T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK (SOFT) TOPOLOJİK MODÜLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Aslı GÜLER

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İlhan İÇEN

NİSAN 2022

T.C
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK (SOFT) TOPOLOJİK MODÜLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Aslı GÜLER
36183614086

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İlhan İÇEN

NİSAN 2022

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezimin yürütülmesinde bilgi birikimini benden esirgemeyen, değerli görüş ve önerileriyle bana yardımcı olan sayın hocam Prof. Dr. İlhan İÇEN’e sonsuz teşekkürler ederim. Tezimi düzenleme aşamasında bana büyük destek veren sayın hocam Doç. Dr. A. Fatih ÖZCAN’a minnet ve şükranlarımı sunarım. Bu süreçte her daim yanımda olan manevi destekleriyle beni yüreklendiren anneme, abilerime ve kıymetli eşime teşekkürü bir borç bilirim.

ONUR SÖZÜ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum "Esnek (Soft) Topolojik Modüller" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Aslı GÜLER

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\forall$	: Her
$\exists$	: En az
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değil
$=$	: Eşittir
$\neq$	: Eşit değil
Z	: Tam sayılar kümesi
Q	: Rasyonel sayılar kümesi
R	: Reel(gerçel) sayılar kümesi
C	: Kompleks sayılar kümesi
U	: Evrensel küme
E	: Parametreler ailesi
P(U)	: Kuvvet kümesi
e	: Birim eleman
$\subset$	: Alt küme
$\emptyset$	: Boş küme
$\leq$	: Alt grup
$\trianglelefteq$	: Normal alt grup
$\cong$	: İzomorfik grup
(G, $*$)	: Cebirsel yapı
(R,+,.)	: Halka
$<\alpha,\theta>$	: İç çarpım
(F,A)	: Soft küme
M	: Modül
V	: Vektör uzayı

∪	: Birleşim
∩	: Kesişim
f,g	: Dönüşüm
¬E	: Parametrelerin değili
$\widetilde{\subseteq}$	: Soft alt küme
$\sim$	: Soft homomorfizm
$\simeq$	: Soft izomorfizm
$\boldsymbol{\mu_{\alpha}}$	: Soft dönüşüm
$\mathbf{S_n}$	: Permütasyonların grubu
$\mathbf{F^c}$	: F nin soft tümleyen fonksiyonu
$\widetilde{\cap}$	: Soft kümelerde kesişim
$\widetilde{\cup}$	: Soft kümelerde birleşim
$\widetilde{<}$	: Soft alt grup
$\widetilde{\trianglelefteq}$	: Normal soft alt grup
$(\mathbf{G}, \boldsymbol{\tau})$	: Topolojik grup
$(\mathbf{F}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\tau})$	: Soft topolojik grup
$\cap_{\boldsymbol{E}}$	: Genişletilmiş arakesit
$\widetilde{\wedge}$	: And operatörü
$[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})]_{\boldsymbol{G}}$	: F(a) nın kapanışı
$\oplus$	: Direkt toplam operatörü
Supp(F,A)	: (F,A) soft kümesinin destekleyeni
$\sum_{\boldsymbol{i \in I}}(\boldsymbol{G}_{\text{i}}, \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{i}})$	: Alt modüllerin ailesinin toplamı

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Esnek (Soft) Topolojik Modüller

Aslı GÜLER

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

37 + vii sayfa

2022

Danışman: Prof. Dr. İlhan İÇEN

Altı bölümden oluşan bu tezin birinci bölümü Giriş bölümü olarak ele alınarak literatür özeti yapılmıştır.

İkinci bölümde tezin bütünlüğüyle ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde soft küme teorisi tanımlanarak soft küme üzerindeki işlemlere yer verilmiş ve örneklerle pekiştirilmiştir.

Dördüncü, beşinci ve altıncı bölümlerde ise sırasıyla soft gruplar, soft halkalar ve soft modüller incelenerek bunların topolojileri üzerinde durulmuştur.

Sonuç bölümü ile bu tez çalışması tamamlanmıştır.

.

Anahtar Kelimeler: Soft Küme, Soft Grup, Soft Halka, Soft Modül, Soft Topolojik Modül.

ABSTRACT

Master Thesis

Soft Topological Modules

Aslı GÜLER
Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

37 + vii sayfa

2022

Supervisor: Prof. Dr. İlhan İÇEN

The first part of this thesis which consists of six chapters, was taken as the Introduction part and a literatüre summary was made.

In the second part, the basic concepts related to the integrity of the thesis are given.

In the third chapter, the soft set theory is defined and the operations on the soft set are given and reinforced with examples.

In the fourth, fifth and sixth chapters, respectively, soft groups, soft rings and soft modules are examined and their topologies are emphasized.

This thesis study has been completed with the conclusion part.

Keywords: Soft sets, soft groups, soft rings, soft modules, soft topological modules.

1. GİRİŞ

Mühendislikte, tıpta, ekonomide, çevre ve sosyal bilimlerde çoğu problem belirsizliklere sahiptir. Bu tür problemlerin çözümünde klasik yöntemler artık yetersiz kalmaktadır. Bu tür problemlerin çözümü için birçok teori ortaya atılmıştır. Bunlardan bazıları, fuzzy küme teorisi [21], kaba (rough) küme teorisi [22], yakın küme teorisi [25] olarak verilebilir.

Bu teorilerin kendine has zorlukları olduğu belirtilerek yeni bir teori 1999 yılında Molodtsov [7] tarafından ortaya atılmıştır: “Soft küme teorisi”.

Bu tamamen belirsizlik durumları için yeni bir yaklaşım getiriyordu. Bir soft küme evrensel kümenin alt kümelerinin ailesinin parametrize edilmesidir. Bu teorinin pratiğe uygulanmasında bazı kolaylıklar sağlamıştır. Molodtsov’ dan sonra soft kümenin farklı uygulamaları çalışıldı [15,23]. Üstelik, Maji ve arkadaşları [8]’ nın soft küme üzerinde işlemlerin tanımlanmasında önemli katkıları oldu.

