

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIRSIZ BİR ARALIK ÜZERİNDE LİNEER OLMAYAN BAZI
İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Bekir İLHAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak 2020

Tezin Başlığı : SINIRSIZ BİR ARALIK ÜZERİNDE LİNEER
OLMAYAN BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN VARLIğI

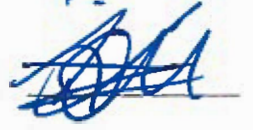
Tezi Hazırlayan : Bekir İLHAN

Sınav Tarihi : 23.01.2020

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında
Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

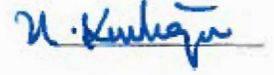
Tez Danışmanı: Prof. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR
İnönü Üniversitesi



Prof. Dr. Rifat ÇOLAK
Fırat Üniversitesi



Prof. Dr. Hikmet KEMALOğLU
Fırat Üniversitesi



Doç. Dr. A. Fatih ÖZCAN
İnönü Üniversitesi



Dr. Öğr. Üyesi Ümit ÇAKAN
İnönü Üniversitesi



Prof. Dr. Kazım TÜRK
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Sınırsız Bir Aralık Üzerinde Lineer Olmayan Bazı İntegral Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Bekir İLHAN

ÖZET

Doktora Tezi

SINIRSIZ BİR ARALIK ÜZERİNDE LİNEER OLMAYAN BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Bekir İLHAN

İnönü Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

99+vii sayfa

2020

Danışman : Prof. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR

Dört bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde, integral denklemlerin tarihsel gelişimi ve kullanım alanları hakkında genel bilgiler ve bu denklemlere ilişkin bazı tanımlar verilerek, tez çalışmasının literatürdeki yeri ve önemi üzerinde duruldu.

İkinci bölümde, diğer bölümlerin daha kolay anlaşılmasını sağlayacak bazı temel tanımlar ve teoremler ile kompaksızlık ölçüsü kavramına yer verilip, Kuratowski, Hausdorff ve Istrătescu kompaksızlık ölçülerinden bahsedildi. Ayrıca bu bölümde, bazı Banach uzaylarındaki kompaksızlık ölçüleri tanıtılarak, bir operatör denklemin çözümlerine ilişkin "Lokal attractive" ve "Asimptotik kararlılık" kavramlarının tanımları verildi. Bu bölümün son kısmında, kompaksızlık ölçüsü ile birleştirilen bazı sabit nokta teoremleri ele alındı.

Çalışmanın orijinal kısmını üçüncü ve dördüncü bölüm oluşturmaktadır.

Üçüncü bölümde, sınırsız bir aralık üzerinde lineer olmayan bir integral denklem incelendi. Bu denklemin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında en az bir çözüme sahip olmasına imkân veren yeter şartlar verilip, bu şartlar altında çözümlerin asimptotik tavrı belirlendi. Bazı örnekler verilerek çalışmanın farklılığı ve önemi vurgulandı.

Dördüncü bölümde ise, üçüncü bölümdeki integral denklem daha farklı şartlar altında ele alındı. Kompaktsızlık ölçüsü aracılığıyla verilen bir sabit nokta teoremi kullanılarak, hem bu denklemin en az bir çözümünün mevcut ve hem de çözümlerin asimptotik kararlı olduğu gösterildi. Ayrıca, çalışmanın literatürdeki yeri ve önemini açıklayan bazı örnekler verildi.



ANAHTAR KELİMELEER: Lineer olmayan integral denklem, Sınırlı ve sürekli fonksiyonların uzayı, Kompaktsızlık ölçüsü, Darbo sabit nokta teoremi, Asimptotik kararlı çözüm.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

THE EXISTENCE OF SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS ON AN UNBOUNDED INTERVAL

Bekir İLHAN

İnönü University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

99+vii pages

2020

Supervisor : Prof. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR

In the first chapter of this work, consisting of four chapters, the general information on historical developments and usage areas of the integral equations and some definitions about integral equations are given. The place and importance of the thesis study in the literature are emphasized.

In the second chapter, some basic definitions, theorems and the concept of measure of noncompactness are given to understand other chapters easily and also, Kuratowski, Hausdorff and Istrătescu measures of noncompactness are mentioned. Besides, in this chapter, the measures of noncompactness are introduced on some Banach spaces. The definitions of the concepts "Locally attractive" and "Asymptotically stable" are given. In the last part of this chapter, some fixed point theorems associated with measures of noncompactness are handled.

The original parts of the study are the third and fourth chapters.

In the third chapter, a nonlinear integral equation on an unbounded interval is examined. The sufficient conditions enabling the existence of at least one solution

of this equation in the space $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ are given and the asymptotic behavior of the solutions is determined. By giving some examples, the originality and importance of the study are emphasized.

In the fourth chapter, the integral equation discussed in the third chapter is handled under the different conditions. The existence and the asymptotic stability of the solutions of this integral equation are examined by using a fixed point theorem given via the measure of noncompactness. Additionally, some examples explaining the importance and place of the study in literature are introduced.



KEYWORDS: Nonlinear integral equations, the space of bounded and continuous functions, Measure of noncompactness, Darbo fixed point theorem, Asymptotically stable solution.

TEŞEKKÜR

Danışmanlığımı üstlenerek hem bu tezin hazırlanması ve hem de tamamlanması sürecinde yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, tez yazım programında ana dosyanın oluşturulmasına ve karşılaştığım bazı problemlerin giderilmesine katkıda bulunan değerli hocam sayın Prof. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e minnet ve şükranlarımı sunarım.

Gerek tez içeriğine ilişkin hususlarda, gerek TİK (Tez İzleme Komitesi) toplantılarının gerçekleştirilmesi ve evraklarının hazırlanması sırasında ve gerekse tezin enstitü formatına uygun hale getirilmesinde yakın ilgi, destek ve yardımlarını gördüğüm sayın Dr. Öğr. Üyesi Ümit ÇAKAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Yine, TİK üyesi olarak görev üstlenerek bu tezin tamamlanmasına destek olan sayın Doç. Dr. A. Fatih ÖZCAN'a teşekkür ederim.

Hem açmış olduğu derslerle ve hem de gerçekleştirdiğim seminerlerde sunmuş olduğu fikir ve önerileriyle doktora eğitimime önemli katkı sağlayan hocam sayın Prof. Dr. Ö. Faruk TEMİZER'e teşekkür ederim.

Tezi yazarken kullanmış olduğum LaTeX programında oluşturulan ana dosyada bazı düzenlemeler yaparak karşılaştığım güçlüklerin aşılmasına yardımcı olan sayın Prof. Dr. Bilal ALTAY'a teşekkür ederim.

Jüri üyesi olarak görev üstlenerek, tezin tamamlanmasına destek olan Fırat Üniversitesi öğretim üyelerinden sayın Prof. Dr. Rifat ÇOLAK'a ve Prof. Dr. Hikmet KEMALOĞLU'na teşekkür ederim.

Maddi ve manevi desteklerini üzerimden hiçbir zaman eksik etmeyerek bana yardımcı olan değerli aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
1.1. İntegral Denklemlere İlişkin Bazı Bilgiler ve Tanımlar	1
1.2. Tez Çalışmasının Literatürdeki Yeri ve Önemi	6
2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER	9
2.1. Temel Kavramlar	9
2.2. Kompaktsızlık Ölçüleri	18
2.2.1. Bazı Banach Uzaylarındaki Kompaktsızlık Ölçüleri	24
2.2.2. Kompaktsızlık Ölçülerinin Bazı Sabit Nokta Teoremlerindeki Rolü	29
3. LİNEER OLMAYAN BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ UZAYINDAKİ ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE ASİMPTOTİK TAVRI	38
3.1. Çözümlerin Varlığı ve Asimptotik Tavrı	38
3.2. Örnekler ve Bazı Karşılaştırmalar	47
4. LİNEER OLMAYAN BİR İNTEGRAL DENKLEM SINIFI- NIN SINIRSIZ BİR ARALIK ÜZERİNDE ASİMPTOTİK KARARLI ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI	66
4.1. Asimptotik Kararlı Çözümlerin Varlığı	66
4.2. Örnekler, Bazı Varlık Teoremlerinin Karşılaştırılması	72
KAYNAKLAR	91
ÖZGEÇMİŞ	97

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar cümlesi,
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi,
$\mathbb{R}^+$	: $[0, \infty)$ aralığı,
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar cümlesi,
$\sup$	: Supremum,
$\inf$	: İnfimum,
$\max$	: Maksimum,
$\min$	: Minimum,
$\limsup$	: Limit süperiyör,
$\liminf$	: Limit inferiyör,
$B(X)$	: X üzerinde tanımlı, reel değerli ve sınırlı fonksiyonların uzayı,
$C[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı,
$L_p[a, b]$	: $\left\{ x \mid x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ölçülebilirdir ve } \int_a^b x(t) ^p dt < \infty \right\}$,
$BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$	: $\mathbb{R}^+$ da tanımlı, reel değerli, sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı,
$C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$	: $\mathbb{R}^+$ da tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı,
$\ \cdot\ $	: Norm fonksiyonu,
$B(x, r)$	: x merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar,
$B[x, r]$	: x merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar,
B_r	: θ (sıfır) merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar,
$\overline{A}$	: A cümlesinin kapanışı,
$\text{Conv } X$	: X ' i ihtiva eden konveks ve kapalı cümlelerin en küçüğü,
$\text{diam } A$	: A cümlesinin çapı,
E	: Banach Uzayı,
$\mathfrak{M}_E$	: E Banach uzayının boştan farklı ve sınırlı alt cümlelerinin ailesi,
$\mathfrak{N}_E$	: $\mathfrak{M}_E$ ' nin kapanışı kompakt olan alt cümlelerinin ailesi,
α	: Kuratowski kompaktsızlık ölçüsü,
χ	: Hausdorff kompaktsızlık ölçüsü,
β	: Istrătescu kompaktsızlık ölçüsü,
μ	: Bir E Banach uzayındaki kompaktsızlık ölçüsü,
$\ker \mu$	: μ kompaktsızlık ölçüsünün çekirdeği,
$w(x, \varepsilon)$	: x fonksiyonunun, $\varepsilon \geq 0$ sayısı için süreklilik modülü.

1. GİRİŞ

Bu bölümde, integral denklemlerin tarihi gelişimi ve kullanım alanlarından bahsedilerek, bu denklemlerle ilgili bazı tanımlara yer verilecek ve tez çalışmasının literatürdeki yeri ve önemi üzerinde durulacaktır.

1.1 İntegral Denklemlere İlişkin Bazı Bilgiler ve Tanımlar

İntegral denklemler, 19. yüzyılın başlarında incelenmeye ve üzerinde araştırmalar yapılmaya başlanmış bir konudur. 1823 yılında Abel tarafından bir integral denkleme rastlanmış ve integral denklem tabiri ilk defa 1888 yılında De Bois Reymond tarafından kullanılmıştır, [1].

Pek çok konu gibi, integral denklemler de çeşitli ihtiyaçlar sonucu ortaya çıkmış ve zamanın problemlerine cevap verecek şekilde geliştirilerek olgunlaştırılmıştır. İntegral denklemler gün geçtikçe daha çok kullanım alanları bulmakta, teknolojiye ve birçok mühendislik alanında yaygın olarak kullanılmaktadır. Esneklik, plastisite, kütle ve ısı aktarımı, akışkanlar mekaniği, salınma kuramı, stokastik modelleme, kemoterapi, ekonomi ve tıp, integral denklemlerin kullanıldığı bazı alanlardır, [2].

Tanım 1.1.1 ([3]). *İntegral işareti altında bilinmeyen bir fonksiyonu ihtiva eden denklemlere **integral denklem** adı verilir.*

Örneğin; α, f ve k bilinen fonksiyonlar, λ bilinen parametre ve u bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere;

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt, \quad (1.1.1)$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt, \quad (1.1.2)$$

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt, \quad (1.1.3)$$

$$f(x) = \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt, \quad (1.1.4)$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt, \quad (1.1.5)$$

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt, \quad (1.1.6)$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^\infty k(x - t)u(t)dt \quad (1.1.7)$$

ve

$$u(x) = \int_0^x \frac{u(s)}{(x - s)^\beta} ds, \quad (0 < \beta < 1) \quad (1.1.8)$$

birer integral denklemdir. (1.1.1) – (1.1.7) integral denklemlerinde f ve α fonksiyonlarına **kuvvet fonksiyonu** ve k fonksiyonuna da **çekirdek** adı verilir, [3]. (1.1.8) denkleminde çekirdek $k(x, s) = 1/(x - s)^\beta$ olarak tanımlıdır.

Tanım 1.1.2 ([3]). *Bilinmeyen fonksiyonun yalnızca lineer formlarını bulunduran bir denkleme **lineer integral denklem** denir. Bir integral denklem lineer değilse bu denkleme **lineer olmayan integral denklem** adı verilir.*

Bu tanıma göre, (1.1.1) – (1.1.8) denklemleri lineerdir. f, K ve u bilinen fonksiyonlar ve x fonksiyonu da bilinmeyen olmak üzere;

$$x(t) = f(t) + \int_0^t K(t, s)x^n(s)ds, \quad (n \neq 1), \quad (1.1.9)$$

$$x(t) = f(t) + \int_0^t \sin(x(s)) ds \quad (1.1.10)$$

ve

$$x(t) = f(t) + \int_0^t u(t, s, x(s))ds \quad (1.1.11)$$

denklemleri birer lineer olmayan integral denklemdir. (1.1.11) denklemi, (1.1.9) ve (1.1.10) denklemlerine göre, lineer olmayan bir integral denklemin daha genel formudur, [4].

Tanım 1.1.3 ([5]). *İntegralin sınırlarından her ikisinin sabit veya sonsuz ya da biri sabitken diğerinin sonsuz olduğu denklemlere **Fredholm tipi integral denklem**, integral sınırlarından en az birinin değişken olduğu denklemlere de **Volterra integral denklemi** denir.*

Buna göre, yukarıda verilen (1.1.1)–(1.1.11) denklemlerinden, (1.1.1)–(1.1.3) ve (1.1.7) Fredholm, diğerleri ise Volterra tipi lineer integral denklemlerdir.

Tanım 1.1.4 ([5]). *Bir integral denklemde bilinmeyen fonksiyon, sadece integral içerisinde ise denkleme **I. çeşit**, hem içinde hem de dışında ise denkleme **II. çeşit integral denklem** adı verilir. II. çeşit bir integral denklemde, integralin dışındaki bilinmeyen fonksiyon başka bir fonksiyonla çarpım halinde ise bu denkleme de **III. çeşit integral denklem** denir.*

Bu tanıma göre, yukarıda verilen (1.1.1)-(1.1.11) integral denklemlerinden, (1.1.1) ve (1.1.4) denklemleri I. çeşit, diğerleri ise II. çeşittir. Ayrıca, (1.1.3) ve (1.1.6), III. çeşit integral denklemlerdir.

Tanım 1.1.5 ([5]). *Bir integral denklemde integralin dışında, bilinmeyen fonksiyon haricinde başka bir fonksiyon mevcut değilse denklem **homojen** aksi halde **homojen olmayan integral denklem** olarak adlandırılır.*

(1.1.1)-(1.1.11) denklemlerinden, (1.1.8) homojen, diğerleri ise homojen olmayan integral denklemlerdir.

Tanım 1.1.6 ([3]). *Bir integral denklemde integral sınırlarından en az biri sonsuz veya denklemin çekirdeği integrasyon aralığının en az bir noktasında sınırsız ise denkleme **singüler integral denklem** denir.*

Buna göre, (1.1.7) ve (1.1.8) singüler integral denklemlerdir.

Volterra tipi integral denklemlere ilişkin ilk çalışmalar İtalyan matematikçi Vito Volterra (1860-1940) tarafından yapılmıştır, [5]. Volterra tipi integral denklemlerin belirli fiziksel problemlere karşılık geldikleri anlaşılınca bu alanda yapılan çalışmalar artmıştır, [6].

A. Friedman,

$$f(t) = \phi(t) - \int_0^t K(t - \tau)G[f(\tau), \tau] d\tau$$

formundaki lineer olmayan konvolüsyon çekirdekli Volterra integral denklemlerin, kuvvetli hipotez şartları altında pozitif ve monoton çözümlerini elde edip, çözümlerin asimptotik davranışıyla ilgilenmiştir, [7].

R. Ling, konvolüsyon çekirdekli lineer Volterra integral denklemi için Özdeşlik Teoremini verip, bu teoreme dayanarak,

$$f(t) = 1 - \int_0^t K(t - \tau)f(\tau)d\tau$$

formundaki birim kaynaklı, pozitif ve monoton çekirdekli lineer Volterra denklemlerin çözümlerinin pozitif ve sınırlı fonksiyonlar olduğunu göstermiştir, [7].

Trafik araç teorisi ve biyoloji bilimindeki bazı problemlerin çözümü,

$$x(t) = f(t, x(t)) \int_0^1 u(t, s, x(s))ds, \quad t \in [0, 1]$$

formundaki lineer olmayan Fredholm integral denklemine bağlıdır, [4].

Parabolik sınır değer problemleri, bir salgının gelişiminin matematiksel modellenmesi ve çeşitli fiziksel ve matematiksel modellemelerden doğan ve **Volterra-Fredholm integral denklemleri** olarak adlandırılan denklemler ise literatürde iki formda yer alır. Bunlar; f, F, k_1 ve k_2 bilinen fonksiyonlar, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ bilinen parametreler ve u bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere;

$$u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)u(t)dt \quad (1.1.12)$$

ve

$$u(x, t) = f(x, t) + \lambda \int_a^t \int_c^d F(x, t, \xi, \tau, u(\xi, \tau)) d\xi d\tau \quad (1.1.13)$$

denklemleridir, [8, 9]. (1.1.12) lineer ve (1.1.13) ise lineer olmayan bir integral denklemdir.

$$x(t) = f(t, x(t)) \int_0^t u(t, s, x(s))ds,$$

$$x(t) = (Tx)(t) \int_0^t u(t, s, x(s)) ds,$$

$$x(t) = a(t) + x(t) \int_0^t v(t, \tau, x(\tau)) d\tau$$

ve

$$x(t) = a(t) + (Tx)(t) \int_0^t f(\phi(t, s)) \varphi(x(s)) ds$$

formundaki lineer olmayan Volterra tipi integral denklemlerin çözülebilirliğine dair çalışmalar literatürde mevcuttur, [4, 10].

Ayrıca, $C[0, a]$ ve $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzaylarında,

$$x(t) = f \left(t, (T_1x)(t), (T_2x)(t) \int_0^{\varphi(t)} H(t, t, x(\tau)) d\tau, x(\alpha_1(t)), \dots, x(\alpha_m(t)) \right)$$

denklemini ile,

$$(Fx)(t) = f \left(t, (T_1x)(t), (T_2x)(t) \int_0^{\varphi_1(t)} H_1(t, t, x(\tau)) d\tau, x(\alpha_1(t)), \dots, x(\alpha_{m_1}(t)) \right)$$

ve

$$(Gx)(t) = g \left(t, (T_3x)(t), (T_4x)(t) \int_0^{\varphi_2(t)} H_2(t, t, x(\tau)) d\tau, x(\phi_1(t)), \dots, x(\phi_{m_2}(t)) \right)$$

olmak üzere; $x(t) = (Fx)(t)(Gx)(t)$ denklemini ele alınmış ve bu denklemlerin en az bir çözüme sahip olmasına imkân veren yeter şartlar belirlenmiştir, [11].

Lineer olmayan fonksiyonel integral denklemler lineer olmayan analizin önemli bir alanını oluşturur. Sınırsız bir aralık üzerinde tanımlı çözümleri ile Volterra, Hammerstein ve Urysohn integral denklemleri gibi lineer olmayan klasik integral denklemler bu teoremin önemli bir parçasını teşkil eder. Kompaktsızlık ölçüsüyle birleştirilen teknik, lineer olmayan integral denklemler teorisinde çözümlerin varlığı üzerine yapılan çalışmalarda yaygın olarak kullanılmaktadır. **Bu teknik yardımıyla, çözümlerin sadece varlığı değil, aynı zamanda monoton, attractive ve asimptotik kararlı olma gibi bazı özellikleri de tespit edilebilmektedir, [12].**

1.2 Tez Çalışmasının Literatürdeki Yeri ve Önemi

Agarwal ve O'Regan (2004),

$$x(t) = \int_0^\infty k(t, s)f(s, x(s))ds, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.2.1)$$

formundaki lineer olmayan Fredholm integral denkleminin sınırlı, sürekli ve sonsuzda limiti mevcut olan fonksiyonların uzayı $C_l[0, \infty)$ da çözülebilirliğini incelemişlerdir, [13].

Meehan ve O'Regan (1999, 2000), $C_l[0, \infty)$ uzayında,

$$x(t) = h(t) + \mu \int_0^\infty k(t, s)f(s, x(s))ds, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.2.2)$$

integral denkleminin ve $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında da,

$$x(t) = h(t) + \int_0^\infty k(t, s)[f(x(s)) + g(x(s))]ds, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.2.3)$$

integral denkleminin çözümlerinin varlığı üzerine hükümler vermişlerdir, [14, 15].

Aynı yazarlar (2001),

$$x(t) = h(t) + \int_0^\infty k(t, s)f(s, x(s))ds, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.2.4)$$

lineer olmayan integral denkleminin $L^p(\mathbb{R}^+)$ uzayında en az bir pozitif çözüme sahip olmasına imkân veren yeter şartları elde etmişlerdir, [16].

Banaś ve Poludniak (2004), kompaktsızlık ölçüsü ve Darbo sabit nokta teoremi yardımıyla,

$$x(t) = f(t) + \int_0^\infty u(t, s, x(s))ds, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.2.5)$$

formundaki lineer olmayan integral denkleminin, $\mathbb{R}^+$ üzerinde Lebesgue integralenebilen fonksiyonların uzayındaki monoton çözümlerinin varlığını araştırmışlardır, [17].

Banaś ve Martin (2006),

$$x(t) = g(t) + f(t, x(t)) \int_0^\infty K(t, s)h(s, x(s))ds, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.2.6)$$

lineer olmayan Fredholm integral denkleminin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ Banach uzayındaki çözümlerinin varlığı ve asimptotik kararlılığı hakkında incelemeler yapmıştır, [18].

Cabellaro ve diğerleri (2004), Banaś ve Olszowy (2008) ve yakın zamanda Darwish ve diğerleri (2013), sınırsız bir aralık üzerinde tanımlı

$$x(t) = a(t) + f(t, x(t)) \int_0^\infty u(t, s, x(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.2.7)$$

formundaki Urysohn integral denkleminin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayındaki çözümlerinin varlığı üzerinde çalışmışlardır, [12, 19, 20]. Bu çalışmalarda verilen varlık teoremlerinin ispatında farklı şartlar ve çeşitli kompaktsızlık ölçüleri kullanılmıştır.

Olszowy (2008, 2011), $\mathbb{R}^+$ da tanımlı ve sürekli fonksiyonların Fréchet uzayında (1.2.7) integral denkleminin çözümlerinin varlığı ve monotonluğu üzerine çalışmalar yapmıştır, [21–23].

Karoui ve diğerleri (2010), Schauder sabit nokta teoremi ile, (1.2.7) denkleminin $L^p(\mathbb{R}^+)$ uzayındaki çözümlerinin varlığına dair incelemeler yapmıştır, [24].

Son zamanlarda, Khosravi ve diğerleri (2015),

$$x(t) = f(t, x(t)) + \int_0^\infty k(t-s)(Qx)(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.2.8)$$

formunda konvolüsyon tipi lineer olmayan fonksiyonel integral denkleminin, $L^p(\mathbb{R}^+)$ uzayında çözümlerinin varlığı üzerine çalışmışlardır, [25].

Bu tezde, yakın zamanlarda yapılan çalışmalar ve bu alandaki gelişmelerin ışığı altında, (1.2.1)-(1.2.8) denklemlerinin her birinden çok daha genel olan

$$x(t) = (F_1x)(t) + (F_2x)(t) \int_0^\infty v(t, s, x(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.2.9)$$

lineer olmayan Fredholm integral denklemi incelenecektir. (1.2.9) denkleminde, $F_i : BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \rightarrow BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, ($i = 1, 2$) operatörleri ile $v : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bilinen ve $x = x(t)$ fonksiyonu ise bilinmeyenidir.

F_i , ($i = 1, 2$) operatörleri ve v fonksiyonunun uygun seçimiyle, (1.2.1)-(1.2.8) denklemlerinin her birinin, (1.2.9) denkleminin birer özel hali olduğu kolayca görülebilir. Bu tez çalışmasında, uygun kompaktsızlık ölçüleri yardımıyla, (1.2.9)

denklemleri için iki farklı varlık teoremi ifade ve ispat edilecektir. Çözümü aşikâr olmayan denklemlerin ele alındığı bazı özgün örneklerle, bu çalışmada ulaşılan sonuçların uygulanabilirliği gösterilecektir. **Böylece, bu tezde, daha önce yapılan çalışmalarda [12–25] elde edilen sonuçlar daha genel bir denklem bakımından verilecektir. Ayrıca, bu çalışmada verilen varlık teoremlerini mevcut literatürle [12, 19, 20, 23] karşılaştırmaya imkân veren bazı özel denklemler ele alınarak, çalışmanın farklılığı ve önemine dair irdelemeler yapılacaktır.**



2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde, ilk kısımda, sonraki bölümlerin anlaşılmasını kolaylaştırmak amacıyla bazı kavramlara ilişkin tanımlar ve teoremler verildi. Tamamı kompaktsızlık ölçüsü kavramına ayrılan ikinci kısımda; Kuratowski, Hausdorff ve Istrătescu kompaktsızlık ölçüleri ile bazı Banach uzaylarındaki kompaktsızlık ölçüleri tanımlandı. Yine bu kısımda, bir operatör denklemin çözümlerine ilişkin "Lokal attractive" ve "Asimptotik kararlılık" kavramlarına yer verildi ve kompaktsızlık ölçüsü ile birleştirilen bazı sabit nokta teoremleri ele alındı.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 (Topolojik uzay, [26]). $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa τ , X için bir topoloji ve (X, τ) da bir topolojik uzay olarak adlandırılır. τ' nun elemanlarına ise açık küme (τ -açık küme) denir.

(T₁) $X, \emptyset \in \tau$.

(T₂) τ ailesinin herhangi bir sonlu alt ailesinin kesişimi τ ailesindedir.

(T₃) τ ailesinin herhangi bir alt ailesinin birleşimi τ ailesine aittir.

Tanım 2.1.2 (Metrik, metrik uzay, [27]). $X \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda; her $x, y, z \in X$ için,

(M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri özelliği) ve

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

önergeleri doğru oluyorsa $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay adı verilir.

Örnek 2.1.1 ([27]). $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ve $[a, b]$ aralığından, $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesine tanımlı ve sürekli olacak şeklindeki bütün fonksiyonların cümlesi $C[a, b]$ olsun. Bu

durumda, $d(f, g) = \max \{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}$ fonksiyonu $C[a, b]$ üzerinde bir metriktir.

Örnek 2.1.2 ([11, 28]). Negatif olmayan reel sayılar cümlesi $\mathbb{R}^+$ dan $\mathbb{R}^n$ ye tanımlı, sürekli ve sınırlı olan fonksiyonların cümlesi $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Özel olarak $n = 1$ olması durumunda $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ yerine genellikle $BC(\mathbb{R}^+)$ yazılır. $BC(\mathbb{R}^+)$ üzerinde tanımlanan, $d(x, y) = \sup_{t \geq 0} |x(t) - y(t)|$ fonksiyonu bir metriktir.

Tanım 2.1.3 ([27]). (X, d) metrik uzayı verilsin. $x_0 \in X$ ve r pozitif bir reel sayı olmak üzere;

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\},$$

$$B[x_0, r] = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\},$$

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$$

cümlelerine sırasıyla, **açık yuvar**, **kapalı yuvar** ve **yuvar yüzeyi** denir. Burada; x_0 noktasına merkez ve r sayısına da yarıçap adı verilir.

Bu tezde aksi belirtilmedikçe, merkezi θ (sıfır) ve yarıçapı r olan kapalı yuvar kısaca B_r ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.4 ([11, 29]). (X, d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ ve $x_0 \in A$ olsun. Bu durumda; $B(x_0, r) \subseteq A$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı mevcut ise A cümlesine x_0 elemanının bir **komşuluğu** denir. Bir cümle kendisine ait her elemanın bir komşuluğu ise bu cümleye **açık cümle**, tümleyeni açık olan cümleye ise **kapalı cümle** denir.

Tanım 2.1.5 ([11, 30]). (X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $A \subseteq X$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $(B(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$ ise x_0 elemanına A cümlesinin bir **yığılma noktası** denir. A' nın bütün yığılma noktalarının cümlesi A' ile gösterilir.

