$$\begin{aligned} |x(s)-x(t)| &\leq H_x^\gamma |s-t|^\gamma = H_x^\gamma |s-t|^\alpha |s-t|^{\gamma-\alpha} \\ &\leq (b-a)^{\gamma-\alpha} H_x^\gamma |s-t|^\alpha \\ &= H_x^\alpha |t-s|^\alpha \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

dır. (2.2.8) ve Tanım 2.2.1' den $x \in H_\alpha[a,b]$ olduğu görülür. Buradan (2.2.7) bağıntısının sağlandığı sonucu çıkar.

Bununla birlikte $x \in H_\gamma[a,b]$ ve keyfi sabit $s,t \in [a,b]$, $s \neq t$ için,

$$\begin{aligned} \frac{|x(s)-x(t)|}{|s-t|^\alpha} &= \frac{|x(s)-x(t)|}{|s-t|^\gamma} |s-t|^{\gamma-\alpha} \\ &\leq \frac{|x(s)-x(t)|}{|s-t|^\gamma} (b-a)^{\gamma-\alpha} \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

dır. (2.2.9) bağıntısı kullanılarak,

$$\begin{aligned} \|x\|_\alpha &= |x(a)| + \sup\left\{ \frac{|x(s)-x(t)|}{|s-t|^\alpha} : s,t \in [a,b] \text{ ve } s \neq t \right\} \\ &\leq |x(a)| + \sup\left\{ \frac{|x(s)-x(t)|}{|s-t|^\gamma} : s,t \in [a,b] \text{ ve } s \neq t \right\} (b-a)^{\gamma-\alpha} \\ &\leq maks\left\{1, (b-a)^{\gamma-\alpha}\right\} \|x\|_\gamma \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

olduğu görülür. Böylece (2.2.10)' den $\|x\|_\gamma$ normu $\|x\|_\alpha$ normunu sınırlandırır. Şimdi bu iddianın tersinin doğru olmadığını göstereceğiz. Aşağıdaki biçimde tanımlanmış $n = 1,2,...$için

$$x_n(t) = \begin{cases} n^\gamma t^\gamma, & t \in \left[0, \frac{1}{n}\right) \text{ ise} \\ 1, & t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \text{ ise} \end{cases}$$

$(x_n) \subset H_\gamma[0,1]$ dizisini ele alalım. $H_\gamma[0,1]$ Hölder uzayındaki norm tanımından,

$$\begin{aligned}
\|x_n\|_\gamma &= |x_n(0)| + \sup_{t,s\in[0,1]}\left\{\frac{|x_n(t)-x_n(s)|}{|t-s|^\gamma} : t \neq s\right\} \\
&= |x_n(0)| + \sup_{t,s\in[0,1]}\left\{\frac{|x_n(t)-x_n(0)|}{|t-s|^\gamma} : t \neq s\right\} \\
&= |x_n(0)| + \sup\left\{\frac{|x_n(t)-x_n(0)|}{|t|^\gamma} : t \in (0,1]\right\} \\
&= maks\left\{\sup\left\{\frac{|x_n(t)|}{|t|^\gamma} : t \in \left(0,\frac{1}{n}\right]\right\}, \sup\left\{\frac{|x_n(t)|}{|t|^\gamma} : t \in \left(\frac{1}{n},1\right]\right\}\right\} \\
&= maks\left\{\sup\left\{\frac{n^\gamma t^\gamma}{t^\gamma} : t \in \left(0,\frac{1}{n}\right]\right\}, \sup\left\{\frac{1}{t^\gamma} : t \in \left(\frac{1}{n},1\right]\right\}\right\} \\
&= n^\gamma
\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir. Diğer taraftan $n = 1,2,...$için,

$$\begin{aligned}
\|x_n\|_\alpha &= |x_n(0)| + \sup_{t,s\in[0,1]}\left\{\frac{|x_n(t)-x_n(s)|}{|t-s|^\alpha} : t \neq s\right\} \\
&= |x_n(0)| + \sup_{t,s\in[0,1]}\left\{\frac{|x_n(t)-x_n(0)|}{|t-s|^\alpha} : t \neq s\right\} \\
&= |x_n(0)| + \sup\left\{\frac{|x_n(t)-x_n(0)|}{|t|^\alpha} : t \in (0,1]\right\} \\
&= maks\left\{\sup\left\{\frac{|x_n(t)|}{|t|^\alpha} : t \in \left(0,\frac{1}{n}\right]\right\}, \sup\left\{\frac{|x_n(t)|}{|t|^\alpha} : t \in \left(\frac{1}{n},1\right]\right\}\right\} \\
&= maks\left\{\sup\left\{\frac{n^\gamma t^\gamma}{t^\alpha} : t \in \left(0,\frac{1}{n}\right]\right\}, \sup\left\{\frac{1}{t^\alpha} : t \in \left(\frac{1}{n},1\right]\right\}\right\} \\
&= maks\left\{\sup\left\{n^\gamma t^{\gamma-\alpha} : t \in \left(0,\frac{1}{n}\right]\right\}, \sup\left\{\frac{1}{t^\alpha} : t \in \left(\frac{1}{n},1\right]\right\}\right\} \\
&= n^\alpha
\end{aligned}$$

olur. Buradan $\|x_n\|_\gamma = n^{\gamma-\alpha}\|x_n\|_\alpha$ veya $n \to \infty$ için $\frac{\|x_n\|_\alpha}{\|x_n\|_\gamma} = \frac{1}{n^{\gamma-\alpha}} \to 0$ olur. Böylece $\|x\|_\alpha$ normu $\|x\|_\gamma$ normunu sınırlandıramaz. Bu ise $\|x\|_\gamma$ ve $\|x\|_\alpha$ normunun birbirine denk olmadığını gösterir. Açıkça burada $[0,1]$ aralığı yerine keyfi bir $[a,b]$ aralığı alınabileceğinden, Sonuç 2.0.2' den $H_\gamma[a,b]$ Hölder uzayı $\|.\|_\alpha$ normuna göre Banach uzayı olamayacağından bu uzay $H_\alpha[a,b]$ uzayının kapalı alt uzayı da değildir.

2.3 $C_\omega(X)$ Uzayında Rölatif Kompaktlık İçin Yeter Koşul

Bu kısım, $\omega = \omega(\varepsilon)$ süreklilik modülü ile türetilen $C_\omega(X)$ fonksiyon uzayında rölatif kompaktlık için bir kriter sunmaya ayrılmıştır. Aşağıda $C_\omega(X)$ uzayında rölatif kompaktlık için bir yeter koşul verilecektir.

Tanım 2.3.1. *$\omega = \omega(\varepsilon)$ fonksiyonu $\varepsilon \to 0$ için $\omega(\varepsilon) \to 0$ koşulunu sağlayan bir süreklilik modülü ve X de bir kompakt metrik uzay olsun. $C_\omega(X)$ uzayında A sınırlı bir altküme olmak üzere A kümesine ait fonksiyonlar,*

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ için } \exists\delta > 0 \text{ vardır öyle ki } \forall x \in A \text{ ve } \forall t,s \in X \ (t \neq s) \text{ için}$$
$$\left[d(t,s) \leq \delta \Rightarrow \frac{|x(t) - x(s)|}{\omega(d(t,s))} \leq \varepsilon\right]$$

koşulunu sağlarsa A kümesi ω ***süreklilik modülüne göre eşsüreklidir*** *denilir [2].*

Teorem 2.3.1. *X bir kompakt metrik uzay olsun. A kümesi de $C_\omega(X)$ uzayında sınırlı ve ω süreklilik modülüne göre eşsürekli bir altküme ise A kümesi $C_\omega(X)$ uzayında rölatif kompakttır [2].*

İspat: Öncelikle, A kümesi $C_\omega(X)$ uzayında sınırlı olduğundan, $x \in A$ ve $u_0 \in X$ kompakt metrik uzayının sabit bir elemanı olmak üzere

$$\|x\|_\omega = |x(u_0)| + \sup_{u,v\in X}\left\{\frac{|x(u) - x(v)|}{\omega(d(u,v))} : u \neq v\right\} \leq M \tag{2.3.1}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $M > 0$ sabiti vardır. Özel olarak keyfi bir $x \in A$ için

$$|x(u_0)| \leq M \tag{2.3.2}$$

dir. Ayrıca, (2.3.1) eşitsizliğinden herhangi bir $x \in A$ ve keyfi $u,v \in X$, $u \neq v$ için

$$\frac{|x(u) - x(v)|}{\omega(d(u,v))} \leq M \tag{2.3.3}$$

eşitsizliği geçerlidir. (2.3.3) eşitsizliğinden herhangi bir $x \in A$ ve keyfi $u,v \in X$ için

$$|x(u) - x(v)| \leq M\omega(d(u,v)) \tag{2.3.4}$$

elde edilir. (2.3.4)' den ve $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\omega(\varepsilon) = 0$ olduğu için X kümesi üzerinde tanımlı olan bütün x fonksiyonlarının oluşturduğu A kümesi $C(X)$ uzayında eşsüreklidir.

Bunun dışında, X kompakt bir küme olup sınırlıdır ve her $u,v \in X$ için $d(u,v) \leq diamX$ dir. (2.3.4)' den keyfi bir $x \in A$ ve her $u,v \in X$ için

$$|x(u) - x(v)| \leq M\omega(diamX) \tag{2.3.5}$$

eşitsizliği geçerlidir. (2.3.5) eşitsizliğinde v yerine u_0 yazarsak keyfi $x \in A$ ve $u \in X$ için

$$|x(u)| - |x(u_0)| \leq |x(u) - x(u_0)| \leq M\omega(diamX) \tag{2.3.6}$$

yazılır. (2.3.6)' dan, $\forall x \in A$ ve $u \in X$ için

$$|x(u)| \leq |x(u_0)| + M\omega(diamX)$$

dir. Bu da A kümesinin $C(X)$ uzayında eşsınırlı olduğunu gösterir.

Şimdi, A kümesinde rastgele bir (x_n) düzgün sınırlı dizi alalım. Yukarıda belirtilen gerçekler göz önünde bulundurularak, (x_n) dizisindeki fonksiyonlar X kümesi üzerinde tanımlı $C(X)$ uzayında eşsürekli ve düzgün sınırlıdır. Böylece, Ascoli Teoremi 2.0.7 göz önünde bulundurularak X kümesinde tanımlı (x_n) dizisinin, $C(X)$ uzayında bir $x = x(u)$ fonsiyonuna düzgün yakınsak olan bir alt dizisi olduğunu söyleyebiliriz. Karmaşık gösterimden kaçınmak için, bu dizinin belirtilen alt dizisi yine aynı sembolle yani (x_n) ile gösterilecektir. Artık dikkat edilirse Sonuç 2.0.1' den $x = x(u)$ fonsiyonu da X kümesi üzerinde süreklidir.

Aşağıda, $x \in C_\omega(X)$ olduğunu göstereceğiz. Bu amaçla (2.3.4) eşitsizliğini sağlayan (x_n) dizisine ait fonksiyonları düşünerek, keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ ve keyfi $u, v \in X$ için

$$|x_n(u) - x_n(v)| \leq M\omega(d(u,v))$$

yazılabilir. Mutlak değerin sürekliliği, son eşitsizlik ve keyfi bir $u \in X$ için $\lim_{n\to\infty} x_n(u) = x(u)$ olduğundan, keyfi $u, v \in X$ için

$$|x(u) - x(v)| \leq M\omega(d(u,v)) \tag{2.3.7}$$

olur. Buradan $x \in C_\omega(X)$ olduğu görülür.

Ayrıca (2.3.2)' den $n = 1, 2, ...$için,

$$|x_n(u_0)| \leq M$$

olduğundan, $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$|x(u_0)| \leq M \tag{2.3.8}$$

elde edilir. (2.3.7) ve (2.3.8) birlikte düşünülerek, keyfi $u, v \in X$, $u \neq v$ için

$$|x(u_0)| + \frac{|x(u) - x(v)|}{\omega(d(u,v))} \leq 2M$$

yazılır. Buradan

$$\|x\|_\omega = |x(u_0)| + \sup\left\{\frac{|x(u) - x(v)|}{\omega(d(u,v))} : \ u, v \in X \text{ ve } u \neq v\right\} \leq 2M$$

dir. Yani yine $x \in C_\omega(X)$ olur.

Şimdi (x_n) dizisinin $C_\omega(X)$ uzayının normu ile x fonksiyonuna yakınsak olduğunu göstereceğiz. Bu amaçla $\delta > 0$ sabit bir sayı olmak üzere kolaylık sağlamak için

$$X_0^2 = \{(u,v) \in X \times X : u \neq v\},$$

$$X_\delta^2 = \left\{(u,v) \in X_0^2 : d(u,v) \leq \delta\right\},$$

$$\widetilde{X_\delta^2} = X_0^2 \diagdown X_\delta^2$$

biçiminde gösterelim. Açıkça $\widetilde{X_\delta^2}$, X_δ^2 kümeleri ayrık kümeler ve $X_0^2 = \widetilde{X_\delta^2} \cup X_\delta^2$ dir. Ayrıca, keyfi olarak sabitlenmiş bir n doğal sayısı için ,

$$\begin{aligned}
&\|x_n - x\|_\omega \\
&= |x_n(u_0) - x(u_0)| + \sup_{(u,v)\in X_0^2} \left\{ \frac{|[x_n(u) - x(u)] - [x_n(v) - x(v)]|}{\omega(d(u,v))} \right\} \\
&= |x_n(u_0) - x(u_0)| + \sup_{(u,v)\in X_0^2} \left\{ \frac{|x_n(u) - x(u) - x_n(v) + x(v)|}{\omega(d(u,v))} \right\} \\
&= |x_n(u_0) - x(u_0)| \\
&+ maks \left\{ \sup_{(u,v)\in \widetilde{X_\delta^2}} \frac{|x_n(u) - x(u) - x_n(v) + x(v)|}{\omega(d(u,v))}, \sup_{(u,v)\in X_\delta^2} \frac{|x_n(u) - x(u) - x_n(v) + x(v)|}{\omega(d(u,v))} \right\}
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

dır. Ardından $\varepsilon > 0$ keyfi bir sabit sayısını alalım. $\delta > 0$ sayısı: A kümesinin $\omega = \omega(\varepsilon)$ süreklilik modülüne göre eşsürekli oluşu varsayımına göre $\frac{\varepsilon}{4}$' e karşılık gelen sayı olsun.

Şimdi, $\beta(\varepsilon)$ sayısını

$$\beta(\varepsilon) = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon\omega(\delta)}{4}\right\} \tag{2.3.10}$$

biçiminde tanımlayalım. (x_n) fonksiyon dizisinin, X kümesi üzerinde tanımlı, $C(X)$ uzayında bir x fonksiyonuna düzgün yakınsadığından Tanım 2.0.11' den $\beta(\varepsilon)$ için bir n_0 doğal sayısı vardır öyle ki, her $n \geq n_0$ ve herhangi bir $u \in X$ için

$$|x_n(u) - x(u)| \leq \beta(\varepsilon) \tag{2.3.11}$$

yazılabilir. $\widetilde{X_\delta^2}$ kümesinin tanımından $(u,v) \in \widetilde{X_\delta^2}$ için $d(u,v) > \delta$ olduğu kolayca görülür. Buradan da $\omega = \omega(\varepsilon)$ süreklilik modülü azalmayan olduğundan $\omega(d(u,v)) \geq \omega(\delta)$ eşitsizliği yazılabilir. Böylece (2.3.10) ve (2.3.11) göz önüne alındığında, $n \geq n_0$ için

$$\sup\left\{\frac{|x_n(u)-x(u)-x_n(v)+x(v)|}{\omega(d(u,v))} : (u,v) \in \widetilde{X_\delta^2}\right\}$$

$$\leq \sup\left\{\frac{|x_n(u)-x(u)|+|x_n(v)-x(v)|}{\omega(d(u,v))} : (u,v) \in \widetilde{X_\delta^2}\right\}$$

$$\leq \sup\left\{\frac{|x_n(u)-x(u)|+|x_n(v)-x(v)|}{\omega(\delta)} : (u,v) \in \widetilde{X_\delta^2}\right\}$$

$$\leq 2\frac{\beta(\varepsilon)}{\omega(\delta)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.3.12}$$

dır. $\frac{\varepsilon}{4} > 0$ sayısına karşılık gelen δ sayısının seçimi sayesinde (x_n) fonksiyon dizisinin elemanları eşsürekli A kümesine ait olduğunu da akılda tutarak $(u,v) \in X_\delta^2$ ve keyfi bir doğal n sayısı için

$$\frac{|x_n(u)-x_n(v)|}{\omega(d(u,v))} \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.3.13}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece (2.3.13) eşitsizliğinden $(u,v) \in X_\delta^2$ için

$$|x_n(u)-x_n(v)| \leq \frac{\varepsilon\omega(d(u,v))}{4} \tag{2.3.14}$$

olduğu görülür. (2.3.14) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alırsak, $(u,v) \in X_\delta^2$ için

$$|x(u)-x(v)| \leq \frac{\varepsilon\omega(d(u,v))}{4}$$

elde edilir. Sonuç olarak, keyfi $(u,v) \in X_\delta^2$ için

$$\frac{|x(u)-x(v)|}{\omega(d(u,v))} \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.3.15}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi, (2.3.13) ve (2.3.15) kullanılarak,

$$\sup\left\{\frac{|[x_n(u)-x(u)]-[x_n(v)-x(v)]|}{\omega(d(u,v))} : (u,v) \in X_\delta^2\right\}$$

$$= \sup\left\{\frac{|x_n(u)-x(u)-x_n(v)+x(v)|}{\omega(d(u,v))} : (u,v) \in X_\delta^2\right\}$$

$$\leq \sup\left\{\frac{|x_n(u)-x_n(v)|+|x(u)-x(v)|}{\omega(d(u,v))} : (u,v) \in X_\delta^2\right\} \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.3.16}$$

elde edilir. (2.3.11), (2.3.12) ve (2.3.16) eşitsizlikleri birlikte düşünülerek, $n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq n_0$ için (2.3.9) de verilen $\|x_n - x\|_\omega$ ifadesinin ε dan küçük olduğu görülür yani $\|x_n - x\|_\omega \leq \varepsilon$ dır. Bunun anlamı, (x_n) dizisi $C_\omega(X)$ uzayının normuna göre x fonksiyonuna yakınsak olduğudur. Sonuç olarak (x_n) dizisi A kümesinden alınan keyfi bir dizi olduğundan A kümesi $C_\omega(X)$ uzayında rölatif kompaktdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi, Teorem 2.3.1' e dayanarak, $C_{\omega}(X)$ uzayında rölatif kompaktlık için **kullanışlı** (faydalı) bir yeter koşul verilecektir.

Teorem 2.3.2. *ω_1, ω_2 süreklilik modülleri sıfırda sürekli olsun. Ayrıca $\varepsilon \to 0$ için $\omega_2(\varepsilon) = o(\omega_1(\varepsilon))$ şartının yani*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\omega_2(\varepsilon)}{\omega_1(\varepsilon)} = 0$$

eşitliğinin sağlandığını varsayalım. (X,d) bir kompakt metrik uzay olmak üzere eğer A kümesi, $C_{\omega_2}(X)$ uzayının sınırlı bir alt kümesi ise o zaman A kümesi $C_{\omega_1}(X)$ uzayında rölatif kompaktdır [2].