Soft küme kavramı üzerinde ilk cebirsel yapı Aktaş ve Çağman [9] tarafından tanımlandı. Burada soft grup kavram ve temel özellikleri verildi.

Shabir ve Ali [18] yarıgrupları kullanarak soft yarı grup, Acar ve arkadaşları [11] da soft halka tanımını verdiler. Atagün ve arkadaşları [17] halkalar üzerinde soft alt halka, soft alt modül kavramlarını literatüre kazandırdılar.

Sun ve arkadaşları [12] da ilk defa soft modül kavramını tanımlayarak bazı özelliklerini verdiler.

Topoloji ve cebirin buluşması ilk defa Nazmul ve Samanta [19] tarafından sağlanmış, soft topolojik grup tanımını vermişlerdir. Daha sonra soft topolojik halka kavramı da Shah ve Shaheen [20] tanımlamıştır.

Soft grupların etkileri, soft grup-grupoidler ve soft çaprazlanmış modül kavramları danışmanım Prof. Dr. İlhan İÇEN’in danışmanlığında Oğuz [24] doktora tezinde verilmiştir. Daha sonra bu kavramlar farklı zamanlarda yayına dönüştürülmüştür.

Bu tezde, Sun ve arkadaşları [12] tarafından tanımlanan soft modül kavramının topoloji versiyonu verilerek bazı temel özellikleri ispatlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin içerisinde kullanılan bazı cebirsel yapılar (grup, halka,modül) tanımlanacak ve örnekleri verilecektir.

2.1 Grup

Tanım 2.1.1. K boştan farklı küme ve $*$, K da ikili işlem olsun. Aşağıda verilen aksiyomları sağlayan (K, $*$) cebirsel yapısına grup denir [1].

- **i.** $\forall x, y, z \in K$ için, $x*(y*z)=(x*y)*z$ dir. (birleşme özelliği)
- **ii.** $\forall x \in K$ için, $x*e=e*x=x$ olacak şekilde $\exists e \in K$ vardır. (birim eleman özelliği)
- **iii.** $\forall x \in K$ için, $x*x^{-1}= x^{-1}*x=e$ olacak şekilde $\exists x^{-1} \in K$ bulunabilir.(ters eleman özelliği)

bu aksiyomlara ek olarak $\forall x, y \in K$ için $x*y=y*x$ (değişme özelliği) şartı sağlanıyorsa (K, $*$) cebirsel yapısına abel grubu denir.

Tanım 2.1.2. K ve L grupları arasında $\varphi: K \to L$ dönüşümü $\forall x, y \in K$ için $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ koşulunu sağlıyor ise bu dönüşüm grup homomorfizmi olarak adlandırılır. Birebir ve örten olan φ grup homomorfizmine bir izomorfizm, K ve L gruplarına da izomorfik gruplar adı verilir ve $K \cong L$ şeklinde gösterilir [26].

Örnek 2.1.1. M bir abel grubu olmak üzere, M' den M' ye tanımlanan grup homomorfizmlerin kümesi M' deki toplam işlemine göre bir grup olur. Gerçekten,

$$\mathrm{Hom(M)} = \{f | f: M \to M \text{ homomorfizm}\}$$

$\forall f, g \in \mathrm{Hom(M)}$, $m \in M$ için

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m)$$

işlemiyle Hom(M) bir abel grup olur.

Bu ifadenin abel grubu olduğunu gösterelim:

i.
$$\begin{aligned} ((f + g) + h)(m) &= (f + g)(m) + h(m) \\ &= f(m) + g(m) + h(m) \\ &= f(m) + (g(m) + h(m)) \\ &= f(m) + (g + h)(m) \\ &= (f + (g + h))(m) \quad \text{(birleşme özelliği)} \end{aligned}$$

ii. $(I + f)(m) = I(m) + f(m)$

$$I: M \to M$$

$$m \to I(m) = 0$$

$$(I + f)(m) = I(m) + f(m) = 0 + f(m)$$

$(f + I)(m) = f(m)$ (birim eleman özelliği)

iii. $(f + g)(m) = I(m) = 0$

$$f(m) + g(m) = 0$$

$f(m) = -g(m)$ (ters eleman özelliği)

iv. $f(m) + g(m) = g(m) + f(m)$ olduğundan değişme özelliği de sağlanır.

2.2 Halka

Tanım 2.2.1. $S \neq \emptyset$ kümesinde tanımlı ikili işlemler "+" ve "." olsun. Aşağıda verilen şartları sağlayan (S,+,.) yapısına **halka** denir [1,2].

- **i.** (S,+) değişmeli grup,
- **ii.** "." işlemi S üzerinde birleşme özelliğini sağlar,
- **iii.** "." işlemi "+" işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliklerini sağlar,

Yani

$$\forall x,y,z \in S \text{ için } x(y+z)=xy+xz \text{ ve } (x+y)z=xz+yz \text{ dir.}$$

Örnek 2.2.1. Daha önce Örnek 2.1.1. de Hom(M)' nin bir abel grubu olduğunu göstermiştik. Şimdi aynı küme üzerinde ikinci bir işlem olarak fonksiyonların bileşke işlemini uygulayalım. $\forall f, g \in \mathrm{Hom(M)}$ için $f \circ g \in \mathrm{Hom(M)}$ olur " $\circ$ " işlemi birleşme özelliğini sağlar. (Yani $\forall f, g, h \in \mathrm{Hom(M)}$ için $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ olur.) Şimdi " $\circ$ " işleminin "+" üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliğini sağladığını gösterelim.

$f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$ ve $(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$ olduğunu göstermeliyiz.

$$(f \circ (g+h))(m) = f \circ \big(g(m)+h(m)\big) = (f \circ g)(m) + (f \circ h)(m) = (f \circ g + f \circ h)(m)$$

$$\big((g+h) \circ f\big)(m) = (g \circ f)(m) + (h \circ f)(m) = \big((g \circ f) + (h \circ f)\big)(m) \text{ dir.}$$

Böylelikle Hom(M) bir halkadır.