Tanım 2.1.6 ([11, 30]). (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere, $A \cup A'$ cümlesine A 'nın **kapanışı** denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7 ([11, 29]). (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ boş olmayan bir cümle olmak üzere, $\text{diam } A = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}$ değerine A **cümlesinin çapı** denir.

Tanım 2.1.8 ([11, 31]). (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x, y \in A$ için $d(x, y) \leq M$ olacak şekilde bir $M \geq 0$ sayısı mevcut ise A **cümlesine sınırlıdır** denir.

Uyarı 2.1.1. Tanım 2.1.7 ve Tanım 2.1.8 dikkate alındığında, bir (X, d) metrik uzayında boştan farklı bir $A \subseteq X$ alt cümlesinin sınırlı olması, $\text{diam } A < \infty$ olmasına denktir.

Tanım 2.1.9 ([32]). (X, d) bir metrik uzay olmak üzere; $f : A \rightarrow X$ fonksiyonu için $f(A)$ görüntü kümesi X 'te sınırlı ise f fonksiyonuna **sınırlıdır** denir.

Tanım 2.1.10 ([33]). X bir topolojik ve M de bir metrik uzay olmak üzere; $f : X \rightarrow M$ fonksiyonu verilsin. Herhangi bir $x \in X$ noktasına karşılık; $x \in U$, $U \subset X$ alt cümlesi açık ve f fonksiyonu U üzerinde sınırlı olacak şekilde bir U cümlesi bulunabiliyorsa, f fonksiyonuna X üzerinde **lokal sınırlıdır** denir.

Bu tanıma göre, sınırlı bir fonksiyon lokal sınırlıdır. Ancak lokal sınırlı bir fonksiyon sınırlı olmayabilir.

Örnek 2.1.3. $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu sınırlı olmadığı halde lokal sınırlıdır.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu ise, ne sınırlı ve ne de lokal sınırlıdır.

Tanım 2.1.11 ([11, 30]). (X, d) , (Y, d') metrik uzaylar, $f : A \subseteq X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $d(x, x_0) < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in A$ için $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ sayısı mevcut ise, f fonksiyonu x_0 **noktasında süreklidir** denir. f fonksiyonu A cümlesindeki her noktada sürekli ise, bu durumda A **üzerinde (A' da) süreklidir** denir. Eğer buradaki δ sayısı bir $B \subseteq A$ cümlesi üzerinde sadece ε' a bağlı ($x_0 \in B$ noktasının seçiminden bağımsız) ise bu durumda f fonksiyonu B **üzerinde düzgün süreklidir** denir.

Tanım 2.1.12 (Eşsüreklilik, [34]). (S_1, d_1) ve (S_2, d_2) metrik uzaylar olmak üzere; $\mathcal{F}$, S_1 ' den S_2 ' ye tanımlı olan fonksiyonların bir ailesi olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $d_1(x, y) < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x, y \in S_1$ ve her $f \in \mathcal{F}$ için $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $\mathcal{F}$ ailesine eşsüreklidir denir.

Tanım 2.1.13 (Metrik uzayda yakınsak dizi, [27]). (X, d) bir metrik uzay, (x_n) , X' te bir dizi ve $x \in X$ olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $n \geq n_0$ iken $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa veya buna denk bir ifade ile $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ ise (x_n) dizisine (X, d) ' de yakınsak ve x elemanına da dizinin limiti denir.

Tanım 2.1.14 (Cauchy dizisi ve tamlık, [27]). $X = (X, d)$ bir metrik uzay ve (x_n) , X' te bir dizi olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $m, n \geq n_0$ iken $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı mevcutsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi adı verilir. X' teki her Cauchy dizisi yakınsaksa (X, d) ' ye tam metrik uzay denir.

Tanım 2.1.15 ([26]). Bir (X, d) metrik uzayının bütün açık alt kümelerinden oluşan τ_d ailesi X üzerinde bir topoloji ve (X, τ_d) bir topolojik uzaydır. τ_d topolojisine d **metriğinin ürettiği (doğurduğu) topoloji** adı verilir.

Tanım 2.1.16 (Metriklenebilir uzay, [35]). Eğer X üzerinde τ topolojisini üreten en az bir metrik varsa (X, τ) topolojik uzayına metriklenebilir denir.

Tanım 2.1.17 ([11, 36]). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\sup_{s \geq t} f(s) \right] \text{ ve } \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\inf_{s \geq t} f(s) \right]$$

limitleri mevcut ise bu limit değerlerine sırasıyla, f 'nin $t \rightarrow \infty$ için **limit süperiyör'ü** ve **limit inferiyör'ü** denir ve bunlar sırasıyla, $\limsup_{t \rightarrow \infty} f(t)$ ve $\liminf_{t \rightarrow \infty} f(t)$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.1 ([11, 36]). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} f(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Önerme 2.1.2 ([11, 36]). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \liminf_{t \rightarrow \infty} f(t) = \limsup_{t \rightarrow \infty} f(t) = L.$$

Tanım 2.1.18 (Alt yarı süreklilik, [35]). X bir metriklenebilir uzay olmak üzere; $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x_0 \in X$ noktası verilsin. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$ olacak şekilde, X cümlesindeki her (y_n) dizisi için $f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$ oluyorsa f fonksiyonuna x_0 noktasında alt yarı süreklidir denir. Eğer f , X cümlesine ait her noktada alt yarı sürekli ise X üzerinde alt yarı süreklidir denir.

Tanım 2.1.19 ([11, 30]). (X, d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ ve I herhangi bir indis cümlesi olmak üzere, X 'in alt cümlelerinin bir $\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$ ailesi $A \subseteq \cup_{i \in I} G_i$ şartını sağlıyorsa $\mathcal{G}$ ailesine A için **bir örtüdür** denir. $\mathcal{G}$ ailesinin sayılabilir olması durumunda $\mathcal{G}$ 'ye **sayılabilir örtü**, sonlu olması durumunda **sonlu örtü** ve benzer olarak her elemanın açık olması halinde **açık örtü** denir. Eğer bir $J \subseteq I$ için $A \subseteq \cup_{i \in J} G_i$ ise $\{G_i : i \in J\}$ ailesine $\mathcal{G}$ örtüsünün bir **alt örtüsü** denir.

Örnek 2.1.4 ([11]). $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesini alışılmış metrik ile dikkate alalım. Bu durumda; $\mathcal{G} = \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi $\mathbb{R}$ için bir örtü (hatta açık örtü) ve $\{(-k, k) : k = 2n \text{ ve } n \in \mathbb{N}\}$ ailesi de $\mathcal{G}'$ nin bir alt örtüsüdür.

Tanım 2.1.20 ([11, 30]). (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere, A' nin her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahip ise A cümlesi **kompakttır** denir.

Teorem 2.1.1 ([11, 37]). $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt bir cümle ve $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu durumda f fonksiyonu S üzerinde düzgün süreklidir.

Tanım 2.1.21 ([11, 38]). (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere, $\overline{A}$ cümlesi kompakt ise A' ya **ön-kompakt (relatif kompakt)** cümle denir.

Teorem 2.1.2 ([27]). (X, d) bir metrik uzay ve $\emptyset \neq A \subset X$ olsun.

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ olacak şekilde } A' \text{ da bir } (x_n) \text{ dizisi vardır.}$$

Tanım 2.1.22 ([11, 30]). (X, d) bir metrik uzay, $S \subseteq X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Her $x \in X$ için $d(x, y) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $y \in S$ elemanı mevcut ise S cümlesine X için bir ε -**ağı** denir. Başka bir ifade ile $X \subset \cup \{B(y, \varepsilon) : y \in S\}$ kapsamı sağlanıyor ise S cümlesi X için bir ε -**ağıdır** denir. S sonlu ise S' ye X' in **sonlu bir ε -ağı** denir.

Tanım 2.1.23 ([11, 30]). (X, d) bir metrik uzay olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık X sonlu bir ε -ağına sahip ise X **tamamen sınırlıdır (total sınırlıdır veya prekompakttır)** denir.

Tanım 2.1.24 (Vektör uzayı, [27]). V boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}$, reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Eğer toplama $+: V \times V \rightarrow V$ ve skalarla çarpma $\cdot: \mathbb{F} \times V \rightarrow V$ işlemleri için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, V' ye $\mathbb{F}$ üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) adı verilir.

(A) $V, +$ işlemine göre değişmeli bir gruptur.

(B) $x, y \in V$ ve $\lambda, \beta \in \mathbb{F}$ olmak üzere; aşağıdaki şartlar sağlanır:

(1) $\lambda x \in V$,

(2) $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$,

(3) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

(4) $(\lambda\beta)x = \lambda(\beta x)$,

(5) $1x = x$.

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (C) ise V reel (kompleks) lineer uzay adını alır.

Örnek 2.1.5 ([27]). Bu çalışmada yer alan,

$$B(X) = \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ sınırlıdır}\},$$

$$C[a, b] = \{f \mid f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli}\},$$

$$L_p[a, b] = \left\{ f \mid f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ölçülebilirdir ve } \int_a^b |f(t)|^p dt < \infty \right\},$$

$$BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ sınırlı ve sürekli}\},$$

$$C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli}\}$$

cümlelerinin her biri, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ve $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, $(\lambda \in \mathbb{R})$ işlemleriyle birer reel vektör uzayıdır.

Tanım 2.1.25 (Lineer bağımsızlık (bağımlılık), [27]). $X, \mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

(a) X' in sonlu bir $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ alt kümesi için,

$$” \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0, (\alpha_i \in \mathbb{F}) \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 ”$$

önermesi doğru ise S kümesi ($\mathbb{F}$ üzerinde) lineer bağımsızdır denir.

Eğer S lineer bağımsız değilse S' ye lineer bağımlıdır denir.

(b) $S \subseteq X$ alt kümesinin sonsuz olması durumunda sonlu her $A \subset S$ alt kümesi lineer bağımsız (bağımlı) oluyorsa S' ye lineer bağımsız (bağımlı) denir.

Tanım 2.1.26 (Lineer uzayın boyutu, [11, 39]). $n \in \{1, 2, \dots\}$ olmak üzere, bir X vektör uzayı lineer bağımsız n tane vektör içeriyor ve $n + 1$ tane lineer bağımsız vektör bulunamıyorsa, X vektör uzayı "sonlu boyutludur" denir. n sayısına ise " X ' in boyutu" adı verilir ve $\dim X = n$ yazılır. Eğer bir X uzayı sonlu boyutlu değilse, sonsuz boyutlu uzay olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.27 (Normlu uzay, [40]). X bir vektör uzayı ve $\mathbb{K} = \mathbb{R} (\mathbb{C})$ olsun. $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{K}$ fonksiyonu, her $x, y \in X$ ve her $a \in \mathbb{K}$ için aşağıda verilen (N1)–(N4) şartlarını sağlarsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir.

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0,$$

$$(N2) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$$

$$(N3) \quad \|ax\| = |a|\|x\|,$$

$$(N4) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Örnek 2.1.6 ([11, 28, 39]). $C[a, b]$ ve $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ cümleleri, sırasıyla,

$$\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)| \quad \text{ve} \quad \|x\| = \sup_{t \geq 0} |x(t)|$$

normları ile birer normlu uzaydır.

Tanım 2.1.28 ([11, 39]). X bir vektör uzayı ve $M \subseteq X$ olsun. Her $x, y \in M$ için $\{\alpha x + (1 - \alpha)y : 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq M$ oluyorsa M ' ye **konveks cümle** denir.

Tanım 2.1.29 (Norm metriği, [27]). $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. Bu takdirde, $d(x, y) = \|x - y\|$ olarak tanımlanan d fonksiyonu X üzerinde bir metrik olup, $\|x\| = d(x, \theta)$ eşitliği geçerlidir. Bu metriğe "normun oluşturduğu (doğurduğu) metrik" veya kısaca "norm metriği" denir.

Uyarı 2.1.2. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. Bu durumda X , Tanım 2.1.29 ile tanımlanan metrikle bir metrik uzaydır ve bir metrik uzaydaki tanımlar ve teoremlerin $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki karşılıkları da norm metriğine göre verilmektedir.

Tanım 2.1.30 ([11, 41]). X bir normlu uzay ve $M \subseteq X$ olsun. X ' in, M cümlesini kapsayan bütün konveks ve kapalı alt cümlelerinin arakesatine M ' nin **konveks kapanışı** denir ve $\text{Conv } M$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.31 (Sınırlı cümle, [42]). $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve $A \subset X$ olsun. Her $x \in A$ için $\|x\| \leq M$ olacak şekilde bir $M \geq 0$ sayısı mevcutsa A cümlesine **sınırlıdır** denir.

Teorem 2.1.3 ([27]). N sonlu boyutlu normlu bir uzay ve $A \subset N$ olsun.

$$A \text{ kompakttır} \Leftrightarrow A \text{ kapalı ve sınırlıdır.}$$

Tanım 2.1.32 (Banach uzayı, [38]). $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve (x_n) bu uzayda keyfi bir Cauchy dizisi olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ limiti mevcutsa bu uzaya **tam normlu uzay** (Banach uzayı) denir.

Örnek 2.1.7 ([11, 28, 39]). $C[a, b]$ ve $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ uzayları, sırasıyla,

$$\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)| \text{ ve } \|x\| = \sup_{t \geq 0} |x(t)|$$

normları ile birer Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.33 (Operatör, [38, 43]). X ve Y lineer uzaylar ve $D \subset X$ olmak üzere; D ' nin her elemanına Y ' nin bir tek elemanını karşılık getiren bir kurala X ' ten Y ' ye bir operatör denir ve $T : X \rightarrow Y$ ile gösterilir. Burada D ' ye, T operatörünün tanım cümlesi denir ve $D(T)$ ile gösterilir.

$$R = R(T) = \{y \in Y : y = T(x), x \in D(T)\}$$

cümlesine T operatörünün görüntü cümlesi denir. Buna göre, $T : X \rightarrow Y$ gösteriminde, $D(T) \neq X$ veya $R(T) \neq Y$ olabileceğine dikkat edilmelidir.

Tanım 2.1.34 (Sürekli operatör, [38]). X ve Y normlu uzayları ve $T : X \rightarrow Y$ operatörü verilsin. Aşağıdakilerden biri sağlandığında, T operatörü (dönüşümü) $x_0 \in D(T)$ noktasında **sürekli** denir.

(a) $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, $\|x - x_0\| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in D(T)$ için $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı vardır.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ olan her $(x_n) \subset D(T)$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T(x_0)$ 'dır.

Eğer T , $D(T)$ 'nin her noktasında sürekli ise $D(T)$ üzerinde süreklidır denir.

Tanım 2.1.35 (Düzgün sürekli operatör, [44]). X ve Y normlu uzayları ve $T : X \rightarrow Y$ operatörü verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\|x - y\| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x, y \in X$ için $\|Tx - Ty\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa T 'ye düzgün süreklidır denir.

Tanım 2.1.36 (Sınırlı operatör, [38]). X ve Y normlu uzayları ve $T : X \rightarrow Y$ operatörü verilsin. Her $x \in D(T)$ için $\|Tx\| \leq c\|x\|$ olacak şekilde sabit bir $c \geq 0$ sayısı varsa T 'ye $D(T)$ üzerinde sınırlıdır denir.

2.2 Kompaktsızlık Ölçüleri

Bu kısımda kompaktsızlık ölçülerinin önemi ve tarihi gelişimine ilişkin bazı bilgiler verilecektir. Daha sonra keyfi bir tam metrik uzayda tanımlanan Kuratowski, Hausdorff ve Istrătescu kompaktsızlık ölçülerinden bahsedilerek bu ölçüler arasındaki ilişki ifade edilecektir.

Kompaktsızlık ölçüleri lineer olmayan analizde önemli bir yere sahiptir. Operatör teorisi ve Banach uzaylarındaki geometri kadar, diferansiyel ve integral denklemler teorisinde de kullanılırlar. Kompaktsızlık ölçüsü kavramı Kuratowski ve Darbo'nun temel çalışmalarıyla başlamıştır, [45]. 1970'lerden başlayarak bu kavram ve onun uygulamalarıyla ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Kompaktsızlık ölçüsü teorisinde Kuratowski ve Hausdorff kompaktsızlık ölçüleri önemli bir yere sahiptir. Özellikle Hausdorff ölçüsü lineer olmayan analizin birçok dalında ve uygulamalarında kullanılmaktadır, [45]. Kompaktsızlık ölçüsünün farklı tanımları arasında en kullanışlı olanı aksiyomatik yaklaşıma sahip olanıdır.

Kabaca ifade etmek gerekirse, bir kompaksızlık ölçüsü, belirli bir metrik uzayın boştan farklı ve sınırlı bütün alt cümlelerinin ailesi üzerinde tanımlı olan ve relatif kompakt alt cümlelerin ailesi üzerinde sıfır değerini alan bir fonksiyondur, [46].

Tanım 2.2.1 (Metrik uzaylarda kompaksızlık ölçüsü, [47]). (X, d) bir metrik uzay olsun. Aşağıdaki (1) – (5) şartlarını sağlayan bir $\phi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonuna X üzerinde bir kompaksızlık ölçüsü denir.

$$(1) \quad \phi(A) = \infty \Leftrightarrow A \text{ sınırsızdır.}$$

$$(2) \quad \phi(A) = \phi(\overline{A}).$$

$$(3) \quad \phi(A) = 0 \Leftrightarrow A \text{ total sınırlıdır.}$$

$$(4) \quad A \subseteq B \Rightarrow \phi(A) \leq \phi(B).$$

$$(5) \quad \text{Eğer } X \text{ tam ve } (B_n), (n = 1, 2, \dots), X' \text{ teki kapalı cümlelerin, } B_{n+1} \subseteq B_n \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(B_n) = 0 \text{ olacak şekilde bir dizisi ise o zaman } K = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n, \text{ boş olmayan kompakt bir cümledir.}$$

Tanım 2.2.2 (Kuratowski kompaksızlık ölçüsü, [48]). (X, d) bir tam metrik uzay ve $A \subseteq X$ alt cümlesi boştan farklı ve sınırlı olmak üzere;

$$\alpha(A) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : A \subset \bigcup_{i=1}^n S_i, S_i \subset X, \text{diam}(S_i) < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N} \right\}$$

şeklinde tanımlanan α fonksiyonuna Kuratowski kompaksızlık ölçüsü adı verilir.

Önerme 2.2.1 ([46]). (X, d) bir tam metrik uzay, A, A_1 ve A_2, X' in boştan farklı ve sınırlı alt cümleleri olsun. Bu durumda;

$$(i) \quad \alpha(A) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} \text{ kompakttır,}$$

$$(ii) \quad \alpha(A) = \alpha(\overline{A}),$$

$$(iii) \quad A_1 \subset A_2 \Rightarrow \alpha(A_1) \leq \alpha(A_2),$$

$$(iv) \alpha(A_1 \cup A_2) = \max\{\alpha(A_1), \alpha(A_2)\},$$

$$(v) \alpha(A_1 \cap A_2) \leq \min\{\alpha(A_1), \alpha(A_2)\}$$

özellikleri geçerlidir.

Aşağıdaki teoremle verilen sonuç, iyi bilinen Cantor arakesit teoreminin bir genelleştirmesidir.

Teorem 2.2.1 ([48]). (X, d) bir tam metrik uzay olsun. Eğer (F_n) , X ' in boştan farklı, kapalı ve sınırlı alt cümlelerinin $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(F_n) = 0$ olacak şekilde azalan bir dizisi ise bu durumda; $F_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ eşitliğiyle verilen F_∞ , X ' in boştan farklı ve kompakt bir alt cümlesidir.

Önerme 2.2.2 ([46]). $(X, \|\cdot\|)$, $\mathbb{F} = \mathbb{R} (\mathbb{C})$ cismi üzerinde bir Banach uzay, Q , Q_1 ve Q_2 , X ' in boştan farklı ve sınırlı alt cümleleri olmak üzere;

$$(i) \alpha(Q_1 + Q_2) \leq \alpha(Q_1) + \alpha(Q_2),$$

$$(ii) \text{ Her } x \in X \text{ için, } \alpha(Q + x) = \alpha(Q),$$

$$(iii) \text{ Her } \lambda \in \mathbb{F} \text{ için, } \alpha(\lambda Q) = |\lambda| \alpha(Q),$$

$$(iv) \alpha(Q) = \alpha(\text{Conv } Q)$$

özellikleri geçerlidir.

Teorem 2.2.2 ([49, 50]). $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzay ve B_X , X ' te birim yuvar olsun. Bu durumda;

$$\alpha(B_X) = \begin{cases} 0, & X \text{ sonlu boyutlu ise} \\ 2, & X \text{ sonsuz boyutlu ise} \end{cases}$$

eşitliği geçerlidir.

Diğer bir önemli ve kullanışlı ölçü olan Hausdorff kompaktsızlık ölçüsü de aşağıda verilmektedir:

Tanım 2.2.3 (Hausdorff kompaktsızlık ölçüsü, [51]). (X, d) bir tam metrik uzay ve $A \subseteq X$ alt cümlesi boştan farklı ve sınırlı olmak üzere;

$$\chi(A) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r_i), x_i \in X, r_i < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N} \right\}$$

şeklinde tanımlanan χ fonksiyonuna Hausdorff kompaktsızlık ölçüsü denir.

$(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı ise

$$\chi(A) = \inf \{ \varepsilon > 0 : A \subset S + \varepsilon B_X, S \subset X \text{ ve } S \text{ sonlu} \}$$

olur, [46].

Önerme 2.2.1 ve Önerme 2.2.2, χ fonksiyonu için de geçerlidir, [46].

Teorem 2.2.3 ([46]). (X, d) bir tam metrik uzay ve $\emptyset \neq A \subseteq X$ alt cümlesi sınırlı olsun. Bu durumda;

$$\chi(A) \leq \alpha(A) \leq 2\chi(A) \quad (2.2.1)$$

eşitsizliği geçerlidir. Uzay sonsuz boyutlu iken (2.2.1),

$$\chi(A) < \alpha(A) < 2\chi(A)$$

halini alır.

Teorem 2.2.4 ([52]). $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı ve B_X , X' te birim yuvar olsun. Bu durumda;

$$\chi(B_X) = \begin{cases} 0, & X \text{ sonlu boyutlu ise} \\ 1, & X \text{ sonsuz boyutlu ise} \end{cases}$$

eşitliği geçerlidir.

Tanım 2.2.4 (ε - ayırık cümle, [46]). (X, d) bir tam metrik uzay ve $Q \subseteq X$ alt cümlesi boştan farklı ve sınırlı olsun. Bu taktirde; verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için,

$$" \forall x, y (x, y \in Q \text{ ve } x \neq y) \Rightarrow d(x, y) \geq \varepsilon "$$

önermesi doğru ise Q' ya ε -ayrıktır denir.

Tanım 2.2.5 (Istrătescu kompaktsızlık ölçüsü, [46, 53]). (X, d) bir tam metrik uzay ve Q, X' in boş olmayan sınırlı bir alt cümlesi olsun. Bu durumda; Q' nun $\beta(Q)$ ile gösterilen Istrătescu kompaktsızlık ölçüsü,

$$\beta(Q) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset Q \text{ ve } A, \varepsilon - \text{ayrık ise } A \text{ sonludur} \}$$

olarak tanımlanır. (X, d) ' nin boştan farklı ve sınırlı bütün alt cümlelerinin ailesi üzerinde tanımlanan β fonksiyonu bir kompaktsızlık ölçüsüdür, bu ölçüye "Istrătescu kompaktsızlık ölçüsü" adı verilir.

Önerme 2.2.1 ve Önerme 2.2.2, β fonksiyonu için de geçerlidir, [46].

Teorem 2.2.5 ([54]). X bir Hilbert uzayı ise $\beta(B_X) = \sqrt{2}$ dir.

Teorem 2.2.6 ([55]). (X, d) bir tam metrik uzay ve $\emptyset \neq Q \subset X$ ve Q sınırlı olsun. Bu durumda,

$$\chi(Q) \leq \beta(Q) \leq \alpha(Q) \leq 2\chi(Q)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Uyarı 2.2.1. Keyfi bir tam metrik uzay veya Banach uzayında $\phi(A) = 0$ olarak tanımlanan ϕ fonksiyonu **bir kompaktsızlık ölçüsü değildir**. Zira; bu tanıma göre, kapanışı kompakt olmayan cümlelerin ölçüsü de sıfırdır. Ancak, sınırlı herhangi bir A cümlesinin $\overline{A}$ kapanışı kapalı ve sınırlı olup, **uzayın sonlu boyutlu bir Banach uzayı olması halinde**, Teorem 2.1.3 gereğince $\overline{A}$ kompakttır. Yani uzay sonlu boyutlu iken ϕ bir kompaktsızlık ölçüsü olup, Önerme 2.2.1' den, $\phi = \alpha = \chi = \beta$ eşitliği geçerlidir.

Kompaktsızlık ölçüsü kavramı bir çok yolla tanımlanabilir. Bir (X, d) tam metrik uzayının boş olmayan ve sınırlı bütün alt cümlelerinin ailesi üzerinde, Kuratowski [48] tarafından tanımlanan α fonksiyonu Tanım 2.2.2 ile, Goldstein [51] tarafından tanımlanan ve Hausdorff kompaktsızlık ölçüsü olarak adlandırılan

χ fonksiyonu Tanım 2.2.3 ile ve Istrătescu' nun [53] tanımladığı β kompaksızlık ölçüsü ise, Tanım 2.2.5 ile verildi.

$E, \|\cdot\|$ normuyla bir Banach uzayı olmak üzere; E' nin boş olmayan ve sınırlı alt cümlelerinin ailesini $\mathfrak{M}_E$ ile ve $\mathfrak{M}_E'$ deki relatif kompakt (kapanışı kompakt) alt cümlelerin ailesini de $\mathfrak{N}_E$ ile gösterelim. Şimdi, kompaksızlık ölçüsü kavramının tanımına ilişkin olarak Banaś ve Goebel tarafından [56] geliştirilen aksiomatik yaklaşımı verelim:

Tanım 2.2.6 (Banach uzaylarında kompaksızlık ölçüsü, [45, 56]). *Bir $\mu : \mathfrak{M}_E \rightarrow \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa, bu μ fonksiyonuna E' de bir kompaksızlık ölçüsü denir.*

$$(1) \quad \ker \mu = \{A \in \mathfrak{M}_E : \mu(A) = 0\} \neq \emptyset \text{ ve } \ker \mu \subset \mathfrak{N}_E' \text{ dir,}$$

$$(2) \quad A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B),$$

$$(3) \quad \mu(\overline{A}) = \mu(\text{Conv } A) = \mu(A),$$

$$(4) \quad \mu(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leq \lambda\mu(A) + (1 - \lambda)\mu(B), \quad \lambda \in [0, 1],$$

$$(5) \quad \text{Eğer } (A_n), \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \mathfrak{M}_E' \text{ deki kapalı cümlelerin, } A_{n+1} \subset A_n \text{ ve}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0 \text{ şartlarını sağlayan bir dizisi ise o zaman } A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ cümlesi boş değildir.}$$

(1)' de tanımlanan $\ker \mu$ ailesi, μ **kompaksızlık ölçüsünün çekirdeği** olarak adlandırılır. Eğer (1) – (5) şartlarına ilâve olarak,

$$(6) \quad \ker \mu = \mathfrak{N}_E$$

şartı da sağlanıyorsa μ 'ye bir **tam kompaksızlık ölçüsü** ve (1) – (6) şartlarıyla birlikte,

$$(7) \quad \mu(A \cup B) = \max \{\mu(A), \mu(B)\},$$

$$(8) \quad \mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B) \text{ ve}$$

$$(9) \mu(\lambda A) = |\lambda| \mu(A), (\lambda \in \mathbb{R})$$

şartları da sağlanıyorsa μ' ye **regüler (düzenli)** bir kompaksızlık ölçüsü adı verilir.

Uyarı 2.2.2. *Tanım 2.2.6' nın (5). şartından, $A_\infty \neq \emptyset$ olup, $n = 1, 2, 3, \dots$ için $A_\infty \subset A_n$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$ olduğundan, $\mu(A_\infty) \leq \mu(A_n)$ ve böylece $\mu(A_\infty) = 0$ elde edilir. Buna göre; $A_\infty \in \ker \mu$ olup, Tanım 2.2.6' nın (1). şartından, $\overline{A_\infty}$ kompakttır. Diğer taraftan; kapalı cümlelerin herhangi sayıdaki kesişimleri de kapalı olduğundan A_∞ kapalı ve şu hâlde kompakttır.*

Örnek 2.2.1 ([57]). *Bir Banach uzayındaki Kuratowski (α), Hausdorff (χ) ve Istrătescu (β) kompaksızlık ölçüleri tamdır. Diğer taraftan; E bir Banach uzayı ve Q da, E' nin boştan farklı ve sınırlı bir alt cümlesi olmak üzere;*

$$\mu_1(Q) = \|Q\| = \sup_{x \in Q} \|x\| \text{ ve } \mu_2(Q) = \text{diam } (Q) = \sup_{x, y \in Q} \|x - y\|$$

eşitlikleriyle tanımlanan μ_1 ve μ_2 fonksiyonlarının her biri E' de bir kompaksızlık ölçüsü olup, $\ker \mu_1 = \{\{\theta\}\} \neq \mathfrak{N}_E$ ve $\ker \mu_2 = \{\{x\} : x \in X\} \neq \mathfrak{N}_E$ olduğundan μ_1 ve μ_2 tam değildir.