İspat: A kümesi, $C_{\omega_2}(X)$ uzayında sınırlı olduğundan her $x \in A$ için $\|x\|_{\omega_2} \leq M$ eşitsizliğini sağlayan bir M pozitif sayısı vardır. Bu durum daha açık bir şekilde

$$\|x\|_{\omega_2} = |x(u_0)| + \sup_{u,v \in X} \left\{ \frac{|x(u) - x(v)|}{\omega_2(d(u,v))} : u \neq v \right\} \leq M$$

biçiminde ifade edilir. Böylece her $v, u \in X$, $v \neq u$ için

$$\frac{|x(u) - x(v)|}{\omega_2(d(u,v))} \leq M \tag{2.3.17}$$

dir. Ayrıca $P > 0$ keyfi seçilip fakat sabit tutulan sayısı için Teorem 2.3.2' nin varsayımından öyle bir $\delta_0 > 0$ sayısı vardır ki $t \in (0, \delta_0]$ için $\frac{\omega_2(t)}{\omega_1(t)} \leq P$ dir. Buradan $t \in [0, \delta_0]$ için

$$\omega_2(t) \leq P\omega_1(t) \tag{2.3.18}$$

sonucu çıkar. (2.3.17) ve (2.3.18) birlikte değerlendirildiğinde her $v, u \in X$ ve $d(u,v) \leq \delta_0$ için

$$|x(u) - x(v)| \leq M\omega_2(d(u,v)) \leq MP\omega_1(d(u,v))$$

eşitsizliğinden kolay bir şekilde

$$\frac{|x(u) - x(v)|}{\omega_1(d(u,v))} \leq MP \tag{2.3.19}$$

sonucuna varılır.

Şimdi, ω_1 süreklilik modülü azalmayan olduğundan $d(u,v) \geq \delta_0$ olacak şekilde keyfi $u, v \in X$ alındığında,

$$\begin{aligned} \frac{|x(u) - x(v)|}{\omega_1(d(u,v))} &\leq \frac{|x(u) - x(v)|}{\omega_1(\delta_0)} \\ &= \frac{|x(u) - x(v)|}{\omega_2(d(u,v))} \frac{\omega_2(d(u,v))}{\omega_1(\delta_0)} \end{aligned} \tag{2.3.20}$$

olur. Bu nedenle (2.3.17) ve (2.3.20) kullanılarak $d(u,v) \geq \delta_0$ olacak şekilde keyfi $v,u \in X$ alındığında,

$$\frac{|x(u)-x(v)|}{\omega_1(d(u,v))} \leq M\frac{\omega_2(diamX)}{\omega_1(\delta_0)} \tag{2.3.21}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç olarak, $K = maks\left\{MP, M\frac{\omega_2(diamX)}{\omega_1(\delta_0)}\right\}$ seçilip (2.3.19) ve (2.3.21) birlikte değerlendirildiğinde, keyfi $u,v \in X$ için

$$\frac{|x(u)-x(v)|}{\omega_1(d(u,v))} \leq K$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik kullanılarak

$$\|x\|_{\omega_1} = |x(u_0)| + \sup_{u,v \in X}\left\{\frac{|x(u)-x(v)|}{\omega_1(d(u,v))} : v \neq u\right\} \leq |x(u_0)| + K$$

(buradaki x keyfi) yazılabileceğinden, A kümesinin $C_{\omega_1}(X)$ uzayında sınırlı olduğu görülür.

$\varepsilon_1 > 0$ keyfi fakat sabit bir sayı olsun. $t \to 0$ için $\omega_2(t) = o(\omega_1(t))$ varsayımı göz önüne alındığında $t \in (0,\delta]$ için

$$\frac{\omega_2(t)}{\omega_1(t)} \leq \varepsilon_1 \tag{2.3.22}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

Ayrıca $\delta > 0$ sayısı; (2.3.22)' deki ε_1 yerine $\frac{\varepsilon}{M}$ alınmasına karşılık gelmiş olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi fakat sabit bir sayı alındığında $v,u \in X$, $v \neq u$ ve $d(u,v) \leq \delta$ için (2.3.17)' den

$$\frac{\omega_2(d(u,v))}{\omega_1(d(u,v))} \leq \frac{\varepsilon}{M} \tag{2.3.23}$$

dir. (2.3.23)' den $v,u \in X$, $v \neq u$ ve $d(u,v) \leq \delta$ için,

$$\omega_2(d(u,v)) \leq \frac{\varepsilon}{M}\omega_1(d(u,v)) \tag{2.3.24}$$

elde edilir.

Ardından, (2.3.17) ve (2.3.24) birlikte değerlendirilerek $v,u \in X$, $v \neq u$ ve $d(u,v) \leq \delta$ için,

$$|x(u)-x(v)| \leq M\omega_2(d(u,v)) \leq \varepsilon\omega_1(d(u,v))$$

eşitsizliğine ulaşılır. Buradan da $u,v \in X$, $u \neq v$ ve $d(u,v) \leq \delta$ için

$$\frac{|x(u)-x(v)|}{\omega_1(d(u,v))} \leq \varepsilon \tag{2.3.25}$$

olur. O halde (2.3.25)' den A kümesine ait fonksiyonlar Tanım 2.3.1 koşulunu sağlayacağından, A kümesi $C_{\omega_1}(X)$ uzayında ω_1 süreklilik modülüne göre eşsüreklidir. Sonuç olarak Teorem 2.3.1' den, A kümesinin $C_{\omega_1}(X)$ uzayında rölatif kompakt olduğu sonucuna varılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi Teorem 2.3.2' in uygulanabilirliğine bir örnek verelim.

Örnek 2.3.1. $0 < \alpha < \beta \leq 1$ *olmak üzere* $\omega_1(\varepsilon) = \varepsilon^\alpha$ *ve* $\omega_2(\varepsilon) = \varepsilon^\beta$ *biçiminde iki tane Hölder tipi süreklilik modülü olsun.*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\omega_2(\varepsilon)}{\omega_1(\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^\beta}{\varepsilon^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\beta-\alpha} = 0$$

olduğundan $\omega_1(\varepsilon)$ *ve* $\omega_2(\varepsilon)$ *süreklilik modülleri Teorem 2.3.2' nin limit ile ilgili koşulunu sağlar*

Böylece (X,d) veya $([a,b],d)$ metrik uzayı kompakt olmak üzere A kümesinin $C_{\omega_2}([a,b])$ veya $C_{\omega_2}(X)$ uzayında sınırlı olduğunu varsayarsak, A kümesi sırasıyla $C_{\omega_1}([a,b])$ veya $C_{\omega_1}(X)$ uzayında rölatif kompakt olur.

Uyarı 2.3.1. *: Bu örnekten hareketle özel olarak X kümesi* $[a,b]$ *aralığı, d metriği* $t,s \in [a,b]$ *için* $d(t,s) = |t-s|$ *ve* ω_1 *ve* ω_2 *süreklilik modülleri de* $0 < \alpha < \beta \leq 1$ *olmak üzere;* $\omega_1(\varepsilon) = \varepsilon^\alpha$ *ve* $\omega_2(\varepsilon) = \varepsilon^\beta$ *Hölder tipi süreklilik modülleri olarak alınırsa,* $C_{\omega_1}([a,b])$ *uzayı* α *üslü* $H_\alpha[a,b]$ *Hölder uzayı ve* $C_{\omega_2}([a,b])$ *uzayı da* β *üslü* $H_\beta[a,b]$ *Hölder uzayı olur. Ayrıca Örnek 2.3.1' den*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\omega_2(\varepsilon)}{\omega_1(\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^\beta}{\varepsilon^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\beta-\alpha} = 0$$

eşitliği de doğal olarak sağlanacağından, şayet bir A kümesi β *üslü* $H_\beta[a,b]$ *Hölder uzayında sınırlı bir küme ise (yani* $\forall x \in A$ *ve* $\forall t,s \in [a,b]$ *için*

$$|x(t) - x(s)| \leq M|t-s|^\beta \tag{2.3.26}$$

olacak şekilde bir $M > 0$ *sabit sayısı vardır), A kümesi* α *üslü* $H_\alpha[a,b]$ *Hölder uzayında rölatif kompakt olur.*

Burada (2.3.26) eşitsizliği şöyle açıklanabilir: A kümesi β *üslü* $H_\beta[a,b]$ *Hölder uzayında sınırlı bir küme ise her* $x \in A$ *için*

$$\|x\|_\beta = |x(a)| + \sup_{t,s\in[a,b]}\left\{\frac{|x(t)-x(s)|}{(d(t,s))^\beta} : t \neq s\right\}$$

$$= |x(a)| + \sup_{t,s\in[a,b]}\left\{\frac{|x(t)-x(s)|}{|t-s|^\beta} : t \neq s\right\} \leq M$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $M > 0$ *sabit sayısı vardır. Dolayısıyla aynı* $M > 0$ *sabit sayısı: Her* $x \in A$*,* $t \neq s$ *ve* $t,s \in [a,b]$ *için*

$$\frac{|x(t)-x(s)|}{|t-s|^\beta} \leq M \text{ veya } |x(t)-x(s)| \leq M|t-s|^\beta$$

eşitsizliğini sağlar.

3. $H_\alpha[0,1]$ HÖLDER UZAYINDA LİNEER OLMAYAN BİR FREDHOLM KUADRATİK İNTEGRAL DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Bu bölümde, q, z, p bilinen fonksiyonlar ve T bilinen bir operatör olmak üzere,

$$x(t) = q(t) + (Tx)(t) \int_0^1 z(t,\mu)\, x(p(\mu))d\mu, \;\; t \in I = [0,1] \tag{3.0.1}$$

lineer olmayan Fredholm kuadratik integral denkleminin $H_\alpha[0,1]$ Hölder uzayındaki çözümünün varlığı incelenecek ve akabinde bu sonucun uygulanabileceği iki örnek verilecektir. Bunu yaparken özellikle Hölder uzayında rölatif kompaktlık ve Schauder sabit nokta teoreminden yararlanılacaktır.

Son zamanlarda, Banaś ve Nalepa [2], α üslü $H_\alpha[a,b]$ Hölder uzayında

$$x(t) = p(t) + x(t) \int_a^b k(t,\mu)\, x(\mu)d\mu \tag{3.0.2}$$

lineer Fredholm kuadratik integral denklemin çözümünün varlığını incelemişlerdir.

Ayrıca, Caballero [8], α üslü $H_\alpha[0,1]$ Hölder uzayında

$$x(t) = p(t) + x(t) \int_0^1 k(t,\mu)\, x(r(\mu))d\mu \tag{3.0.3}$$

lineer Fredholm kuadratik integral denkleminin çözülebilirliğini ele almışlardır.

Dikkat edilirse (3.0.2) ve (3.0.3) integral denklemleri: (3.0.1) integral denkleminde $(Tx)(t) = x(t)$ alınmasıyla elde edilmiş olup (3.0.1) integral denkleminin özel halleridir. Başka bir ifadeyle bu bölümde ele aldığımız (3.0.1) denklemi daha önceden çalışılmış olan (3.0.2) ve (3.0.3) denklemlerinden daha geneldir.

3.1 Ön Hazırlıklar

Bu kısımda, öncelikle kullanacağımız gerekli tanım, teorem ve notasyonları verelim.

$[a,b]$ üzerinde tanımlı reel değerli x sürekli fonksiyonların uzayını $C[a,b]$ ile göstereceğiz. Bu uzay üzerinde genellikle supremum norm $x \in C[a,b]$ için

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$$

biçiminde tanımlıdır. $H_\alpha[a,b]$ Hölder uzayı: α sayısı $(0,1]$ aralığında sabit bir sayı olmak üzere, $[a,b]$ üzerinde tanımlı α üslü Hölder koşulunu sağlayan reel değerli x fonksiyonlarından oluşur.

Burada bir x fonksiyonunun **'Hölder koşulu'** nu sağlaması demek: Her $t,s \in [a,b]$ için

$$|x(t)-x(s)| \leq H|t-s|^{\alpha} \tag{3.1.1}$$

eşitsizliğini sağlayan bir H pozitif sabitinin mevcut olmasıdır. Bununla birlikte $x \in H_{\alpha}[a,b]$ için (3.1.1) eşitsizliğini sağlayan sabitlerin en küçüğünü H_x^{α} olarak göstereceğiz. O halde

$$H_x^{\alpha} = \sup\left\{\frac{|x(t)-x(s)|}{|t-s|^{\alpha}} : t,s \in [a,b],\ t \neq s\right\}$$

dır. $x \in H_{\alpha}[a,b]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\|x\|_{\alpha} &= |x(a)| + \sup\left\{\frac{|x(t)-x(s)|}{|t-s|^{\alpha}} : t,s \in [a,b],\ t \neq s\right\}\\ &= |x(a)| + H_x^{\alpha}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\|.\|_{\alpha}$ fonksiyonu $H_{\alpha}[a,b]$ Hölder uzayında bir normdur. Bu $(H_{\alpha}[a,b], \|\cdot\|_{\alpha})$ normlu uzayın bir Banach uzayı olduğunu J.Banaś göstermiştir [2].

Lemma 3.1.1. *$0 < \alpha \leq 1$ ve $x \in H_{\alpha}[a,b]$ için*

$$\|x\|_{\infty} \leq maks\{1, (b-a)^{\alpha}\}\, \|x\|_{\alpha}$$

eşitsizliği sağlanır. Özel olarak bu eşitsizlik $a = 0$ ve $b = 1$ için $\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_{\alpha}$ biçiminde yazılır [8].

Lemma 3.1.2. *$0 < \alpha < \gamma \leq 1$ için*

$$H_{\gamma}[a,b] \subset H_{\alpha}[a,b] \subset C[a,b]$$

kapsama bağıntısı geçerlidir. Bununla birlikte $x \in H_{\gamma}[a,b]$ için

$$\|x\|_{\alpha} \leq maks\left\{1, (b-a)^{\gamma-\alpha}\right\} \|x\|_{\gamma}$$

olur.

Özel olarak bu eşitsizlik $a = 0$ ve $b = 1$ için $\|x\|_{\alpha} \leq \|x\|_{\gamma}$ biçimini alır. Sonuç olarak Lemma 3.1.1 ve Lemma 3.1.2' den $a = 0$ ve $b = 1$ için $\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_{\alpha} \leq \|x\|_{\gamma}$ eşitsizliği yazılır [8].

Şimdi $H_{\alpha}[a,b]$ Hölder uzayında rölatif kompaktlık için önemli bir teoremi verelim.

Teorem 3.1.1. *$0 < \alpha < \beta \leq 1$ ve A kümesi β üslü $H_{\beta}[a,b]$ Hölder uzayında sınırlı bir alt küme ise A kümesi α üslü $H_{\alpha}[a,b]$ Hölder uzayında rölatif kompakttır [8] (Burada A kümesinin sınırlı olması, her $x \in A$ için $\|x\|_{\beta} \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısının var olması anlamındadır).*

Lemma 3.1.3. $0 < \alpha < \beta \leq 1$ *olmak üzere* β *üslü* $H_\beta[a,b]$ *Hölder uzayında* θ *merkezli ve* r *yarıçaplı* B_r^β *kapalı yuvarı* α *üslü* $H_\alpha[a,b]$ *Hölder uzayının kapalı bir alt kümesidir [8].*

İspat: B_r^β kümesinin $H_\alpha[a,b]$ uzayının kapalı alt kümesi olduğunu göstermek için $\overline{B_r^\beta} = B_r^\beta$ olduğunu göstermeliyiz. $B_r^\beta \subset \overline{B_r^\beta}$ aşikar olduğundan $\overline{B_r^\beta} \subset B_r^\beta$ olduğunu kanıtlamak yeterlidir. Bu amaçla keyfi bir $x \in \overline{B_r^\beta}$ alalım. $x \in \overline{B_r^\beta}$ olduğundan, terimleri B_r^β kümesinde olan ve $\|.\|_\alpha$ normuna göre x elemanına yakınsayan bir (x_n) dizisi vardır. Burada $(x_n) \subset B_r^\beta \subset H_\beta[a,b] \subset H_\alpha[a,b]$ ve $H_\alpha[a,b]$ uzayı $\|.\|_\alpha$ normuna göre Banach uzayı olduğundan bu x elemanının $H_\alpha[a,b]$ uzayına ait olduğu aşikardır. (x_n) dizisi $\|.\|_\alpha$ normuna göre $x \in H_\alpha[a,b]$ elemanına yakınsak olduğundan, verilen bir keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı için $n \geq n_0$ iken

$$\|x_n - x\|_\alpha \leq \varepsilon \tag{3.1.2}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. $H_\alpha[a,b]$ uzayındaki norm tanımından ve (3.1.2)' den $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|_\alpha &= |x_n(a) - x(a)| + \sup_{t,s\in[a,b]} \left\{ \frac{|(x_n(t) - x(t)) - (x_n(s) - x(s))|}{|t-s|^\alpha} : t \neq s \right\} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

olur. (3.1.3)' dan $n \geq n_0$ için $|x_n(a) - x(a)| \leq \varepsilon$ olacağından

$$\lim_{n\to\infty} x_n(a) = x(a)$$

dır. (3.1.3) de s yerine a yazılırsa, $n \geq n_0$ için

$$\sup_{t,s\in[a,b]} \left\{ \frac{|(x_n(t) - x(t)) - (x_n(a) - x(a))|}{|t-a|^\alpha} : \ t \neq a \right\} \leq \varepsilon$$

olur. Buradan, $t \in [a,b]$ ve $n \geq n_0$ için

$$|(x_n(t) - x(t)) - (x_n(a) - x(a))| \leq \varepsilon |t-a|^\alpha \tag{3.1.4}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.1.3) ve (3.1.4)' den, $t \in [a,b]$ ve $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} |x_n(t) - x(t)| &\leq |(x_n(t) - x(t)) - (x_n(a) - x(a))| + |x_n(a) - x(a)| \\ &\leq \varepsilon (t-a)^\alpha + \varepsilon \\ &\leq \varepsilon \left(1 + (b-a)^\alpha\right) \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\|x_n - x\|_\infty \to 0$$

sonucu çıkartılır. Ayrıca $\|x_n\|_\beta \leq r$ veya

$$\|x_n\|_\beta = |x_n(a)| + \sup\left\{\frac{|x_n(t) - x_n(s)|}{|t-s|^\beta} : t,s \in [a,b] \text{ ve } t \neq s\right\} \leq r$$

olduğundan

$$|x_n(a)| + \frac{|x_n(t) - x_n(s)|}{|t-s|^\beta} \leq r \tag{3.1.5}$$

yazılır. (3.1.5) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limite geçilirse,

$$|x(a)| + \frac{|x(t) - x(s)|}{|t-s|^\beta} \leq r \tag{3.1.6}$$

olur. (3.1.6) eşitsizliğinde $t,s \in [a,b]$ için supremum alınırsa,

$$|x(a)| + \sup\left\{\frac{|x(t) - x(s)|}{|t-s|^\beta} : t,s \in [a,b] \text{ ve } t \neq s\right\} \leq r$$

veya

$$\|x\|_\beta \leq r$$

elde edilir. Dolayısıyla $x \in B_r^\beta$ olduğu görülür. Böylece $\overline{B_r^\beta}$ kümesinden alınan her x elemanı aynı zamanda B_r^β kümesine ait olduğundan $\overline{B_r^\beta} \subset B_r^\beta$ olur. Sonuç olarak $\overline{B_r^\beta} = B_r^\beta$ olacağından B_r^β yuvarı α üslü $H_\alpha[a,b]$ Hölder uzayının kapalı bir alt kümesidir.