Tanım 2.2.2. S halka ve $\emptyset \neq I \subset S$ olarak verilsin.

- **i.** $\forall x,y \in I$ için $x-y \in I$ ve
- **ii.** $\forall x \in I$ ve $\forall s \in S$ için $sx \in I$(sol ideal) veya $xs \in I$(sağ ideal) ise

I'ya S nin sol (veya **sağ**) ideali denir. Hem sol, hem de sağ bir ideale **iki taraflı ideal** veya kısaca **ideal** denir [4].

Tanım 2.2.3. S ve T iki halka olmak üzere $h: S \rightarrow T$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in S$ için

- **i.** $h(x+y) = h(x) + h(y)$
- **ii.** $h(xy) = h(x).h(y)$

oluyorsa, bu durumda h ye bir halka homomorfizması denir. $h: S \to T$ bir halka homomorfizması olmak üzere eğer, h birebir ise h ye bir monomorfizma, h örten ise h ye bir epimorfizma, h hem birebir hem de örten ise bu durumda h ye izomorfizma ve S ile T halkalarına da izomorf halkalar denir ve $S \cong T$ ile gösterilir.

2.3 Modül

Tanım 2.3.1. R halka ve M bir abel grubu olsun. $\forall m, m_1, m_2 \in M$ ve $\forall r, r_1, r_2 \in R$ için

$$R \times M \to M$$
$$(r, m) \to rm$$

işlemi ile

$$r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$$
$$(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$$
$$(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m)$$

şartlarını sağlayan, bir M abel gruba **sol R-modül** denir. Çarpım

$$M \times R \to M$$
$$(m, r) \to mr$$

şeklinde sağdan tanımlıysa M **sağ R-modül** yapısı oluşturur [3].

Örnek 2.3.1. M abel grubu olmak üzere M' den M' ye giden homomorfizmalar kümesinin (Hom(M)'nin) bir halka olduğunu Örnek 2.2.1. de göstermiştik. M'nin bir Hom(M)-modül olduğunu gösterelim. İşlem olarak, $f \in \mathrm{Hom}(M)$, $m \in M$ için

$$\cdot : Hom(M) \times M \to M$$
$$(f, m) \to f \cdot m = f(m)$$

olarak tanımlayalım. Açıkça $f, g \in \mathrm{Hom}(M)$ ve $m, n \in M$ olmak üzere, f homomofizm olduğundan

$$f \cdot (m + n) = f(m + n) = f(m) + f(n) = f \cdot m + f \cdot n$$

olduğu görülür. Hom(M) nin abel grubu yapısından

$$(f+g)\cdot m=(f+g)(m)=f(m)+g(m)=f\cdot m+g\cdot m$$

elde edilir ve

$$(f\cdot g)\cdot m=(f\cdot g)(m)=f\big(g(m)\big)=f\cdot(g\cdot m)\quad \text{dir.}$$

Böylece M bir Hom(M) modüldür.

Örnek 2.3.2. R halka olmak şartıyla, herhangi bir M abelyan grubu r∈R, m∈M için

$$\mathrm{R}\times\mathrm{M}\to\mathrm{M}$$

$$(\mathrm{r},\mathrm{m})\to\mathrm{rm}=0$$

tanımı ile R-modül yapısı meydana gelir[3].

Tanım 2.3.2. R ve S iki halka olsun. Bir M abelyan grubu hem sol R-modül hem de sağ S-modül ve her r∈R, m∈M ve s∈S için

$$\mathrm{r}(\mathrm{ms})=(\mathrm{rm})\mathrm{s}$$

özelliklerini sağlıyorsa M ye **(R-S)-bimodül** denir ve ${}_{R}M_{S}$ şeklinde gösterilir[5].

Tanım 2.3.3. R birimli halka, M, R-modül olmak üzere, her m∈M için

$$1_{\mathrm{R}}\mathrm{m}=\mathrm{m}$$

ise M ye **birimli R-modül** denir[5].

Önerme 2.3.1. $f: R\to S$ halka homomorfizmi ve M, S-modül olsun. Buna göre M bir R-modüldür.

İspat: Bir $R\times M\to M$ skaler çarpımın tanımlanmasını ve modül aksiyomlarını sağladığını göstermemiz yeterlidir.

$r\in R$ ve $m\in M$ alalım;

$$r\cdot m=f(r)\cdot m$$

şeklinde tanımlanan skaler çarpımın modül aksiyomlarını sağladığı kolayca görülür.

Tanım 2.3.4. R halka, M sol (sağ) R-modül ve Ø≠N⊆M olsun. Bu durumda $\forall \mathrm{n}_1,\mathrm{n}_1'\in\mathrm{N}$ ve $\forall \mathrm{r},\mathrm{r}'\in\mathrm{R}$ için;

$$\mathrm{n}_1\mathrm{r}+\mathrm{n}_1'\mathrm{r}'\in\mathrm{N}\ (\mathrm{rn}_1+\mathrm{r}'\mathrm{n}_1'\in\mathrm{N}\ \text{sağ modül için})$$

şartı sağlanıyorsa N' ye M' nin **alt modülü** denir[13,14].

Tanım 2.3.5. M bir R-modül olmak üzere iki doğal alt modülü vardır. Bunlar; aşikar alt modül $\{0\} \leq M$ ve total alt modül $M \leq M$ dir.

Önerme 2.3.2. Eğer M, R-modül ve $N_1, N_2 \leq M$ M' nin R-alt modülleri ise $N_1 \cap N_2$ kesişimi de M'nin R-alt modülüdür. Daha genel olarak M'nin alt modüllerin $\{N_i\}$ ailesinin kesişimi $\cap N_i$, M' nin alt modülüdür.

Önerme 2.3.3. M, R-modül ve $N_1, N_2 \leq M$ alt modüller olsun.

$$N_1 + N_2 = \{n_1 + n_2 | n_1 \in N_1 \, , \, n_2 \in N_2\}$$

toplamı M'nin bir R- alt modülüdür. Daha genel olarak$N_i \leq M,\ i = 1, \dots, n$ alt modüller ise $\sum_{i=1}^{n} N_i \leq M$' nin bir alt modülüdür.