2.2.1 Bazı Banach Uzaylarındaki Kompaksızlık Ölçüleri

Bu kısımda, önce bazı Banach uzaylarında kompaksızlık ölçüleri tanımlanırken kullanılan önemli bir kavram ve teorem ifade edilecek ve daha sonra birkaç kompaksızlık ölçüsü örneği verilecektir.

Tanım 2.2.7 (Süreklilik modülü, [58]). *Bir $w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu,*

$$(1) \omega(0) = 0,$$

$$(2) \varepsilon > 0 \text{ için } \omega(\varepsilon) > 0 \text{ ve}$$

$$(3) w, \mathbb{R}^+ \text{ üzerinde azalmayıp}$$

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona süreklilik modülü adı verilir.

Genellikle, $\omega = \omega(\varepsilon)$ süreklilik modülünün $\varepsilon = 0$ noktasında sürekli olduğu, yani, $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $\omega(\varepsilon) \rightarrow 0$ olduğu kabul edilir.

(X, d) metrik uzayı sınırlı olsun. X üzerinde tanımlı, reel değerli ve sınırlı olan bütün fonksiyonların cümlesini $B(X)$ ile gösterelim. $x \in B(X)$ ve keyfi fakat sabit bir $\varepsilon \geq 0$ sayısı için $\omega(x, \varepsilon)$ sayısı,

$$\omega(x, \varepsilon) = \sup\{|x(u) - x(v)| : u, v \in X \text{ ve } d(u, v) \leq \varepsilon\}$$

olmak üzere; $\varepsilon \rightarrow \omega(x, \varepsilon)$ fonksiyonuna x fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

Şimdi, $\varepsilon \rightarrow \omega(x, \varepsilon)$ fonksiyonunun $\varepsilon = 0$ noktasındaki sürekliliğine ilişkin [58] numaralı kaynaktan bir teorem verelim:

Teorem 2.2.7. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega(x, \varepsilon) = 0 \Leftrightarrow x$ fonksiyonu X üzerinde düzgün süreklidir.

Örnek 2.2.2 ([45,56,59]). Kapalı ve sınırlı $[a, b]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların maksimum normuyla verilen $C[a, b]$ uzayını alalım. Bu durumda; $X \in \mathfrak{M}_{C[a,b]}$ yani; $X, C[a, b]$ uzayının boş olmayan ve sınırlı bir alt cümlesi olmak üzere; $x \in X$ ve $\varepsilon \geq 0$ için x 'in süreklilik modülü olarak bilinen $\omega(x, \varepsilon)$ sayısını,

$$\omega(x, \varepsilon) = \sup\{|x(s) - x(t)| : t, s \in [a, b] \text{ ve } |s - t| \leq \varepsilon\}$$

eşitliğiyle ve $d(x)$ sayısını da,

$$d(x) = \sup\{|x(s) - x(t)| - [x(s) - x(t)] : t, s \in [a, b] \text{ ve } t \leq s\}$$

olarak tanımlayalım. Ayrıca,

$$\omega(X, \varepsilon) = \sup\{\omega(x, \varepsilon) : x \in X\} \text{ ve } d(X) = \sup\{d(x) : x \in X\}$$

olsun. Bu durumda;

$$\omega_0(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega(X, \varepsilon) \text{ ve } \mu(X) = \omega_0(X) + d(X)$$

eşitlikleriyle tanımlanan ω_0 ve μ fonksiyonlarının her biri $C[a, b]$ uzayında birer kompaksızlık ölçüsüdür ve $\chi(X) = \omega_0(X)/2$ eşitliği geçerlidir. Ayrıca, $\ker \mu$ çekirdeği, $X \subset C[a, b]$ eşsüreklili ve X 'teki fonksiyonlar $[a, b]$ üzerinde azalmayan olmak üzere; $X \in \mathfrak{M}_{C[a, b]}$ cümlelerinden oluşmaktadır.

Tanım 2.2.8 ([46]). $x \in C[a, b]$ olsun. Arzu edildiği kadar küçük bir $r \geq 0$ sayısına karşılık, x **fonksiyonunun r -ötelemesi** olarak adlandırılan $x_r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$x_r(t) = \begin{cases} x(t+r), & a \leq t \leq b-r \text{ ise} \\ x(b), & b-r \leq t \leq b \text{ ise} \end{cases}$$

eşitliğiyle tanımlıdır.

Teorem 2.2.8 ([46, 52]). $X, C[a, b]$ Banach uzayının boştan farklı ve sınırlı bir alt cümlesi, $x \in C[a, b]$, $r \geq 0$ ve x_r de, x fonksiyonunun Tanım 2.2.8 ile verilen r -ötelemesi olmak üzere; X 'in $\chi(X)$ Hausdorff kompaksızlık ölçüsü için,

$$2\chi(X) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sup_{x \in X} \left[\max_{r \in [0, \delta]} \|x - x_r\| \right] \right\}$$

eşitliği geçerlidir.

Tanım 2.2.9 ([46]). $1 \leq p < \infty$ olmak üzere; ölçülebilir ve $\int_a^b |x(t)|^p dt$ integrali mevcut olan $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının denklik sınıflarından oluşan $L^p[a, b]$ cümlesi, $\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$ normuyla bir Banach uzayıdır. $x \in L^p[a, b]$ olmak üzere; yeteri kadar küçük seçilen bir $h > 0$ sayısı için, x **fonksiyonunun Steklov ortalaması** olarak adlandırılan $x_h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$x_h(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} x(s) ds, \quad t \in [a, b]$$

eşitliğiyle tanımlanmaktadır. (Bu tanımda, $t \notin [a, b]$ iken; $x(t) = 0$ alınmaktadır).

Teorem 2.2.9 ([46, 52]). $X, L^p[a, b]$ Banach uzayının boştan farklı ve sınırlı bir alt cümlesi, $x \in L^p[a, b]$, $h > 0$ ve x_h de, x fonksiyonunun Tanım 2.2.9 ile

verilen Steklov ortalaması olsun. Bu durumda;

$$\mu(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \sup_{x \in X} \left[\max_{h \in [0, \varepsilon]} \|x - x_h\|_p \right] \right\}$$

ve $\chi(X)$, X cümlesinin Hausdorff kompaktsızlık ölçüsü olmak üzere;

$$\frac{1}{2}\mu(X) \leq \chi(X) \leq \mu(X)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Örnek 2.2.3 ([56]). $\mathbb{R}^+$ üzerinde tanımlı, reel değerli, sürekli ve sınırlı olan fonksiyonların $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ cümlesinin, $\|x\| = \sup\{|x(t)| : t \in \mathbb{R}^+\}$ normuyla bir Banach uzayı olduğu bilinmektedir.

$BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında boştan farklı ve sınırlı bir X kümesini alalım. $x \in X$, $\varepsilon \geq 0$ ve $T > 0$ olmak üzere, x fonksiyonunun $[0, T]$ üzerinde $\omega^T(x, \varepsilon)$ ile gösterilen süreklilik modülü,

$$\omega^T(x, \varepsilon) = \sup\{|x(s) - x(t)| : t, s \in [0, T] \text{ ve } |t - s| \leq \varepsilon\}$$

eşitliğiyle tanımlanmaktadır. Ayrıca,

$$\omega^T(X, \varepsilon) = \sup\{\omega^T(x, \varepsilon) : x \in X\}, \quad \omega_0^T(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega^T(X, \varepsilon),$$

$$\omega_0^\infty(X) = \lim_{T \rightarrow \infty} \omega_0^T(X) \tag{2.2.2}$$

olsun. Bunun yanında,

$$\beta^T(x) = \sup\{|x(t)| : t \geq T\}, \quad \beta^T(X) = \sup\{\beta^T(x) : x \in X\},$$

$$\beta^\infty(X) = \lim_{T \rightarrow \infty} \beta^T(X) \tag{2.2.3}$$

olmak üzere; $\mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})}$ üzerinde μ fonksiyonunu,

$$\mu(X) = \omega_0^\infty(X) + \beta^\infty(X) \tag{2.2.4}$$

olarak tanımlayalım. (2.2.4) ile tanımlanan μ fonksiyonu $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında bir kompaktsızlık ölçüsüdür ve bu ölçünün $\ker \mu$ çekirdeği, $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayının boştan farklı, sınırlı ve lokal eşsüreklili olan X alt cümlelerinden oluşmaktadır. Ayrıca, X cümlesine göre düzgün olacak şekilde $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ eşitliği geçerlidir. Yani; her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $x \in X$ ve $t \geq T$ olan her t sayısı için $|x(t)| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir $T = T(\varepsilon) > 0$ sayısı mevcuttur.

$BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında tanımlanan diğer bir kompaktsızlık ölçüsü aşağıda verilmektedir:

X , $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayının boştan farklı ve sınırlı bir alt cümlesi, ω_0^∞ , (2.2.2) eşitliğiyle tanımlanan fonksiyon, $t \in \mathbb{R}^+$,

$$X(t) = \{x(t) : x \in X\}, \quad \text{diam } X(t) = \sup\{|x(t) - y(t)| : x, y \in X\}$$

olmak üzere;

$$\mu(X) = \omega_0^\infty(X) + \limsup_{t \rightarrow \infty} \text{diam } X(t) \quad (2.2.5)$$

şeklinde tanımlanan μ fonksiyonu $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında bir kompaktsızlık ölçüsüdür. Bu ölçünün çekirdeği, $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayının boştan farklı, kapalı, sınırlı ve lokal eşsüreklili olacak şekildeki X alt cümlelerinden oluşmaktadır ve X 'teki fonksiyonların oluşturduğu demetin kalınlığı sonsuzda sıfıra yaklaşmaktadır.

μ , (2.2.5) ile tanımlanan kompaktsızlık ölçüsü olmak üzere; $X \in \ker \mu$ olsun. X cümlesine ait olan fonksiyonlar düzgün lokal attractive (asimptotik kararlılık) özelliğine sahiptir. Şimdi bu kavramın tanımını verelim:

Tanım 2.2.10 (Lokal attractive, asimptotik kararlılık, [60]). Ω , $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ nin boş olmayan bir alt kümesi ve $F : \Omega \rightarrow BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ bir operatör olmak üzere;

$$x(t) = (Fx)(t), \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (2.2.6)$$

denklemini verilsin. Bu durumda, (2.2.6) denkleminin $B(x_0, r) \cap \Omega$ cümlesindeki herhangi $x = x(t), y = y(t)$ çözümleri için,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - y(t)) = 0 \quad (2.2.7)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ ve $r > 0$ mevcut ise (2.2.6)'nın çözümleri "lokal attractive" dir denir. Eğer (2.2.7)'deki limit $B(x_0, r) \cap \Omega$ cümlesine göre düzgün ise, yani; herhangi bir $\varepsilon \geq 0$ sayısı verildiğinde, $t \geq T$ olan her t sayısı ve (2.2.6)'nın herhangi $x, y \in B(x_0, r) \cap \Omega$ çözümleri için, $|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir $T = T(\varepsilon) > 0$ sayısı mevcut ise (2.2.6)'nın çözümleri "düzgün lokal attractive" dir veya "asimptotik kararlıdır" denir.

2.2.2 Kompaktsızlık Ölçülerinin Bazı Sabit Nokta Teoremlerindeki Rolü

Kompaktsızlık ölçüsü sabit nokta teorisinde kullanılan önemli bir araçtır. Bu kısımda, Tanım 2.2.6 ile verilen bir kompaktsızlık ölçüsüyle birleştirilen bazı sabit nokta teoremleri verilecektir. İlk olarak, bundan sonraki bazı kısımlarda ihtiyaç duyacağımız iki önemli teoremi ifade edelim:

Teorem 2.2.10 (Schauder sabit nokta teoremi, [61]). C bir E Banach uzayının boştan farklı, konveks ve kompakt bir alt cümlesi olsun. Bu taktirde; sürekli herhangi bir $F : C \rightarrow C$ dönüşümünün sabit bıraktığı en az bir nokta vardır.

Schauder Sabit Nokta Teoreminin diğer bir versiyonu aşağıda verilmektedir:

Teorem 2.2.11 ([62]). Ω , bir E Banach uzayının boş olmayan, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt cümlesi olsun. Bu durumda; sürekli ve kompakt herhangi bir $T : \Omega \rightarrow \Omega$ dönüşümü, Ω cümlesinde en az bir noktayı sabit bırakır.

Teorem 2.2.12 (Banach sabit nokta teoremi, [63]). $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü verilsin. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$\|Tx - Ty\| \leq K\|x - y\|$$

olacak şekilde bir K ($0 \leq K < 1$) sabiti mevcut ise bu durumda; T dönüşümünün sabit bıraktığı, yani $Tx_0 = x_0$ eşitliğini sağlayan, bir tek $x_0 \in X$ vardır.

Tanım 2.2.11 (Darbo şartı, büzülme, [64]). E bir Banach uzayı olmak üzere; μ, E' de bir kompaktsızlık ölçüsü, $\emptyset \neq \Omega \subset E$ ve $T : \Omega \rightarrow \Omega$ operatörü sürekli olsun. Üstelik T, Ω' daki sınırlı cümleleri sınırlı cümlelere dönüştürsün. Eğer boş olmayan sınırlı her $X \subset \Omega$ alt cümlesi için,

$$\mu(TX) \leq k\mu(X) \tag{2.2.8}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k \geq 0$ sabiti mevcutsa T, μ ölçüsüne göre k sabiti ile Darbo şartını sağlar denir. $k < 1$ olması halinde T' ye μ ölçüsüne göre bir büzülme (daralma) dönüşümü adı verilir.

Şimdi, Teorem 2.2.11' in bir genelleştirmesi olan teoremi verelim:

Teorem 2.2.13 (Darbo sabit nokta teoremi, [56]). Ω , bir E Banach uzayının boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt cümlesi, μ, E' de bir kompaktsızlık ölçüsü ve $T : \Omega \rightarrow \Omega$ operatörü μ ölçüsüne göre bir büzülme ise, T, Ω' da en az bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. Ω cümlesinde bir (Ω_n) dizisini,

$$\Omega_1 = \text{Conv } T(\Omega), \quad \Omega_n = \text{Conv } T(\Omega_{n-1}), \quad n = 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlayalım. Bu dizideki bütün kümelerin, Ω cümlesinin boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesi ve her n sayma sayısı için $\Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n$ kapsamasının geçerli olduğunu görelim:

$T : \Omega \rightarrow \Omega$ dönüşümü için $T(\Omega) \neq \emptyset$ ve $T(\Omega) \subseteq \Omega$ dır. Buna göre; Ω cümlesi, $T(\Omega)$ cümlesini kapsayan konveks ve kapalı bir cümledir. Diğer taraftan; Ω_1 in tanımı gereğince, $T(\Omega)$ cümlesini kapsayan en küçük kapalı ve konveks küme Ω_1 olup, $\Omega_1 \neq \emptyset$ ve $\Omega_1 \subseteq \Omega$ olur. Üstelik, $T(\Omega_1) \subseteq T(\Omega)$ olacağından $\Omega_2 \subseteq \Omega_1$ elde edilir. Buna göre iddia $n = 1$ için doğrudur.

$\Omega_n \subseteq \Omega$, Ω_n boş olmayan, kapalı, konveks bir cümle ve $\Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n$ olsun. Bu durumda; $T(\Omega_n) \neq \emptyset$ ve $T(\Omega_n) \subseteq T(\Omega) \subseteq \Omega$ olur. Şu hâlde; Ω_{n+1} in tanımı gereğince, $\Omega_{n+1} \subseteq \Omega$ olup, Ω_{n+1} boş olmayan, kapalı ve konveks bir cümledir. Ayrıca, $\Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n$ olduğundan $T(\Omega_{n+1}) \subseteq T(\Omega_n)$ ve Ω_n cümle dizisinin tanımından $\Omega_{n+2} \subseteq \Omega_{n+1}$ olur. Demek ki önerme n için doğru iken $n + 1$ için de doğrudur. Tümevarım metodu gereğince önerme bütün sayma sayıları için doğrudur.

Böylece, Tanım 2.2.6' nın (3) nolu şartını ve T operatörünün μ ölçüsüne göre bir büzülme olduğu gerçeğini de dikkate alarak,

$$\mu(\Omega_1) = \mu(\text{Conv } T(\Omega)) = \mu(T(\Omega)) \leq k\mu(\Omega)$$

ve $n = 2, 3, \dots$ için,

$$\mu(\Omega_n) = \mu(\text{Conv } T(\Omega_{n-1})) = \mu(T(\Omega_{n-1})) \leq k\mu(\Omega_{n-1})$$

yani,

$$\mu(\Omega_n) \leq k\mu(\Omega_{n-1}) \quad (2.2.9)$$

sonucuna ulaşırız. $\mu(\Omega_1) \leq k\mu(\Omega)$ olduğu göz önüne alınarak (2.2.9) eşitsizliğinin kullanılmasıyla, $n = 1, 2, \dots$ için,

$$\mu(\Omega_n) \leq k^n \mu(\Omega) \quad (2.2.10)$$

olduğu kolayca görülebilir. $k < 1$ olduğunu da aklımızda tutarak (2.2.10)' da $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Omega_n) = 0$ eşitliğine ulaşırız. $Y = \cap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ olsun. Konveks cümlelerin kesişimi de konveks olduğundan, Uyarı 2.2.2' nin de

dikkate alınmasıyla, $Y \in \ker \mu$ ve Y' nin E Banach uzayının boştan farklı konveks ve kompakt bir alt cümlesi olduğu anlaşılır.

Ayrıca, T operatörü Y kümesini yine kendi üzerine eşler. Gerçekten; (Ω_n) cümle dizisinin tanımı ve her n sayma sayısı için geçerli olan $\Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n$ kapsamını da aklımızda tutarak,

$$T(Y) = T(\cap_{n=1}^{\infty} \Omega_n) \subseteq \cap_{n=1}^{\infty} T(\Omega_n) \subseteq \cap_{n=1}^{\infty} \Omega_{n+1} \subseteq \cap_{n=1}^{\infty} \Omega_n = Y$$

elde ederiz ki bu da T operatörünün Y kümesini yine kendi üzerine eşlemesi demektir. Diğer taraftan; $Y \subset \Omega \subset E$ olup, Y boştan farklı, konveks ve kompakt bir cümle ve $T : Y \rightarrow Y$ dönüşümü de sürekli olduğundan, Teorem 2.2.10 gereğince, T dönüşümü Y' de ve dolayısıyla Ω' da en az bir sabit noktaya sahiptir. $\square$

Uyarı 2.2.3. *E Banach uzayının sonlu boyutlu olması halinde,*

$$\mu : \mathfrak{M}_E \rightarrow \mathbb{R}^+ = [0, \infty), \quad \mu(X) = 0$$

olarak tanımlanan μ fonksiyonunun bir kompaksızlık ölçüsü olduğu, Uyarı 2.2.1 ile bilinmektedir. Bu şekilde tanımlanan μ kompaksızlık ölçüsü için; Ω , **sonlu boyutlu bir E Banach uzayının boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt cümlesi iken, sürekli her $T : \Omega \rightarrow \Omega$ operatörünün, (2.2.8) şartını sağlayacağı açıktır.** Buna göre, Teorem 2.2.13 ile verilen Darbo sabit nokta teoreminden, T dönüşümü Ω üzerinde en az bir sabit noktaya sahiptir.

Diğer taraftan; E sonlu boyutlu olduğundan, kapalı ve sınırlı olan Ω alt cümlesi Teorem 2.1.3 gereğince kompakttır. Böylece; Ω , E Banach uzayının boş olmayan, kompakt ve konveks bir alt cümlesi olacağından Teorem 2.2.10 ile verilen **Schauder sabit nokta teoremine göre, sürekli T dönüşümünün Ω cümlesinde sabit bıraktığı en az bir nokta vardır.**

Demek ki, sonlu boyutlu Banach uzaylarında yukarıda verilen hipotezler altında bir T dönüşümünün sabit bıraktığı en az bir noktanın varlığı, Darbo sabit

nokta teoremini kullanmadan da elde edilebilmektedir. **Bu nedenle, bazı kaynaklarda kompaksızlık ölçüsü tanımı verilirken E Banach uzayı sonsuz boyutlu olarak alınmaktadır.**

Uyarı 2.2.4. Teorem 2.2.13' teki T dönüşümünün sabit bıraktığı noktaların cümlesi $\text{Fix } T$ olsun. Bu taktirde; $\text{Fix } T \in \ker \mu$ olup, $\text{Fix } T$ kompaktır.

Bunu görmek için, önce,

$$" \text{Fix } T = \{x \in \Omega : Tx = x\} \Rightarrow \mu(\text{Fix } T) = 0 " \quad (2.2.11)$$

önermesinin doğru olduğunu göstermeliyiz. (2.2.11) önermesi yanlış olsun. Bu durumda; $\text{Fix } T = \{x \in \Omega : Tx = x\}$ ve $\mu(\text{Fix } T) \neq 0$ yani, $\mu(\text{Fix } T) > 0$ olur. $\text{Fix } T \subset \Omega$ ve T, μ ölçüsüne göre bir büzülme olduğundan,

$$\mu(T(\text{Fix } T)) \leq k\mu(\text{Fix } T) \quad (2.2.12)$$

olur. $T(\text{Fix } T) = \text{Fix } T$ olduğundan, (2.2.12)' den,

$$\mu(\text{Fix } T) \leq k\mu(\text{Fix } T)$$

ve böylece $1 \leq k$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla, (2.2.11) önermesi doğrudur. μ bir kompaksızlık ölçüsü ve $\mu(\text{Fix } T) = 0$ olduğundan $\text{Fix } T \in \ker \mu$ olup, $\overline{\text{Fix } T}$ kompaktır. Şimdi, $\text{Fix } T$ cümlesinin kapalı olduğunu görelim: $x \in \overline{\text{Fix } T}$ ise Teorem 2.1.2' den, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ eşitliğini sağlayan bir $(x_n) \subset \text{Fix } T$ dizisi vardır. Buna göre,

$$Tx_n = x_n \quad (2.2.13)$$

olur. T ' nin sürekliliği de dikkate alınarak (2.2.13)' ten,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

yani, $Tx = x$ elde edilir. Şu hâlde $x \in \text{Fix } T$ olur. Bu ise $\text{Fix } T$ ' nin kapalı olması demektir. Sonuç olarak; $\overline{\text{Fix } T}$ kompakt ve $\text{Fix } T$ kapalı olduğundan $\text{Fix } T$ kompaktır.

Şimdi, Darbo Sabit Nokta Teoreminin bazı genelleştirmelerini verelim:

Teorem 2.2.14 ([62]). Ω , bir E Banach uzayının boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt cümlesi, μ , E' de bir kompaktsızlık ölçüsü, $T : \Omega \rightarrow \Omega$ operatörü sürekli, $\varphi(0) = 0$ ve her $t > 0$ için $\varphi(t) > 0$ olmak üzere; $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu alt yarı sürekli ve $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu da $\mathbb{R}^+$ üzerinde sürekli olsun. Ayrıca, boş olmayan her $X \subset \Omega$ alt cümlesi için,

$$\psi(\mu(TX)) \leq \psi(\mu(X)) - \varphi(\mu(X)) \quad (2.2.14)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu taktirde; T , Ω' da en az bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. Ω' nın alt cümlelerinin bir (Ω_n) dizisini,

$$\Omega_1 = \text{Conv } T(\Omega), \quad \Omega_n = \text{Conv } T(\Omega_{n-1}), \quad n = 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlayalım. Bu dizideki her bir Ω_n teriminin, Ω cümlesinin boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve her n sayma sayısı için $\Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n$ kapsamasının geçerli olduğu, Teorem 2.2.13' ün ispatından bilinmektedir.

Burada iki durum söz konusudur.

(1) Eğer $\mu(\Omega_{n_0}) = 0$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcut ise:

$(\mu(\Omega_n))$ dizisinin $\mu(\Omega_{n_0})$ teriminden itibaren bütün terimleri sıfıra eşit olacağından, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Omega_n) = 0$ olur. Şimdi, $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ alalım. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için Ω_n cümleleri konveks olup, Uyarı 2.2.2' nin de göz önüne alınmasıyla, Y nin E Banach uzayının boştan farklı konveks ve kompakt bir alt cümlesi olduğu anlaşılır. Ayrıca, Ω_n cümlesinin tanımını ve $\Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n$ olduğunu aklımızda tutarak, $T(Y) \subset Y$ yani T operatörünün, $T : Y \rightarrow Y$ şeklinde olduğunu anlarız. Sonuç olarak Teorem 2.2.10' un şartları sağlandığından, T dönüşümü Y de ve şu hâlde Ω' da en az bir sabit noktaya sahiptir.

(2) Eğer $n = 1, 2, \dots$ için $\mu(\Omega_n) > 0$ ise:

(Ω_n) dizisinin tanımı, Tanım 2.2.6' nın (3). şartı ve (2.2.14) ile,

$$\begin{aligned}\psi(\mu(\Omega_{n+1})) &= \psi(\mu(\text{Conv } T\Omega_n)) = \psi(\mu(T\Omega_n)) \\ &\leq \psi(\mu(\Omega_n)) - \varphi(\mu(\Omega_n))\end{aligned}\tag{2.2.15}$$

yazılabilir. Diğer taraftan; $\Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n \subset \Omega$ olduğundan, $(\mu(\Omega_n))$, negatif olmayan ve artmayan sınırlı bir reel sayı dizisidir. Buna göre, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Omega_n)$ limiti mevcuttur. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Omega_n) = r$ ($r \geq 0$) olsun. Böylece, ψ sürekli ve φ alt yarı sürekli olduğundan (2.2.15)' in kullanılması ile,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \psi(\mu(\Omega_{n+1})) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \psi(\mu(\Omega_n)) - \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(\mu(\Omega_n))\tag{2.2.16}$$

ve Tanım 2.1.18' in dikkate alınmasıyla (2.2.16)' dan, $\psi(r) \leq \psi(r) - \varphi(r)$ olacağından, $\varphi(r) = 0$ olur ve şu hâlde $r = 0$ elde edilir. Yani; $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Omega_n) = 0$ olup, ispatın kalan kısmı birinci durumdaki gibi tamamlanabilir. $\square$

Teorem 2.2.15 ([62]). Ω , bir E Banach uzayının boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt cümlesi, μ , E' de bir kompaktsızlık ölçüsü, $T : \Omega \rightarrow \Omega$ operatörü sürekli ve her bir $t > 0$ sayısı için $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$ olacak şekilde ve azalmayan bir $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu mevcut olsun. (Burada, $\varphi^1(t) = \varphi(t)$ ve $n = 2, 3, \dots$ için $\varphi^n(t) = \varphi(\varphi^{n-1}(t))$ olarak tanımlanmaktadır). Ayrıca, Ω' nın boştan farklı her X alt cümlesi için,

$$\mu(TX) \leq \varphi(\mu(X))\tag{2.2.17}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda; T , Ω cümlesinde en az bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $\Omega_1 = \text{Conv } T(\Omega)$, $\Omega_n = \text{Conv } T(\Omega_{n-1})$, $n = 2, 3, \dots$ şeklinde tanımlanan (Ω_n) dizisinin her bir teriminin, Ω cümlesinin boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve her n sayma sayısı için $\Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n$ kapsamasının geçerli olduğu, Teorem 2.2.13' ün ispatından bilinmektedir.

Eğer $\mu(\Omega_{n_0}) = 0$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısının mevcut olması halinde ispat Teorem 2.2.14' ün (1). kısmının ispatıyla tamamen aynıdır.

Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(\Omega_n) > 0$ ise, (Ω_n) dizisinin tanımı, Tanım 2.2.6' nın (3). şartı ve (2.2.17) ile,

$$\mu(\Omega_{n+1}) = \mu(\text{Conv } T\Omega_n) = \mu(T\Omega_n) \leq \varphi(\mu(\Omega_n)) \quad (2.2.18)$$

elde edilir. φ azalmayan olduğundan (2.2.18)' in ard arda uygulanmasıyla her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\mu(\Omega_{n+1}) \leq \varphi^n(\mu(\Omega_1)) \quad (2.2.19)$$

olup, hipotez göz önünde bulundurularak (2.2.19)' da $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Omega_n) = 0$ olur ve böylece ispat yine Teorem 2.2.14' ün (1). kısmındaki gibi tamamlanır. $\square$

Sonuç 2.2.1 ([62]). Ω , bir E Banach uzayının boş olmayan, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt cümlesi, $T : \Omega \rightarrow \Omega$ bir operatör ve her bir $t > 0$ sayısı için $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$ olacak şekilde ve azalmayan bir $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu mevcut olmak üzere; her $x, y \in \Omega$ için,

$$\|Tx - Ty\| \leq \varphi(\|x - y\|) \quad (2.2.20)$$

olsun. Bu takdirde; T , Ω cümlesinde en az bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $\text{diam } X = \sup \{\|x - y\| : x, y \in X\}$ ve $\mu : \mathfrak{M}_E \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\mu(X) = \text{diam } X$ olsun. μ fonksiyonunun E Banach uzayında bir kompaktsızlık ölçüsü olduğu bilinmektedir, [11, 65]. φ fonksiyonu azalmayan olduğundan (2.2.20)' den,

$$\sup_{x, y \in X} \|Tx - Ty\| \leq \sup_{x, y \in X} \varphi(\|x - y\|) \leq \varphi\left(\sup_{x, y \in X} \|x - y\|\right)$$

ve böylece, $\mu(TX) \leq \varphi(\mu(X))$ elde edilir. Diğer taraftan; $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu azalmayan ve her bir $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$ olduğundan, her $t > 0$ için

$\varphi(t) < t$ eşitsizliği geçerlidir, [66]. Şu hâlde; $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, $\|x - y\| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x, y \in \Omega$ için, (2.2.20)' den, $\|Tx - Ty\| \leq \varphi(\delta) < \delta < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı mevcut olduğundan T operatörü Ω üzerinde düzgün sürekli ve böylece süreklidir. Sonuç olarak; Teorem 2.2.15' in hipotezleri sağlandığından T operatörü Ω cümlesinde en az bir sabit noktaya sahiptir. $\square$



3. LİNEER OLMAYAN BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ UZAYINDAKİ ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE ASİMPOTOTİK TAVRI

Bu bölümde lineer olmayan Fredholm tipi bir integral denklemin; $\mathbb{R}^+$ da tanımlı, reel değerli, sınırlı ve sürekli olan fonksiyonların $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ Banach uzayındaki çözümünün varlığı ve asimptotik tavrı incelenecektir. Bunun için kompaksızlık ölçüsü ve Schauder sabit nokta teoreminden yararlanılacaktır.

3.1 Çözümlerin Varlığı ve Asimptotik Tavrı

Bu kısımda,

$$x(t) = (F_1x)(t) + (F_2x)(t) \int_0^\infty v(t, s, x(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.1.1)$$

formundaki lineer olmayan integral denklemin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında en az bir çözüme sahip olmasını sağlayan yeter şartlar verilecek ve bu şartlar altında çözümlerin karakteri tayin edilecektir.

Teorem 3.1.1. (3.1.1) denkleminde aşağıdaki şartlar sağlansın:

- (i) $F_i : BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \rightarrow BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, ($i = 1, 2$) operatörleri sürekli olup, her $x \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ ve her $t \in \mathbb{R}^+$ için,

$$|(F_i x)(t)| \leq f_i(\|x\|)$$

olacak şekilde ve azalmayan $f_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları mevcuttur.

- (ii) $v : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve her $t, s \in \mathbb{R}^+$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$|v(t, s, x)| \leq h(t, s)k(|x|)$$

eşitsizliğini sağlayan sürekli bir $h : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu ile sürekli ve azalmayan bir $k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu vardır.

- (iii) Her bir $t \geq 0$ için $h_t : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $h_t(s) = h(t, s)$ olarak tanımlanan h_t fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde integrallenebilir. Ayrıca,

$$l(t) = \int_0^\infty h_t(s)ds = \int_0^\infty h(t, s)ds$$

olarak tanımlanan $l : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu da $\mathbb{R}^+$ üzerinde sınırlıdır.

- (iv) $H = \sup \{l(t) : t \geq 0\}$ olmak üzere;

$$f_1(r) + f_2(r)k(r)H \leq r$$

eşitsizliğinin pozitif bir r_0 çözümü vardır.

- (v) ω_0^∞ ve β^∞ , (2.2.2) ve (2.2.3) eşitlikleriyle tanımlanan fonksiyonlar olmak üzere; B_{r_0} kapalı yuvarının boştan farklı ve sınırlı olan her X alt cümlesi için,

$$\omega_0^\infty(F_i X) \leq c_i \omega_0^\infty(X) \text{ ve } \beta^\infty(F_i X) \leq d_i \beta^\infty(X)$$

eşitsizliklerini sağlayan ve negatif olmayan c_i ve d_i , ($i = 1, 2$) sabitleri mevcuttur.

- (vi) $\max \{c_1 + c_2 H k(r_0), d_1 + d_2 H k(r_0)\} < 1$.

- (vii) $\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sup \left\{ \int_T^\infty h(t, s)ds : t \in [0, T] \right\} \right\} = 0$.

Bu durumda; (3.1.1) denkleminin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ özelliğine sahip en az bir $x = x(t)$ çözümü vardır.

İspat. $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ üzerinde F operatörünü,

$$(Fx)(t) = (F_1 x)(t) + (F_2 x)(t) \int_0^\infty v(t, s, x(s))ds \quad (3.1.2)$$

eşitliğiyle tanımlayalım. Öncelikle, (3.1.2) eşitliğinin anlamlı olduğunu yani, her $x \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ ve her $t \in \mathbb{R}^+$ için $(Fx)(t) \in \mathbb{R}$ olduğunu görelim:

$x \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ ve $t \in \mathbb{R}^+$ için (i) hipotezinden $(F_1x)(t), (F_2x)(t) \in \mathbb{R}$ dir. Diğer taraftan; (ii) hipotezinden, her $t, s \in \mathbb{R}^+$ ve her $x \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ için

$$|v(t, s, x(s))| \leq h(t, s)k(|x(s)|) \leq k(\|x\|)h(t, s) \quad (3.1.3)$$

eşitsizliği geçerlidir. (iii) şartından, her $t \in \mathbb{R}^+$ için $\int_0^\infty h(t, s)ds$ genelleştirilmiş integrali yakınsak olduğundan, genelleştirilmiş integrallere ilişkin mukayese kriteri gereğince, (3.1.3)' ten, $\int_0^\infty |v(t, s, x(s))|ds$ integrali de yakınsaktır. Böylece, $\int_0^\infty v(t, s, x(s))ds$ integrali mutlak yakınsaktır. Mutlak yakınsak her integral yakınsak olduğundan, her $t \in \mathbb{R}^+$ ve her $x \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ için $\int_0^\infty v(t, s, x(s))ds \in \mathbb{R}$ ve şu hâlde $(Fx)(t) \in \mathbb{R}$ dir. Yani; $Fx, \mathbb{R}^+$ dan $\mathbb{R}$ ' ye iyi tanımlı bir fonksiyondur.

Şimdi, F operatörünün $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayındaki her elemanı yine aynı uzaya taşıdığını görelim: Bunun için; $x \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ olmak üzere; $Fx : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^+$ üzerinde sürekli ve sınırlı olduğunu göstermeliyiz.

$T > 0$ ve $\varepsilon \geq 0$ keyfi fakat sabit sayılar olmak üzere $|t_1 - t_2| \leq \varepsilon$ olacak şekilde herhangi $t_1, t_2 \in [0, T]$ noktalarını alalım. Bu durumda (3.1.2)' den,

$$\begin{aligned} & (Fx)(t_1) - (Fx)(t_2) \\ &= (F_1x)(t_1) + (F_2x)(t_1) \int_0^\infty v(t_1, s, x(s))ds \\ & \quad - (F_1x)(t_2) - (F_2x)(t_2) \int_0^\infty v(t_2, s, x(s))ds \\ &= (F_1x)(t_1) - (F_1x)(t_2) + ((F_2x)(t_1) - (F_2x)(t_2)) \int_0^\infty v(t_1, s, x(s))ds \\ & \quad + (F_2x)(t_2) \int_0^\infty [v(t_1, s, x(s)) - v(t_2, s, x(s))] ds \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

elde edilir. (3.1.4) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} & |(Fx)(t_1) - (Fx)(t_2)| \\ & \leq |(F_1x)(t_1) - (F_1x)(t_2)| + |(F_2x)(t_1) - (F_2x)(t_2)| \left| \int_0^\infty v(t_1, s, x(s))ds \right| \\ & \quad + |(F_2x)(t_2)| \left| \int_0^\infty [v(t_1, s, x(s)) - v(t_2, s, x(s))]ds \right| \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

ve (3.1.5)' ten de,

$$\begin{aligned}
& |(Fx)(t_1) - (Fx)(t_2)| \\
& \leq \omega^T(F_1x, \varepsilon) + \omega^T(F_2x, \varepsilon) \int_0^\infty |v(t_1, s, x(s))| ds \\
& \quad + f_2(\|x\|) \int_0^\infty |v(t_1, s, x(s)) - v(t_2, s, x(s))| ds \\
& \leq \omega^T(F_1x, \varepsilon) + \omega^T(F_2x, \varepsilon) \int_0^\infty h(t_1, s)k(|x(s)|) ds \\
& \quad + f_2(\|x\|) \left(\int_0^T |v(t_1, s, x(s)) - v(t_2, s, x(s))| ds \right. \\
& \quad \left. + \int_T^\infty |v(t_1, s, x(s)) - v(t_2, s, x(s))| ds \right) \\
& \leq \omega^T(F_1x, \varepsilon) + \omega^T(F_2x, \varepsilon) Hk(\|x\|) + f_2(\|x\|) T\omega_{\|x\|}^T(v, \varepsilon) \\
& \quad + 2f_2(\|x\|)k(\|x\|) \sup \left\{ \int_T^\infty h(t_1, s) ds : t_1 \in [0, T] \right\}
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\omega_{\|x\|}^T(v, \varepsilon)$ ve $i = 1, 2$ için $\omega^T(F_i x, \varepsilon)$,

$$\begin{aligned}
\omega_{\|x\|}^T(v, \varepsilon) &= \sup \{ |v(t_1, s, y) - v(t_2, s, y)| : t_1, t_2, s \in [0, T], \\
&\quad y \in [-\|x\|, \|x\|] \text{ ve } |t_1 - t_2| \leq \varepsilon \},
\end{aligned}$$

$$\omega^T(F_i x, \varepsilon) = \sup \{ |(F_i x)(t_1) - (F_i x)(t_2)| : t_1, t_2 \in [0, T] \text{ ve } |t_1 - t_2| \leq \varepsilon \}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Teorem 2.1.1' den, $F_i x$ fonksiyonları $[0, T]$ üzerinde ve v fonksiyonu da $[0, T] \times [0, T] \times [-\|x\|, \|x\|]$ üzerinde düzgün süreklidir. Böylece, Teorem 2.2.7' nin göz önüne alınmasıyla, $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $\omega^T(F_i x, \varepsilon) \rightarrow 0$ ve $\omega_{\|x\|}^T(v, \varepsilon) \rightarrow 0$ olur.

Şimdi, keyfi fakat sabit bir $\xi > 0$ sayısını alalım. (vii) şartından

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sup \left\{ \int_T^\infty h(t, s) ds : t \in [0, T] \right\} \right\} = 0$$

olduğundan, $T > M(\xi)$ eşitsizliğini sağlayan her T sayısı için

$$2f_2(\|x\|)k(\|x\|) \sup \left\{ \int_T^\infty h(t_1, s) ds : t_1 \in [0, T] \right\} < \frac{\xi}{4} \tag{3.1.7}$$

olacak şekilde bir $M(\xi) > 0$ sayısı mevcuttur. (3.1.7) eşitsizliğini sağlayan ve yeteri kadar büyük olan bir $T = T(\xi) > 0$ sayısını seçelim.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega^T(F_1x, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega^T(F_2x, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_{\|x\|}^T(v, \varepsilon) = 0$$

olduğundan, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ iken;

$$\omega^T(F_1x, \varepsilon) < \frac{\xi}{4}, \quad \omega^T(F_2x, \varepsilon)Hk(\|x\|) < \frac{\xi}{4}, \quad f_2(\|x\|)T\omega_{\|x\|}^T(v, \varepsilon) < \frac{\xi}{4} \quad (3.1.8)$$

olacak şekilde bir $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\xi) > 0$ sayısı vardır. (3.1.6), (3.1.7) ve (3.1.8) eşitsizliklerinden, her $\xi > 0$ sayısına karşılık, $|t_1 - t_2| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan herhangi $t_1, t_2 \in [0, T]$ noktaları için, $|(Fx)(t_1) - (Fx)(t_2)| < \xi$ olacak şekilde bir $\varepsilon = \varepsilon(\xi) > 0$ sayısı mevcuttur. Şu hâlde; Fx fonksiyonu yeteri kadar büyük seçilen her $T > 0$ sayısı için $[0, T]$ aralığında düzgün sürekli ve şu hâlde sürekli. Böylece, Fx fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde sürekli.

Şimdi ise Fx ' in $\mathbb{R}^+$ da sınırlı olduğunu gösterelim. Keyfi olarak seçilen $t \in \mathbb{R}^+$ için,

$$\begin{aligned} |(Fx)(t)| &= \left| (F_1x)(t) + (F_2x)(t) \int_0^\infty v(t, s, x(s)) ds \right| \\ &\leq |(F_1x)(t)| + |(F_2x)(t)| \int_0^\infty |v(t, s, x(s))| ds \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

ve (3.1.9) ile hipotezlerin dikkate alınmasıyla,

$$\begin{aligned} |(Fx)(t)| &\leq f_1(\|x\|) + f_2(\|x\|) \int_0^\infty h(t, s)k(\|x(s)\|) ds \\ &\leq f_1(\|x\|) + f_2(\|x\|)k(\|x\|)H \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece; (3.1.10)' dan,

$$\|Fx\| \leq f_1(\|x\|) + f_2(\|x\|)k(\|x\|)H \quad (3.1.11)$$

olur ki bu da Fx fonksiyonunun $\mathbb{R}^+$ üzerinde sınırlı olması demektir. Diğer taraftan Fx fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde sürekli olduğundan F operatörünün $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayını yine kendi üzerine eşlediği sonucuna ulaşırız. Ayrıca $r_0, (iv)$ ' de tanımlanan sayı olmak üzere, (3.1.11) eşitsizliği ve (iv) hipotezi birlikte düşünüldüğünde F' nin, B_{r_0} yuvarını yine kendi üzerine eşlediği görülür.

$X \subseteq B_{r_0}$ olacak şekilde boş olmayan bir X alt cümlesini alalım. $\varepsilon \geq 0$ ve $T > 0$ keyfi fakat sabit sayılar ve $x \in X$ herhangi bir fonksiyon olsun. Bu durumda; $\|x\| \leq r_0$ olacağından (3.1.6) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \omega^T(Fx, \varepsilon) &\leq \omega^T(F_1x, \varepsilon) + \omega^T(F_2x, \varepsilon)Hk(r_0) + f_2(r_0)T\omega_{r_0}^T(v, \varepsilon) \\ &\quad + 2f_2(r_0)k(r_0) \sup \left\{ \int_T^\infty h(t, s)ds : t \in [0, T] \right\} \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

elde edilir. (3.1.12)' de $x \in X$ elemanları üzerinden supremum alınır,

$$\begin{aligned} \omega^T(FX, \varepsilon) &\leq \omega^T(F_1X, \varepsilon) + \omega^T(F_2X, \varepsilon)Hk(r_0) + f_2(r_0)T\omega_{r_0}^T(v, \varepsilon) \\ &\quad + 2f_2(r_0)k(r_0) \sup \left\{ \int_T^\infty h(t, s)ds : t \in [0, T] \right\} \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

eşitsizliğine ulaşılır. (3.1.13) eşitsizliğinde $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_{r_0}^T(v, \varepsilon) = 0$ olduğu da dikkate alınarak $\varepsilon \rightarrow 0$ için limit alınır,

$$\begin{aligned} \omega_0^T(FX) &\leq \omega_0^T(F_1X) + \omega_0^T(F_2X)Hk(r_0) \\ &\quad + 2f_2(r_0)k(r_0) \sup \left\{ \int_T^\infty h(t, s)ds : t \in [0, T] \right\} \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

olur. (3.1.14)' te $T \rightarrow \infty$ için limit alınır, (v) ve (vii) hipotezleri kullanılırsa,

$$\omega_0^\infty(FX) \leq [c_1 + c_2Hk(r_0)]\omega_0^\infty(X) \quad (3.1.15)$$

elde edilir. $x \in X$ ve keyfi olarak seçilen bir $T > 0$ sayısı için (3.1.9) eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} &\sup\{|(Fx)(t)| : t \geq T\} \\ &\leq \sup\{|(F_1x)(t)| : t \geq T\} \\ &\quad + \sup\{|(F_2x)(t)| : t \geq T\}k(r_0) \sup \left\{ \int_0^\infty h(t, s)ds : t \geq T \right\} \\ &\leq \sup\{|(F_1x)(t)| : t \geq T\} + \sup\{|(F_2x)(t)| : t \geq T\}k(r_0)H \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

bulunur. Böylece (3.1.16)' da $x \in X$ elemanları üzerinden supremum alınır,

$$\beta^T(FX) \leq \beta^T(F_1X) + \beta^T(F_2X)k(r_0)H \quad (3.1.17)$$

ve (3.1.17)' de $T \rightarrow \infty$ için limit alınıp (v) şartı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\beta^\infty(FX) &\leq \beta^\infty(F_1X) + \beta^\infty(F_2X)k(r_0)H \\ &\leq d_1\beta^\infty(X) + d_2\beta^\infty(X)k(r_0)H \\ &\leq [d_1 + d_2k(r_0)H]\beta^\infty(X)\end{aligned}\tag{3.1.18}$$

sonucuna ulaşılır. $c = \max\{c_1 + c_2Hk(r_0), d_1 + d_2Hk(r_0)\}$ ve μ , (2.2.4) ile tanımlanan kompaktsızlık ölçüsü olmak üzere; (3.1.15) ve (3.1.18) eşitsizliklerinden,

$$\mu(FX) \leq c\mu(X)\tag{3.1.19}$$

elde edilir. Demek ki $F : B_{r_0} \rightarrow B_{r_0}$ operatörü, boştan farklı her $X \subset B_{r_0}$ alt cümlesi için (3.1.19) eşitsizliğini sağlamakta ve hipotezden $c < 1$ olduğu da bilinmektedir. Şimdi,

$$B_{r_0}^1 = \text{Conv } F(B_{r_0}), \quad B_{r_0}^n = \text{Conv } F(B_{r_0}^{n-1}), \quad n = 2, 3, \dots$$

şeklindeki $(B_{r_0}^n)$ dizisi yardımıyla, $Y = \cap_{n=1}^\infty B_{r_0}^n$ cümlesini tanımlayalım. Bu durumda; $Y \in \ker \mu$ ve Y ' nin $Y \subset B_{r_0} \subset BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ olacak şekilde boştan farklı, konveks ve kompakt bir cümle olduğu ve üstelik F operatörünün Y kümesini yine kendi üzerine eşlediği, Teorem 2.2.13' ün ispatından bilinmektedir.

Şimdi ise F nin Y kümesi üzerinde sürekli olduğunu gösterelim:

Bunun için; $T > 0$, $\varepsilon \geq 0$ ve $x_0 \in Y$ olmak üzere; $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayacak şekildeki $x \in Y$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. Böylece, $t \in [0, T]$ için,

$$\begin{aligned}&(Fx)(t) - (Fx_0)(t) \\ &= (F_1x)(t) + (F_2x)(t) \int_0^\infty v(t, s, x(s))ds \\ &\quad - (F_1x_0)(t) - (F_2x_0)(t) \int_0^\infty v(t, s, x_0(s))ds \\ &= (F_1x)(t) - (F_1x_0)(t) + [(F_2x)(t) - (F_2x_0)(t)] \int_0^\infty v(t, s, x(s))ds \\ &\quad + (F_2x_0)(t) \int_0^\infty [v(t, s, x(s)) - v(t, s, x_0(s))] ds\end{aligned}\tag{3.1.20}$$

olup, (3.1.20)' den,

$$\begin{aligned}
& |(Fx)(t) - (Fx_0)(t)| \\
& \leq |(F_1x)(t) - (F_1x_0)(t)| + |(F_2x)(t) - (F_2x_0)(t)| \int_0^\infty |v(t, s, x(s))| ds \\
& \quad + |(F_2x_0)(t)| \int_0^\infty |v(t, s, x(s)) - v(t, s, x_0(s))| ds \\
& \leq \|F_1x - F_1x_0\| + \|F_2x - F_2x_0\| Hk(r_0) \\
& \quad + f_2(r_0) \left\{ \int_0^T |v(t, s, x(s)) - v(t, s, x_0(s))| ds \right. \\
& \quad \left. + \int_T^\infty |v(t, s, x(s)) - v(t, s, x_0(s))| ds \right\} \\
& \leq \|F_1x - F_1x_0\| + \|F_2x - F_2x_0\| Hk(r_0) + f_2(r_0) T \bar{\omega}_{r_0}^T(v, \varepsilon) \\
& \quad + 2f_2(r_0) k(r_0) \sup \left\{ \int_T^\infty h(t, s) ds : t \in [0, T] \right\}
\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

eşitsizliğini elde ederiz ki burada $\bar{\omega}_{r_0}^T(v, \varepsilon)$,

$$\bar{\omega}_{r_0}^T(v, \varepsilon) = \sup \{ |v(t, s, x) - v(t, s, y)| : t, s \in [0, T]; x, y \in [-r_0, r_0] \text{ ve } |x - y| \leq \varepsilon \}$$

ile tanımlanmakta ve $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\omega}_{r_0}^T(v, \varepsilon) = 0$ eşitliği sağlanmaktadır.

Keyfi fakat sabit bir $\xi > 0$ sayısı verilsin. Teoremin (vii) hipotezinden

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sup \left\{ \int_T^\infty h(t, s) ds : t \in [0, T] \right\} \right\} = 0$$

olduğundan, $T > N(\xi)$ eşitsizliğini sağlayan her T sayısı için,

$$2f_2(r_0) k(r_0) \sup \left\{ \int_T^\infty h(t, s) ds : t \in [0, T] \right\} < \frac{\xi}{4} \tag{3.1.22}$$

olacak şekilde bir $N(\xi) > 0$ sayısı mevcuttur. Şimdi, (3.1.22) eşitsizliğini sağlayan ve yeteri kadar büyük olan bir $T = T(\xi) > 0$ sayısını seçelim. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\omega}_{r_0}^T(v, \varepsilon) = 0$ olduğundan, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ iken;

$$f_2(r_0) T \bar{\omega}_{r_0}^T(v, \varepsilon) < \frac{\xi}{4} \tag{3.1.23}$$

olacak şekilde bir $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\xi) > 0$ sayısı vardır. Diğer taraftan; F_1 ve F_2 operatörleri $x_0 \in Y$ noktasında sürekli olduğundan, $\|x - x_0\| \leq \delta_1(\xi, x_0)$ eşitsizliğini sağlayan

her $x \in Y$ için,

$$\|F_1x - F_1x_0\| < \frac{\xi}{4} \quad (3.1.24)$$

ve $\|x - x_0\| \leq \delta_2(\xi, x_0)$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in Y$ için,

$$\|F_2x - F_2x_0\|Hk(r_0) < \frac{\xi}{4} \quad (3.1.25)$$

olacak şekilde $\delta_1(\xi, x_0), \delta_2(\xi, x_0) > 0$ sayıları mevcuttur. Şimdi, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ olacak şekilde bir $\varepsilon = \varepsilon(\xi) > 0$ sayısını seçelim. Bu durumda;

$$\delta(\xi, x_0) = \min\{\delta_1(\xi, x_0), \delta_2(\xi, x_0), \varepsilon(\xi)\}$$

olmak üzere; (3.1.21) – (3.1.25) eşitsizliklerini dikkate alarak, $\|x - x_0\| \leq \delta(\xi, x_0)$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in Y$ ve $t \in [0, T]$ olan her t için,

$$|(Fx)(t) - (Fx_0)(t)| < \xi \quad (3.1.26)$$

olduğu görülür. Ayrıca, ker μ ye ait olan kümelerin Örnek 2.2.3 ile verilen özellikleri göz önüne alınırsa, (3.1.22) eşitsizliğini sağlayan ve yeteri kadar büyük seçilmiş olan bir $T = T(\xi) > 0$ sayısı için,

$$” t \geq T \text{ olan her } t \text{ sayısı ve her } z \in Y \text{ için } |z(t)| < \frac{\xi}{2} ” \quad (3.1.27)$$

önermesi doğrudur. $F : Y \rightarrow Y$ dönüşümü için $Fx, Fx_0 \in Y$ dir. Buna göre, (3.1.27)’ den; $t \geq T$ olan her t sayısı için,

$$|(Fx)(t) - (Fx_0)(t)| \leq |(Fx)(t)| + |(Fx_0)(t)| < \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} = \xi \quad (3.1.28)$$

elde edilir. Sonuç olarak; $\|x - x_0\| \leq \delta(\xi, x_0)$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in Y$ için, (3.1.26) ve (3.1.28) ile, $\|Fx - Fx_0\| < \xi$ olur ki bu da F operatörünün $x_0 \in Y$ noktasında sürekli olması demektir. $x_0 \in Y$ keyfi olduğundan F operatörü Y üzerinde süreklidir.

Sonuç olarak; Y boştan farklı, konveks ve kompakt bir küme olup, $F : Y \rightarrow Y$ operatörü de sürekli olduğundan Teorem 2.2.10 ile verilen Schauder sabit nokta

teoreminden, F operatörünün Y kümesinde sabit bıraktığı en az bir x noktasının olduğu sonucuna ulaşırız. F operatörünün (3.1.2) eşitliği ile verilen tanımı göz önüne alındığında, bu x noktasının (3.1.1) denkleminin bir çözümü olduğu anlaşılır. Ayrıca, $Y \in \ker \mu$ olup, Örnek 2.2.3' ten, $t \rightarrow \infty$ iken $x(t) \rightarrow 0$ olduğu görülür ki bu da ispatı tamamlar. $\square$

3.2 Örnekler ve Bazı Karşılaştırmalar

Bu kısımda (3.1.1) formunda bazı denklemler ele alınacak ve bu denklemler için Teorem 3.1.1' in şartlarının sağlandığı gösterilecektir. Böylece, söz konusu denklemlerin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ özelliğine sahip en az bir $x = x(t)$ çözümünün olduğu ifade edilecektir. Ayrıca, bu denklemlerin daha önce incelenen birçok denklemle karşılaştırması yapılarak bu tez çalışmasının farklılığı ve önemine ilişkin bazı sonuçlar ortaya konulacaktır.

Örnek 3.2.1. $t \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere;

$$x(t) = \frac{t \sin x(t)}{3t + 9} + \frac{t^2 x^2(t)}{3t^2 + 2} \int_0^\infty \frac{t^2 e^{-t-s} \sqrt{|x(s)|}}{t^2 + 1} ds \quad (3.2.1)$$

integral denklemini inceleyelim.

$$(F_1 x)(t) = \frac{t \sin x(t)}{3t + 9}, \quad (F_2 x)(t) = \frac{t^2 x^2(t)}{3t^2 + 2}, \quad v(t, s, x) = \frac{t^2 e^{-t-s} \sqrt{|x|}}{t^2 + 1}$$

olarak seçilirse (3.2.1) denkleminin (3.1.1)' in özel bir hali olduğu görülür.

Şimdi, Teorem 3.1.1' in şartlarının sağlandığını görelim:

Öncelikle, F_1 ve F_2 operatörlerinin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında sürekli olduğunu gösterelim:

$x, y \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ ve $t \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} |(F_1 x)(t) - (F_1 y)(t)| &= \left| \frac{t \sin x(t)}{3t + 9} - \frac{t \sin y(t)}{3t + 9} \right| \\ &= \frac{t}{3t + 9} |\sin x(t) - \sin y(t)| \\ &\leq |x(t) - y(t)| \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

olup (3.2.2)' den,

$$\|F_1x - F_1y\| \leq \|x - y\|$$

elde edilir ki bu da F_1 ' in $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında düzgün sürekli ve şu hâlde sürekli olması demektir.

F_2 operatörünün $x_0 \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ noktasında sürekli olduğunu gösterelim:

$x \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ ve $t \in \mathbb{R}^+$ için,

$$\begin{aligned} |(F_2x)(t) - (F_2x_0)(t)| &= \left| \frac{t^2x^2(t)}{3t^2 + 2} - \frac{t^2x_0^2(t)}{3t^2 + 2} \right| \\ &\leq |x(t) - x_0(t)| |x(t) + x_0(t)| \\ &\leq |x(t) - x_0(t)| (|x(t) - x_0(t)| + 2|x_0(t)|) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

olup (3.2.3)' ten,

$$\|F_2x - F_2x_0\| \leq \|x - x_0\| (\|x - x_0\| + 2\|x_0\|) \quad (3.2.4)$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde bir $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı,

$$\delta(\delta + 2\|x_0\|) < \varepsilon$$

olarak yani,

$$\delta \in \left(0, \sqrt{\|x_0\|^2 + \varepsilon} - \|x_0\|\right)$$

olacak şekilde seçildiğinde, $\|x - x_0\| < \delta$ şartını sağlayan her $x \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ için (3.2.4)' ten,

$$\|F_2x - F_2x_0\| < \varepsilon$$

bulunur. Şu hâlde; F_2 operatörü $x_0 \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ noktasında süreklidir ve x_0 keyfi olduğundan $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında süreklidir.