Teorem 3.1.1 ve Lemma 3.1.3' e dayanarak aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

Sonuç 3.1.1. $0 < \alpha < \beta \leq 1$ *olmak üzere* $H_\beta[a,b]$ *Hölder uzayının* θ *merkezli* r *yarıçaplı kapalı ve sınırlı yuvarı olan* B_r^β *kümesi,* α *üslü* $H_\alpha[a,b]$ *Hölder uzayının kompakt bir alt kümesidir [8].*

3.2 Temel Sonuç

Teorem 3.2.1. $0 < \alpha \leq 1$ *olmak üzere* $H_\alpha[0,1]$ *Hölder uzayında (3.0.1) ile verilen*

$$x(t) = q(t) + (Tx)(t)\int_0^1 z(t,\mu)x(p(\mu))d\mu, t \in [0,1]$$

integral denklemini aşağıdaki şartlar ile birlikte göz önüne alalım.

i) $0 < \alpha < \beta \leq 1$ olmak üzere $q \in H_\beta[0,1]$.

ii) $z:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve birinci değişkene göre β üslü Hölder koşulunu sağlasın. Yani, her $t,s,\mu\in[0,1]$ için

$$|z(t,\mu)-z(s,\mu)|\le z_\beta|t-s|^\beta$$

eşitsizliğini sağlayan $z_\beta>0$ sayısı vardır.

iii) $p:[0,1]\to[0,1]$ fonksiyonu ölçülebilirdir.

iv) $T:H_\beta[0,1]\to H_\beta[0,1]$ operatörü $\|\cdot\|_\alpha$ normuna göre sürekli ve her $x\in H_\beta[0,1]$ için

$$\|Tx\|_\beta\le f(\|x\|_\beta)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde azalmayan bir $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+=[0,\infty)$ fonksiyonu da mevcut olsun.

v) K sabit sayısı

$$K=\sup\left\{\int_0^1|z(t,\mu)|d\mu : t\in[0,1]\right\}$$

olmak üzere,

$$\|q\|_\beta+(2K+z_\beta)rf(r)\le r$$

eşitsizliğini sağlayan bir r_0 pozitif sayısı mevcut olsun.

Bu koşullar altında (3.0.1) integral denkleminin $0<\alpha\le 1$ olmak üzere α üslü $H_\alpha[0,1]$ Hölder uzayında en az bir x çözümü vardır.

İspat: $H_\beta[0,1]$ uzayı üzerinde F operatörünü aşağıdaki biçimde tanımlayalım.

$$(Fx)(t)=q(t)+(Tx)(t)\int_0^1 z(t,\mu)x(p(\mu))d\mu,\quad t\in[0,1].$$

İlk önce F dönüşümün $H_\beta[0,1]$ uzayından $H_\beta[0,1]$ uzayına tanımlı olduğunu göstereceğiz. (i), (ii) ve (iii) varsayımlarını göz önünde bulundurarak $(t\neq s)$ $t,s\in[0,1]$ ve keyfi sabit $x\in H_\beta[0,1]$ için

$$\frac{|(Fx)(t)-(Fx)(s)|}{|t-s|^\beta}$$

$$=\frac{\left|q(t)+(Tx)(t)\int_0^1 z(t,\mu)x(p(\mu))d\mu-q(s)-(Tx)(s)\int_0^1 z(s,\mu)x(p(\mu))d\mu\right|}{|t-s|^\beta}$$

$$\le\frac{1}{|t-s|^\beta}\left[|q(t)-q(s)|+\left|(Tx)(t)\int_0^1 z(t,\mu)x(p(\mu))d\mu-(Tx)(s)\int_0^1 z(s,\mu)x(p(\mu))d\mu\right|\right]$$

$$\leq \frac{|q(t)-q(s)|}{|t-s|^{\beta}} + \frac{1}{|t-s|^{\beta}}\left|(Tx)(t)\int_0^1 z(t,\mu)x(p(\mu))\,d\mu - (Tx)(s)\int_0^1 z(t,\mu)x(p(\mu))\,d\mu\right|$$

$$+ \frac{1}{|t-s|^{\beta}}\left|(Tx)(s)\int_0^1 z(t,\mu)x(p(\mu))\,d\mu - (Tx)(s)\int_0^1 z(s,\mu)x(p(\mu))\,d\mu\right|$$

$$\leq \frac{|q(t)-q(s)|}{|t-s|^{\beta}} + \frac{|(Tx)(t)-(Tx)(s)|}{|t-s|^{\beta}}\int_0^1 |z(t,\mu)|\,|x(p(\mu))|\,d\mu$$

$$+ \frac{|(Tx)(s)|\int_0^1 |z(t,\mu)-z(s,\mu)|\,|x(p(\mu))|\,d\mu}{|t-s|^{\beta}}$$

bulunur. Bu son eşitsizlikten,

$$\frac{|(Fx)(t)-(Fx)(s)|}{|t-s|^{\beta}}$$

$$\leq \frac{|q(t)-q(s)|}{|t-s|^{\beta}} + \frac{|(Tx)(t)-(Tx)(s)|}{|t-s|^{\beta}}\|x\|_{\infty}\int_0^1 |z(t,\mu)|\,d\mu + \frac{\|Tx\|_{\infty}\|x\|_{\infty}\int_0^1 |z(t,\mu)-z(s,\mu)|\,d\mu}{|t-s|^{\beta}}$$

$$\leq \frac{|q(t)-q(s)|}{|t-s|^{\beta}} + \frac{|(Tx)(t)-(Tx)(s)|}{|t-s|^{\beta}}\|x\|_{\infty}K + \frac{\|Tx\|_{\infty}\|x\|_{\infty}\int_0^1 z_{\beta}\,|t-s|^{\beta}\,d\mu}{|t-s|^{\beta}}$$

$$\leq H_q^{\beta} + H_{Tx}^{\beta}\|x\|_{\infty}K + \|Tx\|_{\infty}\|x\|_{\infty}z_{\beta}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte sırasıyla Hölder uzayında $\|x\|_{\beta}$ tanımı ve Lemma 3.1.1 kullanılırsa

$$\frac{|(Fx)(t)-(Fx)(s)|}{|t-s|^{\beta}} \leq H_q^{\beta} + (K+z_{\beta})\|x\|_{\beta}\,\|Tx\|_{\beta} \tag{3.2.1}$$

elde edilir. (3.2.1)' den

$$|(Fx)(t)-(Fx)(s)| \leq c|t-s|^{\beta}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizlikten Fx fonksiyonunun Hölder koşulunu sağladığı anlaşılır. Buradan $Fx \in H_{\beta}[0,1]$ sonucu elde edilir. Bu ise F operatörün $H_{\beta}[0,1]$ uzayından yine kendi içine bir operatör olduğunu gösterir. Yani $F : H_{\beta}[0,1] \to H_{\beta}[0,1]$ dir.

Ayrıca Hölder uzayında norm tanımı ve (3.2.1)' den her $x \in H_\beta[0,1]$ için,

$$\begin{aligned}
\|Fx\|_\beta &= |(Fx)(0)| + \sup\left\{\frac{|(Fx)(t)-(Fx)(s)|}{|t-s|^\beta} : t,s \in [0,1], t \neq s\right\} \\
&\leq |(Fx)(0)| + H_q^\beta + (K+z_\beta)\|x\|_\beta \|Tx\|_\beta \\
&\leq |q(0)| + |(Tx)(0)| \int_0^1 |z(0,\mu)|\,|x(p(\mu))|\, d\mu + H_q^\beta + (K+z_\beta)\|x\|_\beta \|Tx\|_\beta \\
&\leq \|q\|_\beta + \|Tx\|_\infty \|x\|_\infty \int_0^1 |z(0,\mu)|\, d\mu + (K+z_\beta)\|x\|_\beta \|Tx\|_\beta \\
&\leq \|q\|_\beta + K\|Tx\|_\beta \|x\|_\beta + (K+z_\beta)\|x\|_\beta \|Tx\|_\beta \\
&= \|q\|_\beta + (2K+z_\beta)\|x\|_\beta \|Tx\|_\beta \\
&\leq \|q\|_\beta + (2K+z_\beta)\|x\|_\beta f\left(\|x\|_\beta\right) \qquad (3.2.2)
\end{aligned}$$

dır. Böylece (3.2.2) eşitsizliği ve (v) varsayımına göre $B_{r_0}^\beta$ yuvarından alınan bir x elamanı için $Fx \in B_{r_0}^\beta$ olur. Sonuç olarak F operatörü $B_{r_0}^\beta$ yuvarından yine $B_{r_0}^\beta$ yuvarına bir dönüşümdür. Yani,

$$B_{r_0}^\beta = \{x \in H_\beta[0,1] : \|x\|_\beta \leq r_0\}$$

olmak üzere

$$F : B_{r_0}^\beta \to B_{r_0}^\beta$$

dır.

Şimdi $0 < \alpha < \beta \leq 1$ olmak üzere F operatörünün $\|\cdot\|_\alpha$ normuna göre $B_{r_0}^\beta$ yuvarında sürekli olduğunu göstereceğiz. Bunun için bir operatörün bir noktadaki sürekliliği tanımı gereği keyfi seçilen sabit tutulan bir $y \in B_{r_0}^\beta$ ve keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı alalım.

(iv) varsayımından $T : H_\beta[0,1] \to H_\beta[0,1]$ operatörü $\|\cdot\|_\alpha$ normuna göre $H_\beta[0,1]$ Hölder uzayında sürekli olduğundan

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2\left(2K+z_\beta\right) f(r_0)}$$

eşitsizliğini sağlayan ε' a bağlı öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki: $\|x-y\|_\alpha \leq \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in B_{r_0}^{\beta}$ ve için

$$\|Tx - Ty\|_\alpha < \frac{\varepsilon}{4\left(K + z_\beta\right) r_0}$$

dır.

O zaman $0 < \alpha \leq 1$ ve $(t \neq s)$ $t,s \in [0,1]$ ve her $x,y \in B_{r_0}^{\beta}$ için

$$\frac{|[(Fx)(t) - (Fy)(t)] - [(Fx)(s) - (Fy)(s)]|}{|t-s|^\alpha}$$

$$= \left| \frac{\left[(Tx)(t) \int_0^1 z(t,\mu)x(p(\mu))\,d\mu - (Ty)(t) \int_0^1 z(t,\mu)y(p(\mu))d\mu\right]}{|t-s|^\alpha} \right.$$

$$\left. - \frac{\left[(Tx)(s) \int_0^1 z(s,\mu)x(p(\mu))\,d\mu - (Ty)(s) \int_0^1 z(s,\mu)y(p(\mu))d\mu\right]}{|t-s|^\alpha} \right|$$

$$= \frac{1}{|t-s|^\alpha} \left| \left[(Tx)(t) \int_0^1 z(t,\mu)x(p(\mu))\,d\mu - (Ty)(t) \int_0^1 z(t,\mu)x(p(\mu))\,d\mu\right] \right.$$

$$+ \left[(Ty)(t) \int_0^1 z(t,\mu)x(p(\mu))\,d\mu - (Ty)(t) \int_0^1 z(t,\mu)y(p(\mu))d\mu\right]$$

$$- \left[(Tx)(s) \int_0^1 z(s,\mu)x(p(\mu))\,d\mu - (Ty)(s) \int_0^1 z(s,\mu)x(p(\mu))\,d\mu\right]$$

$$\left. - \left[(Ty)(s) \int_0^1 z(s,\mu)x(p(\mu))\,d\mu - (Ty)(s) \int_0^1 z(s,\mu)y(p(\mu))d\mu\right] \right|$$

$$= \frac{1}{|t-s|^\alpha} \left| [(Tx)(t) - (Ty)(t)] \int_0^1 z(t,\mu)x(p(\mu))\,d\mu \right.$$

$$+ (Ty)(t) \int_0^1 z(t,\mu)\left[x(p(\mu)) - y(p(\mu))\right] d\mu$$

$$\left. - [(Tx)(s) - (Ty)(s)] \int_0^1 z(s,\mu)x(p(\mu))\,d\mu - (Ty)(s) \int_0^1 z(s,\mu)\left[x(p(\mu)) - y(p(\mu))\right] d\mu \right|$$

bulunur. Bu son eşitlikten,

$$\frac{|[(Fx)(t)-(Fy)(t)]-[(Fx)(s)-(Fy)(s)]|}{|t-s|^{\alpha}}$$

$$=\frac{1}{|t-s|^{\alpha}}\left|\{[(Tx)(t)-(Ty)(t)]-[(Tx)(s)-(Ty)(s)]\}\int_0^1 z(t,\mu)x(p(\mu))\,d\mu\right.$$

$$+[(Tx)(s)-(Ty)(s)]\int_0^1 z(t,\mu)x(p(\mu))\,d\mu-[(Tx)(s)-(Ty)(s)]\int_0^1 z(s,\mu)x(p(\mu))\,d\mu$$

$$\left.+(Ty)(t)\int_0^1 z(t,\mu)\left[x(p(\mu))-y(p(\mu))\right]d\mu-(Ty)(s)\int_0^1 z(s,\mu)\left[x(p(\mu))-y(p(\mu))\right]d\mu\right|$$

$$=\frac{1}{|t-s|^{\alpha}}\left|\{[(Tx)(t)-(Ty)(t)]-[(Tx)(s)-(Ty)(s)]\}\int_0^1 z(t,\mu)x(p(\mu))\,d\mu\right.$$

$$+[(Tx)(s)-(Ty)(s)]\int_0^1 (z(t,\mu)-z(s,\mu))\,x(p(\mu))\,d\mu$$

$$+(Ty)(t)\int_0^1 z(t,\mu)\left[x(p(\mu))-y(p(\mu))\right]d\mu$$

$$\left.-(Ty)(s)\int_0^1 z(s,\mu)\left[x(p(\mu))-y(p(\mu))\right]d\mu\right|$$

elde edilir. Yine son eşitlikten,

$$\frac{|[(Fx)(t)-(Fy)(t)]-[(Fx)(s)-(Fy)(s)]|}{|t-s|^{\alpha}}$$

$$\leq\frac{1}{|t-s|^{\alpha}}\left|[(Tx)(t)-(Ty)(t)]-[(Tx)(s)-(Ty)(s)]\right|\left|\int_0^1 z(t,\mu)x(p(\mu))\,d\mu\right|$$

$$+\frac{1}{|t-s|^{\alpha}}\left|(Tx)(s)-(Ty)(s)\right|\left|\int_0^1 (z(t,\mu)-z(s,\mu))\,x(p(\mu))\,d\mu\right|$$

$$+\frac{1}{|t-s|^{\alpha}}\left|(Ty)(t)\int_0^1 z(t,\mu)\left[x(p(\mu))-y(p(\mu))\right]d\mu\right.$$

$$\left.-(Ty)(s)\int_0^1 z(s,\mu)\left[x(p(\mu))-y(p(\mu))\right]d\mu\right|$$

$$\leq \frac{|[(Tx)(t)-(Ty)(t)]-[(Tx)(s)-(Ty)(s)]|}{|t-s|^{\alpha}} \|x\|_{\infty} \int_0^1 |z(t,\mu)|\, d\mu$$

$$+ |[(Tx)(s)-(Ty)(s)]-[(Tx)(0)-(Ty)(0)]| \, \|x\|_{\infty} \int_0^1 \frac{|z(t,\mu)-z(s,\mu)|}{|t-s|^{\alpha}} d\mu$$

$$+ |(Tx)(0)-(Ty)(0)| \, \|x\|_{\infty} \int_0^1 \frac{|z(t,\mu)-z(s,\mu)|}{|t-s|^{\alpha}} d\mu$$

$$+ \frac{1}{|t-s|^{\alpha}} \left| (Ty)(t) \int_0^1 z(t,\mu)\, [x(p(\mu))-y(p(\mu))]\, d\mu \right.$$

$$\left. - (Ty)(s) \int_0^1 z(t,\mu)\, [x(p(\mu))-y(p(\mu))]\, d\mu \right|$$

$$+ \frac{1}{|t-s|^{\alpha}} \left| (Ty)(s) \int_0^1 z(t,\mu)\, [x(p(\mu))-z(p(\mu))]\, d\mu \right.$$

$$\left. - (Ty)(s) \int_0^1 z(s,\mu)\, [x(p(\mu))-y(p(\mu))]\, d\mu \right|$$

bulunur. Son eşitsizlikte gerekli düzenlemeler yapılarak,

$$\frac{|[(Fx)(t)-(Fy)(t)]-[(Fx)(s)-(Fy)(s)]|}{|t-s|^{\alpha}}$$

$$\leq H^{\alpha}_{Tx-Ty} \|x\|_{\infty} K$$

$$+ \sup_{u,v\in[0,1]} |[(Tx)(u)-(Ty)(u)]-[(Tx)(v)-(Ty)(v)]| \, \|x\|_{\infty} \int_0^1 \frac{|z(t,\mu)-z(s,\mu)|}{|t-s|^{\alpha}} d\mu$$

$$+ |(Tx)(0)-(Ty)(0)| \, \|x\|_{\infty} \int_0^1 \frac{|z(t,\mu)-z(s,\mu)|}{|t-s|^{\alpha}} d\mu$$

$$+ \frac{|(Ty)(t)-(Ty)(s)|}{|t-s|^{\alpha}} \int_0^1 |z(t,\mu)|\, |x(p(\mu))-y(p(\mu))|\, d\mu$$

$$+ |(Ty)(s)| \int_0^1 \frac{|z(t,\mu)-z(s,\mu)|}{|t-s|^{\alpha}} |x(p(\mu))-y(p(\mu))|\, d\mu$$

bulunur. Bu eşitsizlikten

$$\frac{|[(Fx)(t)-(Fy)(t)]-[(Fx)(s)-(Fy)(s)]|}{|t-s|^{\alpha}}$$

$$\leq K\|x\|_{\infty}\|Tx-Ty\|_{\alpha}$$

$$+\sup_{u,v\in[0,1]}|[(Tx)(u)-(Ty)(u)]-[(Tx)(v)-(Ty)(v)]|\,\|x\|_{\infty}\int_0^1\frac{z_{\beta}|t-s|^{\beta}}{|t-s|^{\alpha}}d\mu$$

$$+|(Tx)(0)-(Ty)(0)|\,\|x\|_{\infty}\int_0^1\frac{z_{\beta}|t-s|^{\beta}}{|t-s|^{\alpha}}d\mu$$

$$+\frac{|(Ty)(t)-(Ty)(s)|}{|t-s|^{\alpha}}\int_0^1|z(t,\mu)|\,|x(p(\mu))-y(p(\mu))|\,d\mu$$

$$+|(Ty)(s)|\int_0^1\frac{z_{\beta}|t-s|^{\beta}}{|t-s|^{\alpha}}|x(p(\mu))-y(p(\mu))|\,d\mu$$

elde ederiz. Son eşitsizlikte, Lemma 3.1.2 ve Hölder uzayındaki norm tanımından sırasıyla elde edilen $\|x\|_{\infty}\leq\|x\|_{\alpha}\leq\|x\|_{\beta}$ ve $H_x^{\alpha}\leq\|x\|_{\alpha}$ bağıntıları kullanılarak,

$$\frac{|[(Fx)(t)-(Fy)(t)]-[(Fx)(s)-(Fy)(s)]|}{|t-s|^{\alpha}}$$

$$\leq K\|x\|_{\infty}\|Tx-Ty\|_{\alpha}$$

$$+z_{\beta}\|x\|_{\infty}|t-s|^{\beta-\alpha}\sup_{u,v\in[0,1],u\neq v}\left\{\frac{|[(Tx)(u)-(Ty)(u)]-[(Tx)(v)-(Ty)(v)]|}{|u-v|^{\alpha}}|u-v|^{\alpha}\right\}$$

$$+z_{\beta}\|x\|_{\infty}|t-s|^{\beta-\alpha}|(Tx)(0)-(Ty)(0)|+KH_{Ty}^{\alpha}\|x-y\|_{\infty}+z_{\beta}\|Ty\|_{\infty}\|x-y\|_{\infty}|t-s|^{\beta-\alpha}$$

$$\leq K\|x\|_{\beta}\|Tx-Ty\|_{\alpha}+2z_{\beta}\|x\|_{\beta}\|Tx-Ty\|_{\alpha}+K\|Ty\|_{\alpha}\|x-y\|_{\alpha}+z_{\beta}\|Ty\|_{\alpha}\|x-y\|_{\alpha}$$