Tanım 2.3.6. M, R-modül olsun. Bir $m \in M$ için

$$R\, m = \{r \cdot m | r \in R\}$$

kümesi M'nin bir R- alt modülüdür. Bu alt modüle m ile üretilen M'nin dairesel alt modülü denir. Bu m' yi içeren M' nin en küçük alt modülüdür.

Eğer $M = R\, m$ ise M' ye dairesel modül denir.

Tanım 2.3.7. M ve N iki R-modül olsun.

$$f: M \to N$$

fonksiyonu, her x,y∈M ve r∈R için,

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(rx) = rf(x)$$

şartlarını sağlıyor ise f : M→N ye **R-modül homomorfizmi** denir[4].

Önerme 2.3.4. M bir R-modül ve $r \in R$ olsun. Bu durumda;

$$M \to M, \;\; m \to r \cdot m$$

ile tanımlanan doğal dönüşüm bir R-modül homomorfizmdir.

Tanım 2.3.8. $f: M \to N$, R-modül homomorfizmi olsun. f nin çekirdeği;

$$Ker\ f = \{m \in M / f(m) = 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç: Ker f, M'nin bir R-altmodülüdür.

Aynı şekilde f'nin görüntü kümesi;

$$Imf = \{f(m)/m \in M\}$$

N' nin bir R-altmodülüdür.

Tanım 2.3.9. M, R-modül, $N \leq M$ bir R-altmodül olsun.

$$M/_N = \{\overline{m} = m + N | m \in M\}$$

kümesi

$$(m + N) + (n + N) = (m + n) + N$$

işlemiyle bir değişimli grup tanımlar. $r \in R$ ve $m + N \in M/_N$ için $R \times M/_N \to M/_N$

$$r.(m + N) = r.m + N$$

işlemiyle $M/_N$ bir R-modül olur. Bu modüle bölüm modülü denir.

Örnek 2.3.3. M bir R-modül, $N \leq M$ altmodül olmak üzere

$$\pi: M \to M/_N \qquad \alpha\, m \to m + N$$

kanonik dönüşümü tanımlanır. π bir modül homomorfizmdir. Ker π=N ve Im π= $M/_R$, yani π bir epimorfizm olur.

Teorem 2.3.1. (İzomorfizm Teoremi) M,N birer R-modül ve $\delta: M \to N$ bir modül homomorfizmi ise o zaman

$$m/_{Kerf} \cong Imf$$

izomorfizmdir.

Tanım 2.3.10. M, R-modül ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ olsun. X' in sıfırlayanı (annihilator)

$$ann(X) = \{r \in R | r.x = 0, x \in X\}$$

kümesidir.

Önerme 2.3.5. Bir M R-modülü ve $X \subseteq M$ için ann(X), R'nin bir idealidir.

Hatırlatma: Eğer $Rm \leq M$, M'nin dairesel altmodülü ve $f: R \to Rm \quad f(r) = rm$ ise o zaman $Kerf = ann(m)$ olur. Diğer bir ifadeyle

$$Rm \cong {}^{R}/_{ann(m)}$$

Önerme 2.3.6. M bir R-modül ve $X \subseteq M$ için

$$ann(X) = \bigcap_{x \in X} ann(x)$$

dir.

2.4 Vektör Uzayı

Tanım 2.4.1. Birimli ve değişimli bir halkada sıfırdan farklı tüm elemanların çarpmaya göre tersi var ise halkaya bir **cisim** denir[6].

Tanım 2.4.2. (V,+) bir değişimli grup ve (K,+,.) bir cisim olsun.

$$\mathrm{K} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}$$
$$(\mathrm{a}, \alpha) \to \mathrm{a}\alpha$$

fonksiyonu var ve bu fonksiyon aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa V ye K üzerinde **vektör uzayı** denir[4].

- **i.** $\forall a,b \in K$ ve $\alpha \in V$ için $(ab)\alpha = a(b\alpha)$
- **ii.** $\forall a,b \in K$ ve $\alpha \in V$ için $(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha$
- **iii.** $\forall a \in K$ ve $\alpha,\beta \in V$ için $a(\alpha+\beta) = a\alpha + a\beta$
- **iv.** K nın birim elemanı 1 ise $1\alpha = \alpha$

Tanım 2.4.3. Bir M kümesi bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı ise

$$\mathrm{M} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$$
$$(\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2) \to \mathrm{m}_1\mathrm{m}_2$$

çarpma işlemi de $m_1,m_2,m_3 \in M$ ve $k \in K$ olmak üzere

- **i.** $m_1(m_2+m_3) = m_1m_2+m_1m_3$
- **ii.** $(m_1m_2)m_3 = m_1(m_2m_3)$

iii. $(km_1)m_2 = m_1(km_2) = k(m_1m_2)$

özelliklerini sağlıyorsa M kümesine K cismi üzerinde bir **cebir**dir denir [4].

Ayrıca M değişimli k-cebiri aşağıdaki aksiyomları sağlayan

$$M \times M \to M$$
$$(m_1, m_2) \to m_1m_2$$

bilineer dönüşümü ile bir K-modüldür.

$\forall m_1, m_2 \in M$ ve $k \in K$ için

i. $m_1m_2 = m_2m_1$

ii. $(m_1m_2)k = m_1(m_2k)$

Örnek 2.4.1. Her değişimli A halkası, bir A cebiri olarak düşünülebilir.

Örnek 2.4.2. R cismi kendisi üzerinde birimli ve değişimli bir cebirdir.

Tanım 2.4.4. U ve V, K cismi üzerinde iki cebir olsun. U dan V ye f: U→ V dönüşümü her $u, v \in U$ ve $k \in K$ için

i. $f(u+v)=f(u)+f(v)$

ii. $f(uv)=f(u).f(v)$

iii. $f(1_u)=1_v$

iv. $f(ku)=k.f(u)$

şartlarını sağlıyorsa f dönüşümüne **cebir morfizmi** denir[4].