Her $t \in \mathbb{R}^+$ ve her $x \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ için,

$$|(F_1x)(t)| \leq \frac{1}{3}, \quad |(F_2x)(t)| \leq \frac{\|x\|^2}{3}$$

olup, azalmayan $f_1, f_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları, $f_1(x) = 1/3$ ve $f_2(x) = x^2/3$ olarak alınabilir. Böylece, Teorem 3.1.1' in (i) hipotezi sağlanır.

v fonksiyonunun $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ kümesi üzerinde sürekli olduğu açıktır. Üstelik, $h : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $h(t, s) = e^{-t-s}$ fonksiyonu süreklidir ve $k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $k(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu da sürekli ve azalmayan olup, her $t, s \in \mathbb{R}^+$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$|v(t, s, x)| \leq h(t, s)k(|x|)$$

olduğundan, Teorem 3.1.1' in (ii) şartı sağlanır.

Her bir $t \geq 0$ için $h_t : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $h_t(s) = h(t, s)$ olarak tanımlanan h_t fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde integrallenebilirdir. Gerçekten;

$$\int_0^\infty h(t, s)ds = \int_0^\infty e^{-t-s}ds = e^{-t}$$

ve üstelik $l(t) = e^{-t}$ eşitliğiyle tanımlanan $l : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu da $\mathbb{R}^+$ üzerinde sınırlıdır. Böylece, Teorem 3.1.1' in (iii) şartı da sağlanır.

$$H = \sup \left\{ \int_0^\infty e^{-t-s}ds : t \in \mathbb{R}^+ \right\} = \sup \{e^{-t} : t \in \mathbb{R}^+\} = 1$$

olduğundan,

$$f_1(r) + f_2(r)k(r)H \leq r$$

eşitsizliği,

$$\frac{1}{3} + \frac{r^2\sqrt{r}}{3} \leq r \quad (3.2.5)$$

eşitsizliğine denk olup, $0.3590 \leq r_0 < 1$ olarak seçilen bir r_0 sayısı (3.2.5)' in bir çözümüdür. Bu ise, Teorem 3.1.1' in (iv) şartının sağlanması demektir.

Ayrıca $\varepsilon \geq 0$, $T > 0$, $\|x\| \leq r_0$ ve $|t - s| \leq \varepsilon$ olacak şekildeki $t, s \in [0, T]$ için,

$$\begin{aligned} |(F_1x)(t) - (F_1x)(s)| &\leq \frac{t}{3(t+3)} |\sin x(t) - \sin x(s)| + \frac{|\sin x(s)||t-s|}{(t+3)(s+3)} \\ &\leq \frac{t}{3(t+3)} |x(t) - x(s)| + \frac{\varepsilon |\sin x(s)|}{(t+3)(s+3)} \\ &\leq \frac{1}{3} |x(t) - x(s)| + \frac{\varepsilon}{9} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

ve

$$\begin{aligned}
|(F_2x)(t) - (F_2x)(s)| &= \left| \frac{t^2x^2(t)}{3t^2+2} - \frac{s^2x^2(s)}{3s^2+2} \right| \\
&\leq \frac{2r_0t^2(3s^2+2)|x(t) - x(s)| + 2r_0^2(t+s)|t-s|}{(3t^2+2)(3s^2+2)} \\
&\leq \frac{2r_0t^2}{3t^2+2}|x(t) - x(s)| + \frac{2r_0^2\varepsilon(t+s)}{(3t^2+2)(3s^2+2)} \\
&\leq \frac{2r_0}{3}|x(t) - x(s)| + r_0^2\varepsilon L
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

olduğundan (3.2.6) ve (3.2.7) eşitsizliklerinden, sırasıyla

$$\omega_0^\infty(F_1X) \leq \frac{1}{3}\omega_0^\infty(X) \text{ ve } \omega_0^\infty(F_2X) \leq \frac{2r_0}{3}\omega_0^\infty(X)$$

elde edilir. Şu hâlde; (v) şartındaki c_1 ve c_2 sabitleri, $c_1 = 1/3$ ve $c_2 = 2r_0/3$ olarak alınabilir. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned}
\sup\{|(F_1x)(t)| : t \geq T\} &= \sup\left\{\left|\frac{t}{3t+9}\right| : t \geq T\right\} \sup\{|\sin x(t)| : t \geq T\} \\
&= \frac{1}{3} \sup\{|\sin x(t)| : t \geq T\} \\
&\leq \frac{1}{3} \sup\{|x(t)| : t \geq T\}
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

olup (3.2.8)' den,

$$\beta^\infty(F_1X) \leq \frac{1}{3}\beta^\infty(X)$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\sup\{|(F_2x)(t)| : t \geq T\} &= \sup\left\{\left|\frac{t^2}{3t^2+2}\right| : t \geq T\right\} \sup\{|x(t)|^2 : t \geq T\} \\
&= \frac{1}{3} \sup\{|x(t)|^2 : t \geq T\} \\
&\leq \frac{r_0}{3} \sup\{|x(t)| : t \geq T\}
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

olup (3.2.9)' dan,

$$\beta^\infty(F_2X) \leq \frac{r_0}{3}\beta^\infty(X)$$

elde edilir. Böylece (v) hipotezini sağlayan d_1 ve d_2 , $d_1 = 1/3$ ve $d_2 = r_0/3$ alınabilir. Sonuç olarak; Teorem 3.1.1' in (v) hipotezi sağlanır.

Diğer taraftan;

$$\max \{c_1 + c_2 Hk(r_0), d_1 + d_2 Hk(r_0)\} = \max \left\{ \frac{1}{3} + \frac{2r_0}{3} \sqrt{r_0}, \frac{1}{3} + \frac{r_0}{3} \sqrt{r_0} \right\} < 1$$

olduğundan Teorem 3.1.1' in (vi) şartı da sağlanır.

Son olarak,

$$\sup \left\{ \int_T^\infty e^{-t-s} ds : t \in [0, T] \right\} = \sup \left\{ \frac{1}{e^{t+T}} : t \in [0, T] \right\} = \frac{1}{e^T}$$

ve $T \rightarrow \infty$ iken $1/e^T \rightarrow 0$ olduğundan Teorem 3.1.1' in (vii) şartı sağlanır.

Teorem 3.1.1' in bütün hipotezleri sağlandığından (3.2.1)' in, $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ eşitliğini sağlayan en az bir $x = x(t)$ çözümünün olduğu anlaşılır.

Uyarı 3.2.1. (3.2.1) denklemi, ” *Tez Çalışmasının Literatürdeki Yeri ve Önemi* ” başlığı altında ifade edilen (1.2.1)–(1.2.8) integral denklemlerinin hiçbirinden elde edilemeyeceğinden, bu denklemlerin incelendiği [12–25] numaralı kaynaklarda verilen varlık teoremleri (3.2.1) denklemine uygulanamaz.

Örnek 3.2.2. $t \in \mathbb{R}^+$ için,

$$x(t) = \frac{t}{10t^2 + 1} + \frac{e^{-t}(e-1)x^2(t)}{(t+1)^2} \int_0^\infty \frac{x(s)}{(s+e)(s+1)} ds \quad (3.2.10)$$

integral denklemini ele alalım.

$$(F_1 x)(t) = \frac{t}{10t^2 + 1}, \quad (F_2 x)(t) = \frac{x^2(t)}{t+1}, \quad v(t, s, x) = \frac{e^{-t}(e-1)x}{(t+1)(s+e)(s+1)}$$

olarak alınırsa bu integral denklemin (3.1.1) formunda olacağı açıktır.

F_1 ve F_2 operatörlerinin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında sürekli oldukları görülebilir. Gerçekten; F_1 operatörünün sürekliliği açıktır ve F_2 ' nin sürekliliğinin gösterilmesi ise, Örnek 3.2.1' dekine benzer şekildedir.

Ayrıca her $t \in \mathbb{R}^+$ ve her $x \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ için,

$$|(F_1 x)(t)| \leq \left| \frac{t}{10t^2 + 1} \right| \leq \frac{\sqrt{10}}{20}, \quad |(F_2 x)(t)| \leq \left| \frac{x^2(t)}{t+1} \right| \leq \|x\|^2$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece $f_1(x) = \sqrt{10}/20$ ve $f_2(x) = x^2$ eşitlikleriyle tanımlanan $f_1, f_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları azalmayıdır. Şu hâlde; (i) şartı sağlanır.

Açık olarak, v fonksiyonu $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ kümesinde süreklidir. Ayrıca, her $t, s \in \mathbb{R}^+$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$h(t, s) = \frac{e^{-t}(e - 1)}{(t + 1)(s + e)(s + 1)} \text{ ve } k(x) = x$$

olarak tanımlanan $h : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu sürekli ve $k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu ise sürekli ve azalmayıdır. Üstelik,

$$|v(t, s, x)| = h(t, s)k(|x|)$$

olduğundan, (ii) hipotezi sağlanır.

$$\int_0^\infty h(t, s)ds = \frac{e^{-t}}{t + 1}$$

olduğundan her bir $t \geq 0$ için $h_t : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $h_t(s) = h(t, s)$ olarak tanımlanan h_t fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde integrallenebilir ve $l(t) = \frac{e^{-t}}{t+1}$ eşitliğiyle tanımlanan $l : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu da $\mathbb{R}^+$ üzerinde sınırlıdır. Yani, (iii) sağlanır.

$$H = \sup \left\{ \frac{e^{-t}}{t + 1} : t \in \mathbb{R}^+ \right\} = 1$$

olup, (iv)'deki

$$f_1(r) + f_2(r)k(r)H \leq r$$

eşitsizliği,

$$\frac{\sqrt{10}}{20} + r^3 \leq r \tag{3.2.11}$$

eşitsizliğine karşılık gelir. $0.162397 \leq r_0 < \frac{\sqrt{2}}{2}$ olacak şekilde seçilen herhangi bir r_0 sayısının (3.2.11)'in bir çözümü olduğu görülebilir. Bu ise (iv) şartının sağlanması demektir.

$\varepsilon \geq 0$, $T > 0$, $\|x\| \leq r_0$ ve $|t - s| \leq \varepsilon$ olacak şekildeki $t, s \in [0, T]$ noktaları için,

$$|(F_1x)(t) - (F_1x)(s)| = \left| \frac{t}{10t^2 + 1} - \frac{s}{10s^2 + 1} \right| \tag{3.2.12}$$

ve

$$\begin{aligned}
|(F_2x)(t) - (F_2x)(s)| &= \left| \frac{x^2(t)}{t+1} - \frac{x^2(s)}{s+1} \right| \\
&\leq \frac{|x^2(t) - x^2(s)|}{s+1} + \frac{|x^2(t)| |s-t|}{(t+1)(s+1)} \\
&\leq \frac{2r_0|x(t) - x(s)|}{s+1} + \frac{r_0^2\varepsilon}{(t+1)(s+1)} \\
&\leq 2r_0|x(t) - x(s)| + r_0^2\varepsilon
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

elde edilir. $t \rightarrow \frac{t}{10t^2+1}$ fonksiyonunun $[0, T]$ üzerindeki düzgün sürekliliği (3.2.12) ile dikkate alındığında, $\omega_0^\infty(F_1X) = 0$ olduğu görülür. Ayrıca, (3.2.13) eşitsizliğinden de,

$$\omega_0^\infty(F_2X) \leq 2r_0\omega_0^\infty(X)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece (v) şartındaki c_1 ve c_2 sabitleri, $c_1 = 0$ ve $c_2 = 2r_0$ olarak alınabilir. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned}
\sup\{|(F_1x)(t)| : t \geq T\} &= \sup \left\{ \left| \frac{t}{10t^2+1} \right| : t \geq T \right\} \\
&= \begin{cases} \frac{\sqrt{10}}{20}, & 0 < T \leq \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{T}{10T^2+1}, & T > \frac{\sqrt{10}}{10} \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sup\{|(F_2x)(t)| : t \geq T\} &= \sup \left\{ \left| \frac{1}{t+1} \right| : t \geq T \right\} \sup \{|x^2(t)| : t \geq T\} \\
&= \frac{1}{T+1} \sup \{|x(t)|^2 : t \geq T\} \\
&\leq \frac{r_0}{T+1} \sup\{|x(t)| : t \geq T\}
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

olup, (3.2.14) ve (3.2.15) eşitsizlikleri (2.2.3) ile birlikte göz önüne alındığında,

$$\beta^\infty(F_1X) = \beta^\infty(F_2X) = 0$$

elde edilir. Buna göre $d_1 = d_2 = 0$ alınabilir. Şu hâlde; (v) şartı sağlanır.

c_1, c_2, d_1, d_2 sabitlerini dikkate alarak,

$$\text{maks} \{c_1 + c_2 Hk(r_0), d_1 + d_2 Hk(r_0)\} = \text{maks} \{2r_0^2\} < 1$$

olur ki böylece (vi) şartı sağlanır.

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \int_T^\infty h(t, s) ds : t \in [0, T] \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{e^{-t}}{(t+1)} \ln \left(\frac{T+e}{T+1} \right) : t \in [0, T] \right\} \\ &= \frac{1}{e^T(T+1)} \ln \left(\frac{T+e}{T+1} \right) \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

ve

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{e^T(T+1)} \ln \left(\frac{T+e}{T+1} \right) = 0$$

olduğundan (vii) hipotezi de sağlanır.

Sonuç olarak; Teorem 3.1.1' in hipotezlerinin tamamı sağlandığından (3.2.10) denkleminin, $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında en az bir $x = x(t)$ çözümü mevcuttur ve bu çözüm $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ eşitliğini sağlar.

Şimdi, Teorem 3.1.1 ile verilen varlık teoremi ile [12, 20, 23] kaynaklarındaki varlık teoremlerini karşılaştıralım:

[20] numaralı kaynakta,

$$x(t) = a(t) + f(t, x(t)) \int_0^\infty v(t, s, x(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.2.17)$$

integral denklemi ele alınmış ve bu denklemin çözümünün varlığına ilişkin yeter şartlar aşağıdaki teoremle verilmiştir:

Teorem 3.2.1 (Teorem 3.2, [20]). (3.2.17) denkleminde aşağıdaki hipotezler sağlansın:

- (i) $a \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$ dır.
- (ii) $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, 0) = 0$ dır.
- (iii) f fonksiyonu ikinci değişkene göre Lipschitz şartını sağlar yani, her $x, y \in \mathbb{R}$ ve her $t \in \mathbb{R}^+$ için,

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq c|x - y|$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı vardır.

(iv) $v : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve her $t, s \in \mathbb{R}^+$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$|v(t, s, x)| \leq h(t, s)k(|x|)$$

olacak şekilde sürekli bir $h : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu ile sürekli ve azalmayan bir $k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu vardır.

(v) Her $t \geq 0$ için $s \rightarrow h(t, s)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde integrallenebilirdir ve $t \rightarrow \int_0^\infty h(t, s)ds$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde sınırlıdır.

(vi) $\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sup \left\{ \int_T^\infty h(t, s)ds : t \in [0, T] \right\} \right\} = 0$.

(ii) ve (v) hipotezlerinden,

$$F = \sup \{ |f(t, 0)| : t \geq 0 \} \text{ ve } H = \sup \left\{ \int_0^\infty h(t, s)ds : t \geq 0 \right\}$$

sabitleri mevcuttur.

(vii) $\|a\| + FHk(r) + cHrk(r) \leq r$

eşitsizliği pozitif bir r_0 çözümüne sahiptir ve $cHk(r_0) < 1$ şartı sağlanır.

Bu durumda; (3.2.17) denkleminin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında $t \rightarrow \infty$ iken $x(t) \rightarrow 0$ özelliğine sahip en az bir $x = x(t)$ çözümü vardır.

Uyarı 3.2.2. (3.2.17) denklemde,

$$a(t) = \frac{t}{10t^2 + 1}, \quad f(t, x) = \frac{x^2}{t + 1}, \quad v(t, s, x) = \frac{e^{-t}(e - 1)x}{(t + 1)(s + e)(s + 1)}$$

alınırsa, (3.2.10) denkleminde ulaşılır. (3.2.10) denklemi için Teorem 3.1.1' in şartlarının sağlandığı ve böylece bu denklemin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ eşitliğini sağlayan en az bir $x = x(t)$ çözümüne sahip olduğu, Örnek 3.2.2' den bilinmektedir. Halbuki, Teorem 3.2.1' in en az bir şartı (mesela; (iii)) sağlanmadığından Teorem 3.2.1' den faydalananarak bu denklemin çözümünün varlığına dair herhangi birşey söylemek mümkün değildir.

Sonuç 3.2.1. *Hem (3.1.1)' in ve hem de (3.2.17)' nin özel hali olan bir denkleme Teorem 3.1.1 uygulanabildiği halde Teorem 3.2.1 uygulanamayabilir.*

[12] numaralı çalışmada da yine (3.2.17) integral denklemi ele alınmış ve bu denklemin en az bir çözüme sahip olmasına imkân veren yeter şartlar aşağıdaki teoremle ifade edilmiştir:

Teorem 3.2.2 (Teorem 8, [12]). *(3.2.17) denkleminde aşağıdaki şartlar sağlan-
sın:*

- (i) $a \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$ dır.
- (ii) $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyondur ve $t \rightarrow f(t, 0)$ fonksiyonu $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayının bir elemanıdır.
- (iii) f fonksiyonu ikinci değişkene göre Lipschitz şartını sağlar yani, her $x, y \in \mathbb{R}$ ve her $t \in \mathbb{R}^+$ için,

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq c|x - y|$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı vardır.

- (iv) $v : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir ve her $t, s \in \mathbb{R}^+$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$|v(t, s, x) - v(t, s, y)| \leq h(t, s)k(|x - y|)$$

olacak şekilde sürekli bir $h : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu ile, sürekli, azal-
mayan ve $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} k(\varepsilon) = 0$ şartını sağlayan bir $k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu
vardır.

- (v) Her bir $t \geq 0$ için $s \rightarrow h(t, s)$ ve $s \rightarrow |v(t, s, 0)|$ fonksiyonları $\mathbb{R}^+$ üzerinde
integrallenebilirdir ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty h(t, s)ds = 0$ dır. Üstelik, $t \rightarrow \int_0^\infty |v(t, s, 0)|ds$
fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde sınırlıdır.

(vi) Aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sup \left\{ \int_T^\infty h(t, s) ds : t \in [0, T] \right\} \right\} = 0$$

ve

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sup \left\{ \int_T^\infty |v(t, s, 0)| ds : t \in [0, T] \right\} \right\} = 0.$$

(ii) ve (v) hipotezlerinden,

$$\bar{f} = \sup \{ |f(t, 0)| : t \in \mathbb{R}^+ \}, \quad \bar{h} = \sup \left\{ \int_0^\infty h(t, s) ds : t \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

ve

$$\bar{v} = \sup \left\{ \int_0^\infty |v(t, s, 0)| ds : t \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

sabitleri mevcuttur.

$$(vii) \|a\| + c \bar{h} r k(r) + c \bar{v} r + \bar{f} \bar{h} k(r) + \bar{f} \bar{v} \leq r$$

eşitsizliğinin pozitif bir r_0 çözümü vardır ve $c(\bar{h} k(r_0) + \bar{v}) < 1$ şartı sağlanır.

Bu durumda; (3.2.17) denklemi $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında en az bir $x = x(t)$ çözümüne sahiptir. Üstelik, (3.2.17)'nin bütün çözümleri düzgün attractive' dir.

Uyarı 3.2.3. (3.2.17) denkleminde,

$$a(t) = \frac{t}{10t^2 + 1}, \quad f(t, x) = \frac{x^2}{t + 1}, \quad v(t, s, x) = \frac{e^{-t}(e - 1)x}{(t + 1)(s + e)(s + 1)}$$

alınırsa, (3.2.10) denklemi elde edilir. **Teorem 3.2.2' den faydalanarak, bu denklemin, $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında en az bir çözümünün mevcut olduğunu söylemek mümkün değildir. Çünkü Teorem 3.2.2' nin (iii) şartı sağlanmaz.** Diğer taraftan; Teorem 3.1.1' in bütün şartlarının sağlandığı ve böylece (3.2.10) denkleminin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında en az bir $x = x(t)$ çözümüne sahip olduğu, Örnek 3.2.2' den bilinmektedir.

Sonuç 3.2.2. *Teorem 3.1.1' in şartlarını sağlayıp, Teorem 3.2.2' nin şartlarını sağlamayan denklemler vardır. Bu durum, Teorem 3.1.1' in literatürdeki yeri ve önemini ifade etmektedir.*

[23] numaralı kaynakta, lineer olmayan Urysohn tipi

$$x(t) = g(t) + f(t, x(t)) \int_0^\infty v(t, \tau, x(\tau)) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty) \quad (3.2.18)$$

integral denklemi ele alınmış ve bu denklemin $\mathbb{R}^+$ da tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı olan $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ cümlesinde azalmayan çözümlerinin varlığı üzerine aşağıdaki teorem verilmiştir:

Teorem 3.2.3 (Teorem 3.1, [23]). *(3.2.18) denkleminde aşağıdaki hipotezler sağlansın:*

- (i) $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu sürekli ve azalmayandır.
- (ii) $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olup, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ özelliğine sahiptir ve $f(t, x)$, negatif olmayan t ve x değişkenlerinin her birine göre azalmayandır. Yani, sabitlenmiş herhangi bir $x \in \mathbb{R}^+$ sayısı için $t \rightarrow f(t, x)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde azalmayandır ve sabitlenmiş herhangi bir $t \in \mathbb{R}^+$ sayısı için $x \rightarrow f(t, x)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde azalmayandır.
- (iii) f fonksiyonu ikinci değişkene göre Lipschitz şartını sağlar yani, her $x, y \in \mathbb{R}$ ve her $t \in \mathbb{R}^+$ için,

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq m(t)|x - y|$$

olacak şekilde lokal sınırlı bir $m(t) > 0$ fonksiyonu vardır.

- (iv) $v : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir ve $v : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ özelliğine sahiptir. Ayrıca, keyfi fakat sabit herhangi $\tau, x \in \mathbb{R}^+$ elemanları için, $t \rightarrow v(t, \tau, x)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde azalmayandır her $t, \tau \in \mathbb{R}^+$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$|v(t, \tau, x)| \leq p(t, \tau)q(|x|)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu ve azalmayan bir $q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu vardır.

(v) Her $t \in \mathbb{R}^+$ için,

$$g(t) + f(t, r(t)) \int_0^\infty p(t, \tau) q(r(\tau)) d\tau \leq r(t)$$

olacak şekilde bir $r : \mathbb{R}^+ \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu mevcuttur.

(vi) Her $t \geq 0$ için, $\tau \rightarrow p(t, \tau) q(r(\tau))$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde integrallenebilir ve $t \rightarrow \int_0^\infty p(t, \tau) q(r(\tau)) d\tau$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde lokal sınırlıdır yani, $T > 0$ olan her T sayısı için,

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_0^\infty p(t, \tau) q(r(\tau)) d\tau < \infty$$

şartı sağlanır.

(vii) $\int_0^\infty p(t, \tau) q(r(\tau)) d\tau$ genelleştirilmiş integrali, t 'ye göre lokal düzgün yakınsaktır yani, her $\delta > 0$ ve her $T > 0$ sayısı için,

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_S^\infty p(t, \tau) q(r(\tau)) d\tau < \delta$$

olacak şekilde bir $S = S(\delta, T) > 0$ sayısı vardır.

(viii) $\sup_{t \geq 0} m(t) \int_0^\infty p(t, \tau) q(r(\tau)) d\tau < 1$.

Bu durumda; (3.2.18) denkleminin, $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında olan ve azalmayan en az bir $x = x(t)$ çözümü mevcuttur.

Uyarı 3.2.4. (3.2.18) denkleminde,

$$g(t) = \frac{t}{10t^2 + 1}, \quad f(t, x) = \frac{x^2}{t + 1}, \quad v(t, \tau, x) = \frac{e^{-t}(e - 1)x}{(t + 1)(\tau + e)(\tau + 1)}$$

alınırsa, (3.2.10) denklemi elde edilir. Teorem 3.2.3'ün (ii) şartında, $f(t, x)$ fonksiyonunun, negatif olmayan t ve x değişkenlerine göre azalmayan olması gerekmektedir. Halbuki, sabitlenmiş herhangi bir $x \in \mathbb{R}^+$ sayısı için,

$$t \rightarrow f(t, x) = \frac{x^2}{t + 1}$$

fonksiyonu t 'ye göre azalandır. Ayrıca, her $x, y \in \mathbb{R}$ ve her $t \in \mathbb{R}^+$ için,

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq m(t)|x - y|$$

olacak şekilde lokal sınırlı bir $m(t) > 0$ fonksiyonu mevcut değildir.

Şu hâlde; Teorem 3.2.3'ün (ii) ve (iii) şartları sağlanmamaktadır. (3.2.10) denklemi için Teorem 3.2.3'ün en az bir hipotezi sağlanmadığından, bu teoremden yararlanarak denklemin $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında bir çözümünün varlığına ilişkin herhangi bir şey söylenemez. Diğer taraftan; aynı denklem bakımından bu tez çalışmasında vermiş olduğumuz Teorem 3.1.1'in şartlarının tamamının sağlandığı ve bu nedenle denklemin $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ 'nin bir alt cümlesi olan $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında en az bir çözümünün olduğu, Örnek 3.2.2'den bilinmektedir.

Sonuç 3.2.3. Teorem 3.1.1'in şartlarını sağladığı halde Teorem 3.2.3'ün şartlarından en az birini sağlamayan integral denklemler vardır. Yani; Teorem 3.2.3, Teorem 3.1.1'in uygulandığı her denkleme uygulanamayabilir.

Örnek 3.2.3. $t \in \mathbb{R}^+$ için,

$$x(t) = \frac{t}{e^t} + \frac{\sqrt{x^2(t) + 1}}{t + 1} \int_0^\infty \frac{\sqrt{1 + |x(s)|}}{e^{t+s+1}} ds \quad (3.2.19)$$

integral denklemini ele alalım.

$$(F_1 x)(t) = \frac{t}{e^t}, \quad (F_2 x)(t) = \frac{\sqrt{x^2(t) + 1}}{t + 1}, \quad v(t, s, x) = \frac{\sqrt{1 + |x|}}{e^{t+s+1}}$$

olarak alınırsa bu integral denklemin (3.1.1)'in bir özel hali olduğu anlaşılır.

F_1 operatörünün $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayı üzerinde sürekli olduğu aşikârdır.

F_2 operatörünün $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ üzerinde sürekli olduğunu göstermek için, herhangi bir $x_0 \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ noktasında sürekli olduğunu göstermeliyiz.

Bunun için; verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\|x - x_0\| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ fonksiyonu için $\|F_2 x - F_2 x_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısının olduğunu göstermeliyiz.

$x, y \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ ve $t \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere; genelliği bozmaksızın $x(t) < y(t)$ olduğunu kabul edelim. Buna göre, Ortalama Değer Teoreminden,

$$\begin{aligned} |(F_2x)(t) - (F_2y)(t)| &\leq \left| \sqrt{x^2(t) + 1} - \sqrt{y^2(t) + 1} \right| \\ &= \frac{2|\eta|}{2\sqrt{\eta^2 + 1}} |x(t) - y(t)| \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\eta \in (x(t), y(t))$ olduğundan,

$$|(F_2x)(t) - (F_2y)(t)| \leq |x(t) - y(t)| \quad (3.2.20)$$

elde edilir. (3.2.20)'nin dikkate alınmasıyla, her $x, y \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ için,

$$\|F_2x - F_2y\| \leq \|x - y\| \quad (3.2.21)$$

olur ki (3.2.21), F_2 operatörünün $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında düzgün sürekli ve şu hâlde sürekli olması demektir.

$x \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ ve $t \in \mathbb{R}^+$ olacak şekildeki bütün x ve t elemanları için,

$$\begin{aligned} |(F_1x)(t)| &\leq \left| \frac{t}{e^t} \right| \leq \frac{1}{e}, \\ |(F_2x)(t)| &\leq \left| \frac{\sqrt{x^2(t) + 1}}{t + 1} \right| \leq \sqrt{\|x\|^2 + 1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $f_1, f_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ azalmayan fonksiyonları, $f_1(x) = 1/e$ ve $f_2(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ olarak alınabilir ve şu hâlde; (i) şartı sağlanır.

v fonksiyonunun $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ kümesi üzerinde sürekli oluşu aşîkârdır. Üstelik, her $t, s \in \mathbb{R}^+$ ve $x \in \mathbb{R}$ için,

$$|v(t, s, x)| = \left| \frac{\sqrt{1 + |x|}}{e^{t+s+1}} \right| = \frac{\sqrt{1 + |x|}}{e^{t+s+1}}$$

eşitliği sağlanır. Buna göre, $h : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $h(t, s) = 1/e^{t+s+1}$ fonksiyonu sürekli ve $k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $k(x) = \sqrt{1 + |x|}$ fonksiyonu da sürekli ve azalmayandır. Yani, (ii) şartı sağlanır.