$$=\left(K+2z_{\beta}\right)\|x\|_{\beta}\|Tx-Ty\|_{\alpha}+\left(K+z_{\beta}\right)\|Ty\|_{\alpha}\|x-y\|_{\alpha} \tag{3.2.3}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.2.3) eşitsizliği, (iv) varsayımı ve $x, y \in B_{r_0}^{\beta}$ olduğundan,

$$\frac{|[(Fx)(t)-(Fy)(t)]-[(Fx)(s)-(Fy)(s)]|}{|t-s|^{\alpha}}$$

$$\leq \left(K+2z_{\beta}\right)\|x\|_{\beta}\|Tx-Ty\|_{\alpha}+\left(K+z_{\beta}\right)\|Ty\|_{\beta}\|x-y\|_{\alpha}$$

$$\leq \left(K+2z_{\beta}\right)\|x\|_{\beta}\|Tx-Ty\|_{\alpha}+\left(K+z_{\beta}\right)f\left(\|y\|_{\beta}\right)\|x-y\|_{\alpha}$$

$$\leq \left(K+2z_{\beta}\right)r_0\|Tx-Ty\|_{\alpha}+\left(K+z_{\beta}\right)f\left(r_0\right)\delta \tag{3.2.4}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
|(Fx)(0)-(Fy)(0)| &= \left|(Tx)(0)\int_0^1 z(0,\mu)x(p(\mu))\,d\mu-(Ty)(0)\int_0^1 z(0,\mu)y(p(\mu))\,d\mu\right| \\
&\leq \left|(Tx)(0)\int_0^1 z(0,\mu)x(p(\mu))\,d\mu-(Tx)(0)\int_0^1 z(0,\mu)y(p(\mu))\,d\mu\right| \\
&+\left|(Tx)(0)\int_0^1 z(0,\mu)y(p(\mu))\,d\mu-(Ty)(0)\int_0^1 z(0,\mu)y(p(\mu))\,d\mu\right| \\
&\leq |(Tx)(0)|\int_0^1 |z(0,\mu)|\,|x(p(\mu))-y(p(\mu))|\,d\mu \\
&+|(Tx)(0)-(Ty)(0)|\int_0^1 |z(0,\mu)|\,|y(p(\mu))|\,d\mu
\end{aligned}$$

olup, bu son eşitsizlikten,

$$\begin{aligned}
|(Fx)(0)-(Fy)(0)| &\leq K\|Tx\|_{\infty}\|x-y\|_{\infty}+K\|y\|_{\infty}\|Tx-Ty\|_{\infty} \\
&\leq K\|Tx\|_{\beta}\|x-y\|_{\alpha}+K\|y\|_{\beta}\|Tx-Ty\|_{\alpha} \\
&\leq Kf\left(\|x\|_{\beta}\right)\|x-y\|_{\alpha}+K\|y\|_{\beta}\|Tx-Ty\|_{\alpha} \\
&\leq Kf\left(r_0\right)\delta+Kr_0\|Tx-Ty\|_{\alpha}
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.2.4) ve (3.2.5) birlikte düşünülerek,

$$\|Fx-Fy\|_\alpha$$

$$= |(Fx)(0)-(Fy)(0)| + H^{\alpha}_{Fx-Fy}$$

$$= |(Fx)(0)-(Fy)(0)| + \sup_{t,s\in[0,1],t\neq s}\left\{\frac{|[(Fx)(t)-(Fy)(t)]-[(Fx)(s)-(Fy)(s)]|}{|t-s|^{\alpha}}\right\}$$

$$\leq Kf(r_0)\delta + Kr_0\|Tx-Ty\|_\alpha + \left(K+2z_\beta\right)r_0\|Tx-Ty\|_\alpha + \left(K+z_\beta\right)f(r_0)\delta$$

$$= 2\left(K+z_\beta\right)r_0\|Tx-Ty\|_\alpha + \left(2K+z_\beta\right)f(r_0)\delta$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon$$

olur. Buradan $F : B^{\beta}_{r_0} \to B^{\beta}_{r_0}$ operatörünün $\|\cdot\|_\alpha$ normuna göre $y \in B^{\beta}_{r_0}$ için sürekli olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca $y \in B^{\beta}_{r_0}$ keyfi olduğundan F operatörü $\|\cdot\|_\alpha$ normuna göre $B^{\beta}_{r_0}$ yuvarının tümünde sürekli olduğu sonucu çıkar. Sınırlı olan $B^{\beta}_{r_0}$ yuvarı $H_\alpha[0,1]$ Hölder uzayının kompakt alt kümesidir, (Bak. Sonuç 3.1.1). Bu yüzden Schauder sabit nokta teoremine göre F operatörünün $B^{\beta}_{r_0}$ yuvarında sabit bıraktığı en az bir nokta vardır. Bu da ispatı tamamlar.

3.3 Örnekler

Burada (3.0.1) integral denklemi biçiminde iki tane integral denklem incelenecek ve bu iki integral denklemin temel sonuç Teorem (3.2.1)' in hipotezlerini nasıl sağladığı gösterilecektir. Sonuç olarak bu denklemlerin $0<\alpha\leq 1$ için $H_\alpha[0,1]$ Hölder uzayında en az bir $x=x(t)$ çözümünün olduğu görülecektir.

Örnek 3.3.1. *$t\in[0,1]$ ve m, $\hat{m}$, b negatif olmayan sabit sayılar olmak üzere;*

$$x(t) = \ln\left(\sqrt[4]{m\sin t+\hat{m}}+1\right) + x^2(t)\int_0^1 \sqrt[3]{bt^3+\mu x}\left(\frac{1}{\mu+1}\right)d\mu \qquad (3.3.1)$$

integral denklemini ele alalım.

$$q(t) = \ln\left(\sqrt[4]{m\sin t+\hat{m}}+1\right),\ z(t,\mu) = \sqrt[3]{bt^3+\mu},\ p(\mu) = \frac{1}{\mu+1}$$

ve T operatörü her $t \in [0,1]$ için

$$(Tx)(t) = x^2(t)$$

olacak şekilde düşünülürse (3.3.1) integral denkleminin (3.0.1)' in özel bir hali olduğu görülür.

Öncelikle, (3.3.1) integral denkleminin Teorem 3.2.1' in (i)-(v) varsayımlarını nasıl sağladığı gösterilecektir.

i) $h, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonlarını

$$h(t) = \ln(t+1), \; g(t) = \sqrt[4]{t}$$

olacak şekilde seçilirse, kolay bir şekilde bu fonksiyonların konkav olduğu ve orjinde sıfır değerini aldıkları görülür. Tanım 2.0.30 ve Lemma 2.0.2' den h ve g fonksiyonları alt toplamsaldır. Alt toplamsallığın sonucu ile $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$ ve $x > 0$ için $\ln x < x$ bağıntıları kullanılarak,

$$\begin{aligned}
|q(t)-q(s)| &= \left|\ln\left(\sqrt[4]{m\sin t+\hat{m}}+1\right) - \ln\left(\sqrt[4]{m\sin s+\hat{m}}+1\right)\right| \\
&\leq \ln\left|\sqrt[4]{m\sin t+\hat{m}} - \sqrt[4]{m\sin s+\hat{m}}\right| \\
&< \left|\sqrt[4]{m\sin t+\hat{m}} - \sqrt[4]{m\sin s+\hat{m}}\right| \\
&\leq \left|\sqrt[4]{m\,|\sin t - \sin s|}\right| \\
&\leq \sqrt[4]{m}\,|t-s|^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. α ve β sabitleri $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ ve $\beta = \frac{1}{4}$ olacak şekilde seçilirse son eşitsizlikten $H_q^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{m}$ olup $q \in H_{\frac{1}{4}}[0,1]$ olduğu görülür. Bu yüzden Teorem 3.2.1' in (i) varsayımı sağlanır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|q\|_{\frac{1}{4}} &= |q(0)| + \sup\left\{\frac{|q(t)-q(s)|}{|t-s|^{\frac{1}{4}}} : t,s \in [0,1], t \neq s\right\} \\
&= |q(0)| + H_q^{\frac{1}{4}} = \ln\left(\sqrt[4]{\hat{m}}+1\right) + \sqrt[4]{m}
\end{aligned}$$

dır.

ii) $\sqrt[3]{t}$ fonksiyonun alt toplamsallık özelliğinden, her $t,s \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}|z(t,\mu)-z(s,\mu)| &= \left|\sqrt[3]{bt^3+\mu}-\sqrt[3]{bs^3+\mu}\right| \\ &\le \sqrt[3]{|bt^3-bs^3|} \\ &= \sqrt[3]{b}\sqrt[3]{|t^3-s^3|} \\ &= \sqrt[3]{b}\sqrt[3]{|t-s|}\sqrt[3]{|t^2+ts+s^2|} \\ &\le \sqrt[3]{3b}|t-s|^{\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[3]{3b}|t-s|^{\frac{1}{4}}|t-s|^{\frac{1}{12}} \\ &\le \sqrt[3]{3b}|t-s|^{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece Teorem 3.2.1' in (ii) varsayımı sağlanır (Burada $z_\beta = z_{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{3b}$ dır).

iii) $p(\mu) = \frac{1}{\mu+1}$ sürekli fonksiyonunun Teorem 3.2.1' in (iii) varsayımını sağladığı açıktır.

iv) Her $x \in H_\beta[0,1]$ için

$$\begin{aligned}\|Tx\|_\beta &= |(Tx)(0)| + \sup_{u,v\in[0,1]}\left\{\frac{|(Tx)(u)-(Tx)(v)|}{|u-v|^\beta} : u \neq v\right\} \\ &= \left|x^2(0)\right| + \sup_{u,v\in[0,1]}\left\{\frac{\left|x^2(u)-x^2(v)\right|}{|u-v|^\beta} : u \neq v\right\} \\ &= \left|x^2(0)\right| + \sup_{u,v\in[0,1]}\left\{\frac{|x(u)-x(v)|\,|x(u)+x(v)|}{|u-v|^\beta} : u \neq v\right\} \\ &\le \left|x^2(0)\right| + \sup_{u,v\in[0,1]}\left\{\frac{|x(u)-x(v)|\,(|x(u)|+|x(v)|)}{|u-v|^\beta} : u \neq v\right\} \\ &\le \left|x^2(0)\right| + 2\|x\|_\infty \sup_{u,v\in[0,1]}\left\{\frac{|x(u)-x(v)|}{|u-v|^\beta} : u \neq v\right\} \\ &\le \|x\|_\beta^2 + 2\|x\|_\beta\|x\|_\beta \\ &= 3\|x\|_\beta^2\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden T operatörü $H_\beta[0,1]$ uzayından $H_\beta[0,1]$ uzayının içine tanımlıdır. (iv) varsayımındaki $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ azalmayan fonksiyonunu $f(x) = 3x^2$ olarak seçilirse söz konusu teoremin (iv) varsayımındaki

$$\|Tx\|_\beta \le f(\|x\|_\beta)$$

eşitsizliği de sağlanır.

Şimdi (iv) varsayımındaki $T : H_\beta[0,1] \to H_\beta[0,1]$ operatörünün $\|.\|_\alpha$ normuna göre $H_\beta[0,1]$ uzayında sürekli olduğunu göstereceğiz. Bunun için keyfi seçilip sabit tutulan bir $y \in H_\beta[0,1]$

ve keyfi bir $\varepsilon > 0$ sayısı alalım. δ pozitif sayısını

$$0 < \delta < \sqrt{\|y\|_\alpha^2 + \frac{\varepsilon}{3}} - \|y\|_\alpha$$

olacak şekilde seçersek (Bu seçimin nasıl yapıldığını görmek için (3.3.4) bağıntısına bakılabilir) $x \in H_\beta[0,1]$ fonksiyonu da $\|x-y\|_\alpha < \delta$ eşitsizliğini sağlayan keyfi bir fonksiyon olmak üzere, her $u, v \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
&(Tx - Ty)(u) - (Tx - Ty)(v) \\
&= x^2(u) - y^2(u) - \left(x^2(v) - y^2(v)\right) \\
&= (x(u) + y(u))(x(u) - y(u)) - (x(v) + y(v))(x(v) - y(v)) \\
&= (x(u) + y(u))(x(u) - y(u)) - (x(u) + y(u))(x(v) - y(v)) \\
&+ (x(u) + y(u))(x(v) - y(v)) - (x(v) + y(v))(x(v) - y(v)) \\
&= (x(u) + y(u))[(x(u) - y(u)) - (x(v) - y(v))] \\
&+ (x(v) - y(v))[(x(u) + y(u)) - (x(v) + y(v))]
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

olur. (3.3.2) den yola çıkarak,

$$\begin{aligned}
&|(Tx - Ty)(u) - (Tx - Ty)(v)| \\
&\leq |x(u) + y(u)|\,|[x(u) - y(u)] - [x(v) - y(v)]| + |x(v) - y(v)|\,|[x(u) + y(u)] - [x(v) + y(v)]| \\
&\leq \|x + y\|_\infty |[x(u) - y(u)] - [x(v) - y(v)]| + \|x - y\|_\infty |[x(u) + y(u)] - [x(v) + y(v)]| \\
&\leq \|x + y\|_\alpha |[x(u) - y(u)] - [x(v) - y(v)]| + \|x - y\|_\alpha |[x(u) + y(u)] - [x(v) + y(v)]|
\end{aligned}$$

elde ederiz. $u, v \in [0,1]$ ve $u \neq v$ için yukarıdaki eşitsizlik kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\sup\left\{\frac{|(Tx - Ty)(u) - (Tx - Ty)(v)|}{|u - v|^\alpha}\right\} \\
&\leq \|x + y\|_\alpha \sup\left\{\frac{|[x(u) - y(u)] - [x(v) - y(v)]|}{|u - v|^\alpha}\right\} \\
&+ \|x - y\|_\alpha \sup\left\{\frac{|[x(u) + y(u)] - [x(v) + y(v)]|}{|u - v|^\alpha}\right\} \\
&\leq \|x + y\|_\alpha \|x - y\|_\alpha + \|x - y\|_\alpha \|x + y\|_\alpha \\
&= 2\|x - y\|_\alpha \|x + y\|_\alpha
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

elde edilir. $u, v \in [0,1]$ için (3.3.3)' den,

$$
\begin{aligned}
\|Tx-Ty\|_{\alpha} &= |(Tx-Ty)(0)| + \sup_{u\neq v}\left\{\frac{|(Tx-Ty)(u)-(Tx-Ty)(v)|}{|u-v|^{\alpha}}\right\}\\
&\leq \left|x^{2}(0)-y^{2}(0)\right| + 2\|x-y\|_{\alpha}\|x+y\|_{\alpha}\\
&= |x(0)+y(0)|\,|x(0)-y(0)| + 2\|x-y\|_{\alpha}\|x+y\|_{\alpha}\\
&\leq \|x+y\|_{\infty}\|x-y\|_{\infty} + 2\|x+y\|_{\alpha}\|x-y\|_{\alpha}\\
&\leq 3\|x+y\|_{\alpha}\|x-y\|_{\alpha}\\
&\leq 3\|x-y\|_{\alpha}\left(\|x-y\|_{\alpha}+2\|y\|_{\alpha}\right)\\
&\leq 3\delta\left(\delta+2\|y\|_{\alpha}\right)\\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır. Çünkü δ pozitif sayısı $3\delta(\delta+2\|y\|_{\alpha})<\varepsilon$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde aşağıdaki gibi belirlenebilir. Nitekim $3\delta(\delta+2\|y\|_{\alpha})<\varepsilon$ veya

$$3\delta^{2}+6\delta\|y\|_{\alpha}-\varepsilon<0 \tag{3.3.4}$$

bağıntısındaki δ' ya bağlı parabolün diskriminantı $\Delta=36\|y\|_{\alpha}^{2}+12\varepsilon$ olup δ_1,δ_2 kökleri

$$\delta_{1,2}=\frac{-6\|y\|_{\alpha}\pm\sqrt{36\|y\|_{\alpha}^{2}+12\varepsilon}}{6}=-\|y\|_{\alpha}\pm\sqrt{\|y\|_{\alpha}^{2}+\frac{\varepsilon}{3}}$$

olur. Dolayısıyla (3.3.4) eşitsizliğini sağlayan δ sayısı: $\delta_1<0$ ve $\delta_2>0$ kökleri arasında pozitif olarak

$$0<\delta<\sqrt{\|y\|_{\alpha}^{2}+\frac{\varepsilon}{3}}-\|y\|_{\alpha} \tag{3.3.5}$$

biçiminde, örneğin $\delta=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\|y\|_{\alpha}^{2}+\frac{\varepsilon}{3}}-\|y\|_{\alpha}\right)$ olarak seçilebilir.

Buna göre artık $\|x-y\|_{\alpha}<\delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x\in H_{\beta}[0,1]$ için $\|Tx-Ty\|_{\alpha}\leq 3\delta(\delta+2\|y\|_{\alpha})<\varepsilon$ veya $\|Tx-Ty\|_{\alpha}<\varepsilon$ olduğu görülür. Bu ise T operatörünün $\|\cdot\|_{\alpha}$ normuna göre $y\in H_{\beta}[0,1]$ için sürekli olduğunu gösterir. Başlangıçta, $y\in H_{\beta}[0,1]$ keyfi seçilip sabit tutulan fonksiyon olarak alındığından, T operatörü $\|\cdot\|_\alpha$ normuna göre $H_\beta\,[0,1]$ Hölder uzayında süreklidir.

v) K sabiti ise

$$\begin{aligned}
K &= \sup\left\{\int_0^1 |z(t,\mu)|d\mu : t\in[0,1]\right\}\\
&= \sup\left\{\int_0^1 \left|\sqrt[3]{bt^3+\mu}\right| d\mu : t\in[0,1]\right\}\\
&= \int_0^1 \sqrt[3]{b+\mu}\,d\mu\\
&= \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{(b+1)^4}-\sqrt[3]{b^4}\right)
\end{aligned}$$

dır. Bu durumda Teorem 3.2.1' in (v) varsayımındaki

$$\|q\|_{\frac{1}{4}}+(2K+z_{\frac{1}{4}})rf(r)\le r$$

eşitsizliği yukarıda bulunanlar yerlerine yazılarak

$$\ln\left(\sqrt[4]{\hat{m}}+1\right)+\sqrt[4]{m}+\left[\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(b+1)^4}-\sqrt[3]{b^4}\right)+\sqrt[3]{3b}\right]3r^3\le r \tag{3.3.6}$$

şeklinde yazılır. Açıktır ki, $m,\hat{m}$ ve b sabitlerinin uygun olarak seçilebilmesi koşuluyla, (3.3.6) eşitsizliğini sağlayan bir pozitif r_0 sayısı vardır. Örneğin $m=\frac{1}{2^{16}}$, $\hat{m}=0$ ve $b=1$ olacak şekilde alırsak, $r_0=\frac{1}{4}$ olarak alınabilir. Bu değerlerle (3.3.6) eşitsizliğinin

$$\|q\|_{\frac{1}{4}}+(2K+z_{\frac{1}{4}})r_0f(r_0)\le r_0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \ln\left(\sqrt[4]{\hat{m}}+1\right)+\sqrt[4]{m}+\left[\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(b+1)^4}-\sqrt[3]{b^4}\right)+\sqrt[3]{3b}\right]3r_0^3\le r_0\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{16}+\left[\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{16}-1\right)+\sqrt[3]{3}\right]3r_0^3\le r_0\\
&\Leftrightarrow\approx 0,23696<\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

sağlanmış olduğu görülür.

Böylece, temel sonucumuz olan Teorem 3.2.1' in bütün hipotezleri sağlandığından, $0<\alpha<\frac{1}{4}$ olmak üzere (3.3.1) denkleminin $H_\alpha[0,1]$ uzayında en az bir çözümü olduğu sonucuna varırız.