3. SOFT (ESNEK) KÜMELER

3.1 Soft Kümeler

Bu bölümde, Molodtsov [7] tarafından tanımlanan soft küme kavramı ve bazı örnekleri ve Maji ve arkadaşları [15] tarafından tanımlanan soft kümeler üzerindeki işlemlere yer verilecektir.

U evrensel küme, E parametreler kümesi ve P(U), U'nun kuvvet kümesi olsun.

Tanım 3.1.1. $A \subset E$ ve $F: A \to P(U)$ dönüşümüyle birlikte (F,A) ikilisine U kümesinde **soft küme** denir[7].

Bu tanımdan hareketle soft küme için şunu söyleyebiliriz. Bir U kümesinde soft küme, U evrensel kümesinin alt kümelerinin A parametresiyle parametrelenmiş ailesidir. Bazen U üzerinde tanımlı (F,A) soft kümesi (F,A,U) şeklinde gösterilir.

Örnek 3.1.1. U kumaşların kümesi, E parametrelerin kümesi olarak verilsin. E=$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ ve U=$\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ olmak üzere, (F,E) soft kümesini alalım.

$$F: E \to P(U),$$

$e_1 = \text{saten}$, $e_2 = \text{pahalı}$, $e_3 = \text{ipek}$, $e_4 = \text{pamuklu}$, $e_5 = \text{ucuz}$

Buradan

F(e_1)=$\{h_1, h_3, h_4\}$

F(e_2)=$\{h_1, h_2, h_3, h_4\}$

F(e_3)= $\{h_2\}$

F(e_4)=$\{h_5, h_6\}$

F(e_5)=$\emptyset$ olmak üzere,

(F,E)={(saten kumaş, $\{h_1, h_3, h_4\}$), (pahalı kumaş,$\{h_1, h_2, h_3, h_4\}$), (ipek kumaş, $\{h_2\}$), (pamuklu kumaş, $\{h_5, h_6\}$), (ucuz kumaş, $\emptyset$)}

olarak soft kümedir.

Tanım 3.1.2. (H,A) ve (K,B), U evrenselinde iki soft küme olarak verilsin.

Eğer;

i. $A \subset B$

ii. $\forall x \in A$ için H(x) ve K(x) özdeş küme

koşulları sağlanıyor ise (H,A) ya (K,B) nin **soft alt kümesi** denir. (H,A) $\tilde{\subseteq}$ (K,B) şeklinde ifade edilir[8].

Örnek 3.1.2. A=$\{e_1, e_4, e_6\} \subset E$ ve B=$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} \subset E$ olsun. Görülür ki $A \subset B$ dir.

(H,A) ile (K,B), U=$\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrenselinde iki soft küme olsun.

$K(e_1)=\{h_1, h_3\}$, $K(e_2) = \emptyset$, $K(e_3) =\{h_2, h_4, h_5\}$, $K(e_4) =\{h_5, h_6\}$, $K(e_5) =\{h_2\}$, $K(e_6) = \{h_1, h_4, h_6\}$ ve

$H(e_1)=\{h_1, h_3\}$, $H(e_4) =\{h_5, h_6\}$, $H(e_6) =\{h_1, h_4, h_6\}$ olsun. Buradan (H,A) $\tilde{\subseteq}$ (K,B) dir[8].

Tanım 3.1.3. (H,A) ve (K,B) , U evrensel kümesi üzerinde iki soft küme olsun. Eğer (H,A) $\tilde{\subseteq}$ (K,B) ve (K,B) $\tilde{\subseteq}$ (H,A) ise (H,A) ve (K,B) kümeleri **soft denktir** denir[8].

Tanım 3.1.4. E=$\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ parametreler kümesi olarak verilsin. **E 'nin değili** $\neg E$ ile şeklinde gösterilir ve $\neg E=\{\neg e_1, \neg e_2, \neg e_3, \dots, \neg e_n\}$ olarak tanımlanır. Burada $\forall i \in A$ için $\neg e_i$= değil e_i şeklinde okunur[8].

Örnek 3.1.3. Örnek 3.1.1. ele alınırsa;

$\neg$E={saten değil, pahalı değil, ipek değil, pamuklu değil, ucuz değil}

olur[8].

Tanım 3.1.5. (H,A), U evrenselinde soft küme olarak verilsin. (H,A) soft kümesinin **tümleyeni** $(H, A)^c$ ile ifade edilir ve $(H, A)^c = (H^c, \neg A)$ olmak üzere $H^c: \neg A \rightarrow P(U)$ fonksiyonu $\forall x \in \neg A$ için $H^c(x)= U-H(x)$ ile tanımlanır[8].

Örnek 3.1.4. Örnek 3.1.1. ele alınırsa;

$$(F,E)^c = (F^c, \neg E) = \begin{Bmatrix} saten\ olmayan\ kumaşlar = \{h_2, h_5, h_6\} \\ pahalı\ olmayan\ kumaşlar = \{h_5, , h_6\} \\ ipek\ olmayan\ kumaşlar = \{h_1, h_3, h_4, h_5, h_6\} \\ pamuklu\ olmayan\ kumaşlar = \{h_1, h_2, h_3, h_4\} \\ ucuz\ olmayan\ kumaşlar = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\} \end{Bmatrix}$$

Tanım 3.1.6. (H,A), U evrenselinde soft küme olarak verilsin. Eğer ∀e ∈ A için H(e)=Ø ise (H,A) soft kümesine **boş soft küme** denir ve Φile gösterilir[8].

Örnek 3.1.5. U mavi kumaşların kümesi, A parametreler kümesi olsun. U=$\{\mathrm{h_1, h_2, h_3, h_4}\}$ ve A={pembe,beyaz,siyah} olarak verilsin.

(F,A) soft kümesi kumaşların rengini tanımlamak üzere,
F(pembe)= pembe renkli kumaşlar
F(beyaz)= beyaz renkli kumaşlar
F(siyah)= siyah renkli kumaşlar
Burada (F,A)={pembe renkli kumaşlar=Ø, beyaz renkli kumaşlar=Ø, siyah renkli kumaşlar=Ø } olur. Böylece (F,A) boş soft kümedir[8].