Her bir $t \geq 0$ için $h_t : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $h_t(s) = h(t, s) = 1/e^{t+s+1}$ şeklinde tanımlanan h_t fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde integrallenebilir ve

$$l(t) = \int_0^\infty h_t(s) ds = \int_0^\infty h(t, s) ds = \int_0^\infty \frac{ds}{e^{t+s+1}} = \frac{1}{e^{t+1}}$$

olarak tanımlanan $l : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu da $\mathbb{R}^+$ cümlesinde sınırlı olduğundan (iii) hipotezi sağlanır.

$$H = \sup \{l(t) : t \in \mathbb{R}^+\} = \frac{1}{e}$$

olup, (iv) şartındaki eşitsizlik,

$$\frac{1}{e} + \sqrt{r^2 + 1} \sqrt{1 + r} \frac{1}{e} \leq r \quad (3.2.22)$$

halini alır. $1.2532 \leq r_0 \leq 5.1357$ olacak şekilde seçilen herhangi bir r_0 sayısının (3.2.22)'yi sağladığı görülebilir. Bu ise, (iv) hipotezinin sağlanması demektir.

$\varepsilon \geq 0$, $T > 0$, $\|x\| \leq r_0$ ve $|t - s| \leq \varepsilon$ olacak şekildeki $t, s \in [0, T]$ için,

$$|(F_1x)(t) - (F_1x)(s)| = \left| \frac{t}{e^t} - \frac{s}{e^s} \right| \quad (3.2.23)$$

olur. Diğer taraftan; genelliği bozmaksızın $x(t) < x(s)$ olarak alınabilir. Böylece; Ortalama Değer Teoremini de kullanarak,

$$\begin{aligned} |(F_2x)(t) - (F_2x)(s)| &= \left| \frac{\sqrt{x^2(t) + 1}}{t + 1} - \frac{\sqrt{x^2(s) + 1}}{s + 1} \right| \\ &\leq \frac{1}{t + 1} \left| \sqrt{x^2(t) + 1} - \sqrt{x^2(s) + 1} \right| \\ &\quad + \sqrt{x^2(s) + 1} \left| \frac{s - t}{(t + 1)(s + 1)} \right| \\ &\leq \frac{|x(t) - x(s)| |2\eta|}{2\sqrt{\eta^2 + 1}} + \frac{\sqrt{r_0^2 + 1} |s - t|}{(t + 1)(s + 1)} \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\eta \in (x(t), x(s))$ sayısının mevcut olduğu ve böylece,

$$|(F_2x)(t) - (F_2x)(s)| \leq |x(t) - x(s)| + \sqrt{r_0^2 + 1} \varepsilon \quad (3.2.24)$$

olduğu görülebilir. (2.2.2)'yi ve $t \rightarrow t/e^t$ fonksiyonunun $[0, T]$ kümesi üzerindeki düzgün sürekliliğini dikkate alarak, (3.2.23)'ten $\omega_0^\infty(F_1X) = 0$ elde edilir. Yine (2.2.2)'yi göz önüne alarak (3.2.24)'ten, $\omega_0^\infty(F_2X) \leq \omega_0^\infty(X)$ bulunur. Bu ise $c_1 = 0$ ve $c_2 = 1$ olmak üzere; (v) şartındaki ilk eşitsizliğin sağlanması demektir.

Diğer taraftan;

$$\begin{aligned} \sup\{|(F_1x)(t)| : t \geq T\} &= \sup\left\{\left|\frac{t}{e^t}\right| : t \geq T\right\} \\ &= \begin{cases} 1/e, & 0 < T \leq 1 \\ T/e^T, & T > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

ve

$$\begin{aligned} &\sup\{|(F_2x)(t)| : t \geq T\} \\ &= \sup\left\{\left|\frac{1}{t+1}\right| : t \geq T\right\} \sup\left\{\left|\sqrt{x^2(t)+1}\right| : t \geq T\right\} \\ &\leq \frac{\sqrt{r_0^2+1}}{T+1} \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

olup, (3.2.25) ve (3.2.26) eşitsizliklerinin (2.2.3) ile birlikte dikkate alınmasıyla, $\beta^\infty(F_1X) = \beta^\infty(F_2X) = 0$ sonucuna ulaşılır. Şu hâlde; $d_1 = d_2 = 0$ sabitleri için (v) hipotezindeki ikinci eşitsizlik de sağlanır. Böylece, (v) hipotezi sağlanır.

$$\text{maks}\{c_1 + c_2 Hk(r_0), d_1 + d_2 Hk(r_0)\} = \text{maks}\left\{\frac{\sqrt{r_0+1}}{e}, 0\right\} < 1$$

olduğundan (vi) şartı sağlanır.

Son olarak,

$$\sup\left\{\int_T^\infty \frac{1}{e^{t+s+1}} ds : t \in [0, T]\right\} = \sup\left\{\frac{1}{e^{t+T+1}} : t \in [0, T]\right\} = \frac{1}{e^{T+1}}$$

olup, (vii) şartının sağlandığı açıktır.

Teorem 3.1.1' in bütün hipotezleri sağlandığından, (3.2.19) integral denkleminin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayına ait ve $t \rightarrow 0$ iken $x(t) \rightarrow 0$ olacak şekilde bir $x = x(t)$ çözümünün olduğu sonucuna ulaşırız.

Uyarı 3.2.5. Şimdi, [12] numaralı çalışmada incelenen (3.2.17) denkleminde,

$$a(t) = te^{-t}, \quad f(t, x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{t+1}, \quad v(t, s, x) = \frac{\sqrt{1+|x|}}{e^{t+s+1}}$$

alınması halinde elde edilen (3.2.19) denklemini için Teorem 3.2.2' nin şartlarının sağlanıp sağlanmadığına bakalım:

$a \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$ olduğundan (i) şartı sağlanır.

$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $t \rightarrow f(t, 0)$ fonksiyonu da $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayının bir elemanıdır. Şu hâlde; (ii) hipotezi sağlanır.

Genelliği bozmadan, $x < y$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda; Ortalama Değer Teoreminden, $t \in \mathbb{R}^+$ için,

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &\leq \left| \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1} \right| \\ &= \frac{2|\eta|}{2\sqrt{\eta^2 + 1}} |x - y| \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\eta \in (x, y)$ elemanı mevcut olup,

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq |x - y| \quad (3.2.27)$$

olur. (3.2.27)'nin dikkate alınmasıyla, her $x, y \in \mathbb{R}$ ve her $t \in \mathbb{R}^+$ için,

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq |x - y|$$

olduğu yani, f fonksiyonunun ikinci değişkene göre $c = 1$ sabiti ile Lipschitz şartını sağladığı anlaşılır. Bu ise (iii) hipotezinin sağlanması demektir.

$v : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve Ortalama Değer Teoreminden, her $t, s \in \mathbb{R}^+$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} |v(t, s, x) - v(t, s, y)| &= \left| \frac{1}{e^{t+s+1}} \left(\sqrt{1 + |x|} - \sqrt{1 + |y|} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{e^{t+s+1}} |x - y| \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

yazılabilir. Burada,

$$h : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad h(t, s) = \frac{1}{e^{t+s+1}}$$

fonksiyonu sürekli ve $k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $k(x) = x$ ise azalmayan ve $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} k(\varepsilon) = 0$ şartını sağlayan bir fonksiyondur. Bu nedenle (iv) şartı sağlanmaktadır.

$$\int_0^\infty h(t, s) ds = \int_0^\infty |v(t, s, 0)| ds = \int_0^\infty \frac{ds}{e^{t+s+1}} = \frac{1}{e^{t+1}},$$

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \int_T^\infty h(t, s) ds : t \in [0, T] \right\} &= \sup \left\{ \int_T^\infty |v(t, s, 0)| ds : t \in [0, T] \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{1}{e^{t+T+1}} : t \in [0, T] \right\} = \frac{1}{T+1} \end{aligned}$$

olup buradan (vi) hipotezinin sağlandığı anlaşılır.

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \sup \{|f(t, 0)| : t \in \mathbb{R}^+\}, \quad \bar{h} = \sup \left\{ \int_0^\infty h(t, s) ds : t \in \mathbb{R}^+ \right\}, \\ \bar{v} &= \sup \left\{ \int_0^\infty |v(t, s, 0)| ds : t \in \mathbb{R}^+ \right\} \end{aligned}$$

olmak üzere $\bar{f} = 1$, $\bar{h} = 1/e$ ve $\bar{v} = 1/e$ olarak bulunur. $\|a\| = 1/e$ ve $k(r) = r$ olduğunu da dikkate aldığımızda, (vii) şartında verilen

$$\|a\| + \bar{c} \bar{h} r k(r) + \bar{c} \bar{v} r + \bar{f} \bar{h} k(r) + \bar{f} \bar{v} \leq r$$

eşitsizliği,

$$\frac{r^2 + 2r + 2}{e} \leq r \tag{3.2.29}$$

formuna indirgenir. (3.2.29) eşitsizliğinin pozitif bir r_0 çözümü mevcut değildir. **Yani, (vii) sağlanmaz. Bundan dolayı Teorem 3.2.2 [12, Teorem 8], (3.2.19) integral denklemine uygulanamaz. Diğer taraftan; bu tez çalışmasında Teorem 3.1.1 ile verdiğimiz varlık teoreminin (3.2.19) denklemine uygulanabildiği, Örnek 3.2.3' ten bilinmektedir.**

Sonuç 3.2.4. Teorem 3.2.2, çözümünün varlığı Teorem 3.1.1 aracılığıyla tespit edilen bir denkleme uygulanamayabilir.

4. LİNEER OLMAYAN BİR İNTEGRAL DENKLEM SINIFININ SINIRSIZ BİR ARALIK ÜZERİNDE ASİMPOTOTİK KARARLI ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Üçüncü bölümde kompaksızlık ölçüsü ve Schauder sabit nokta teoreminin kullanılmasıyla, lineer olmayan Fredholm tipi bir integral denklemin, $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında çözümlerinin varlığı ve asimptotik tavrını belirlemeye ilişkin yeter şartlar verildi. Bu bölümde ise kompaksızlık ölçüsüyle birleştirilen bir sabit nokta teoremi (Darbo sabit nokta teoremi) yardımıyla, aynı denklemin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında asimptotik kararlı çözümlere sahip olmasına imkân veren yeter şartlar belirlendi ve bu çalışmanın önemini ve farklılığını da ortaya koyacak şekilde bazı örnekler verildi.

4.1 Asimptotik Kararlı Çözümlerin Varlığı

Bu kısımda,

$$x(t) = (F_1x)(t) + (F_2x)(t) \int_0^\infty v(t, s, x(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (4.1.1)$$

lineer olmayan integral denkleminin, $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında asimptotik kararlı çözümlere sahip olmasını garanti eden yeter şartlar verilecektir.

Teorem 4.1.1. (4.1.1) denklemini aşağıdaki hipotezler altında ele alalım:

- (i) $F_i : BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \rightarrow BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, ($i = 1, 2$) operatörleri süreklidir ve her $x \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ ve her $t \in \mathbb{R}^+$ için,

$$|(F_ix)(t)| \leq f_i(\|x\|)$$

eşitsizliğini sağlayan sürekli ve azalmayan $f_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları mevcuttur.

- (ii) $v : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $a, b, \psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları sürekli, $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$, $\|b\|_1 = \int_0^\infty |b(s)|ds < \infty$ ve $\psi, \mathbb{R}^+$ üzerinde azalmayan olmak üzere; her $t, s \in \mathbb{R}^+$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$|v(t, s, x)| \leq a(t)b(s)\psi(|x|)$$

eşitsizliği sağlansın.

- (iii) $f_1(r_0) + f_2(r_0)\|a\|\|b\|_1\psi(r_0) \leq r_0$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir r_0 reel sayısı mevcuttur.

- (iv) ω_0^∞ ve μ sırasıyla, (2.2.2) ve (2.2.4) eşitlikleriyle tanımlanan fonksiyonlar olmak üzere; B_{r_0} yuvarının boştan farklı ve sınırlı her X alt cümlesi için,

$$\omega_0^\infty(F_2X) \leq p_{r_0}\omega_0^\infty(X) \text{ ve } \mu(F_1X) \leq q_{r_0}\mu(X)$$

eşitsizlikleri sağlayan ve negatif olmayan p_{r_0} ve q_{r_0} sabitleri vardır.

- (v) $p_{r_0}\|a\|\|b\|_1\psi(r_0) + q_{r_0} < 1$.

- (vi) $\phi_{r_0} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$; sürekli, azalmayan ve $\phi_{r_0}(0) = 0$ olacak şekilde bir fonksiyon, $\tau \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ ve $\int_0^\infty \tau(s)ds < \infty$ olmak üzere;

$$|v(t_2, s, x) - v(t_1, s, x)| \leq \phi_{r_0}(|t_2 - t_1|)\tau(s)$$

eşitsizliği her $t_1, t_2, s \in \mathbb{R}^+$ ve $|x| \leq r_0$ olan her $x \in \mathbb{R}$ için sağlansın.

- (vii) $\eta_{r_0} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$; sürekli, azalmayan ve $\eta_{r_0}(0) = 0$ eşitliğini sağlayan bir fonksiyon, $\rho \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ ve $\int_0^\infty \rho(s)ds < \infty$ olmak üzere; her $t, s \in \mathbb{R}^+$ ve $|x| \leq r_0$, $|y| \leq r_0$ olan her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$|v(t, s, x) - v(t, s, y)| \leq \eta_{r_0}(|x - y|)\rho(s)$$

eşitsizliği sağlansın.

Bu durumda; (4.1.1) denkleminin $B_{r_0} \subset BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ yuvarında en az bir $x = x(t)$ çözümü vardır. Ayrıca (4.1.1) denkleminin B_{r_0} yuvarındaki bütün çözümleri $\mathbb{R}^+$ üzerinde asimptotik kararlıdır.

İspat. B_{r_0} yuvarı üzerinde F operatörünü,

$$(Fx)(t) = (F_1x)(t) + (F_2x)(t) \int_0^\infty v(t, s, x(s)) ds$$

eşitliğiyle tanımlayalım. Bu tanımın anlamlı olduğunu görelim:

$x \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ ve $t, s \in \mathbb{R}^+$ olsun. (i) hipotezinden, $(F_1x)(t), (F_2x)(t) \in \mathbb{R}$ olduğu açıktır. (ii) hipotezinden,

$$\begin{aligned} |v(t, s, x(s))| &\leq a(t)b(s)\psi(|x(s)|) \\ &\leq a(t)b(s)\psi(\|x\|) \\ &\leq a(t)b(s)\psi(r_0) \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

olup, $\int_0^\infty |b(s)|ds < \infty$ olduğundan (4.1.2)'nin dikkate alınmasıyla, her $t \in \mathbb{R}$ için $\int_0^\infty v(t, s, x(s)) ds$ genelleştirilmiş integralinin mutlak yakınsak ve şu hâlde yakınsak olduğu anlaşılır. Böylece, $(Fx)(t) \in \mathbb{R}$ dir. Yani, F iyi tanımlıdır.

$T > 0, \varepsilon \geq 0, t, t_0 \in [0, T]$ ve $|t - t_0| \leq \varepsilon$ olmak üzere; $x \in B_{r_0}$ için,

$$\begin{aligned} &(Fx)(t) - (Fx)(t_0) \\ &= (F_1x)(t) + (F_2x)(t) \int_0^\infty v(t, s, x(s)) ds \\ &\quad - (F_1x)(t_0) - (F_2x)(t_0) \int_0^\infty v(t_0, s, x(s)) ds \\ &= (F_1x)(t) - (F_1x)(t_0) + ((F_2x)(t) - (F_2x)(t_0)) \int_0^\infty v(t, s, x(s)) ds \\ &\quad + (F_2x)(t_0) \int_0^\infty [v(t, s, x(s)) - v(t_0, s, x(s))] ds \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

olup, (4.1.3)'ten,

$$\begin{aligned} &|(Fx)(t) - (Fx)(t_0)| \\ &\leq |(F_1x)(t) - (F_1x)(t_0)| + |(F_2x)(t) - (F_2x)(t_0)| \left| \int_0^\infty v(t, s, x(s)) ds \right| \\ &\quad + |(F_2x)(t_0)| \left| \int_0^\infty [v(t, s, x(s)) - v(t_0, s, x(s))] ds \right| \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

elde edilir. (ii) ve (vi)'nin de dikkate alınmasıyla, (4.1.4)'ten,

$$\begin{aligned}
& |(Fx)(t) - (Fx)(t_0)| \\
& \leq \omega^T(F_1x, \varepsilon) + \omega^T(F_2x, \varepsilon) \int_0^\infty |v(t, s, x(s))| ds \\
& \quad + f_2(\|x\|) \int_0^\infty |v(t, s, x(s)) - v(t_0, s, x(s))| ds \\
& \leq \omega^T(F_1x, \varepsilon) + \omega^T(F_2x, \varepsilon) a(t) \int_0^\infty b(s) \psi(|x(s)|) ds \\
& \quad + f_2(\|x\|) \int_0^\infty \phi_{r_0}(|t - t_0|) \tau(s) ds \\
& \leq \omega^T(F_1x, \varepsilon) + \omega^T(F_2x, \varepsilon) \|a\| \psi(\|x\|) \|b\|_1 + f_2(\|x\|) \phi_{r_0}(\varepsilon) \|\tau\|_1
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

yazılabilir. Burada $i = 1, 2$ için $\omega^T(F_ix, \varepsilon)$,

$$\omega^T(F_ix, \varepsilon) = \sup\{|(F_ix)(s) - (F_ix)(t)| : t, s \in [0, T] \text{ ve } |t - s| \leq \varepsilon\}$$

olarak tanımlanmaktadır. (4.1.5) eşitsizliğinde $t, t_0 \in [0, T]$ ve $|t - t_0| \leq \varepsilon$ şartını sağlayan bütün t, t_0 elemanları üzerinden supremum alınırsa,

$$\begin{aligned}
\omega^T(Fx, \varepsilon) & \leq \omega^T(F_1x, \varepsilon) + \omega^T(F_2x, \varepsilon) \|a\| \psi(\|x\|) \|b\|_1 \\
& \quad + f_2(\|x\|) \phi_{r_0}(\varepsilon) \|\tau\|_1
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

eşitsizliğine ulaşılır. (F_ix) fonksiyonları $[0, T]$ kümesi üzerinde düzgün sürekli olduğundan, $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $\omega^T(F_ix, \varepsilon) \rightarrow 0$ olur. Buna göre (vi) hipotezinden $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_{r_0}(\varepsilon) = 0$ olacağı da dikkate alınarak (4.1.6) eşitsizliğinde $\varepsilon \rightarrow 0$ iken limit alınırsa, $\omega^T(Fx, \varepsilon) \rightarrow 0$ elde edilir. Bu ise, Teorem 2.2.1' den, Fx fonksiyonunun $[0, T]$ üzerinde düzgün sürekli ve böylece sürekli olması demektir. $T > 0$ keyfi olduğundan (Fx) , $\mathbb{R}^+$ üzerinde süreklidir.

Şimdi, (Fx) 'in $\mathbb{R}^+$ üzerinde sınırlı olduğunu gösterelim. Hipotezlerin göz önüne alınmasıyla, herhangi bir $t \in \mathbb{R}^+$ için,

$$\begin{aligned}
|(Fx)(t)| & = \left| (F_1x)(t) + (F_2x)(t) \int_0^\infty v(t, s, x(s)) ds \right| \\
& \leq |(F_1x)(t)| + |(F_2x)(t)| \int_0^\infty |v(t, s, x(s))| ds \\
& \leq f_1(\|x\|) + f_2(\|x\|) \int_0^\infty a(t) b(s) \psi(|x(s)|) ds
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

ve (4.1.7)' den de,

$$\|Fx\| \leq f_1(\|x\|) + f_2(\|x\|)\|a\|\|b\|_1\psi(\|x\|) \quad (4.1.8)$$

olacağından Fx fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde sınırlıdır.

Herhangi bir $x \in B_{r_0}$ için Fx fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde sürekli ve sınırlı olduğundan, F operatörünün B_{r_0} yuvarını $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayına eşlediği anlaşılır. Diğer taraftan; (4.1.8) ve (iii) hipotezi birlikte dikkate alındığında F operatörünün B_{r_0} yuvarını kendi üzerine eşlediği anlaşılır.

Şimdi F operatörünün B_{r_0} yuvarında sürekli olduğunu ispatlayalım:

Bunun için bir $\varepsilon > 0$ sayısını ve keyfi bir $x_0 \in B_{r_0}$ elemanını alalım. O zaman, herhangi bir $x \in B_{r_0}$ ve $t \in \mathbb{R}^+$ için,

$$\begin{aligned} & |(Fx)(t) - (Fx_0)(t)| \\ &= \left| (F_1x)(t) + (F_2x)(t) \int_0^\infty v(t, s, x(s)) ds - (F_1x_0)(t) \right. \\ & \quad \left. - (F_2x_0)(t) \int_0^\infty v(t, s, x_0(s)) ds \right| \\ &\leq |(F_1x)(t) - (F_1x_0)(t)| + |(F_2x)(t) - (F_2x_0)(t)| \int_0^\infty |v(t, s, x(s))| ds \\ & \quad + |(F_2x_0)(t)| \int_0^\infty |v(t, s, x(s)) - v(t, s, x_0(s))| ds \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

olup (4.1.9) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \|Fx - Fx_0\| &\leq \|F_1x - F_1x_0\| + \|F_2x - F_2x_0\| \|a\| \|b\|_1 \psi(r_0) \\ & \quad + f_2(r_0) \int_0^\infty \rho(s) \eta_{r_0}(|x(s) - x_0(s)|) ds \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

bulunur. F_i operatörleri herhangi bir $x_0 \in B_{r_0}$ noktasında sürekli olduğundan, $\|x - x_0\| < \delta_i(\varepsilon)$ şartını sağlayan her $x \in B_{r_0}$ için, $\|F_i x - F_i x_0\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde $\delta_i(\varepsilon) \leq \varepsilon$ sayıları mevcuttur. $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ alalım. Bu durumda; $\|x - x_0\| < \delta(\varepsilon)$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in B_{r_0}$ için (4.1.10)' dan,

$$\|Fx - Fx_0\| \leq \varepsilon + \varepsilon \|a\| \|b\|_1 \psi(r_0) + f_2(r_0) \|v\|_1 \eta_{r_0}(\varepsilon) \quad (4.1.11)$$

elde edilir. Böylece (4.1.11) ve (vii) şartından F 'nin B_{r_0} yuvarında sürekli olduğu anlaşılır.

Şimdi ise F operatörünün B_{r_0} yuvarında Darbo şartını sağladığını gösterelim:

X , B_{r_0} yuvarının boştan farklı bir alt kümesi, $\varepsilon \geq 0$, $T > 0$ ve $x \in X$ olsun.

Şu hâlde; (4.1.6)'dan,

$$\begin{aligned} \omega^T(Fx, \varepsilon) &\leq \omega^T(F_1x, \varepsilon) + \omega^T(F_2x, \varepsilon)\|a\| \|b\|_1\psi(r_0) \\ &\quad + f_2(r_0)\phi_{r_0}(\varepsilon)\|\tau\|_1, \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

(4.1.12)'den,

$$\begin{aligned} \omega^T(FX, \varepsilon) &\leq \omega^T(F_1X, \varepsilon) + \omega^T(F_2X, \varepsilon)\|a\| \|b\|_1\psi(r_0) \\ &\quad + f_2(r_0)\phi_{r_0}(\varepsilon)\|\tau\|_1, \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

(4.1.13)'ten,

$$\omega_0^T(FX) \leq \omega_0^T(F_1X) + \omega_0^T(F_2X)\|a\| \|b\|_1\psi(r_0) \quad (4.1.14)$$

ve (4.1.14)'ten,

$$\omega_0^\infty(FX) \leq \omega_0^\infty(F_1X) + \omega_0^\infty(F_2X)\|a\| \|b\|_1\psi(r_0) \quad (4.1.15)$$

bulunur.

Diğer taraftan; boştan farklı $X \subseteq B_{r_0}$ alt cümlesini alalım. Böylece, $x, y \in X$ ve $t \in \mathbb{R}^+$ için, (4.1.9), (i) ve (ii)'den,

$$\begin{aligned} \text{diam}(FX)(t) &\leq \text{diam}(F_1X)(t) + \text{diam}(F_2X)(t)a(t)\|b\|_1\psi(r_0) \\ &\quad + 2f_2(r_0)a(t)\|b\|_1\psi(r_0) \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

elde edilir. (4.1.16)'da $t \rightarrow \infty$ iken limitsupremum alınırsa,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \text{diam}(FX)(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \text{diam}(F_1X)(t) \quad (4.1.17)$$

olur. (2.2.5), (4.1.15), (4.1.17), (iv) hipotezi ve $\omega_0^\infty(X) \leq \mu(X)$ eşitsizliği dikkate alınarak,

$$\begin{aligned} \mu(FX) &\leq \mu(F_1X) + p_{r_0}\omega_0^\infty(X)\|a\| \|b\|_1\psi(r_0) \\ &\leq q_{r_0}\mu(X) + p_{r_0}\|a\| \|b\|_1\psi(r_0)\mu(X) \\ &= (p_{r_0}\|a\| \|b\|_1\psi(r_0) + q_{r_0})\mu(X) \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

elde edilir. Böylece (4.1.18) ve (v) hipotezi birlikte göz önüne alındığında, F operatörünün μ kompaktsızlık ölçüsüne göre bir daralma dönüşümü olduğu anlaşılır.

Sonuç olarak; Teorem 2.2.13 ile verilen Darbo sabit nokta teoremi gereğince, F operatörünün B_{r_0} yuvarında en az bir sabit x noktası vardır. Ayrıca; F' nin sabit noktası olan her $x = x(t)$ fonksiyonunun, (4.1.1) denkleminin bir çözümü olduğu aşikârdır. Diğer taraftan; Uyarı 2.2.4 ile, F operatörünün B_{r_0} yuvarındaki sabit noktalarının kümesi $\text{Fix } F$, $\ker \mu'$ nün bir elemanıdır. Böylece, (2.2.5) ile tanımlanan μ kompaktsızlık ölçüsünün çekirdeğine ait kümelerin sağladığı özellik dikkate alınırsa, (4.1.1) denkleminin B_{r_0} yuvarındaki bütün çözümlerinin $\mathbb{R}^+$ üzerinde asimptotik kararlı olduğu anlaşılır. $\square$

4.2 Örnekler, Bazı Varlık Teoremlerinin Karşılaştırılması

Bu kısımda (4.1.1) formunda bazı denklemler ele alınacak ve bu denklemler için Teorem 4.1.1' in (i) – (vii) şartlarının sağlandığı gösterilecektir. Böylece, söz konusu denklemlerin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında en az bir çözüme sahip ve çözümlerin de asimptotik kararlı olduğu söylenebilecektir. Ayrıca, ele alınan bu denklemlerin daha önce incelenen bazı denklemlerle karşılaştırması yapılarak, Teorem 4.1.1 ile verilen varlık teoreminin farklılığı ve önemi anlaşılabacaktır.

Örnek 4.2.1. α_1, α_2 sabit sayılar ve $0 < |\alpha_1| < 1$ olsun. Buna göre,

$$x(t) = \alpha_1 \sin(x(t) + 1) + \alpha_2 x^2(t) \int_0^\infty \frac{\arctan x(s)}{e^t(s^2 + 1)} ds, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (4.2.1)$$

integral denklemini inceleyelim:

$$(F_1 x)(t) = \alpha_1 \sin(x(t) + 1), \quad (F_2 x)(t) = \alpha_2 x^2(t) \quad \text{ve} \quad v(t, s, x) = \frac{\arctan x}{e^t(s^2 + 1)}$$

olmak üzere; (4.2.1) denklemi (4.1.1)' in özel bir halidir.