Örnek 3.3.2. $0\le b$ *sabit bir sayı olsun.*

$$x(t)=\ln\left(\frac{t}{7}+1\right)+(mx(t)+n)\int_0^1\sqrt{bt^2+\mu x(e^\mu)}\,d\mu,\ \ t\in[0,1] \tag{3.3.7}$$

integral denklemini ele alalım.

$$q(t)=\ln\left(\frac{t}{7}+1\right),\ z(t,\mu)=\sqrt{bt^2+\mu},\ p(\mu)=e^{\mu}$$

ve m, n herhangi iki gerçel sayı olmak üzere T operatörü

$$(Tx)(t)=mx(t)+n$$

olacak şekilde düşünülürse (3.3.7) integral denkleminin (3.0.1)' in özel bir hali olduğu görülür.

Aşağıda, (3.3.7) integral denkleminin Teorem 3.2.1' in (i)-(v) varsayımlarını sağladığı gösterilecek.

i) $q:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ tanımlı $q(t)=\ln\left(\frac{t}{7}+1\right)$ kuralı ile verilen fonksiyon konkav ve orjinde sıfır değerini aldığından Tanım 2.0.30 ve Lemma 2.0.2' den q fonksiyonu alt toplamsaldır. Sırasıyla alt toplamsallığın sonucu ve $x>0$ için $\ln x<x$ eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}|q(t)-q(s)|&=\left|\ln\left(\frac{t}{7}+1\right)-\ln\left(\frac{s}{7}+1\right)\right|\\&\le\ln\left|\frac{t-s}{7}\right|\\&<\frac{|t-s|}{7}\\&\le\frac{1}{7}|t-s|^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buna göre α ve β sabitlerini $0<\alpha<\frac{1}{2}$ ve $\beta=\frac{1}{2}$ olacak şekilde seçersek, $H_q^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{7}$ ve $q\in H_{\frac{1}{2}}[0,1]$ olduğu görülür. Bununla birlikte

$$\begin{aligned}\|q\|_{\frac{1}{2}}&=|q(0)|+\sup\left\{\frac{|q(t)-q(s)|}{|t-s|^{\frac{1}{2}}}:t,s\in[0,1],t\neq s\right\}\\&=|q(0)|+H_q^{\frac{1}{2}}=H_q^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{7}\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

ii) $\sqrt{t}$ fonksiyonunun alt toplamsallık özelliği de kullanılarak her $t,s\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned}|z(t,\mu)-z(s,\mu)|&=\left|\sqrt{bt^2+\mu}-\sqrt{bs^2+\mu}\right|\\&\le\sqrt{|bt^2-bs^2|}\\&=\sqrt{b}\sqrt{|t^2-s^2|}\\&=\sqrt{b}\sqrt{|t-s|}\sqrt{|t+s|}\\&\le\sqrt{b}\sqrt{2}|t-s|^{\frac{1}{2}}\\&\le\sqrt{2b}|t-s|^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Teorem 3.2.1' in varsayımındaki $z_\beta = z_{\frac{1}{2}} = \sqrt{2b}$ olur.

iii) $p(\mu) = e^{\mu}$ sürekli fonksiyonu ölçülebilirdir.

iv) Her $x \in H_\beta[0,1]$ ve $t,s \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_\beta &= |(Tx)(0)| + \sup\left\{ \frac{|(Tx)(t) - (Tx)(s)|}{|t-s|^\beta} : t \neq s \right\} \\
&= |mx(0) + n| + \sup\left\{ \frac{|mx(t) + n - mx(s) - n|}{|t-s|^\beta} :\ t \neq s \right\} \\
&= |m|\,|x(0)| + |n| + \sup\left\{ \frac{|x(t) - x(s)|\,|m|}{|t-s|^\beta} :\ t \neq s \right\} \\
&\leq |m|\,|x(0)| + |n| + |m| \sup\left\{ \frac{|x(t) - x(s)|}{|t-s|^\beta} :\ t \neq s \right\} \\
&\leq |m| \left(|x(0)| + \sup\left\{ \frac{|x(t) - x(s)|}{|t-s|^\beta} :\ t \neq s \right\} \right) + |n| \\
&\leq |m|\,\|x\|_\beta + |n|
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden T operatörü $H_\beta[0,1]$ uzayından $H_\beta[0,1]$ uzayına tanımlıdır. Son eşitsizlikten hareketle $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu $f(x) = |m|x + |n|$ olarak seçersek bu fonksiyon azalmayandır ve söz konusu teoremin (iv) varsayımındaki

$$\|Tx\|_\beta \leq f(\|x\|_\beta)$$

eşitsizliği de sağlanır.

Şimdi T operatörünün $\|.\|_\alpha$ normuna göre $H_\beta[0,1]$ uzayında sürekli olduğunu göstereceğiz. Bunun için keyfi sabit $y \in H_\beta[0,1]$ ve keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. δ pozitif sayısını $m \neq 0$ için

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{|m|}$$

olacak şekilde seçer ve $x \in H_\beta[0,1]$ fonksiyonu da $\|x-y\|_\alpha < \delta$ eşitsizliğini sağlayan keyfi bir fonksiyon olarak alınırsa:

O zaman her $t,s \in [0,1]$ ve $t \neq s$ için

$$\begin{aligned}
\|Tx-Ty\|_{\alpha} &= |(Tx-Ty)(0)| + \sup\left\{\frac{|(Tx-Ty)(t)-(Tx-Ty)(s)|}{|t-s|^{\alpha}}\right\} \\
&= |mx(0)-my(0)| + \sup\left\{\frac{|(mx(t)-my(t))-(mx(s)-my(s))|}{|t-s|^{\alpha}}\right\} \\
&= |m|\,|x(0)-y(0)| + |m|\sup\left\{\frac{|(x(t)-y(t))-(x(s)-y(s))|}{|t-s|^{\alpha}}\right\} \\
&= |m|\left(|x(0)-y(0)| + \sup\left\{\frac{|(x(t)-y(t))-(x(s)-y(s))|}{|t-s|^{\alpha}}\right\}\right) \\
&= |m|\,\|x-y\|_{\alpha} \\
&\le |m|\,\delta \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Bu ise T operatörünün $m \neq 0$ için $\|\cdot\|_{\alpha}$ normuna göre $y \in H_{\beta}[0,1]$ için sürekli olduğunu gösterir. Ayrıca $m=0$ için $\|Tx-Ty\|_{\alpha}=0$ olacağından T operatörünün $\|\cdot\|_{\alpha}$ normuna göre sürekliliği açıktır. Başlangıçta, $y \in H_{\beta}[0,1]$ keyfi seçilip sabit tutulan fonksiyon olarak alındığından, T operatörü $\|\cdot\|_{\alpha}$ normuna göre $H_{\beta}[0,1]$ Hölder uzayında süreklidir.

v) K sabiti,

$$\begin{aligned}
K &= \sup\left\{\int_0^1 |z(t,\mu)|d\mu : t \in [0,1]\right\} \\
&= \sup\left\{\int_0^1 \left|\sqrt{bt^2+\mu}\right| d\mu : t \in [0,1]\right\} \\
&= \int_0^1 \sqrt{b+\mu}\,d\mu \\
&= \frac{2}{3}\left(\sqrt{(b+1)^3}-\sqrt{b^3}\right)
\end{aligned}$$

dır. Bu durumda Teorem 3.2.1' in (v) varsayımındaki

$$\|q\|_{\frac{1}{2}} + (2K+z_{\frac{1}{2}})rf(r) \le r$$

eşitsizliği, yukarıda bulunanlar yerlerine yazılarak

$$\frac{1}{7} + \left[\frac{4}{3}\left(\sqrt{(b+1)^3}-\sqrt{b^3}\right)+\sqrt{2b}\right] r\left(|m|\,r+|n|\right) \le r \tag{3.3.8}$$

elde edilir.

m, n ve b sabitlerinin uygun seçilmesi koşuluyla, (3.3.8) eşitsizliğini sağlayan bir pozitif r_0 sayısı vardır. Örneğin $m=\frac{1}{10}$, $n=\frac{1}{60}$, $b=\frac{1}{2}$ ve $r_0=\frac{1}{6}$ olacak şekilde alırsak, (3.3.8) eşitsizliğinin

$$\begin{aligned}
&\|q\|_{\frac{1}{2}} + (2K + z_{\frac{1}{2}}) r_0 f(r_0) \leq r_0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{7} + \left[\frac{4}{3}\left(\sqrt{(b+1)^3} - \sqrt{b^3}\right) + \sqrt{2b}\right] r_0 \left(|m|\, r_0 + |n|\right) \approx 0,15939 \\
&< \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

sağlandığı görülür.

Böylece, Teorem 3.2.1' in bütün hipotezleri sağlandığından, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ olmak üzere (3.3.7) denkleminin $H_\alpha[0,1]$ uzayında en az bir çözümü olduğu sonucuna ulaşılmış olur.

4. $C_\omega[a,b]$ UZAYINDA LİNEER OLMAYAN BİR FREDHOLM KUADRATİK İNTEGRAL DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Bu bölümde, p, k, q bilinen fonksiyonlar ve R bilinen bir operatör olmak üzere,

$$x(t) = p(t) + (Rx)(t) \int_a^b k(t,\mu)\, x(q(\mu))d\mu, \quad t \in I = [a,b] \tag{4.0.1}$$

lineer olmayan Fredholm kuadratik integral denkleminin ω süreklilik modülünün doğurduğu $C_\omega[a,b]$ uzayında belirli varsayımlar altında çözümünün varlığı incelenecek ve akabinde bu sonucun uygulanabileceği bir örnek verilecektir. Bunu yaparken ω süreklilik modülünün doğurduğu $C_\omega[a,b]$ uzayının özellikleri ve bu uzayda rölatif kompaktlık (Bak.Teorem 2.3.2) ile Schauder sabit nokta teoreminden yararlanılacaktır.

Bu bölümde ele aldığımız (4.0.1) integral denklemi üçüncü bölümde ele aldığımız (3.0.1) integral denklemiyle benzer olmakla beraber: Üçüncü bölümde integral denklemin çözümleri α üslü $H_\alpha[0,1]$ Hölder uzayında aranırken, bu bölümde integral denklemin çözümleri α üslü $H_\alpha[0,1]$ Hölder uzayından daha genel olan ω süreklilik modülünün doğurduğu $C_\omega[a,b]$ uzayında aranmıştır. Ayrıca (4.0.1) integral denklemi sınırlar yönüyle de (3.0.1) integral denkleminden kısmen daha geneldir.

4.1 Ön Hazırlıklar

Bu bölümde kullanacağımız bazı tanım ve teoremleri hatırlatıp tanıtalım.

Tanım 4.1.1. $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *fonksiyonu* $\mathbb{R}_+$ *üzerinde azalmayan,* $\omega(0) = 0$ *ve* $\varepsilon > 0$ *için* $\omega(\varepsilon) > 0$ *koşullarını sağlıyorsa* ω *fonksiyonuna bir* ***süreklilik modülü*** *denir [2].*

ω bir süreklilik modülü ve $([a,b], d)$ sınırlı metrik uzay olmak üzere, ω süreklilik modülü tarafından türetilen $[a,b]$ üzerindeki tüm reel değerli fonksiyonların oluşturduğu kümeyi $C_\omega[a,b]$ ile göstereceğiz. Daha açık olarak her $t,s \in [a,b]$ için

$$|x(t) - x(s)| \leq H\omega(d(t,s)) \tag{4.1.1}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $H > 0$ sabiti varsa $x = x(t)$ fonksiyonu $C_\omega[a,b]$ kümesinin elemanıdır denilir.

Önerme 2.1.2' den $C_\omega[a,b]$ kümesinin $C[a,b]$ uzayının lineer altuzayı olduğu kolayca görülebilir.

Buna ilaveten $x \in C_\omega[a,b]$ için (4.1.1) eşitsizliğini sağlayan sabitlerin en küçüğünü H_x^ω olarak göstereceğiz. Yani

$$H_x^\omega = \sup\left\{\frac{|x(t)-x(s)|}{\omega(d(t,s))} : t,s \in [a,b],\ t \neq s\right\} \tag{4.1.2}$$

dır. $x \in C_\omega[a,b]$ olmak üzere

$$\|x\|_\omega = |x(a)| + \sup\left\{\frac{|x(t)-x(s)|}{\omega(d(t,s))} : t,s \in [a,b],\ t \neq s\right\} \tag{4.1.3}$$

şeklinde tanımlanan $\|.\|_\omega$ fonksiyonu $C_\omega[a,b]$ uzayında normdur. (4.1.2) ve (4.1.3) kullanılarak

$$\|x\|_\omega = |x(a)| + H_x^\omega$$

yazılır.

Önerme 2.1.4' den $(\mathbf{C}_\omega[a,b], \|\cdot\|_\omega)$ **bir Banach uzayıdır.**

$C_\omega[a,b]$ uzayı d metriğine ve ω süreklilik modülüne bağlıdır. $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $\omega(\varepsilon) = \varepsilon^\alpha$ Hölder tipi süreklilik modülü ve $d(t,s) = |t-s|$ alınırsa, $C_\omega[a,b]$ uzayı α üslü $H_\alpha[a,b]$ Hölder uzayına dönüşür.

Lemma 4.1.1. *Her $x \in C_\omega[a,b]$ ve $([a.b], d)$ metrik uzayının çapı $diam[a,b]$ olmak üzere,*

$$\|x\|_\infty \leq maks\{1, \omega(diam[a,b])\}\, \|x\|_\omega$$

dır [2].

İspat: Keyfi sabit $x \in C_\omega[a,b]$ ve $t,s \in [a,b]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leq |x(a)| + |x(t)-x(a)| \\
&\leq |x(a)| + \sup\{|x(t)-x(s)|\} \\
&\leq |x(a)| + \sup\left\{\frac{|x(t)-x(s)|}{\omega(d(t,s))}\omega(d(t,s)) : t \neq s\right\} \\
&\leq |x(a)| + \omega(diam[a,b]) \sup\left\{\frac{|x(t)-x(s)|}{\omega(d(t,s))} : t \neq s\right\} \\
&\leq maks\{1, \omega(diam[a,b])\}\left\{|x(a)| + \sup\left\{\frac{|x(t)-x(s)|}{\omega(d(t,s))} :\ t \neq s\right\}\right\} \\
&\leq maks\{1, \omega(diam[a,b])\}\, \|x\|_\omega
\end{aligned}$$

dır. Son eşitsizlikten,

$$\sup\{|x(t)| : t \in [a,b]\} \leq maks\{1,\ \omega(diam[a,b])\} \|x\|_{\omega}$$
$$\Rightarrow \|x\|_{\infty} \leq maks\{1,\ \omega(diam[a,b])\} \|x\|_{\omega}$$

olur.

Lemma 4.1.2. *$t,s \in [a,b]$ için $\omega_2(d(t,s)) \leq L\omega_1(d(t,s))$ eşitsizliğini sağlayan bir $L > 0$ sayısı varsa*

$$C_{\omega_2}[a,b] \subset C_{\omega_1}[a,b] \subset C[a,b]$$

dır. Ayrıca herhangi bir $x \in C_{\omega_2}[a,\ b]$ için

$$\|x\|_{\omega_1} \leq maks\{1,L\} \|x\|_{\omega_2}$$

olur.

İspat: Her $x \in C_{\omega_2}[a,b]$ için

$$|x(t) - x(s)| \leq H_x^{\omega_2}\omega_2(d(t,s)) \leq H_x^{\omega_2}L\omega_1(d(t,s)) \leq H_x^{\omega_1}\omega_1(d(t,s))$$

elde edilir. (Burada $H_x^{\omega_1} = H_x^{\omega_2}L$ olarak düşünülmüştür). Bu ise $x \in C_{\omega_1}[a,b]$ olduğunu gösterir ve buradan $C_{\omega_2}[a,b] \subset C_{\omega_1}[a,b]$ yazılabilir. Daha önce de bahsedildiği gibi $C_{\omega_2}[a,b]$, $C_{\omega_1}[a,b]$ uzayları $C[a,b]$ uzayının alt uzayı olduğundan ispatın birinci kısmı tamamlanır.

Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\omega_1} &= |x(a)| + \sup\left\{\frac{|x(t)-x(s)|}{\omega_1(d(t,s))} : t,s \in [a,b],\ t \neq s\right\} \\
&\leq |x(a)| + L\sup\left\{\frac{|x(t)-x(s)|}{\omega_2(d(t,s))} : t,s \in [a,b],\ t \neq s\right\} \\
&\leq maks\{1,L\} \|x\|_{\omega_2}
\end{aligned}$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 4.1.3. *Eğer $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\omega_2(\varepsilon)}{\omega_1(\varepsilon)} = 0$ eşitliğini sağlayacak şekilde ω_1 ve ω_2 süreklilik modülleri varsa her $t,s \in [a,b]$ için*

$$\omega_2(d(t,s)) \leq L\omega_1(d(t,s))$$

eşitsizliğini sağlayan bir $L > 0$ sayısı vardır.

İspat: ω_1 ve ω_2 süreklilik modülleri için $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\omega_2(\varepsilon)}{\omega_1(\varepsilon)}=0$ olsun. Bu durumda limit tanımından her $P>0$ sayısına karşılık $0<\varepsilon<\delta$ şartını sağlayan her ε için

$$\frac{\omega_2(\varepsilon)}{\omega_1(\varepsilon)}<P$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı vardır. Burada iki durum söz konusudur.

1) $diam\,[a,b]<\delta$ ise: $0<\varepsilon\le diam\,[a,b]$ için $\omega_2(\varepsilon)<P\omega_1(\varepsilon)$ olur. Böylece her $t,s\in[a,b]$ için $\omega_2(d(t,s))\le P\omega_1(d(t,s))$ eşitsizliği sağlanır.

2) $\delta\le diam\,[a,b]$ ise:

(i) $0<\varepsilon<\delta$ için $\omega_2(\varepsilon)<P\omega_1(\varepsilon)$ olduğu bilinmektedir.

(ii) $\delta\le\varepsilon\le diam\,[a,b]$ için ω_1 azalmayan süreklilik modülü olduğundan $\omega_1(\delta)\le\omega_1(\varepsilon)$ olup,

$$\frac{\omega_2(\varepsilon)}{\omega_1(\varepsilon)}\le\frac{\omega_2(diam\,[a,b])}{\omega_1(\delta)}=M$$

olur. Yani $\omega_2(\varepsilon)<M\omega_1(\varepsilon)$ dır. $L=maks\{P,M\}$ alınırsa, (i) ve (ii) den, $0\le\varepsilon\le diam\,[a,b]$ için $\omega_2(\varepsilon)<L\omega_1(\varepsilon)$ olur. Buna göre, her $t,s\in[a,b]$ ve $\varepsilon=d(t,s)$ için

$$\omega_2(d(t,s))\le L\omega_1(d(t,s))$$

dır. Böylece 1) ve 2) den ispat tamamlanır.

Dolayısıyla Lemma 4.1.3' den Lemma 4.1.2' nin hipotezi sağlandığından bir $x\in C_{\omega_2}[a,b]$ için

$$\|x\|_{\omega_1}\le maks\{1,L\}\,\|x\|_{\omega_2}$$

ve

$$C_{\omega_2}[a,b]\subset C_{\omega_1}[a,b]\subset C[a,b]$$

dır.

Teorem 4.1.1. *Sıfırda sürekli olan ω_1 ve ω_2 süreklilik modülleri*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\omega_2(\varepsilon)}{\omega_1(\varepsilon)}=0$$

bağıntısını sağlasın. Ayrıca (X,d) kompakt bir metrik uzay olsun. Eğer A kümesi $C_{\omega_2}(X)$ uzayında sınırlı bir küme ise o zaman A kümesi $C_{\omega_1}(X)$ uzayında rölatif kompakttır (İspat için Teorem 2.3.2' ye bakınız).