3.2 Soft Küme Üzerinde İşlemler

Tanım 3.2.1. U evrenseli üzerinde (H.A) ve (K,B) soft kümeler olmak üzere bu soft kümelerin birleşimi bir (G,C) soft kümesidir öyle ki C=A∪B ve ∀α ∈ C için

$$G(\alpha) = \begin{Bmatrix} H(\alpha), & \alpha \in A - B \\ K(\alpha), & \alpha \in B - A \\ H(\alpha) \cap K(\alpha), & \alpha \in A \cap B \end{Bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır ve (H,A) $\tilde{\cup}$ (K,B)= (G,C) olarak ifade edilir[8].

Tanım 3.2.2. U evrensel kümesi üzerindeki (H,A) ve (K,B) soft kümelerinin kesişimi (G,C) soft kümesidir öyle ki C=A∩B ve ∀α ∈ C için G(α)= H(α) ∩ K(α) şeklinde tanımlıdır ve (H,A) $\tilde{\cap}$ (K,B)= (G,C) olarak ifade edilir[8].

Örnek 3.2.1. (H,A) soft kümelerdeki kumaşların fiyat bilgileri ve (K,B) soft kümelerdeki kumaşların türleri olarak kullanılsın.

U={$h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}$}

A={çok pahalı, pahalı, ucuz} ve B={saten,ipek,pahalı} kabul edelim.

H(çok pahalı)= $\{h_5, h_7, h_8, h_9\}$ K(saten)= $\{h_1, h_2, h_5, h_6, h_7\}$

H(pahalı)= $\{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ K(ipek)= $\{h_3, h_8, h_{10}\}$

H(ucuz)= $\emptyset$ K(pahalı)= $\{h_1, h_2, h_3, h_4\}$

olsun. Buradan;

(H,A) $\tilde{\cup}$ (K,B)= (G,C) olur ki, burada

G(çok pahalı, saten)= $\{h_1, h_2, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9\}$

G(çok pahalı, ipek)= $\{h_3, h_5, h_7, h_8, h_{10}\}$

G(çok pahalı, pahalı)= $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_7, h_8, h_9\}$

G(pahalı, saten)= $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7\}$

$\vdots$

örnekleri verilebilir.

(H,A) $\tilde{\cap}$ (K,B)= (N,D)

N(çok pahalı, saten)= $\{h_5, h_7\}$

N(çok pahalı, ipek)= $\{h_8\}$

N(çok pahalı, pahalı)=Ø

N(pahalı, saten)= $\{h_1, h_2\}$

$\vdots$

örnekleri verilebilir[8].

4. SOFT (ESNEK) GRUPLAR

Bu bölümde Aktas and Cagman [9]tarafından verilen soft grup kavramı ele alınarak bazı özellikleri incelenecek ve soft gruplarla ilgili temel karakterizasyonlar incelenecektir.

Bu bölüm boyunca evrensel küme olarak G grubu alınmış olup, A da boştan farklı küme kabul edilecektir.

4.1 Soft Gruplar

Tanım 4.1.1. (H,A) çifti G de soft küme olarak verilsin. Eğer $\forall\alpha \in A$ için $H(\alpha) \leq G$ ise (H,A)' ya G de bir **soft grup** denir[9].

Genelleştirilse (H,A) soft grubu G grubunun alt gruplarının parametrelendirilmiş ailesi olarak ifade edilebilir. Ayrıca , G grubundaki (H,A) soft grubu bazen (G,H,A) ifade edilecektir.

Örnek 4.1.1. (F,A) bir M abel grubunda soft grup olarak verilsin. O halde $\forall\alpha \in A$ için $F(\alpha) \leq M$ abel grubu

$$Hom_\alpha(F(\alpha)) = \{f / f : F(\alpha) \to F(\alpha)\ homomorfizm\}$$

bir grup olur.

$$F' : A \to P\big(Hom(M)\big)$$
$$\alpha \to F'(\alpha) = Hom_\alpha(F(\alpha))$$

şeklinde tanımlandığında

(F', A) , Hom(M) grubu üzerinde bir soft abel grubu yapısı oluşturur.

Önerme 4.1.1. G de (F,A) ile (K,A) soft gruplarının kesişimi olan $(F, A)\ \tilde{\cap}\ (K, A)$ da G de soft gruptur[9].

Önerme 4.1.2. (F,A) ile (K,B) ikilisi G de soft grup olsunlar. Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise bunların birleşimi olan $(F, A)\ \tilde{\cup}\ (K, B)$ de G de soft gruptur[9].

Tanım 4.1.2. [9] (F,A) çifti G de soft grup olsun. Buna göre,

i. G'nin birimi e olmak üzere $\forall\alpha \in A$ için $F(\alpha) = \{e\}$ ise (F,A)' ya G de **birim soft grup** denir.

ii. $\forall\alpha \in A$ için $F(\alpha) = G$ ise (F,A)' ya G de **mutlak soft grup** denir.

Önerme 4.1.3.

i. (H,A) ikilisi G de soft grup ve $f: G \to K$ homomorfizm olsun. $\forall\alpha \in A$ için $H(\alpha) = Ker\ f$ ise $(f(H), A)$ ikilisi K da birim soft gruptur.

ii. G de (H,A) mutlak soft grup ve $f: G \to K$ homomorfizm olmak şartıyla $(f(H), A)$ da K da mutlak soft gruptur[9].

Tanım 4.1.3. (H,A) ile (K,B) çiftleri G de soft grup olarak verilsin. Eğer

i. $B \subset A\ ve$

ii. $\forall\alpha \in B\ için\ K(\alpha) \leq H(\alpha)$

şartları sağlanıyor ise (K,B)' ye (H,A) soft grubunun **soft alt grubu** denir ve $(K, B) \tilde{<} (H, A)$ şeklinde gösterilir[9].