Şimdi, Teorem 4.1.1' in şartlarının sağlandığını gösterelim:

F_1 ve F_2 operatörlerinin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında sürekli oldukları kolayca görülebilir. Ayrıca her $t \in \mathbb{R}^+$ ve her $x \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ için,

$$|(F_1x)(t)| \leq |\alpha_1| \text{ ve } |(F_2x)(t)| \leq |\alpha_2| \|x\|^2 \quad (4.2.2)$$

sağlanır. Şu hâlde; $f_1, f_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f_1(x) = |\alpha_1|$ ve $f_2(x) = |\alpha_2|x^2$ eşitlikleriyle tanımlanan fonksiyonlar sürekli ve azalmayan olup, (i) hipotezi sağlanır.

v fonksiyonu $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ üzerinde sürekli ve üstelik her $t, s \in \mathbb{R}^+$ ve $x \in \mathbb{R}$ için,

$$|v(t, s, x)| = \left| \frac{\arctan x}{e^t(s^2 + 1)} \right| \leq \frac{\pi}{2e^t(s^2 + 1)} \quad (4.2.3)$$

eşitsizliğini sağlamaktadır. Böylece $a(t) = \frac{\pi}{2e^t}$, $b(s) = \frac{1}{s^2+1}$ ve $\psi(x) = 1$ olarak tanımlanan $a, b, \psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları sürekli dir. Bunun yanında, $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$, $\|b\|_1 = \int_0^\infty \frac{ds}{s^2+1} = \frac{\pi}{2}$ ve $\psi, \mathbb{R}^+$ üzerinde azalmayan olduğundan (ii) hipotezi sağlanır.

$$\|a\| = \sup \left\{ \left| \frac{\pi}{2e^t} \right| : t \geq 0 \right\} = \frac{\pi}{2} \text{ olup,}$$

$$f_1(r_0) + f_2(r_0)\|a\|\|b\|_1\psi(r_0) \leq r_0$$

eşitsizliği,

$$|\alpha_1| + |\alpha_2|r_0^2\frac{\pi^2}{4} \leq r_0 \quad (4.2.4)$$

halini alır.

X, B_{r_0} yuvarının boştan farklı ve sınırlı bir alt kümesi olsun. $x \in X$, $\varepsilon \geq 0$, $T > 0$ ve $|t - s| \leq \varepsilon$ olan $t, s \in [0, T]$ için,

$$\begin{aligned} |(F_1x)(t) - (F_1x)(s)| &= |\alpha_1| |\sin(x(t) + 1) - \sin(x(s) + 1)| \\ &\leq |\alpha_1| |x(t) - x(s)| \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

ve

$$\begin{aligned} |(F_2x)(t) - (F_2x)(s)| &= |\alpha_2| |x(t) + x(s)| |x(t) - x(s)| \\ &\leq 2|\alpha_2| r_0 |x(t) - x(s)| \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

olup, (4.2.5) ' ten,

$$\omega_0^\infty(F_1X) \leq |\alpha_1|\omega_0^\infty(X) \quad (4.2.7)$$

ve (4.2.6) ' dan,

$$\omega_0^\infty(F_2X) \leq 2r_0|\alpha_2|\omega_0^\infty(X) \quad (4.2.8)$$

elde edilir. (4.2.8), (iv) hipotezindeki birinci eşitsizliğin $p_{r_0} = 2r_0|\alpha_2|$ sabiti için sağlandığını gösterir.

Diğer taraftan; $x, y \in X$ ve $t \in \mathbb{R}^+$ için,

$$\begin{aligned} |(F_1x)(t) - (F_1y)(t)| &= |\alpha_1 [\sin(x(t) + 1) - \sin(y(t) + 1)]| \\ &\leq |\alpha_1| |x(t) - y(t)| \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

ve (4.2.9) ' un kullanılmasıyla,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \text{diam}(F_1X)(t) \leq |\alpha_1| \limsup_{t \rightarrow \infty} \text{diam} X(t) \quad (4.2.10)$$

bulunur. (4.2.7) ve (4.2.10) eşitsizliklerinden,

$$\mu(F_1X) \leq |\alpha_1|\mu(X) \quad (4.2.11)$$

elde edilir. (4.2.11) ' den, (iv) hipotezindeki ikinci eşitsizliğin $q_{r_0} = |\alpha_1|$ sabiti için sağlandığı anlaşılır.

(4.2.8) ve (4.2.11) ' in dikkate alınmasıyla (v) hipotezindeki eşitsizlik,

$$|\alpha_1| + \frac{r_0|\alpha_2|\pi^2}{2} < 1 \quad (4.2.12)$$

olarak bulunur. Burada $\alpha_2 \neq 0$ veya $\alpha_2 = 0$ dır.

1. Durum: $\alpha_2 \neq 0$ olsun. Hipotezden $0 < |\alpha_1| < 1$ olduğundan, bu şartı sağlayan bir α_1 sayısına karşılık α_2 sayısı da, $|\alpha_1|^2 + |\alpha_1||\alpha_2|\pi^2 - 1 < 0$ olacak şekilde seçilirse, $1 - |\alpha_1||\alpha_2|\pi^2 > 0$ olur. Buna göre,

$$r_0 \in \left(0, \frac{2(1 - |\alpha_1|)}{|\alpha_2|\pi^2}\right) \cap \left[\frac{2 - 2\sqrt{1 - |\alpha_1||\alpha_2|\pi^2}}{|\alpha_2|\pi^2}, \frac{2 + 2\sqrt{1 - |\alpha_1||\alpha_2|\pi^2}}{|\alpha_2|\pi^2}\right]$$

yani,

$$r_0 \in \left[\frac{2 - 2\sqrt{1 - |\alpha_1| |\alpha_2| \pi^2}}{|\alpha_2| \pi^2}, \frac{2(1 - |\alpha_1|)}{|\alpha_2| \pi^2} \right)$$

olarak alınan r_0 sayısı (4.2.4) ve (4.2.12) eşitsizliklerinin pozitif bir çözümüdür.

2. Durum: $\alpha_2 = 0$ olsun. $0 < |\alpha_1| < 1$ olduğundan, $r_0 \in [|\alpha_1|, \infty)$ sayısı (4.2.4) ve (4.2.12) eşitsizliklerini sağlar.

Genelliği bozmadan negatif olmayan t_1 ve t_2 sayılarını, $t_1 < t_2$ olarak alalım. Bu durumda; Ortalama Değer Teoreminin de kullanılmasıyla, her $s \in \mathbb{R}^+$ ve $|x| \leq r_0$ olan her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} |v(t_1, s, x) - v(t_2, s, x)| &= \left| \frac{\arctan x}{e^{t_1}(s^2 + 1)} - \frac{\arctan x}{e^{t_2}(s^2 + 1)} \right| \\ &= \frac{|\arctan x|}{s^2 + 1} \frac{|e^{t_2} - e^{t_1}|}{e^{t_1+t_2}} \\ &\leq \frac{|\arctan x|}{s^2 + 1} \frac{e^\eta |t_2 - t_1|}{e^{t_1+t_2}} \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\eta \in (t_1, t_2)$ sayısı mevcut olduğundan,

$$|v(t_1, s, x) - v(t_2, s, x)| \leq \frac{\pi}{2(s^2 + 1)} |t_2 - t_1| \quad (4.2.13)$$

elde edilir. (4.2.13) eşitsizliğinin $t_1 = t_2$ olması halinde de sağlandığı açıktır. Bu nedenle (4.2.13), her $t_1, t_2, s \in \mathbb{R}^+$ ve $|x| \leq r_0$ olan her $x \in \mathbb{R}$ için sağlanır. Şu hâlde; $\phi_{r_0}, \tau : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları, $\phi_{r_0}(t) = t$ ve $\tau(s) = \frac{\pi}{2(s^2+1)}$ olarak seçilirse (vi) şartı sağlanır.

Son olarak, yine genelliği bozmaksızın $|x| \leq r_0$ ve $|y| \leq r_0$ olan $x, y \in \mathbb{R}$ sayılarını, $x < y$ olarak alabiliriz. Bu durumda; Ortalama Değer Teoremiyle, her $s, t \in \mathbb{R}^+$ için,

$$\begin{aligned} |v(t, s, x) - v(t, s, y)| &= \left| \frac{\arctan x - \arctan y}{e^t(s^2 + 1)} \right| \\ &\leq \frac{|x - y|}{e^t(1 + \eta^2)(1 + s^2)} \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\eta \in (x, y)$ sayısı mevcut olduğundan,

$$|v(t, s, x) - v(t, s, y)| \leq \frac{|x - y|}{1 + s^2} \quad (4.2.14)$$

olur. (4.2.14) eşitsizliğinin $x = y$ olması halinde de sağlandığı aşikârdır. Bu nedenle (4.2.14), her $t, s \in \mathbb{R}^+$ ve $|x|, |y| \leq r_0$ olan her $x, y \in \mathbb{R}$ için sağlanır. $\eta, \rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları, $\eta_{r_0}(t) = t$ ve $\rho(s) = 1/(s^2 + 1)$ olarak seçilirse (vii) hipotezi de sağlanır.

Teorem 4.1.1' in bütün şartları sağlandığı için (4.2.1) integral denkleminin, $B_{r_0} \subset BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ yuvarında en az bir çözümünün mevcut ve bu denklemin B_{r_0} yuvarındaki çözümlerinin de $\mathbb{R}^+$ üzerinde asimptotik kararlı olduğunu söyleyebiliriz.

Uyarı 4.2.1. [12–25] numaralı kaynaklarda ele alınan (1.2.1) – (1.2.8) integral denklemlerinin hiçbirinden (4.2.1) integral denklemi elde edilemez. Bu nedenle bu çalışmalarda verilen varlık teoremleri (4.2.1)' e uygulanamaz.

Örnek 4.2.2. Aşağıdaki integral denklemi ele alalım:

$$x(t) = h(t) + \frac{e^{-t}(e-1)x^2(t)}{(1+t)^2} \int_0^\infty \frac{x(s)}{(s+e)(s+1)} ds, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (4.2.15)$$

Burada $h, BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayının $\|h\| \leq \frac{\sqrt{7}}{7}$ olacak şekildeki bir elemanıdır.

$$(F_1x)(t) = h(t), \quad (F_2x)(t) = \frac{x^2(t)}{1+t}, \quad v(t, s, x) = \frac{e^{-t}(e-1)x}{(t+1)(s+e)(s+1)}$$

alalım. F_1 ve F_2 operatörlerinin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ üzerinde sürekli olduğu açıktır. Bunun yanında her $t \in \mathbb{R}^+$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$|(F_1x)(t)| = |h(t)| \leq \|h\| \quad \text{ve} \quad |(F_2x)(t)| \leq \left| \frac{x^2(t)}{1+t} \right| \leq \|x\|^2$$

dir. Böylece $f_1, f_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları, $f_1(x) = \|h\|$ ve $f_2(x) = x^2$ olarak alınabilir. Şu hâlde (i) şartı sağlanır.

$v : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olup, her $t, s \in \mathbb{R}^+$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için, $a(t) = \frac{e^{-t}}{t+1}$, $b(s) = \frac{e-1}{(s+e)(s+1)}$ ve $\psi(x) = x$ olarak seçilen $a, b, \psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları,

$$|v(t, s, x)| = a(t)b(s)\psi(x) \quad (4.2.16)$$

eşitliğini sağlar. (4.2.16)'ya ilâveten; $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$, $\|b\|_1 = \int_0^\infty \frac{(e-1)ds}{(s+e)(s+1)} = 1$ ve ψ , $\mathbb{R}^+$ üzerinde azalmayan olduğundan (ii) hipotezi sağlanır.

$\|a\| = a(0) = 1$ olduğu da dikkate alındığında (iii)'deki

$$f_1(r_0) + f_2(r_0)\|a\|\|b\|_1\psi(r_0) \leq r_0$$

eşitsizliği,

$$\|h\| + r_0^3 \leq r_0 \quad (4.2.17)$$

eşitsizliğine dönüşür.

$\varepsilon \geq 0$, $T > 0$, $\|x\| \leq r_0$ ve $|t - s| \leq \varepsilon$ olan $t, s \in [0, T]$ için,

$$|(F_1x)(t) - (F_1x)(s)| = |h(t) - h(s)| \quad (4.2.18)$$

eşitliği ve

$$\begin{aligned} & |(F_2x)(t) - (F_2x)(s)| \\ &= \left| \frac{x^2(t)}{1+t} - \frac{x^2(s)}{1+s} \right| \\ &\leq \frac{|x^2(t) - x^2(s)|}{1+t} + \frac{|(s-t)x^2(s)|}{(1+t)(1+s)} \\ &\leq \frac{2r_0}{1+t}|x(t) - x(s)| + \frac{r_0^2|t-s|}{(1+t)(1+s)} \\ &\leq 2r_0|x(t) - x(s)| + r_0^2\varepsilon \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

eşitsizliği elde edilir. h fonksiyonunun $[0, T]$ kümesi üzerinde düzgün sürekli olması nedeniyle, (4.2.18)'den,

$$\omega_0^\infty(F_1X) = 0 \quad (4.2.20)$$

bulunur. Diğer taraftan; (4.2.19)'dan,

$$\omega_0^\infty(F_2X) \leq 2r_0\omega_0^\infty(X) \quad (4.2.21)$$

elde edilir. $X \subseteq B_{r_0}$ alt cümlesi boştan farklı olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için,

$$|(F_1x)(t) - (F_1y)(t)| = 0 \quad (4.2.22)$$

olacağından (4.2.22) ' den,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \text{diam}(F_1 X)(t) = 0 \quad (4.2.23)$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece, (4.2.20), (4.2.23) ve (4.2.21) dikkate alınarak, $q_{r_0} = 0$ ve $p_{r_0} = 2r_0$ sabitleri için (iv) hipotezindeki eşitsizliklerin sağlandığı anlaşılır.

(v) şartındaki

$$p_{r_0} \|a\| \|b\|_1 \psi(r_0) + q_{r_0} < 1$$

eşitsizliği,

$$2r_0^2 < 1 \quad (4.2.24)$$

eşitsizliğine karşılık gelir. $r_0 \in (0.5128, 0.6395)$ olarak seçilen r_0 sayısının, (4.2.17) ve (4.2.24) eşitsizliklerini sağladığı görülebilir.

Genelliği kaybetmeksizin $t_1 < t_2$ şartını sağlayan herhangi $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ sayılarını alalım. Böylece, Ortalama Değer Teoreminin de kullanılmasıyla, her $s \in \mathbb{R}^+$ ve $|x| \leq r_0$ olan her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} & |v(t_1, s, x) - v(t_2, s, x)| \\ & \leq \frac{(e-1)|x|}{(s+e)(s+1)} \left| \frac{e^{-t_1}}{t_1+1} - \frac{e^{-t_2}}{t_2+1} \right| \\ & \leq \frac{(e-1)r_0}{(s+e)(s+1)} \left| \frac{(t_2+1)e^{t_2} - (t_1+1)e^{t_1}}{(t_1+1)(t_2+1)e^{t_1+t_2}} \right| \\ & \leq \frac{(e-1)r_0}{(s+e)(s+1)} \left| \frac{(t_2+1)(e^{t_2} - e^{t_1}) + e^{t_1}(t_1 - t_2)}{(t_1+1)(t_2+1)e^{t_1+t_2}} \right| \\ & \leq \frac{(e-1)r_0}{(s+e)(s+1)} \frac{[(t_2+1)e^\eta + e^{t_1}][t_1 - t_2]}{(t_1+1)(t_2+1)e^{t_1+t_2}} \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\eta \in (t_1, t_2)$ sayısı mevcut olduğundan,

$$|v(t_1, s, x) - v(t_2, s, x)| \leq \frac{(e-1)r_0|t_1 - t_2|}{(s+e)(s+1)} \quad (4.2.25)$$

elde edilir. Ayrıca, (4.2.25) eşitsizliğinin $t_1 = t_2$ olması halinde de sağlanacağı açıktır. Şu hâlde; (4.2.25), her $t_1, t_2, s \in \mathbb{R}^+$ ve $|x| \leq r_0$ olan her $x \in \mathbb{R}$ için

geçerlidir. Buna göre, $\phi_{r_0}(t) = r_0 t$ ve $\tau(s) = \frac{e-1}{(s+e)(s+1)}$ olarak seçilirse (vi) hipotezi sağlanır.

Diğer taraftan; her $t \in \mathbb{R}^+$ ve $|x| \leq r_0, |y| \leq r_0$ olan her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$|v(t, s, x) - v(t, s, y)| = \frac{e^{-t}(e-1)|x-y|}{(t+1)(s+e)(s+1)} \leq \frac{(e-1)|x-y|}{(s+e)(s+1)} \quad (4.2.26)$$

olup, (4.2.26)' dan; $\eta_{r_0}(t) = t$ ve $\rho(s) = \frac{e-1}{(s+e)(s+1)}$ olarak seçilirse (vii) hipotezi de sağlanır.

Sonuç olarak; Teorem 4.1.1'e dayanarak, (4.2.15) denkleminin $B_{r_0} \subset BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ yuvarında en az bir çözümünün mevcut ve B_{r_0} yuvarında bulunan çözümlerin de $\mathbb{R}^+$ üzerinde asimptotik kararlı olduğunu söyleyebiliriz.

(4.2.15) denklemi, [12, 19, 20, 23] çalışmalarında ele alınan denklemlerin birer özel halidir. Şimdi, Teorem 4.1.1' i bu çalışmalarda verilen varlık teoremleri ile karşılaştıralım:

[19] numaralı çalışmada, lineer olmayan

$$x(t) = h(t) + f(t, x(t)) \int_0^\infty v(t, \tau, x(\tau)) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty) \quad (4.2.27)$$

integral denklemi incelenmiş ve bu denklemin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında çözümünün varlığına ilişkin aşağıdaki teorem verilmiştir:

Teorem 4.2.1 (Teorem 2, [19]). (4.2.27) denklemini aşağıdaki hipotezler altında göz önüne alalım:

- (i) $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve sınırlıdır.
- (ii) $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıda verilen şartları sağlar:
 1. $t \rightarrow f(t, 0)$ fonksiyonu sınırlıdır.
 2. Her $t \in \mathbb{R}^+$ ve $|x| \leq r, |y| \leq r$ olan her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k_r |x - y|$$

olacak şekilde bir $r \geq 0$ ve $k_r \geq 0$ mevcuttur.

3. Verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $|t - s| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $t, s \in \mathbb{R}^+$ için,

$$\sup_{|x| \leq r} |f(s, x) - f(t, x)| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

(iii) $v : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve aşağıdaki şartları sağlayan ve sürekli olan $a, b, \psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları mevcuttur:

1. $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$.

2. $b \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+)$ ve $\psi, \mathbb{R}^+$ üzerinde azalmayıp azalmayıp.

3. Her $t, s \in \mathbb{R}^+$ ve $|x| \leq r$ olan her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$|v(t, s, x)| \leq a(t)b(s)\psi(|x|).$$

(iv) Her $t_1, t_2, s \in \mathbb{R}^+$ ve $|x| \leq r$ olan her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$|v(t_2, s, x) - v(t_1, s, x)| \leq \phi_r(|t_2 - t_1|)\tau(s)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde, sürekli, azalmayan ve $\phi_r(0) = 0$ olan bir $\phi_r : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu ile $\tau \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonu vardır.

(v) Her $t, s \in \mathbb{R}^+$ ve $|x| \leq r, |y| \leq r$ olan her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$|v(t, s, x) - v(t, s, y)| \leq \rho(s)\eta_r(|x - y|)$$

olacak şekilde sürekli, azalmayan ve $\eta_r(0) = 0$ olan bir $\eta_r : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu ile $\rho \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonu vardır.

(vi) $\|b\|_1 = \int_0^\infty |b(s)|ds$ ve $M = \sup\{|f(t, 0)| : t \in \mathbb{R}^+\}$ olmak üzere;

$$\|h\| + [rk_r + M] \|a\| \|b\|_1 \psi(r) \leq r \text{ ve } k_r \|a\| \|b\|_1 \psi(r) < 1.$$

Bu durumda; (4.2.27) denkleminin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında en az bir çözümü mevcuttur.

Uyarı 4.2.2. (4.2.27) denkleminde, $f(t, x) = \frac{x^2}{1+t}$ ve $v(t, s, x) = \frac{e^{-t}(e-1)x}{(t+1)(s+e)(s+1)}$ alınması halinde (4.2.15) denklemi elde edilir. Ayrıca, h fonksiyonunu $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayının $\frac{\sqrt{13}}{13} \leq \|h\| \leq \frac{\sqrt{7}}{7}$ olacak şekildeki bir elemanı olarak seçelim. **Bu durumda; $r_0 \in (0.5128, 0.6395)$ olmak üzere; (4.2.15) integral denkleminin, $B_{r_0} \subset BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ yuvarında en az bir çözümünün mevcut ve B_{r_0} yuvarında bulunan çözümlerin de $\mathbb{R}^+$ üzerinde asimptotik kararlı olduğu gerçeği, Örnek 4.2.2' den bilinmektedir.**

Şimdi, (4.2.15) denkleminin Teorem 4.2.1' in hipotezlerini sağlayıp sağlamadığına bakalım:

(i) hipotezinin sağlandığı açıktır.

Her $t \in \mathbb{R}^+$ için $f(t, 0) = 0$ olduğundan, (ii)' nin 1. şartı sağlanır.

Her $t \in \mathbb{R}^+$ ve $|x| \leq r, |y| \leq r$ olan her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$|f(t, x) - f(t, y)| = \frac{|x^2 - y^2|}{1+t} \leq 2r|x - y|$$

olacak şekilde $k_r = 2r$ sayısı mevcut olduğundan, (ii)' nin 2. şartı sağlanır.

Verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $|t - s| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $t, s \in \mathbb{R}^+$ için,

$$\sup_{|x| \leq r} |f(s, x) - f(t, x)| = \sup_{|x| \leq r} \frac{|t - s|}{(1+s)(1+t)} |x|^2 \leq \delta r^2 \leq \varepsilon$$

olup bir $\delta > 0$ sayısı, $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{r^2}$ olarak seçilebilir. Şu hâlde; (ii)' nin 3. şartı sağlanır.

(iii) – (v) şartlarının sağlandığı, (4.2.16), (4.2.25) ve (4.2.26) dikkate alınarak Örnek 4.2.2' den kolayca görülebilir.

$k_r = 2r$, $\|a\| = 1$, $\|b\|_1 = 1$, $M = 0$ ve $\psi(r) = r$ olup, (vi) hipotezindeki ilk eşitsizlik,

$$\|h\| + 2r^3 \leq r \quad (4.2.28)$$

halini alır. $\|h\| \in \left[\frac{\sqrt{13}}{13}, \frac{\sqrt{7}}{7} \right]$ olduğundan (4.2.28)' in pozitif bir r çözümü mevcut değildir. Şu hâlde; (vi) hipotezi sağlanmaz.

Bu nedenle; Teorem 4.2.1 yardımıyla, (4.2.15) denkleminin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında bir çözümünün mevcut olduğunu söylemek mümkün değildir.

Sonuç 4.2.1. Teorem 4.1.1' in şartlarını sağladığı halde, Teorem 4.2.1' in şartlarından en az birini sağlamayan denklemler vardır. **Bu ise, çözümünün varlığı Teorem 4.1.1 ile tespit edilebilen, fakat Teorem 4.2.1 ile tespit edilemeyen denklemlerin olması demektir.**

Uyarı 4.2.3. (3.2.17) denkleminde,

$$a(t) = h(t) = \frac{t+1}{4t+3}, \quad f(t, x) = \frac{x^2}{1+t} \quad \text{ve} \quad v(t, s, x) = \frac{e^{-t}(e-1)x}{(t+1)(s+e)(s+1)}$$

alınması halinde (4.2.15) denklemi elde edilir. Bu durumda; $\|h\| = \frac{1}{3} < \frac{\sqrt{7}}{7}$ olup, Teorem 4.1.1' in şartlarının sağlandığı ve böylece bir $r_0 > 0$ sayısının ve $x = x(t) \in B_{r_0} \subset BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ olacak şekilde **en az bir çözümün mevcut ve B_{r_0} yuvarında bulunan çözümlerin de $\mathbb{R}^+$ üzerinde asimptotik kararlı olduğu, Örnek 4.2.2' den bilinmektedir.**

Diğer taraftan; $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \frac{1}{3} \neq 0$ olduğundan Teorem 3.2.1' in (i) hipotezi sağlanmaz. **Şu hâlde; (4.2.15) denkleminin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında bir çözüme sahip olduğunu, Teorem 3.2.1' i kullanarak söyleyemeyiz.**

Sonuç 4.2.2. Teorem 3.2.1, Teorem 4.1.1' in uygulandığı her denkleme uygulanabilir.

Uyarı 4.2.4. (3.2.17) denkleminde,

$$a(t) = h(t) = \frac{1}{4e^t}, \quad f(t, x) = \frac{x^2}{1+t} \quad \text{ve} \quad v(t, s, x) = \frac{e^{-t}(e-1)x}{(t+1)(s+e)(s+1)}$$

alınırsa (4.2.15) denklemi elde edilir. $\|h\| = \frac{1}{4} < \frac{\sqrt{7}}{7}$ olup, **bu denklemin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında bir çözümünün varlığı, Örnek 4.2.2' den bilinmektedir. Ancak,**

her $x, y \in \mathbb{R}$ ve her $t \in \mathbb{R}^+$ için,

$$|f(t, x) - f(t, y)| = \frac{|x^2 - y^2|}{1 + t}$$

olup, ikinci değişkene göre Lipschitz şartını sağlayacak şekilde bir $c > 0$ sabiti mevcut değildir. Yani, Teorem 3.2.2' nin (iii) şartı sağlanmaz. **Bu nedenle;** (4.2.15) integral denkleminin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında bir çözüme sahip olduğunu Teorem 3.2.2 yardımıyla söylemek mümkün değildir.

Sonuç 4.2.3. Teorem 4.1.1' in uygulanıp, Teorem 3.2.2' nin uygulanmadığı integral denklemler vardır.

Uyarı 4.2.5. (3.2.18) denkleminde,

$$g(t) = h(t) = \frac{1}{4e^t}, \quad f(t, x) = \frac{x^2}{1 + t} \quad \text{ve} \quad v(t, s, x) = \frac{e^{-t}(e - 1)x}{(t + 1)(s + e)(s + 1)}$$

alınırsa (4.2.15) elde edilir. $\|h\| = \frac{1}{4} < \frac{\sqrt{7}}{7}$ olup, **bu denklemin** $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında en az bir çözümünün mevcut olduğu, Örnek 4.2.2 ile bilinmektedir. Diğer taraftan; $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $g(t) = \frac{1}{4e^t}$ fonksiyonu sürekli olmasına rağmen $\mathbb{R}^+$ üzerinde azalmayan değildir. **Bu ise, Teorem 3.2.3' ün (i) hipotezinin sağlanmaması demektir. Şu hâlde; (4.2.15) denkleminin** $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında bir çözümünün olduğu Teorem 3.2.3 aracılığıyla söylenemez.

Sonuç 4.2.4. Teorem 4.1.1' in uygulandığı denklemlere, Teorem 3.2.3 uygulanamayabilir.

Örnek 4.2.3.

$$x(t) = te^{-2t} + \sqrt{x^2(t) + 5} \int_0^\infty \frac{\sqrt{1 + |x(s)|}}{e^{t+s+1}} ds, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (4.2.29)$$

integral denklemi için Teorem 4.1.1' in şartlarının sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim:

$$(F_1x)(t) = te^{-2t}, \quad (F_2x)(t) = \sqrt{x^2(t) + 5}, \quad v(t, s, x) = \frac{\sqrt{1 + |x|}}{e^{t+s+1}}$$

olup, F_1 operatörünün $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında sürekli olduğu açıktır. F_2 operatörünün $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayındaki sürekliliği ise, Örnek 3.2.3' teki F_2 operatörünün sürekliliğine benzer şekilde gösterilebilir.

Ayrıca her $t \in \mathbb{R}^+$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$|(F_1x)(t)| = |te^{-2t}| \leq \frac{1}{2e}$$

ve

$$|(F_2x)(t)| = \left| \sqrt{x^2(t) + 5} \right| \leq \sqrt{\|x\|^2 + 5}$$

dir. Böylece, $f_1(x) = 1/2e$ ve $f_2(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ olarak alınabilir. Şu hâlde (i) sağlanır.

$v : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olup, her $t, s \in \mathbb{R}^+$ ve $x \in \mathbb{R}$ için,

$$|v(t, s, x)| = \left| \frac{\sqrt{1 + |x|}}{e^{t+s+1}} \right| = \frac{\sqrt{1 + |x|}}{e^{t+s+1}}$$

eşitliği geçerlidir. Böylece (ii) hipotezindeki fonksiyonlar, $a(t) = e^{-t-1}$, $b(s) = e^{-s}$ ve $\psi(x) = \sqrt{x+1}$ olarak alınabilir. Zira; $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$, $\|b\|_1 = \int_0^\infty e^{-s} ds = 1$ ve ψ azalmayan olup, (ii) hipotezi sağlanır.

$f_1(r_0) = \frac{1}{2e}$, $f_2(r_0) = \sqrt{r_0^2 + 5}$, $\|a\| = \frac{1}{e}$, $\|b\|_1 = 1$ ve $\psi(r_0) = \sqrt{r_0 + 1}$ olduğundan (iii)' deki eşitsizlik,

$$\frac{1}{2e} + \frac{1}{e} \sqrt{r_0^2 + 5} \sqrt{r_0 + 1} \leq r_0 \quad (4.2.30)$$

halini alır.