Teorem 4.1.2. *ω_1 ve ω_2 süreklilik modülleri için $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\omega_2(\varepsilon)}{\omega_1(\varepsilon)}=0$ eşitliğini sağlasın. O zaman $C_{\omega_2}[a,b]$ uzayında kapalı yuvar olan*

$$B_r^{\omega_2}=\left\{x\in C_{\omega_2}[a,b]:\|x\|_{\omega_2}\le r\right\}$$

kümesi $C_{\omega_1}[a,b]$ uzayında kompakttır [2].

İspat: $B_r^{\omega_2}$ yuvarı $C_{\omega_2}[a,b]$ uzayında sınırlı olduğundan Teorem 4.1.1' den $B_r^{\omega_2}$ yuvarı $C_{\omega_1}[a,b]$ uzayında rölatif kompakttır. Bu yüzden ispatı tamamlamak için $B_r^{\omega_2}$ yuvarının $C_{\omega_1}[a,b]$ uzayında kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. Yani $C_{\omega_1}[a,b]$ uzayında $\|.\|_{\omega_1}$ normuna göre $\overline{B_r^{\omega_2}}=B_r^{\omega_2}$ eşitliğini göstemeliyiz. Bir kümenin kapanışı tanımdan $B_r^{\omega_2}\subset\overline{B_r^{\omega_2}}$ olduğu açıktır. Bu yüzden $\overline{B_r^{\omega_2}}\subset B_r^{\omega_2}$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. Bunun için $x\in\overline{B_r^{\omega_2}}$ alalım. Bir kümenin kapanışı tanımdan terimleri $B_r^{\omega_2}$ yuvarında olan ve $\|.\|_{\omega_1}$ normuna göre $C_{\omega_1}[a,b]$ uzayında bir x noktasına yakınsayan bir $(x_n)\subset B_r^{\omega_2}$ dizisi vardır. Bir dizinin limiti tanımından $\frac{\varepsilon}{maks\{1,\omega(diam[a,b])\}}$ sayısı için bir $n_0\in\mathbb{N}$ sayısı vardır ve $n\ge n_0$ için

$$\|x_n-x\|_{\omega_1}\le\frac{\varepsilon}{maks\{1,\omega(diam[a,b])\}}$$

dır. Lemma 4.1.1' den $n\ge n_0$ için

$$\begin{aligned}\|x_n-x\|_\infty&\le maks\{1,\omega(diam[a,b])\}\|x_n-x\|_{\omega_1}\\&\le maks\{1,\omega(diam[a,b])\}\frac{\varepsilon}{maks\{1,\omega(diam[a,b])\}}\\&\Rightarrow\|x_n-x\|_\infty\le\varepsilon\end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak

$$\|x_n-x\|_\infty\to 0 \tag{4.1.4}$$

yazılır. Şimdi $x\in B_r^{\omega_2}$ olduğunu göstereceğiz. $(x_n)\subset B_r^{\omega_2}$ olduğunu ve $C_{\omega_2}[a,b]$ uzayındaki norm tanımıda kullanılarak $t\ne s$ ve $t,s\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}\|x_n\|_{\omega_2}&\le r\\&\Leftrightarrow|x_n(a)|+\sup\left\{\frac{|x_n(t)-x_n(s)|}{\omega_2(d(t,s))}\right\}\le r\\&\Leftrightarrow\sup\left\{\frac{|x_n(t)-x_n(s)|}{\omega_2(d(t,s))}\right\}\le r-|x_n(a)|\\&\Leftrightarrow\frac{|x_n(t)-x_n(s)|}{\omega_2(d(t,s))}\le r-|x_n(a)|\end{aligned}\tag{4.1.5}$$

olduğu görülür. (4.1.5) eşitsizliğinde $n\to\infty$ için limit alıp, (4.1.4) kullanıldığında, $t\ne s$ ve

$t,s \in [a,b]$ için

$$\frac{|x(t)-x(s)|}{\omega_2(d(t,s))} \leq r - |x(a)|$$

dır. Şimdi son eşitsizlikte supremum alarak

$$\sup\left\{\frac{|x(t)-x(s)|}{\omega_2(d(t,s))} : t,s \in [a,b],\ t \neq s\right\} \leq r - |x(a)|$$

$$\Leftrightarrow |x(a)| + \sup\left\{\frac{|x(t)-x(s)|}{\omega_2(d(t,s))} : t,s \in [a,b],\ t \neq s\right\} \leq r$$
$$\Leftrightarrow \|x\|_{\omega_2} \leq r$$

bağıntısı elde edilir. Buradan $x \in B_r^{\omega_2}$ olduğu görülür. Böylece $C_{\omega_2}[a,b]$ uzayında sınırlı olan θ merkezli r yarıçaplı $B_r^{\omega_2}$ kapalı yuvarı $C_{\omega_1}[a,b]$ uzayının kompakt alt kümesidir.

4.2 Temel Sonuç

Bu bölümde (4.0.1) denkleminin $C_{\omega_1}[a,b]$ uzayında çözülebilirliğini araştırılacak. Varsayalım ki $([a,b],d)$ kompakt bir metrik uzay ve sıfırda sürekli olarak verilen ω_1, ω_2 süreklilik modülleri

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\omega_2(\varepsilon)}{\omega_1(\varepsilon)} = 0$$

eşitliğini sağlasın. (4.0.1) integral denklemini aşağıdaki hipotezler ile birlikte düşünelim:

(i) $p \in C_{\omega_2}[a,b]$,

(ii) $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu birinci değişkene göre ω_2 süreklilik modülü tarafından türetilen $C_{\omega_2}[a,b]$ uzayına ait bir fonksiyondur. Yani $t,s,\mu \in [a,b]$ için

$$|k(t,\mu) - k(s,\mu)| \leq k_{\omega_2}\omega_2(d(t,s))$$

koşulunu sağlayan k_{ω_2} sabit sayısı vardır.

(iii) $q : [a,b] \to [a,b]$ ölçülebilir bir fonksiyon.

(iv) $R : C_{\omega_2}[a,b] \to C_{\omega_2}[a,b]$ dönüşümü $\|.\|_{\omega_1}$ normuna göre sürekli ve $x \in C_{\omega_2}[a,b]$ için

$$\|Rx\|_{\omega_2} \leq f(\|x\|_{\omega_2}),$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde azalmayan $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ fonksiyonu vardır.

(v) K ve η_2 sabit sayıları sırasıyla

$$K = \sup\left\{\int_a^b |k(t,\mu)|d\mu : t \in [a,b]\right\}$$

ve

$$\eta_2 = maks\{1, \omega_2(diam[a,b])\}$$

olmak üzere,

$$\|p\|_{\omega_2} + [\eta_2 K + K + \eta_2 k_{\omega_2}(b-a)]\eta_2 f(r) r \leq r$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif $r = r_0$ çözümü vardır.

Teorem 4.2.1. *(4.0.1) denkleminin (i)-(v) hipotezleri altında $C_{\omega_1}[a,b]$ uzayında en az bir çözümü vardır.*

İspat: $C_{\omega_2}[a,b]$ uzayı üzerinde T operatörünü aşağıdaki biçimde tanımlayalım.

$$(Tx)(t) = p(t) + (Rx)(t)\int_a^b k(t,\mu)x(q(\mu))d\mu, \quad t \in [a,b].$$

İlk önce T dönüşümün $C_{\omega_2}[a,b]$ uzayından $C_{\omega_2}[a,b]$ uzayına tanımlı olduğunu göstereceğiz. Yukarıdaki varsayımları göz önünde bulundurarak, $t,s \in [a,b]$, $(t \neq s)$ ve keyfi sabit $x \in C_{\omega_2}[a,b]$ için

$$\frac{|(Tx)(t)-(Tx)(s)|}{\omega_2(d(t,s))}$$

$$= \frac{\left|p(t) + (Rx)(t)\int_a^b k(t,\mu)x(q(\mu))\,d\mu - p(s) - (Rx)(s)\int_a^b k(s,\mu)x(q(\mu))\,d\mu\right|}{\omega_2(d(t,s))}$$

$$\leq \frac{1}{\omega_2(d(t,s))}[|p(t)-p(s)|]$$

$$+\left|(Rx)(t)\int_a^b k(t,\mu)x(q(\mu))\,d\mu - (Rx)(s)\int_a^b k(s,\mu)x(q(\mu))\,d\mu\right|$$

$$\leq \frac{|p(t)-p(s)|}{\omega_2(d(t,s))} + \frac{1}{\omega_2(d(t,s))}\left|(Rx)(t)\int_a^b k(t,\mu)x(q(\mu))\,d\mu - (Rx)(s)\int_a^b k(t,\mu)x(q(\mu))\,d\mu\right|$$

$$+\frac{1}{\omega_2(d(t,s))}\left|(Rx)(s)\int_a^b k(t,\mu)x(q(\mu))\,d\mu - (Rx)(s)\int_a^b k(s,\mu)x(q(\mu))\,d\mu\right|$$

$$\leq \frac{|p(t)-p(s)|}{\omega_2(d(t,s))}+\frac{|(Rx)(t)-(Rx)(s)|}{\omega_2(d(t,s))}\int_a^b |k(t,\mu)|\,|x(q(\mu))|\,d\mu$$

$$+|(Rx)(s)|\int_a^b \frac{|k(t,\mu)-k(s,\mu)|}{\omega_2(d(t,s))}|x(q(\mu))|\,d\mu$$

$$\leq \frac{|p(t)-p(s)|}{\omega_2(d(t,s))}+\frac{|(Rx)(t)-(Rx)(s)|}{\omega_2(d(t,s))}\|x\|_\infty\int_a^b |k(t,\mu)|\,d\mu+\|Rx\|_\infty\|x\|_\infty\int_a^b \frac{k_{\omega_2}\omega_2(d(t,s))}{\omega_2(d(t,s))}d\mu$$

$$\leq H_p^{\omega_2}+H_{Rx}^{\omega_2}\|x\|_\infty K+\|Rx\|_\infty\|x\|_\infty k_{\omega_2}(b-a)$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikte sırasıyla $\|x\|_\omega$ tanımı, Lemma 4.1.1 ve (iv) hipotezi kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{|(Tx)(t)-(Tx)(s)|}{\omega_2(d(t,s))} &\leq H_p^{\omega_2}+\|Rx\|_{\omega_2} maks\{1,\omega_2(diam[a,b])\}\|x\|_{\omega_2}K\\ &+maks\{1,\omega_2(diam[a,b])\}^2\|Rx\|_{\omega_2}\|x\|_{\omega_2}k_{\omega_2}(b-a)\\ &\leq H_p^{\omega_2}+f\left(\|x\|_{\omega_2}\right)\eta_2\|x\|_{\omega_2}K\\ &+f\left(\|x\|_{\omega_2}\right)\eta_2^2\|x\|_{\omega_2}k_{\omega_2}(b-a) \qquad (4.2.1)\end{aligned}$$

dır. Bu eşitsizlikten $Tx\in C_{\omega_2}[a,b]$ sonucu elde edilir. Bu ise T operatörünün $C_{\omega_2}[a,b]$ uzayından $C_{\omega_2}[a,b]$ uzayına tanımlı olduğunu gösterir. Yani $T: C_{\omega_2}[a,b]\to C_{\omega_2}[a,b]$ dir.

Diğer taraftan $x\in C_{\omega_2}[a,b]$ için,

$$\begin{aligned}|(Tx)(a)| &= \left|p(a)+(Rx)(a)\int_a^b k(a,\mu)x(q(\mu))\,d\mu\right|\\ &\leq |p(a)|+|(Rx)(a)|\int_a^b |k(a,\mu)|\,|x(q(\mu))|\,d\mu\\ &\leq |p(a)|+\|Rx\|_\infty\|x\|_\infty K\\ &\leq |p(a)|+maks\{1,\omega_2(diam[a,b])\}^2\|Rx\|_{\omega_2}\|x\|_{\omega_2}K\\ &\leq |p(a)|+f\left(\|x\|_{\omega_2}\right)\eta_2^2\|x\|_{\omega_2}K \qquad (4.2.2)\end{aligned}$$

dır. Buradan (4.2.1) ve (4.2.2) birlikte düşünülerek, $x\in C_{\omega_2}[a,b]$ için

$$\|Tx\|_{\omega_2}=|(Tx)(a)|+\sup\left\{\frac{|(Tx)(t)-(Tx)(s)|}{\omega_2(d(t,s))}: t,s\in[a,b], t\neq s\right\}$$

$$\begin{aligned}&\leq |p(a)|+f\left(\|x\|_{\omega_2}\right)\eta_2^2\|x\|_{\omega_2}K\\ &+H_p^{\omega_2}+f\left(\|x\|_{\omega_2}\right)\eta_2\|x\|_{\omega_2}K\\ &+f\left(\|x\|_{\omega_2}\right)\eta_2^2\|x\|_{\omega_2}k_{\omega_2}(b-a)\\ &\leq \|p\|_{\omega_2}+[\eta_2K+K+\eta_2k_{\omega_2}(b-a)]f\left(\|x\|_{\omega_2}\right)\eta_2\|x\|_{\omega_2}\end{aligned}$$

dır. Böylece (v) varsayımı göz önünde bulundurularak $B_{r_0}^{\omega_2}$ yuvarından alınan bir x elemanı için $Tx \in B_{r_0}^{\omega_2}$ olur. Sonuç olarak T dönüşümü $B_{r_0}^{\omega_2}$ yuvarından yine $B_{r_0}^{\omega_2}$ yuvarına bir dönüşümdür. Yani

$$B_{r_0}^{\omega_2} = \{x \in C_{\omega_2}[a,b] : \|x\|_{\omega_2} \leq r_0\}$$

olmak üzere

$$T : B_{r_0}^{\omega_2} \to B_{r_0}^{\omega_2}$$

dır.

Şimdi T operatörünün $\|\cdot\|_{\omega_1}$ normuna göre $B_{r_0}^{\omega_2}$ yuvarında sürekli olduğunu göstereceğiz. Bunun için keyfi sabit $x \in B_{r_0}^{\omega_2}$ ve keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı alalım. Aşağıda (4.2.3)' da belirlenen δ pozitif sayısı için $y \in B_{r_0}^{\omega_2}$ elamanı $\|x-y\|_{\omega_1} \leq \delta$ eşitsizliğini sağlasın.

(iv) varsayımından $R : C_{\omega_2}[a,b] \to C_{\omega_2}[a,b]$ opreratörü $\|.\|_{\omega_1}$ normuna göre sürekli olduğundan

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2\left[K\eta_1\eta_2 + KL\eta_1 + L(b-a)\eta_1\eta_2 k_{\omega_2}\right] f(r_0)} \tag{4.2.3}$$

eşitsizliğini sağlayan ε' a bağlı öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki: $\|x-y\|_{\omega_1} \leq \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $y \in B_{r_0}^{\omega_2}$ için

$$\|Rx - Ry\|_{\omega_1} < \frac{\varepsilon}{2\left[K\eta_1\eta_2 + K\eta_2 + 2L(b-a)\eta_1\eta_2 k_{\omega_2}\right] r_0}$$

dır. O zaman $(t \neq s)$ $t,s \in [a,b]$ ve $x,y \in B_{r_0}^{\omega_2}$ için

$$G = \frac{|[(Tx)(t)-(Ty)(t)]-[(Tx)(s)-(Ty)(s)]|}{\omega_1(d(t,s))}$$

$$= \frac{1}{\omega_1(d(t,s))}\left|\left[(Rx)(t)\int_a^b k(t,\mu)x(q(\mu))\,d\mu - (Ry)(t)\int_a^b k(t,\mu)y(q(\mu))d\mu\right]\right.$$

$$\left. - \left[(Rx)(s)\int_a^b k(s,\mu)x(q(\mu))\,d\mu - (Ry)(s)\int_a^b k(s,\mu)y(q(\mu))d\mu\right]\right|$$

$$= \frac{1}{\omega_1(d(t,s))}\left|\left[(Rx)(t)\int_a^b k(t,\mu)x(q(\mu))\,d\mu - (Ry)(t)\int_a^b k(t,\mu)x(q(\mu)d\mu\right]\right.$$

$$+ \left[(Ry)(t)\int_a^b k(t,\mu)x(q(\mu))d\mu - (Ry)(t)\int_a^b k(t,\mu)y(q(\mu))d\mu\right]$$

$$-\left[(Rx)(s)\int_a^b k(s,\mu)x(q(\mu))d\mu-(Ry)(s)\int_a^b k(s,\mu)x(q(\mu))d\mu\right]$$

$$\left.-\left[(Ry)(s)\int_a^b k(s,\mu)x(q(\mu))d\mu-(Ry)(s)\int_a^b k(s,\mu)y(q(\mu))d\mu\right]\right|$$

dır. Buradan,

$$G=\frac{1}{\omega_1(d(t,s))}\left|[(Rx)(t)-(Ry)(t)]\int_a^b k(t,\mu)x(q(\mu))d\mu\right.$$

$$+(Ry)(t)\int_a^b k(t,\mu)\left[x(q(\mu))-y(q(\mu))\right]d\mu$$

$$-[(Rx)(s)-(Ry)(s)]\int_a^b k(s,\mu)x(q(\mu))d\mu$$

$$\left.-(Ry)(s)\int_a^b k(s,\mu)\left[x(q(\mu))-y(q(\mu)\right]d\mu\right|$$

olur. Buradan,

$$G=\frac{1}{\omega_1(d(t,s))}\left|\{[(Rx)(t)-(Ry)(t)]-[(Rx)(s)-(Ry)(s)]\}\int_a^b k(t,\mu)x(q(\mu)d\mu\right.$$

$$\begin{aligned}&+[(Rx)(s)-(Ry)(s)]\int_a^b k(t,\mu)x(q(\mu)d\mu\\&-[(Rx)(s)-(Ry)(s)]\int_a^b k(s,\mu)x(q(\mu)d\mu\\&+(Ry)(t)\int_a^b k(t,\mu)\left[x(q(\mu)-y(q(\mu)\right]d\mu\\&\left.-(Ry)(s)\int_a^b k(s,\mu)\left[x(q(\mu)-y(q(\mu)\right]d\mu\right|\end{aligned}$$

olur. Bu son bulunan eşitlikten,

$$G\leq\frac{1}{\omega_1(d(t,s))}\left|[(Rx)(t)-(Ry)(t)]-[(Rx)(s)-(Ry)(s)]\right|\left|\int_a^b k(t,\mu)x(q(\mu)d\mu\right|$$

$$+\frac{1}{\omega_1(d(t,s))}\left|(Rx)(s)-(Ry)(s)\right|\left|\int_a^b [k(t,\mu)-k(s,\mu)]\,x(q(\mu)d\mu\right|$$

$$+\frac{1}{\omega_1\left(d\left(t,s\right)\right)}\left|\left(Ry\right)\left(t\right)\int_a^b k(t,\mu)\left[x(q(\mu)-y(q(\mu)\right]d\mu\right.$$

$$\left.-\left(Ry\right)\left(s\right)\int_a^b k(t,\mu)\left[x(q(\mu)-y(q(\mu)\right]d\mu\right|$$

$$+\frac{1}{\omega_1\left(d\left(t,s\right)\right)}\left|\left(Ry\right)\left(s\right)\int_a^b k(t,\mu)\left[x(q(\mu)-y(q(\mu)\right]d\mu\right.$$

$$\left.+\left(Ry\right)\left(s\right)\int_a^b k(s,\mu)\left[x(q(\mu)-y(q(\mu)\right]d\mu\right|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten de