Tanım 4.1.4. G de (F,A) soft grup ve $(H, B) \tilde{<} (F, A)$ olsun. Eğer $\forall\alpha \in B$ için $H(\alpha)$ grubu $F(\alpha)$' nın normal alt grubu yani $H(\alpha) \trianglelefteq F(\alpha)$ ise $(H, B)'\,ye\ (F, A)'\,nın$ bir **normal soft alt grubu** denir ve $(H, B) \tilde{\triangleleft} (F, A)$ şeklinde ifade edilir[9].

Önerme 4.1.4. G de (F,A) ile (H,B) soft grup ve $(F, A) \tilde{<} (H, B)$ olsun. Buna göre, $f: G \longrightarrow K$ homomorfizm ise $(f(F), A)\ ve\ (f(H), B)$ ikilisi K da birer soft grup olur ve$(f(F), A) \tilde{<} (f(H), B)$ dir[9].

Tanım 4.1.5. (F,A) ve (H,B) sırası ile G ve K da birer soft grup olmak şartıyla $f: G \to K\ ve\ g: A \to B$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

i. f örten homomorfizm,

ii. g örten fonksiyon ve

iii. $\forall\alpha \in A\ için\ f\big(F(\alpha)\big) = H(g(\alpha))$

şartları sağlanıyor ise (f,g) ye **soft homomorfizm** denir. Buradan, (F,A) ve (H,B) **soft homomorfik** olarak isimlendirilir ve $(F, A) \sim (H, B)$ olarak ifade edilir.

Burada, f izomorfizm, g birebir ve örten fonksiyon olarak alınır ise (f,g) ye **soft izomorfizm** denir ve (F,A) ile (H,B) **soft izomorfik** olarak isimlendirilerek $(F,A) \simeq (H,B)$ şeklinde gösterilir[9].

Tanım 4.1.6. (H,A) ile (N,B) sırası ile G ve K da soft grup olarak verilsin. (H,A) ile (N,B) soft gruplarının çarpımı $\forall(\alpha,\beta) \in A \times B$ için

$$U(\alpha,\beta) = H(\alpha) \times N(\beta)$$

olmak üzere $(H,A) \times (N,B) = (U, A \times B)$ şeklinde tanımlıdır[9].

Önerme 4.1.5. (H,A) ile (N,B) sırası ile G ve K da soft grup olmak şartıyla bu soft grupların çarpımı olan $(H,A) \times (N,B)$ de $G \times K$ da soft gruptur[9].

4.2 SOFT TOPOLOJİK GRUP

Bu kısımda, Nazmul ve Samanta [19] tarafından tanımlanan soft grubun topolojik versiyonu topolojik soft grup kavramı verilecektir.

Bu bölümde, G grup ve (G,τ) bir topolojik grubu belirtir. Aşağıdaki tanımla başlıyoruz.

Tanım 4.2.1. τ, G grubu üzerinde bir topoloji olsun. (F,A), G üzerinde tanımlanan boştan farklı bir soft küme olsun. O zaman aşağıdaki şartları sağlayan (F,A,τ) üçlüsüne G üzerinde **soft topolojik grup** denir.

i. ∀a $\in A$ için F(a), G'nin bir alt grubudur.

ii. ∀a $\in A$ için F(a) × F(a) topolojik uzayının F(a) üzerine dönüşümü $(x,y) \to x - y$ için süreklidir.

Komşuluk terimleriyle tanım 4.2.1. de (ii) şartı herhangi $x, y \in F(a)$ ve $x - y$ nin keyfi N komşuluğu için sırasıyla x ve y elemanlarının N_1 ve N_2 komşulukları vardır öyleki $N_1, N_2 \subset N$ dir[10].

Teorem 4.2.1. Bir topolojik grup üzerindeki (indiskret) her soft grup bir soft topolojik gruptur[10].

Teorem 4.2.2. (F,A,τ) ve (K,B,τ), G üzerinde soft topolojik grup olsun[10].

i. $(F,A,\tau) \tilde{\sqcap} (K,B,\tau)$ arakesiti G üzerinde boştan farklı bir topolojik gruptur.

ii. $(F, A, \tau) \cap_E (K, B, \tau)$ genişletilmiş arakesiti G de soft topolojik gruptur.

Teorem 4.2.3. (F, A, τ) ve (K, B, τ), R üzerinde soft topolojik grup olsun. Burada τ, G üzerinde bir topolojidir ve aşağıdakiler sağlanır[10].

i. $(F, A, \tau) \wedge (K, B, \tau)$, boştan farklıysa G üzerinde bir soft topolojik gruptur.

ii. Eğer A ve B ayrıksa, o zaman $(F, A, \tau)\ \tilde{\cup}\ (K, B, \tau)$, G üzerinde topolojik gruptur.

Tanım 4.2.2. (F, A, τ), G de soft topolojik grup olsun. Eğer F(a)={0} veya F(a)=G ise (F, A, τ) ya soft topolojik aşikar grup denir[10].

Tanım 4.2.3. (F, A, τ), G de soft topolojik grup olsun. O zaman (K, B, τ), (F, A, τ)'nun bir soft topolojik alt grubu (normal alt grup) dur. Eğer

i. $B \subset A$ ve K(b), $\forall b \in sup(K, B)$ için F(b) nin alt grubudur.(normal alt grup)

ii. $\forall b \in sup(K, B)$ için $K(b) \times K(b)$ topolojik uzayının K(b) üzerine dönüşümü $(x, y) \to x - y$ için süreklidir.

Tanım 4.2.4. (F, A, τ) ve (K, B, τ') sırasıyla G ve G' üzerinde soft topolojik grup olsun. Burada τ ve τ', sırasıyla G ve G' üzerinde tanımlanan topolojilerdir.$f: G \to G'\ ve\ g: A \to B$ iki dönüşüm olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan (f,g) çiftine soft topolojik grup homomorfizması denir.

i. f, bir grup epimorfizmi ve g örten fonksiyondur.

ii. $f\big(F(a)\big) = K\big(g(a)\big)$

iii. $f_a: (F(a), \tau_{F(a)}) \to$(K(g(a)),$\tau'_{K(g(a))}$) süreklidir.