$\varepsilon \geq 0$, $T > 0$, $\|x\| \leq r_0$ ve $|t - s| \leq \varepsilon$ olacak şekildeki $t, s \in [0, T]$ için,

$$|(F_1x)(t) - (F_1x)(s)| = |te^{-2t} - se^{-2s}| \quad (4.2.31)$$

eşitliği geçerlidir. Ayrıca, genelliği bozmadan $x(t) < x(s)$ olduğunu kabul edelim.

Bu durumda; Ortalama Değer Teoreminden,

$$\begin{aligned} |(F_2x)(t) - (F_2x)(s)| &= \left| \sqrt{x^2(t) + 5} - \sqrt{x^2(s) + 5} \right| \\ &\leq \frac{|x(t) - x(s)| 2|\eta|}{2\sqrt{\eta^2 + 5}} \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\eta \in (x(t), x(s))$ sayısı mevcut olduğundan,

$$|(F_2x)(t) - (F_2x)(s)| \leq |x(t) - x(s)| \quad (4.2.32)$$

elde edilir. Açık olarak, (4.2.32) eşitsizliği $x(t) = x(s)$ olması halinde de geçerlidir.

$t \rightarrow te^{-2t}$ fonksiyonu $[0, T]$ kümesi üzerinde düzgün sürekli olup, (4.2.31)' den,

$$\omega_0^\infty(F_1X) = 0 \quad (4.2.33)$$

elde edilir. Diğer taraftan; (4.2.32)' den,

$$\omega_0^\infty(F_2X) \leq \omega_0^\infty(X) \quad (4.2.34)$$

bulunur.

X, B_{r_0} yuvarının boştan farklı ve sınırlı bir alt kümesi olsun. Buna göre, her $x, y \in X$ için,

$$|(F_1x)(t) - (F_1y)(t)| = 0 \quad (4.2.35)$$

olup (4.2.35)' ten,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \text{diam}(F_1X)(t) = 0 \quad (4.2.36)$$

olduğu görülür. (4.2.33) ve (4.2.36) ile,

$$\mu(F_1X) = 0 \quad (4.2.37)$$

olur. Böylece, (4.2.34) ve (4.2.37) ile, (iv) hipotezindeki eşitsizliklerin $p_{r_0} = 1$ ve $q_{r_0} = 0$ sabitleri için sağlandığı anlaşılır.

(v) şartındaki eşitsizlik,

$$\frac{\sqrt{r_0 + 1}}{e} < 1 \quad (4.2.38)$$

olup, $r_0 \in (2.43, 4.32)$ olarak alınan r_0 sayısının, (4.2.30) ve (4.2.38) eşitsizliklerinin bir çözümü olduğu görülebilir.

Genelliği kaybetmeksizin, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ sayılarını $t_1 < t_2$ olacak şekilde seçelim. Bu durumda; Ortalama Değer Teoreminin de kullanılmasıyla, her $s \in \mathbb{R}^+$ ve $|x| \leq r_0$ olan her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} |v(t_1, s, x) - v(t_2, s, x)| &\leq \frac{\sqrt{1+|x|}}{e^{s+1}} \frac{|e^{t_2} - e^{t_1}|}{e^{t_1+t_2}} \\ &\leq \frac{\sqrt{1+|x|}}{e^{s+1}} \frac{|t_2 - t_1| e^\eta}{e^{t_1+t_2}} \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\eta \in (t_1, t_2)$ sayısı mevcut olduğundan,

$$|v(t_1, s, x) - v(t_2, s, x)| \leq \frac{\sqrt{1+r_0}}{e^{s+1}} |t_2 - t_1| \quad (4.2.39)$$

olur. (4.2.39) eşitsizliği, $t_1 = t_2$ iken de sağlanır. Buna göre, $\phi_{r_0}(t) = \sqrt{1+r_0} t$ ve $\tau(s) = 1/e^{s+1}$ alınırsa (vi) hipotezi sağlanır.

Yine genelliği bozmaksızın, $|x| \leq r_0, |y| \leq r_0$ olacak şekildeki x ve y sayılarını, $x < y$ olarak alalım. Böylece, Ortalama Değer Teoreminden, her $s, t \in \mathbb{R}^+$ için,

$$\begin{aligned} |v(t, s, x) - v(t, s, y)| &= \left| \frac{\sqrt{1+|x|}}{e^{t+s+1}} - \frac{\sqrt{1+|y|}}{e^{t+s+1}} \right| \\ &\leq \frac{|x - y|}{2\sqrt{1+|\eta|} e^{t+s+1}} \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\eta \in (x, y)$ sayısı mevcut olduğundan,

$$|v(t, s, x) - v(t, s, y)| \leq \frac{|x - y|}{2e^{s+1}} \quad (4.2.40)$$

elde edilir. Şu hâlde; $\eta_{r_0}(t) = t/2$ ve $\rho(s) = 1/e^{s+1}$ için (vii) şartı sağlanır.

Sonuç olarak; Teorem 4.1.1' in bütün şartları sağlandığından, (4.2.29) integral denklemi $B_{r_0} \subset BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ yuvarında en az bir çözüme sahiptir ve üstelik B_{r_0} yuvarındaki çözümler asimptotik kararlıdır.

Uyarı 4.2.6. (3.2.17) denkleminde,

$$a(t) = te^{-2t}, \quad f(t, x) = \sqrt{x^2 + 5}, \quad v(t, s, x) = \frac{\sqrt{1+|x|}}{e^{t+s+1}}$$

alınırsa (4.2.29) denklemi elde edilir. **Bu denklemin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında bir çözüme sahip olduğu, Örnek 4.2.3' ten bilinmektedir.**

Şimdi, (4.2.29) denkleminin Teorem 3.2.2' nin şartlarını sağlayıp sağlamadığına bakalım:

$a \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ olup, $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$ eşitliği sağlanır.

$t \rightarrow f(t, 0)$ fonksiyonu $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayının bir elemanıdır.

f fonksiyonunun ikinci değişkene göre $c = 1$ sabitiyle Lipschitz şartını sağladığı, (3.2.27)' nin dikkate alınmasıyla görülebilir.

Diğer taraftan; (4.2.40)' tan, her $t, s \in \mathbb{R}^+$ ve her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$|v(t, s, x) - v(t, s, y)| \leq h(t, s)k(|x - y|)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $h : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ve $k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonlarının, $h(t, s) = 1/e^{t+s+1}$ ve $k(x) = x/2$ olarak alınabileceği anlaşılır.

Ayrıca,

$$\|a\| = \frac{1}{2e}, \quad \bar{f} = \sup \{|f(t, 0)| : t \in \mathbb{R}^+\} = \sqrt{5},$$

$$\bar{h} = \sup \left\{ \int_0^\infty h(t, s) ds : t \in \mathbb{R}^+ \right\} = \sup \left\{ \int_0^\infty |v(t, s, 0)| ds : t \in \mathbb{R}^+ \right\} = \bar{v} = \frac{1}{e}$$

olduğu görülebilir.

Sonuç olarak; Teorem 3.2.2' nin (i) – (vi) şartları sağlanır.

Son olarak (vii) hipotezindeki

$$\|a\| + \bar{c} \bar{h} r k(r) + \bar{c} \bar{v} r + \bar{f} \bar{h} k(r) + \bar{f} \bar{v} \leq r$$

eşitsizliği,

$$\frac{r^2 + \sqrt{5}r + 1}{2e} + \frac{r + \sqrt{5}}{e} \leq r \quad (4.2.41)$$

olup, (4.2.41)' in pozitif bir r_0 çözümüne sahip olmadığı görülebilir.

Dolayısıyla, (4.2.29) integral denkleminin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında bir çözüme sahip olduğunu Teorem 3.2.2 aracılığıyla söyleme imkânı yoktur.

Sonuç 4.2.5. Teorem 4.1.1' in uygulanabildiği bir integral denkleme Teorem 3.2.2 uygulanamayabilir.

Uyarı 4.2.7. (4.2.15) denkleminde h fonksiyonunun $h(t) = \frac{t+1}{4t+3}$ olarak alınması halinde, **Teorem 4.1.1' in şartlarının sağlandığı ve böylece, verilen denklemin $B_{r_0} \subset BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ yuvarında en az bir çözüme sahip olduğu gerçeği, Örnek 4.2.2' den bilinmektedir.**

Diğer taraftan; $(F_1x)(t) = \frac{t+1}{4t+3}$ olup, $X \subseteq B_{r_0}$ alt cümlesi boştan farklı, $x \in X$ ve $T > 0$ olmak üzere;

$$\sup\{|(F_1x)(t)| : t \geq T\} = \sup\left\{\left|\frac{t+1}{4t+3}\right| : t \geq T\right\} = \frac{T+1}{4T+3}$$

olacağından, $\beta^\infty(F_1X) = \frac{1}{4}$ olur. Şu hâlde; B_{r_0} yuvarının boş olmayan herhangi bir X alt cümlesi için,

$$\beta^\infty(F_1X) \leq d_1\beta^\infty(X)$$

eşitsizliğini sağlayan ve negatif olmayan bir d_1 sabiti mevcut değildir. Bu nedenle, **Teorem 3.1.1' in (v) hipotezi sağlanmaz. Buna göre, Teorem 3.1.1, (4.2.15) integral denklemine uygulanamaz.**

Uyarı 4.2.8. $t \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere;

$$x(t) = \frac{t \sin x(t)}{3t+9} + \frac{t^2 x^2(t)}{3t^2+2} \int_0^\infty e^{-ts-s} \sqrt{|x(s)|} ds \quad (4.2.42)$$

integral denkleminde;

$$(F_1x)(t) = \frac{t \sin x(t)}{3t+9}, \quad (F_2x)(t) = \frac{t^2 x^2(t)}{3t^2+2}, \quad v(t, s, x) = \frac{\sqrt{|x|}}{e^{ts+s}}$$

olup, her $t, s \in \mathbb{R}^+$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$|v(t, s, x)| = \frac{\sqrt{|x|}}{e^{ts+s}} \quad (4.2.43)$$

olduğundan,

$$|v(t, s, x)| \leq a(t)b(s)\psi(|x|)$$

ve $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$ olacak şekilde bir $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu mevcut değildir.

Buna göre, **Teorem 4.1.1' in (ii) hipotezi sağlanmaz. Bu nedenle, (4.2.42)**

integral denkleminin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında bir çözümünün mevcut olduğunu Teorem 4.1.1 vasıtasıyla söyleme imkânı yoktur.

Diğer taraftan; (4.2.43) eşitliğinde $h(t, s) = 1/e^{ts+s}$ ve $k(x) = \sqrt{x}$ alınrsa,

$$\int_0^\infty h(t, s)ds = \frac{1}{1+t}, \quad H = 1,$$

$$\sup \left\{ \int_T^\infty h(t, s)ds : t \in [0, T] \right\} = \sup \left\{ \frac{1}{(1+t)e^{(t+1)T}} : t \in [0, T] \right\} = \frac{1}{e^T}$$

*olur. Şu hâlde; Teorem 3.1.1' in (ii), (iii) ve (vii) hipotezleri sağlanır. Diğer hipotezlerin sağlandığının gösterilmesi, Örnek 3.2.1' deki gibidir. **Sonuç olarak, Teorem 3.1.1' i kullanarak (4.2.42) integral denkleminin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında en az bir çözümünün olduğunu söyleyebiliriz.***

Uyarı 4.2.9.

$$x(t) = \frac{1}{4e^t} + \frac{e^{-t}(e-1)x^2(t)}{(1+t)^2} \int_0^\infty \frac{x(s)}{(s+e)(s+1)}ds, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (4.2.44)$$

*integral denklemi için, Teorem 4.1.1' in şartlarının sağlandığı ve **bu denklemin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında en az bir çözüme sahip olduğu, Örnek 4.2.2 ile bilinmektedir.***

(4.2.44) denkleminde Teorem 3.1.1' in hipotezlerinin de sağlandığını görelim:

$$(F_1x)(t) = \frac{1}{4e^t}, \quad (F_2x)(t) = \frac{x^2(t)}{1+t}, \quad v(t, s, x) = \frac{e^{-t}(e-1)x}{(t+1)(s+e)(s+1)}$$

için, (i) hipotezinin sağlandığı ve $f_1, f_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonlarının, $f_1(x) = 1/4$ ve $f_2(x) = x^2$ olarak alınabileceği Örnek 4.2.2' den görülebilir.

$v : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir ve her $t, s \in \mathbb{R}^+$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için, $h(t, s) = \frac{e^{-t}(e-1)}{(t+1)(s+e)(s+1)}$ ve $k(x) = x$ olmak üzere;

$$|v(t, s, x)| = h(t, s)k(|x|)$$

olduğundan, (ii) sağlanır.

$$\int_0^\infty h(t, s)ds = \frac{e^{-t}}{t+1} \int_0^\infty \frac{(e-1)ds}{(s+e)(s+1)} = \frac{e^{-t}}{t+1} = l(t)$$

olup, $l : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $l(t) = \frac{e^{-t}}{t+1}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde sınırlıdır. Yani; (iii) sağlanır.

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \int_T^\infty h(t, s) ds : t \in [0, T] \right\} &= \sup \left\{ \frac{1}{e^t(t+1)} \ln \left(\frac{T+e}{T+1} \right) : t \in [0, T] \right\} \\ &= \ln \left(\frac{T+e}{T+1} \right) \end{aligned}$$

olduğundan (vii) sağlanır. $H = 1$ olduğundan,

$$f_1(r) + f_2(r)k(r)H \leq r$$

yani

$$\frac{1}{4} + r^3 \leq r$$

eşitsizliğini sağlayan bir r_0 sayısı, $0.269594 \leq r_0 < \frac{\sqrt{2}}{2}$ olarak alınabilir. Şu hâlde; (iv) sağlanır.

(4.2.20) ve (4.2.21)' den; (v) hipotezindeki c_1 ve c_2 sabitlerinin, $c_1 = 0$ ve $c_2 = 2r_0$ olarak alınabileceği anlaşılır.

$X \subseteq B_{r_0}$ ve $X \neq \emptyset$ olmak üzere; $x \in X$ ve $T > 0$ için,

$$\sup \{ |(F_1 x)(t)| : t \geq T \} = \sup \left\{ \left| \frac{1}{4e^t} \right| : t \geq T \right\} = \frac{1}{4e^T}$$

olacağından, $\beta^\infty(F_1 X) = 0$ ve (3.2.15)' ten de, $\beta^\infty(F_2 X) = 0$ olur. Buna göre, (v) hipotezindeki d_1 ve d_2 sabitlerini, $d_1 = d_2 = 0$ olarak alabiliriz. Şu hâlde; (v) sağlanır.

(vi) hipotezinin karşılık geldiği $2r_0^2 < 1$ eşitsizliğinin sağlandığı açıktır.

Şu hâlde; Teorem 3.1.1' in hipotezlerinin tamamı sağlandığından, (4.2.44) integral denklemi $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında en az bir çözüme sahiptir.

Sonuç 4.2.6. Uyarı 4.2.7, Uyarı 4.2.8 ve Uyarı 4.2.9 ile, bu doktora tez çalışmasında Teorem 3.1.1 ve Teorem 4.1.1 ile verilen varlık teoremlerinden **birinin uygulanıp diğerinin uygulanamadığı denklemler ile her iki teoremin de uygulanabildiği denklemlerin olduğu anlaşılır.**

KAYNAKLAR

- [1] M. Bocher, *An Introduction to the Study of Integral Equations*, Hafner Press, Royal Oak, 1971.
- [2] A. Polyanin and A. Menzhirov, *Handbook of Integral Equations*, Crs Press, New York, 1998.
- [3] H. Hochstadt, *Integral Equations*, Wiley, New York, 1973.
- [4] K. Taşkıran, *Lineer Olmayan Kuadratik Volterra integral Denklemleri*, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Malatya, 2008.
- [5] Ö. F. Temizer, *Volterra integral Denklemleri*, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara, 1987.
- [6] Z. B. Tsalyuk, *Volterra Integral Equations*, **Matematicheskii Analiz**, 15 (1977), 133-198.
- [7] İ. Özdemir, *Konvolüsyon Çekirdekli Volterra integral Denklemleri*, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Malatya, 1998.
- [8] A. M. Wazwaz, *A First Course in Integral Equations*, World Scientific, Singapore, 1997.
- [9] A. M. Wazwaz, *A Reliable Modification of the Adomian Decomposition Method*, **Appl. Math. Comput.**, 102 (1999), 77-86.
- [10] O. Karakurt, *Lineer Olmayan Nonhomojen Kuadratik Volterra integral Denklemleri*, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Malatya, 2009.

- [11] Ü. Çakan, *Lineer Olmayan Bazı İntegral Denklemlerin Çözümlerine İlişkin Varlık Teoremleri*, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Malatya, 2015.
- [12] M. A. Darwish, J. Banaś, E. O. Alzahrani, *The existence and attarctivity of solutions of an Urysohn integral equation on an unbounded interval*, **Abstr. Appl. Anal.** 2013.
- [13] R. P. Agarwal, D. O'Regan, *Fredholm and Volterra integral equations with integrable singularities*, **Hokkaido Math. J.**, 33 (2004), 443-456.
- [14] M. Meehan, D. O'Regan, *Existence theory for nonlinear Fredholm and Volterra integral equations on half-open intervals*, **Nonlinear Anal.**, 35 (1999), 355-387.
- [15] M. Meehan, D. O'Regan, *Positive solutions of singular integral equations*, **J. Integral Equations Appl.**, 12 (2000), 271-280.
- [16] M. Meehan, D. O'Regan, *Positive L^p solutions of Hammerstein integral equations*, **Arch. Math. (Basel)**, 76 (2001), 366-376.
- [17] J. Banaś, M. Paslawska-Poludniak, *Monotonic solutions of Urysohn integral equation on unbounded interval*, **Comput. Math. Appl.**, 47 (2004), 1947-1954.
- [18] J. Banaś, J. R. Martin, *On the solution of a quadratic integral equation of Hammerstein type*, **Math. Comput. Modell.**, 43 (2006), 97-104.
- [19] J. Caballero, D. O' Regan, K. Sadarangani, *On solutions of an integral equation related to traffic flow on unbounded domains*, **Arch. Math. (Basel)**, 82 (2004), 551-563.
- [20] J. Banaś, L. Olszowy, *On solutions of a quadratic Urysohn integral equation on an unbounded interval*, **Dynam. Systems Appl.**, 17 (2008), 255-270.
- [21] L. Olszowy, *On solutions of functional- integral equations of Urysohn type on an unbounded interval*, **Math. Comput. Model.**, 47 (2008), 1125-1133.

- [22] L. Olszowy, *On existence of solutions of a quadratic Urysohn integral equation on an unbounded interval*, **Comment. Math.**, 48 (2008), 103-112.
- [23] L. Olszowy, *Nondecreasing solutions of a quadratic integral equations of Urysohn type on unbounded interval*, **J. Convex Anal.**, 18 (2011), 455-464.
- [24] A. Karoi, H. B. Aouicha, A. Jawahdou, *Existence and numerical solutions of nonlinear quadratic integral equations defined on unbounded intervals*, **Numer. Funct. Anal. Optim.**, 31 (2010), 691-714.
- [25] H. Khosravi, R. Allahyari, A. S. Haghighi, *Existence of solutions of functional integral equations of convolution type using a new construction of a measure of noncompactness on $L^p(\mathbb{R}^+)$* , **Appl. Math. Comput.**, 260 (2015), 140-147.
- [26] S. A. Kılıç, M. Erdem, *Metrik Uzaylar ve Topoloji*, Vipaş A. Ş., Yayın No: 22, Bursa, 1999.
- [27] M. Bayraktar, *Fonksiyonel Analiz*, Korza Yayıncılık Basım San. ve Tic. A.Ş., 5. Baskı, Ankara, 2017.
- [28] J. Banaś, B. Rzepka, *On existence and asymptotic stability of solutions of a nonlinear integral equation*, **J. Math. Anal. Appl.**, 284 (2003), 165-173.
- [29] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley, 1989.
- [30] Y. Soykan, *Metrik Uzaylar ve Topolojisi*, Nobel Yayıncılık, 2012.
- [31] R. Johnsonbaugh and W. E. Pfaffenberger, *Foundations of Mathematical Analysis*, Dover Publications, New York, 2010.
- [32] W. A. Sutherland, *Introduction to Metric and Topological Spaces*, Oxford University Press., 1975.
- [33] R. A. Mimna and E. J. Wingler, *Locally bounded functions*, **Real Analysis Exchange**, Vol. 23, No. 1 (1997), 251-258.

- [34] J. D. Depree, C. Swartz, *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons. Inc., Canada, 1988.
- [35] A. H. Siddiqi, *Applied Functional Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York, 2004.
- [36] M. J. Neely, *Some Background Math. Notes on Limsups, Sets, and Convexity*, Stochastic Network Optimization Notes, University of Southern California, 2008.
- [37] G. McCarty, *An Introduction with Application to Topological Groups*, Dover Publications, 1988.
- [38] Binali Musayev ve Murat Alp, *Fonksiyonel Analiz*, Balcı Yayınları, 2000.
- [39] Ö. Çakar, *Fonksiyonel Analize Giriş*, A.Ü. Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No:13, 2007.
- [40] I. J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press. Cambridge, 1970.
- [41] E. Malkowsky and V. Rakočević, *An introduction into the theory of sequence spaces and measures of noncompactness*, **Zb. Rad. (Beogr.)**, 9:17 (2000), 143-234.
- [42] C. Costara, D. Popa, *Exercises in Functional Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2003.
- [43] V. Hutson, J. Sydney Pym, M. J. Cloud, *Applications of Functional Analysis And Operator Theory*, Academic Press Inc., London, 1980.
- [44] E. W. Cheney, *Analysis for Applied Mathematics*, Springer-Verlag Inc., New York, 2001.
- [45] J. Banaś and K. Sadarangani, *On Some Measures of Noncompactness in the space of Continuous Functions*, **Nonlinear Analysis**, 68 (2008), 377-383.
- [46] M. Mursaleen, Syed M. H. Rizvi and B. Samet, *Measures of Noncompactness and Their Applications*, In: J. Banaś , M. Jleli, M. Mursaleen, B. Samet, C.

- Vetro (eds), *Advances in Nonlinear Analysis via the Concept of Measure of Noncompactness*, Springer, Singapore, 2017.
- [47] I. D. Arandelović, *Measures of noncompactness on uniform spaces*, **Mathematica Moravica**, 2 (1998), 1-8.
 - [48] K. Kuratowski, *Sur les espaces complets*, **Fund. Math.**, 15 (1930), 301-309.
 - [49] M. Furi, A. Vignoli, *On a property of the unit sphere in a linear normed space*, **Bull. Pol. Acad. Sci. Math.**, 18 (1970), 333-334.
 - [50] R. G. Nussbaum, *The radius of the essential spectrum*, **Duke Math. J.**, 38 (1970), 473-478.
 - [51] L. S. Goldenstein, I. T. Gohberg, A. S. Markus, *Investigation of some properties of bounded linear operators with their q -norms*, **Ucen. Zap. Kishinevsk. Univ.**, 29 (1957), 29-36.
 - [52] J. Banaś, M. Mursaleen, *Sequence Spaces and Measures of noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations*, Springer, New Delhi, 2014.
 - [53] V. Istrătescu, *On a measure of noncompactness*, **Bull. Math. Soc. Sci. Math. RSR**, 16(2) (1972), 195-197.
 - [54] T. D. Benavides, *Some properties of the set and ball measures of noncompactness and applications*, **J. London Math. Soc.**, 34(2) (1986), 120-128.
 - [55] J. Daneš, *On the Istrătescu's measure of noncompactness*, **Bull. Math. Soc. Sci. Math. RSR**, 116(4) (1972), 403-406.
 - [56] J. Banaś, K. Goebel; *Measures of noncompactness in Banach space*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Vol. 60, New York: Dekker, (1980).
 - [57] V. Rakočević, *Measures of noncompactness and some applications*, **Filomat (Niš)**, 12:2 (1998), 87-120.

- [58] J. Banaś and R. Nalepa, *On the Space of Functions with Growths Tempered by a Modulus of Continuity and Its Applications*, **Journal of Function Spaces and Applications**, Volume 2013, Article ID 820437, 13 pages.
- [59] J. Banaś, L. Olszowy, *Measures of noncompactness related to monotonicity*, **Comment. Math.**, 41 (2001), 13-23.
- [60] B. C. Dhage, *Local asymptotic attractivity for nonlinear quadratic functional integral equations*, **Nonlinear Anal.**, 70 (2009), 1912-1922.
- [61] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalraumen*, **Studia Math.**, 2 (1930), 171-180.
- [62] A. Aghajani, J. Banaś and N. Sabzali, *Some generalizations of Darbo fixed point theorem and applications*, **Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin**, Vol. 20, 2 (2013), 345-358.
- [63] C. Goffman, G. Pedrick, *First Course in Functional Analysis*, Prentice-Hall. Inc., 1965.
- [64] J. Banaś, J. Caballero, B. Lopez and K. Sadarangani, *Solutions of a functional integral equation in $BC(\mathbb{R}_+)$* , **International Mathematical Forum**, 1, 24 (2006), 1181-1194.
- [65] J. M. Ayerbee Toledano, T. Dominguez Benavides, G. Lopez Acedo, *Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory*, Oper. Theory Adv. Appl., 99, Birkhäuser, Basel, 1997.
- [66] H. Rehman, D. Gopal and P. Kumam, *Generalizations of Darbo's fixed point theorem for new condensing operators with application to a functional integral equation*, **Demonstr. Math.**, 52 (2019), 166-182.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Bekir İLHAN

Doğum Yeri ve Tarihi: Malatya / 10.05.1977

Adres: Beydağı Anadolu Lisesi
Çilesiz Mah. Söğütlü Sok. No: 14
Yeşilyurt / MALATYA

E-Posta: bekirilhan@gmail.com

Lisans: Orta Doğu Teknik Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü (1997-2001)

Yüksek Lisans: İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik A.B.D. (2009-2012)

Mesleki Deneyim: Hekimhan Anadolu İmam Hatip Lisesi (2001-2006)
Turgut Özal Anadolu Lisesi (2006-2008)
Malatya Fen Lisesi (2008-2017)
Beydağı Anadolu Lisesi (2017-...)

Ödüller: Takdir Belgesi (Hekimhan Kaymakamlığı-2005)
Teşekkür Belgesi (Malatya Milli Eğt. Müd.-2009)
Yayın Teşvik Ödülü (Makale (i)-(3), Tübitak-2018)
Yayın Teşvik Ödülü (Makale (i)-(4), Tübitak-2018)

YAYIN LİSTESİ

(i) Makaleler:

- (1) İ. Özdemir, Ü. Çakan and **B. İlhan**, *On the existence of the solutions for some nonlinear Volterra integral equations*, Abstr. Appl. Anal., 2013, Article ID 689234, 5 pages.
- (2) İ. Özdemir, **B. İlhan** and Ü. Çakan, *On the solutions of a class of nonlinear integral equations in the Banach algebra of the continuous functions and some examples*, An. Univ. Vest Timiș. Ser. Mat.-Inform., LII(1), 2014, 121-140.
- (3) **B. İlhan** and İ. Özdemir, *Existence and asymptotic behavior of solutions for some nonlinear integral equations on an unbounded interval*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2016, No. 271, 2016, pp. 1-15.
(Bu yayın doktora tezinden türetilmiştir.)
- (4) İ. Özdemir and **B. İlhan**, *On the existence and uniform attractivity of the solutions of a class of nonlinear integral equations on unbounded interval*, Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. 21, No. 2, 2017, pp. 385-402.
(Bu yayın doktora tezinden türetilmiştir.)

(ii) Bildiriler:

- (1) İ. Özdemir, Ü. Çakan and **B. İlhan**, *On the existence of the solutions for some nonlinear Volterra integral equations*, International Eurasian Conference on Mathematics Sciences and Applications (IECMSA-2013). 26-29 Ağustos 2013, Bosna-Hersek. ((i)-(1) nolu makale).
- (2) İ. Özdemir, **B. İlhan** and Ü. Çakan, *On the solutions of a class of some nonlinear integral equations in the Banach algebra of the continuous functions and some examples*, Karatekin Mathematics Days 2014 (KMD 2014), International Mathematics Symposium. 11-13 Haziran 2014, Çankırı.
((i)-(2) nolu makale).

- (3) **B. İlhan** and İ. Özdemir, *On the existence and asymptotic behavior of the solutions of some nonlinear integral equations on unbounded interval*, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2016), 12-14 Mayıs 2016, Elazığ. ((i)-(3) **nolu makale**).
- (4) İ. Özdemir and **B. İlhan**, *On the existence and uniform attractivity of the solutions of a class of nonlinear integral equations on unbounded interval*, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2016), 12-14 Mayıs 2016, Elazığ. ((i)-(4) **nolu makale**).