$$G\leq\frac{\left|\left[\left(Rx\right)\left(t\right)-\left(Ry\right)\left(t\right)\right]-\left[\left(Rx\right)\left(s\right)-\left(Ry\right)\left(s\right)\right]\right|}{\omega_1\left(d\left(t,s\right)\right)}\left\|x\right\|_\infty\int_a^b\left|k(t,\mu)\right|d\mu$$

$$+\left|\left[\left(Rx\right)\left(s\right)-\left(Ry\right)\left(s\right)\right]-\left[\left(Rx\right)\left(a\right)-\left(Ry\right)\left(a\right)\right]\right|\left\|x\right\|_\infty\int_a^b\frac{\left|k(t,\mu)-k(s,\mu)\right|}{\omega_1\left(d\left(t,s\right)\right)}d\mu$$

$$+\left|\left(Rx\right)\left(a\right)-\left(Ry\right)\left(a\right)\right|\left\|x\right\|_\infty\int_a^b\frac{\left|k(t,\mu)-k(s,\mu)\right|}{\omega_1\left(d\left(t,s\right)\right)}d\mu$$

$$+\frac{\left|\left(Ry\right)\left(t\right)-\left(Ry\right)\left(s\right)\right|}{\omega_1\left(d\left(t,s\right)\right)}\left|\int_a^b k(t,\mu)\left[x(q(\mu)-y(q(\mu)\right]d\mu\right|$$

$$+\left|\left(Ry\right)\left(s\right)\right|\left|\int_a^b\frac{k(t,\mu)-k(s,\mu)}{\omega_1\left(d\left(t,s\right)\right)}\left[x(q(\mu)-y(q(\mu)\right]d\mu\right|$$

eşitsizlğine ulaşılır. Buradan devam edilirse

$$G\leq H^{\omega_1}_{Rx-Ry}\left\|x\right\|_\infty K$$
$$+\sup_{t,s\in[a,b]}\left|\left[\left(Rx\right)\left(t\right)-\left(Ry\right)\left(t\right)\right]-\left[\left(Rx\right)\left(s\right)-\left(Ry\right)\left(s\right)\right]\right|\left\|x\right\|_\infty\int_a^b\frac{\left|\left(k(t,\mu)-k(s,\mu)\right)\right|}{\omega_1\left(d\left(t,s\right)\right)}d\mu$$

$$+\left|\left(Rx\right)\left(a\right)-\left(Ry\right)\left(a\right)\right|\left\|x\right\|_\infty\int_a^b\frac{\left|\left(k(t,\mu)-k(s,\mu)\right)\right|}{\omega_1\left(d\left(t,s\right)\right)}d\mu$$

$$+\frac{\left|\left(Ry\right)\left(t\right)-\left(Ry\right)\left(s\right)\right|}{\omega_1\left(d\left(t,s\right)\right)}\int_a^b\left|k(t,\mu)\right|\left|x(q(\mu)-y(q(\mu)\right|d\mu$$

$$+\left|\left(Ry\right)\left(s\right)\right|\int_a^b\frac{\left|\left(k(t,\mu)-k(s,\mu)\right)\right|}{\omega_1\left(d\left(t,s\right)\right)}\left|x(q(\mu)-y(q(\mu)\right|d\mu$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $\|x\|_\infty \leq maks\{1, \omega_2(diam[a,b])\}\|x\|_{\omega_2}$ve $H_x^\omega \leq \|x\|_\omega$ eşitsizlikleri göz önüne alındığında

$$G = \frac{|[(Tx)(t)-(Ty)(t)]-[(Tx)(s)-(Ty)(s)]|}{\omega_1(d(t,s))}$$

$$\leq K\|x\|_\infty H_{Rx-Ry}^{\omega_1}$$

$$+\sup_{t,s\in[a,b]}|[(Rx)(t)-(Ry)(t)]-[(Rx)(s)-(Ry)(s)]|\,\|x\|_\infty \int_a^b \frac{k_{\omega_2}\omega_2(d(t,s))}{\omega_1(d(t,s))}d\mu$$

$$+|(Rx)(a)-(Ry)(a)|\,\|x\|_\infty \int_a^b \frac{k_{\omega_2}\omega_2(d(t,s))}{\omega_1(d(t,s))}d\mu$$

$$+\frac{|(Ry)(t)-(Ry)(s)|}{\omega_2(d(t,s))}\frac{\omega_2(d(t,s))}{\omega_1(d(t,s))}\int_a^b |k(t,\mu)|\,|x(q(\mu)-y(q(\mu)|\,d\mu$$

$$+|(Ry)(s)|\int_a^b \frac{k_{\omega_2}\omega_2(d(t,s))}{\omega_1(d(t,s))}|x(q(\mu)-y(q(\mu)|\,d\mu$$

bulunur. Bu son eşitsizlikten

$$G \leq K\|x\|_\infty \|Rx-Ry\|_{\omega_1}$$

$$+L(b-a)\|x\|_\infty k_{\omega_2}\sup_{t,s\in[a,b]}\left\{\frac{|[(Rx)(t)-(Ry)(t)]-[(Rx)(s)-(Ry)(s)]|}{\omega_1(d(t,s))}\omega_1(d(t,s))\right\}$$

$$+L(b-a)\|x\|_\infty k_{\omega_2}|(Rx)(a)-(Ry)(a)|$$

$$+KLH_{Ry}^{\omega_2}\|x-y\|_\infty + L(b-a)k_{\omega_2}\|Ry\|_\infty\|x-y\|_\infty$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizlikte gösterimi kısaltmak için $maks\{1, \omega_1(diam[a,b])\} = \eta_1$ ve $maks\{1, \omega_2(diam[a,b])\} = \eta_2$ olarak alıp, Lemma 4.1.1 kullanılarak

$$G = \frac{|[(Tx)(t)-(Ty)(t)]-[(Tx)(s)-(Ty)(s)]|}{\omega_1(d(t,s))}$$

$$\leq K\eta_2\|x\|_{\omega_2}\|Rx-Ry\|_{\omega_1} + L(b-a)\eta_2\|x\|_{\omega_2}k_{\omega_2}\|Rx-Ry\|_{\omega_1}\omega(diam[a,b])$$

$$
\begin{aligned}
&+L(b-a)\eta_1\eta_2\|x\|_{\omega_2}k_{\omega_2}\|Rx-Ry\|_{\omega_1} \\
&+KL\eta_1\|x-y\|_{\omega_1}\|Ry\|_{\omega_2}+L(b-a)\eta_1\eta_2k_{\omega_2}\|Ry\|_{\omega_2}\|x-y\|_{\omega_1} \\
&\leq K\eta_2\|x\|_{\omega_2}\|Rx-Ry\|_{\omega_1}+2L(b-a)\eta_1\eta_2\|x\|_{\omega_2}k_{\omega_2}\|Rx-Ry\|_{\omega_1} \\
&+KL\eta_1\|x-y\|_{\omega_1}\|Ry\|_{\omega_2}+L(b-a)\eta_1\eta_2k_{\omega_2}\|Ry\|_{\omega_2}\|x-y\|_{\omega_1} \\
&=[K\eta_2+2L(b-a)\eta_1\eta_2k_{\omega_2}]\|x\|_{\omega_2}\|Rx-Ry\|_{\omega_1} \\
&+[KL\eta_1+L(b-a)\eta_1\eta_2k_{\omega_2}]\|Ry\|_{\omega_2}\|x-y\|_{\omega_1} \\
&\leq[K\eta_2+2L(b-a)\eta_1\eta_2k_{\omega_2}]\|x\|_{\omega_2}\|Rx-Ry\|_{\omega_1} \\
&+[KL\eta_1+L(b-a)\eta_1\eta_2k_{\omega_2}]f\left(\|y\|_{\omega_2}\right)\|x-y\|_{\omega_1} \\
&\leq[K\eta_2+2L(b-a)\eta_1\eta_2k_{\omega_2}]r_0\|Rx-Ry\|_{\omega_1} \\
&+[KL\eta_1+L(b-a)\eta_1\eta_2k_{\omega_2}]f(r_0)\delta
\end{aligned}
\tag{4.2.4}
$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
|(Tx)(a)-(Ty)(a)| &= \left|(Rx)(a)\int_a^b k(a,\mu)x(q(\mu))\,d\mu-(Ry)(a)\int_a^b k(a,\mu)y(q(\mu))\,d\mu\right| \\
&\leq \left|(Rx)(a)\int_a^b k(a,\mu)x(q(\mu)))d\mu-(Rx)(a)\int_a^b k(a,\mu)y(q(\mu))\,d\mu\right| \\
&+\left|(Rx)(a)\int_a^b k(a,\mu)y(q(\mu)d\mu-(Ry)(a)\int_a^b k(a,\mu)y(q(\mu))\,d\mu\right| \\
&\leq |(Rx)(a)|\int_a^b |k(a,\mu)|\,|x(q(\mu))-y(q(\mu))|\,d\mu \\
&+|(Rx)(a)-(Ry)(a)|\int_a^b |k(a,\mu)|\,|y(q(\mu))|\,d\mu
\end{aligned}
$$

dır. Buradan,

$$
\begin{aligned}
|(Tx)(a)-(Ty)(a)| &\leq K\|Rx\|_\infty\|x-y\|_\infty+K\|y\|_\infty\|Rx-Ry\|_\infty \\
&\leq K\eta_2\|Rx\|_{\omega_2}\eta_1\|x-y\|_{\omega_1}+K\eta_2\|y\|_{\omega_2}\eta_1\|Rx-Ry\|_{\omega_1} \\
&\leq K\eta_1\eta_2f\left(\|x\|_{\omega_2}\right)\|x-y\|_{\omega_1}+K\eta_1\eta_2\|y\|_{\omega_2}\|Rx-Ry\|_{\omega_1} \\
&\leq K\eta_1\eta_2f(r_0)\delta+K\eta_1\eta_2r_0\|Rx-Ry\|_{\omega_1}
\end{aligned}
\tag{4.2.5}
$$

dır. Burada (4.2.4) ve (4.2.5) birlikte düşünülerek

$$\begin{aligned}
&\|Tx-Ty\|_{\omega_1}\\
&=|(Tx)(a)-(Ty)(a)|+H^{\omega_1}_{Tx-Ty}\\
&=|(Tx)(a)-(Ty)(a)|+\sup_{t,s\in[0,1],t\neq s}\left\{\frac{|[(Tx)(t)-(Ty)(t)]-[(Tx)(s)-(Ty)(s)]|}{\omega_1(d(t,s))}\right\}\\
&\le K\eta_1\eta_2 f(r_0)\delta+K\eta_1\eta_2 r_0\|Rx-Ry\|_{\omega_1}\\
&+[K\eta_2+2L(b-a)\eta_1\eta_2k_{\omega_2}]r_0\|Rx-Ry\|_{\omega_1}\\
&+[KL\eta_1+L(b-a)\eta_1\eta_2k_{\omega_2}]f(r_0)\delta\\
&=[K\eta_1\eta_2+KL\eta_1+L(b-a)\eta_1\eta_2k_{\omega_2}]f(r_0)\delta\\
&+[K\eta_1\eta_2+K\eta_2+2L(b-a)\eta_1\eta_2k_{\omega_2}]r_0\|Rx-Ry\|_{\omega_1}\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\
&=\varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu ise T operatörünün $x\in B^{\omega_2}_{r_0}$ noktasında $\|\cdot\|_{\omega_1}$ normuna göre sürekli olduğunu gösterir. Sonuç olarak $x\in B^{\omega_2}_{r_0}$ keyfi olduğundan T operatörü $B^{\omega_2}_{r_0}$ yuvarı üzerinde süreklidir. Teorem 4.1.2' den $B^{\omega_2}_{r_0}$ yuvarı $C_{\omega_1}[a,b]$ uzayının kompakt bir alt kümesidir. Bu yüzden Schauder sabit nokta teoremine göre T operatörünün $B^{\omega_2}_{r_0}$ yuvarında sabit bıraktığı en az bir nokta vardır. Yani $B^{\omega_2}_{r_0}\subset C_{\omega_2}[a,b]\subset C_{\omega_1}[a,b]$ olduğundan (4.0.1) integral denkleminin ω_1 süreklilik modülünün doğurduğu $C_{\omega_1}[a,b]$ uzayında en az bir çözümü vardır. Böylece ispat tamamlanır.

4.3 Örnek

Bu kısımda (4.0.1) formunda bir tane integral denklem ele alınacak ve bu integral denklem için Teorem 4.2.1' nin hipotezlerinin sağlandığı gösterilecektir. Böylece, bu denklemin $\omega_1$süreklilik modülünün doğurduğu $C_{\omega_1}[a,b]$ uzayında en az bir x çözümünün olduğu ifade edilecektir.

Örnek 4.3.1. *$t\in[1,e]$ ve $n,\hat{n},a,b,c$ sabit sayılar olmak üzere*

$$x(t)=\sqrt[3]{n\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)+\hat{n}}+\left[ax^2(t)+bx(t)+c\right]\int_1^e\frac{\sqrt[3]{\ln t+\ln\mu}}{\mu}x\left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)d\mu \qquad (4.3.1)$$

integral denklemini ele alalım.

$p(t)=\sqrt[3]{n\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)+\hat{n}}$, $k(t,\mu)=\frac{\sqrt[3]{\ln t+\ln\mu}}{\mu}$, $q(\mu)=\frac{\mu}{\mu+1}$ ve $d(t,s)=|\ln t-\ln s|$, $\omega_2(\varepsilon)=\varepsilon^{\frac{1}{3}}$, $0<\alpha<\frac{1}{3}$ için $\omega_1(\varepsilon)=\varepsilon^{\alpha}$ ayrıca R operatörü her $t\in[1,e]$ için

$$(Rx)(t)=ax^2(t)+bx(t)+c$$

olacak şekilde düşünülürse (4.3.1) integral denkleminin (4.0.1)' in özel bir hali olduğu görülülür.

Öncelikle Teorem 4.2.1' in hipotezlerinin sağlandığını gösterelim.

i) $h:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}^{+}$ fonksiyonunu $h(t)=\sqrt[3]{t}$ olacak şekilde seçersek, kolay bir şekilde bu fonksiyonun konkav olduğu ve orjinde sıfır değerini aldığı görülür. Bu yüzden Tanım 2.0.30 ve Lemma 2.0.2' den h fonksiyonu alt toplamsaldır.

Alt toplamsallığın sonucu ve $|\cos x-\cos y|\leq|x-y|$ bağıntısı kullanılarak,

$$\begin{aligned}|p(t)-p(s)|&=\left|\sqrt[3]{n\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)+\hat{n}}-\sqrt[3]{n\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)+\hat{n}}\right|\\&\leq\sqrt[3]{\left|n\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)\right]\right|}\\&\leq\sqrt[3]{|n|}\sqrt[3]{\left|\frac{\pi}{2}(t-s)\right|}\\&\leq\sqrt[3]{\frac{|n|\pi}{2}}|t-s|^{\frac{1}{3}}\end{aligned}\tag{4.3.2}$$

olur. (4.3.2)' den

$$\begin{aligned}\|p\|_{\omega_2}&=|p(1)|+\sup\left\{\frac{|p(t)-p(s)|}{\omega_2(d(t,s))}:t,s\in[1,e],t\neq s\right\}\\&=\left|\sqrt[3]{\hat{n}}\right|+\sup\left\{\frac{|p(t)-p(s)|}{|\ln t-\ln s|^{\frac{1}{3}}}:t,s\in[1,e],t\neq s\right\}\\&\leq\left|\sqrt[3]{\hat{n}}\right|+\sup\left\{\frac{\sqrt[3]{\frac{|n|\pi}{2}}|t-s|^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{|t-s|}{e}\right)^{\frac{1}{3}}}:t,s\in[1,e],t\neq s\right\}\\&=\sqrt[3]{|\hat{n}|}+\sqrt[3]{\frac{|n|\pi e}{2}}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $\|p\|_{\omega_2}\leq\sqrt[3]{|\hat{n}|}+\sqrt[3]{\frac{|n|\pi e}{2}}$ olup $p\in C_{\omega_2}[1,e]$ olduğu anlamına gelir. Bu yüzden Teorem 4.2.1' in (i) varsayımı sağlanır.

ii) $\sqrt[3]{x}$ fonksiyonunun alt toplamsallık özelliğinden, her $t,s\in[1,e]$ için

$$\begin{aligned}
|k(t,\mu)-k(s,\mu)| &= \left|\frac{\sqrt[3]{\ln t+\ln\mu}}{\mu}-\frac{\sqrt[3]{\ln s+\ln\mu}}{\mu}\right| \\
&\le \frac{\left|\sqrt[3]{\ln t+\ln\mu}-\sqrt[3]{\ln s+\ln\mu}\right|}{|\mu|} \\
&= \frac{\sqrt[3]{|\ln t-\ln s|}}{|\mu|} \\
&\le |\ln t-\ln s|^{\frac{1}{3}} \\
&\le \omega_2\left(d\left(t,s\right)\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece Teorem 4.2.1' in (ii) varsayımı sağlanır. Burada $k_{\omega_2}=1$ ve k ilk değişkene göre süreklidir.

iii) $q\left(\mu\right)=\frac{\mu}{\mu+1}$ fonksiyonunun Teorem 4.2.1' in (iii) varsayımını sağladığı açıktır.

iv) Her $x\in C_{\omega_2}\left[1,e\right]$ için

$$\begin{aligned}
&\|Rx\|_{\omega_2} \\
&= |(Rx)(1)|+\sup\left\{\frac{|(Rx)(t)-(Rx)(s)|}{\omega_2\left(d\left(t,s\right)\right)}: t,s\in[1,e]\,,\ t\neq s\right\} \\
&= \left|ax^2(1)+bx(1)+c\right|+\sup_{t,s\in[1,e],t\neq s}\left\{\frac{\left|ax^2(t)+bx(t)-ax^2(s)-bx(s)\right|}{\omega_2\left(d\left(t,s\right)\right)}\right\} \\
&= |a|\left|x^2(1)\right|+|b|\,|x(1)|+|c|+\sup_{t,s\in[1,e],t\neq s}\left\{\frac{|a\left[x(t)-x(s)\right]\left[x(t)+x(s)\right]+b\left[x(t)-x(s)\right]|}{\omega_2\left(d\left(t,s\right)\right)}\right\} \\
&\le |a|\,\|x\|_\infty^2+|b|\,\|x\|_\infty+|c|+\sup_{t,s\in[1,e],t\neq s}\left\{\frac{|x(t)-x(s)|\,|a\left[x(t)+x(s)\right]+b|}{\omega_2\left(d\left(t,s\right)\right)}\right\} \\
&\le |a|\,\eta_2^2\,\|x\|_{\omega_2}^2+|b|\,\eta_2\,\|x\|_{\omega_2}+|c|+\sup_{t,s\in[1,e],t\neq s}\left\{\frac{|x(t)-x(s)|\left[|a|\,|x(t)|+|a|\,|x(s)|+|b|\right]}{\omega_2\left(d\left(t,s\right)\right)}\right\} \\
&\le |a|\,\eta_2^2\,\|x\|_{\omega_2}^2+|b|\,\eta_2\,\|x\|_{\omega_2}+|c|+\left[2\,|a|\,\|x\|_\infty+|b|\right]\sup_{t,s\in[1,e],t\neq s}\left\{\frac{|x(t)-x(s)|}{\omega_2\left(d\left(t,s\right)\right)}\right\} \\
&\le |a|\,\eta_2^2\,\|x\|_{\omega_2}^2+|b|\,\eta_2\,\|x\|_{\omega_2}+|c|+2\,|a|\,\eta_2\,\|x\|_{\omega_2}^2+|b|\,\|x\|_{\omega_2} \qquad (4.3.3)
\end{aligned}$$

olur. $\eta_2=1$ olduğundan (4.3.3) eşitsizliği daha sade olarak

$$\|Rx\|_{\omega_2}\le 3\,|a|\,\|x\|_{\omega_2}^2+2\,|b|\,\|x\|_{\omega_2}+|c|$$

yazılır. Bu yüzden R operatörü $C_{\omega_2}[1,e]$ uzayından $C_{\omega_2}[1,e]$ uzayının içine tanımlıdır. (iv) varsayımındaki $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonunu $f(x)=3|a|x^2+2|b|x+|c|$ olarak seçersek, (iv) varsayımındaki eşitsizlik de sağlanır.

Şimdi (iv) varsayımındaki R operatörünün $\|.\|_{\omega_1}$ normuna göre $C_{\omega_2}[1,e]$ uzayında sürekli olduğunu göstereceğiz. Bunun için keyfi sabit $y\in C_{\omega_2}[1,e]$ ve $\varepsilon>0$ sayısı alalım. $\Delta = 36a^2\|y\|_{\omega_1}^2+24|a||b|\|y\|_{\omega_1}+4b^2+12|a|\varepsilon$ olmak üzere δ pozitif sayısını

$$0<\delta<\frac{\sqrt{\Delta}-6|a|\|y\|_{\omega_1}-2|b|}{6|a|}$$

olacak şekilde seçersek (Δ ve δ seçiminin nasıl yapıldığını görmek için (4.3.9) ve (4.3.10) bağıntılarına bakılabilir) $x\in C_{\omega_2}[1,e]$ fonksiyonu da $\|x-y\|_{\omega_1}<\delta$ eşitsizliğini sağlayan keyfi bir fonksiyon olmak üzere, her $t,s\in[1,e]$ için

$$\begin{aligned}
&(Rx-Ry)(t)-(Rx-Ry)(s)\\
&=\left[ax^2(t)+bx(t)-ay^2(t)-by(t)\right]-\left[ax^2(s)+bx(s)-ay^2(s)-by(s)\right]\\
&=\left\{a\left[x^2(t)-y^2(t)\right]+b\left[x(t)-y(t)\right]\right\}-\left\{a\left[x^2(s)-y^2(s)\right]+b\left[x(s)-y(s)\right]\right\}\\
&=\left[x(t)-y(t)\right]\left\{a\left[x(t)+y(t)\right]+b\right\}-\left[x(s)-y(s)\right]\left\{a\left[x(s)+y(s)\right]+b\right\}\\
&=\left\{\left[x(t)-y(t)\right]-\left[x(s)-y(s)\right]+\left[x(s)-y(s)\right]\right\}\left\{a\left[x(t)+y(t)\right]+b\right\}\\
&-\left[x(s)-y(s)\right]\left\{a\left[x(s)+y(s)\right]+b\right\}\\
&=\left\{\left[x(t)-y(t)\right]-\left[x(s)-y(s)\right]\right\}\left\{a\left[x(t)+y(t)\right]\right\}\\
&+a\left[x(s)-y(s)\right]\left[x(t)+y(t)\right]+b\left[x(t)-y(t)\right]-a\left[x(s)-y(s)\right]\left[x(s)+y(s)\right]\\
&-b\left[x(s)-y(s)\right]\\
&=\left\{\left[x(t)-y(t)\right]-\left[x(s)-y(s)\right]\right\}\left\{a\left[x(t)+y(t)\right]\right\}\\
&+a\left[x(s)-y(s)\right]\left[x(t)+y(t)\right]+b\left\{\left[x(t)-y(t)\right]-\left[x(s)-y(s)\right]\right\}\\
&-a\left[x(s)-y(s)\right]\left[x(s)+y(s)\right]
\end{aligned}\tag{4.3.4}$$

olur. (4.3.4)' den

$$
\begin{aligned}
&|(Rx-Ry)(t)-(Rx-Ry)(s)| \\
&\leq |[x(t)-y(t)]-[x(s)-y(s)]|\,|a|\,|x(t)+y(t)| \\
&+|a|\,|x(s)-y(s)|\,|[x(t)+y(t)]-[x(s)+y(s)]| \\
&+|b|\,|[x(t)-y(t)]-[x(s)-y(s)]| \\
&\leq |a|\,\|x+y\|_{\infty}\,|[x(t)-y(t)]-[x(s)-y(s)]| \\
&+|a|\,\|x-y\|_{\infty}\,|[x(t)+y(t)]-[x(s)+y(s)]| \\
&+|b|\,|[x(t)-y(t)]-[x(s)-y(s)]| \qquad (4.3.5)
\end{aligned}
$$

olur. (4.3.5)' den

$$
\begin{aligned}
&\sup\left\{\frac{|(Rx-Ry)(t)-(Rx-Ry)(s)|}{\omega_1(d(t,s))}: t,s\in[1,e],\ t\neq s\right\} \\
&\leq |a|\,\|x+y\|_{\infty}\sup\left\{\frac{|[x(t)-y(t)]-[x(s)-y(s)]|}{\omega_1(d(t,s))}: t,s\in[1,e],\ t\neq s\right\} \\
&+|a|\,\|x-y\|_{\infty}\sup\left\{\frac{|[x(t)+y(t)]-[x(s)+y(s)]|}{\omega_1(d(t,s))}: t,s\in[1,e],\ t\neq s\right\} \\
&+|b|\sup\left\{\frac{|[x(t)-y(t)]-[x(s)-y(s)]|}{\omega_1(d(t,s))}: t,s\in[1,e],\ t\neq s\right\} \\
&\leq |a|\,\eta_1\,\|x+y\|_{\omega_1}\,\|x-y\|_{\omega_1}+|a|\,\eta_1\,\|x-y\|_{\omega_1}\,\|x+y\|_{\omega_1}+|b|\,\|x-y\|_{\omega_1} \\
&=\|x-y\|_{\omega_1}\left[2\,|a|\,\eta_1\,\|x+y\|_{\omega_1}+|b|\right] \qquad (4.3.6)
\end{aligned}
$$

dır. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
(Rx-Ry)(1) &= \left|ax^2(1)+bx(1)+c-ay^2(1)-by(1)-c\right| \\
&= \left|a\left[x^2(1)-y^2(1)\right]+b\left[x(1)-y(1)\right]\right| \\
&= |[x(1)-y(1)]\{a[x(1)+y(1)]+b\}| \\
&\leq |[x(1)-y(1)]|\,\{|a|\,|x(1)+y(1)|+|b|\} \\
&\leq \|x-y\|_{\infty}\,[|a|\,\|x+y\|_{\infty}+|b|] \\
&\leq \eta_1\,\|x-y\|_{\omega_1}\left[|a|\,\eta_1\,\|x+y\|_{\omega_1}+|b|\right] \qquad (4.3.7)
\end{aligned}
$$

olur. Buradan (4.3.6) ile (4.3.7) birlikte düşünülerek ve $\eta_1 = 1$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\|Rx-Ry\|_{\omega_1} &= |(Rx-Ry)(1)| + \sup_{t\neq s}\left\{\frac{|(Rx-Ry)(t)-(Rx-Ry)(s)|}{\omega_1(d(t,s))} : t,s\in[1,e]\right\}\\
&\leq \|x-y\|_{\omega_1}\left[|a|\,\|x+y\|_{\omega_1}+|b|\right]\\
&+\|x-y\|_{\omega_1}\left[2|a|\,\|x+y\|_{\omega_1}+|b|\right]\\
&=\|x-y\|_{\omega_1}\left[3|a|\,\|x+y\|_{\omega_1}+2|b|\right]\\
&\leq \|x-y\|_{\omega_1}\left[3|a|\left(\|x-y\|_{\omega_1}+2\|y\|_{\omega_1}\right)+2|b|\right]\\
&\leq \delta\left[3|a|\,\delta+6|a|\,\|y\|_{\omega_1}+2|b|\right]\\
&=3|a|\,\delta^2+\left(6|a|\,\|y\|_{\omega_1}+2|b|\right)\delta\\
&<\varepsilon
\end{aligned} \tag{4.3.8}
$$

eşitsizliği sağlanır. Çünkü δ pozitif sayısı $\Delta = 36a^2\|y\|_{\omega_1}^2+24|a|\,|b|\,\|y\|_{\omega_1}+4b^2+12|a|\,\varepsilon$ olmak üzere $0<\delta<\frac{\sqrt{\Delta}-6|a|\|y\|_{\omega_1}-2|b|}{6|a|}$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde aşağıdaki gibi belirlenebilir.

$$\|Rx-Ry\|_{\omega_1}\leq 3|a|\,\delta^2+\left(6|a|\,\|y\|_{\omega_1}+2|b|\right)\delta<\varepsilon$$

olduğundan

$$3|a|\,\delta^2+\left(6|a|\,\|y\|_{\omega_1}+2|b|\right)\delta-\varepsilon<0 \tag{4.3.9}$$

bağıntısındaki δ' ya bağlı parabolün diskriminantı $\Delta = 36a^2\|y\|_{\omega_1}^2+24|a|\,|b|\,\|y\|_{\omega_1}+4b^2+12|a|\,\varepsilon$ olup δ_1 ve δ_2 kökleri

$$\delta_{1,2}=\frac{-6|a|\,\|y\|_{\omega_1}-2|b|\pm\sqrt{\Delta}}{6|a|}$$

olur. Dolayısıyla (4.3.9) eşitsizliğini sağlayan δ sayısı: $\delta_1<0$ ve $\delta_2>0$ kökleri arasında pozitif olarak

$$0<\delta<\frac{\sqrt{\Delta}-6|a|\,\|y\|_{\omega_1}-2|b|}{6|a|} \tag{4.3.10}$$

biçiminde, örneğin $\delta=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\Delta}-6|a|\|y\|_{\omega_1}-2|b|}{6|a|}$ olarak seçilebilir.

Buna göre artık $\|x-y\|_{\omega_1}<\delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x\in C_{\omega_2}[1,e]$ için $\|Rx-Ry\|_{\omega_1}\leq 3|a|\,\delta^2+\left(6|a|\,\|y\|_{\omega_1}+2|b|\right)\delta<\varepsilon$ veya $\|Rx-Ry\|_{\omega_1}<\varepsilon$ olduğu görülür. Bu ise R operatörünün $\|\cdot\|_{\omega_1}$ normuna göre $y\in C_{\omega_2}[1,e]$ için sürekli olduğunu gösterir. Başlangıçta $y\in C_{\omega_2}[1,e]$ keyfi seçilip sabit tutulan fonksiyon olarak alındığından, R operatörü $\|\cdot\|_{\omega_1}$ normuna göre $C_{\omega_2}[1,e]$ uzayında süreklidir.

v) K sabiti ise

$$\begin{aligned}
K &= \sup\left\{\int_1^e |k(t,\mu)|d\mu : t\in[1,e]\right\} \\
&= \sup\left\{\int_1^e \left|\frac{\sqrt[3]{\ln t+\ln\mu}}{\mu}\right| d\mu : t\in[1,e]\right\} \\
&\leq \int_1^e \frac{\sqrt[3]{1+\ln\mu}}{\mu} d\mu \\
&= \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{16}-1\right)
\end{aligned}$$

dır.

Bu durumda Teoerem 4.2.1' in (v) varsayımdaki

$$\|p\|_{\omega_2} + [\eta_2 K + K + \eta_2 k_{\omega_2}(e-1)]\,\eta_2 f(r)\, r \leq r$$

eşitsizliği yukarıda bulunanlar yerlerine yazılarak

$$\left(\sqrt[3]{|\hat{n}|}\right) + \sqrt[3]{\frac{|n|\,\pi e}{2}} + \left[\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{16}-1\right) + e - 1\right]\left(3|a|r^3 + 2|b|r^2 + |c|r\right) \leq r \tag{4.3.11}$$

biçiminde yazılır. Açıktır ki n, $\hat{n}$, a, b ve c sabitlerinin uygun olarak seçilmesiyle (4.3.11) eşitsizliğini sağlayan bir pozitif r_0 sayısı vardır. Örneğin $a=b=1$, $c=\frac{1}{5}$, $n=\frac{1}{2^{36}}$ ve $\hat{n}=0$ olacak şekilde alırsak $r_0=\frac{1}{100}$ olarak seçilebilir. Bu değerlerle (4.3.11) eşitsizliğinin

$$\begin{aligned}
&\|p\|_{\omega_2} + [\eta_2 K + K + \eta_2 k_{\omega_2}(e-1)]\,\eta_2 f(r)\, r \leq r \\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{|\hat{n}|}\right) + \sqrt[3]{\frac{|n|\,\pi e}{2}} + \left[\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{16}-1\right) + e - 1\right]\left(3|a|r^3 + 2|b|r^2 + |c|r\right) \leq r \\
&\Leftrightarrow \approx 0,009203768 < \frac{1}{100}
\end{aligned}$$

sağlanmış olduğu görülür.

Böylece temel sonucumuz olan Teorem 4.2.1' in bütün hipotezleri sağlandığından Örnek 4.3.1' deki integral denklemin $C_{\omega_1}[1,e]$ uzayında en az bir çözümünün olduğu sonucuna varılır.

KAYNAKLAR

[1] **Argyros, I. K.** (1985). *Quadratic equations and applications to Chandrasekhars and related equations*, Bull. Austral. Math. Soc. 32, 275-292.

[2] **Banaś, J. & Nalepa, R.** (2013). *On the Space of Functions with Growths Tempered by a Modulus of Continuity and Its Applications*, Journal of Function Spaces and Applications, Article ID 820437, 13 pages.

[3] **Banaś, J. & Rzepka, B.** (2003). *On existence and asymptotic stability of solutions of a nonlinear integral equation*, J. Math. Anal. Appl. 284, 165-173.

[4] **Bayraktar, M.** (2017). *Fonksiyonel Analiz*, Korza Yayıncılık Basım San. ve Tic. A.Ş., 5. Baskı, Ankara.

[5] **Başkan, T. & Bizim, Osman. & Cangül, İsmail Naci.** (2006). *Metrik Uzaylar ve Genel Topolojiye Giriş*, Nobel Yayın No:1017.

[6] **Benchohra, Mouffak. & Darwish, Mohamed Abdalla.** (2009). *On unique solvabity of quadratic integral equations with linear modification of the argument*, Miskolc Mathematical Notes. No. 1, pp. 3–10.

[7] **Bocher, M.** (1971). *An Introduction to the Study of Integral Equations*, Hafner Press, Royal Oak.

[8] **Caballero, J. & Darwish, M. Abdalla & Sadarangani, K.** (2014). *Solvability of a quadratic integral equation of Fredholm type in Hölder spaces*, Electronic J. of Differential Equations, (31), pp. 1-10.

[9] **Caballero, J. & Lŏpez, B. & Sadarangani, K.** (2007). *Existence of nondecreasing and continuous solutions of an integral equation with linear modification of the argument*, Acta Math. Sin. (English Series) 23, 1719-1728.

[10] **Caballero, J. & Nalepa, R. & Sadarangani, K.** (2014). *Solvability of a quadratic integral equation of Fredholm type with supremum in Hölder Spaces*, Journal of Function Spaces, Article ID 856183, 7 pages.

[11] **Case, K. M. & Zweifel, P. F.** (1967). *Linear Transport Theory*, Addison Wesley, Reading, M. A.

[12] **Chandrasekhar, S.** (1960). *Radiative transfer*, Dover Publications, New York.

[13] **Costara, C. & Popa, D.** (2003). *Exercises in Functional Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

[14] **Cheney, E. W.** (2001). *Analysis for Applied Mathematics*, Springer-Verlag Inc., New York.

[15] **Çakar, Ö.** (2007). *Fonksiyonel Analize Giriş*, A. Ü. Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınlar No:13.

[16] **Çakan, Ü.** (2015). *Lineer Olmayan Bazı İntegral Denklemlerin Çözümlerine İlişkin Varlık Teoremleri*, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Malatya.

[17] **Depree, J. D. & Swartz, C.** (1988). *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons. Inc., Canada.

[18] **Dugac, P.** (1989). *Sur la correspondance de Borel et le theoreme de Dirichlet-Heine-Weierstrass-Borel-Schoenies-Lebesgue*, Arch. Internat. Hist. Sci. 39, 69-110.

[19] **Freed, A. D. & Diethelm, K. & Luchko, Y.** (2002). *Fractional-order viscoelasticity* (FOV): Constitutive developments using the fractional calculus: First annual report, Technical Memorandum, TM-2002-211914, NASA Glenn Research Center, Cleveland.

[20] **Hochstadt, H.** (1973). *Integral Equations*, Wiley, New York.

[21] **Hu, S. & Khavani, M. & Zhuang, W.** (1989). *Integral equations arising in the kinetic theory of gases*, Appl. Anal. 34, 261-266.

[22] **Johnsonbaugh, Richard. & Pfaffenberger, W. E.** (2010). *Foundations of Mathematical Analysis*, Dover Publications, New York.

[23] **Karakurt, O.** (2009). *Lineer Olmayan Nonhomojen Kuadratik Volterra integral Denklemleri*, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Malatya.

[24] **Kreyszig, E.** (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley.

[25] **Kelly, C. T.** (1982). *Approximation of solutions of some quadratic integral equations in transport theory*, J. Int. Eq. 4, 221-237.

[26] **Maddox, I. J.** (1970). *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press. Cambridge.

[27] **Megginson, Robert E.** (1998). *An introduction to Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics, 183, Springer-Verlag, New York, MR1650235.

[28] **McCarty, G.** (1988). *An Introduction with Application to Topological Groups*, Dover Publications.

[29] **Musayev, Binali. & Alp, Murat. (2000).** *Fonksiyonel Analiz*, Balcı Yayınları.

[30] **O'Regan, D.** (1998). *Existence theory for nonlinear Volterra integrodiferential and integral equations*, Nonlinear Anal**.** 31, 317-341.

[31] **Polyanin, A. & Menzhirov, A.** (1998). *Handbook of Integral Equations*, Crs Press, New York.

[32] **Sayed, A. M. A El. & Hashem, H. H. G.** (2009). *Solvability of nonlinear Hammerstein quadratic integral equations*, J. Nonlinear Sci. Appl. No. 3, 152-160.

[33] **Seyit, A. Kılıç. & Musa, Erdem**. (-). *Fonksiyonel Analize Giriş*, Gazi Üniversitesi Yayın No: 97, Fen-Edebiyat Fakültesi Yayın No:11.

[34] **Soykan, Y.** (2012). *Metrik Uzaylar ve Topolojisi*, Nobel Yayıncılık.

[35] **Sutherland, W. A.** (1975). *Introduction to Metric and Topological Spaces*, Oxford University Press.

[36] **Taşkıran, K.** (2008). *Lineer Olmayan Kuadratik Volterra integral Denklemleri*, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Malatya.

[37] **Temizer, Ö. F.** (1987). *Volterra integral Denklemleri*, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara.

[38] **Toledano, J. M. A. & Benavides, T. D. & Acedo, G. L.** (1997). *Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory* Birkhauser Verlak.

[39] **Torvik, P. J. & Bagley, R.L.** (1984). *On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials*, J. Appl. Mech. 51, 294-298.

ÖZGEÇMİŞ

Ad–Soyad : İlyas DAL

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:**1999, Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Y. Lisans:** 2006, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik A.B.D
- **Doktora:** 2022, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik A.B.D

MESLEKİ DENEYİMLER:

- 1999-2002 Afşin Lisesi
- 2002-2006 Afyon Süleyman Demirel Fen Lisesi
- 2006-2017 Malatya Fen Lisesi
- 2017-2021 Malatya Anadolu Lisesi
- 2021-Halen Şehit Serdar Selçuk Anadolu Lisesi

DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN ÇALIŞMALAR
(Makaleler, Bildiriler, Patentler v.b.)

- **İlyas Dal, Ömer Faruk Temizer (2020).** Solvability of a Quadratic Integral Equation of Fredholm Type Via a Modified Argument, JMA No 43, pp 47-66.