O zaman (F, A, τ) nun topolojik olarak (K, B, τ') ye homomorfik olduğu söylenir ve $(F, A, \tau) \sim (K, B, \tau')$ şeklinde ifade edilir.

Eğer f bir grup izomorfizmi, g birebir ve örten ve f_a sürekli ve açıksa, o zaman (f,g) çiftine soft topolojik grup izomorfizmi denir.

Bu durumda (F, A, τ), (K, B, τ') ye soft topolojik izomorfiktir ve $(F, A, \tau) \simeq (K, B, \tau')$ şeklinde gösterilir[10].

Örnek 4.2.1. (F,A) ile (K,B) sırası ile G ve G' de iki soft homomorfik grup olsun. O zaman (F,A) soft topolojik homomorfiktir ve (K,B) ye diskret veya indiskret topolojisi vardır. Bu nedenle herhangi bir soft homomorfik grup, diskret veya indiskret topolojide soft topolojik homomorfik gruplar olarak düşünülebilir.

İki soft topolojik grup, soft gruplar olarak izomorfik olabilir, fakat soft topolojik gruplar olarak izomorfik olmayabilir[10].

Tanım 4.2.5. (F, A, τ), G üzerinde soft topolojik grup olsun. O zaman (F, A, τ) ile ilişkilendirilen G üzerinde soft küme $([F]_G, A, \tau)$ ile gösterilir ve (F, A, τ) nun kapanışı olarak adlandırılır. $[F]_G(a) = [F(a)]_G$ şeklinde gösterilir.

Burada $[F(a)]_G$, G de tanımlanan topolojide F(a) nın kapanışıdır[10].

Teorem 4.2.4. (F, A, τ), (G, τ)topolojik grubu üzerinde bir soft topolojik grup olsun[10].

1) O zaman $([F]_G, A, \tau)$, (G, τ) üzerinde soft topolojik gruptur.

2) $(F, A, \tau) \tilde{\subset} ([F]_G, A, \tau)$ dir.

3) Eğer (F, A, τ) ve (K, B, τ), (G, τ) üzerinde soft topolojik kümeler ise o zaman $([F]_G, A, \tau) \oplus_{\cup} ([K]_G, B, \tau) \tilde{\subseteq} [(F, A, \tau) \oplus_{\cup} (K, B, \tau)]_G$.

Tanım 4.2.6. (F, A, τ), G grubu üzerinde bir soft topolojik grup olsun. $[F]_G(a) = G$ ise (F, A, τ) nun kapalı olduğu söylenir, burada $([F]_G, A, \tau)$ soft topolojik kümedir[10].

Tanım 4.2.7. (F, A, τ), G grubu üzerinde bir soft topolojik grup olsun. $[F]_G(a) = G$ ise (F, A, τ) nun yoğun olduğu söylenir, burada $([F]_G, A, \tau)$ soft topolojik kümedir[10].

5. SOFT (ESNEK) HALKALAR

5.1 Soft Halkalar

Soft halkalar Acar ve arkadaşları [11] tarafından 2010 yılında tanımlanmıştır. Bundan sonra soft halkalar alanında çalışmalar yapılmıştır. Bu bölümde soft halkalarla ilgili bazı sonuçları ele alacağız.

Soft Halkalar ve Özellikleri

Bu bölüm boyunca R değişimli halka olarak kullanılacaktır.

Tanım 5.1.1. (H,A), R de boştan farklı soft küme ve $\forall x \in A$ için H(x), R' nin alt halkasıysa bu şekilde (H,A) ya, R de **soft halka** denir[11].

Örnek 5.1.1. $\forall \alpha \in A$ ve $f, g \in Hom_{\alpha}(F(\alpha))$ için homomorf bileşke işlemi birleşme özelliğini sağlar ve bu bileşke işlemine göre de $Hom_{\alpha}(F(\alpha))$ halka olur. Bu ise

$$F'': A \rightarrow P\big(Hom(M)\big)$$
$$\alpha \rightarrow F''(\alpha) = Hom_{\alpha}(F(\alpha))$$

bir soft halka yapar.

Tanım 5.1.2. (H,A), U evrensel kümesinde soft küme olarak verilsin. $Supp(H, A) = \{x \in A | H(x) \neq \emptyset\}$ kümesine , (H,A) soft kümesinin **destekleyeni** denir. Destekleyeni boş kümeye eşit olmayan soft kümeye boş olmayan soft küme denir[11].

Tanım 5.1.3. (H,A) ile (K,B), R de soft halka olsun. Buna göre

- **i.** $B \subset A\ ve$
- **ii.** $\forall x \in supp(K, B)\ için\ K(x), H(x)'in\ althalkası$

şartları sağlanıyorsa (K,B)'ye (H,A)'nın **soft alt halkası** denir[11].

Örnek 5.1.2. $R = A = 2Z\ ve\ B = 6Z \subset A\ olsun.$ $F(x) = \{nx|n \in Z\}$ ve $G(x) = \{5nx|n \in Z\}$ şeklinde tanımlı $F: A \to P(R)\ ve\ G: B \to P(R)$ küme değerli fonksiyonlarını alalım. $\forall x \in B$ için $G(x) = 5xZ,\ xZ = F(x)$ in alt halkası olur. Böylelikle (G,B), (F,A)'nın soft alt halkasıdır[11].

Örnek 5.1.3. $R = Z, A = 2Z\ ve\ B = 3Z$ olarak alalım. $F(x) = \{2nx\ |n \in Z\} = 2xZ$ ve $G(x) = \{3nx|n \in Z\} = 3xZ$ şeklinde tanımlı $F: A \to P(R)\ ve\ G: B \to P(R)$ küme değerli fonksiyonlarını inceleyelim. $C = A \cap B = 6Z\ olmak\ üzere\ (F, A)\ \tilde{\sqcap}\ (G, B) = (H, C)$ olsun. $\forall x \in C$ için $H(x) = F(x) \cap G(x) = 6xZ$ olup $F(x) = 2xZ\ \ ve\ G(x) = 3xZ$ halkalarının althalkasıdır.

Sonuçta $(F, A)\ \tilde{\sqcap}\ (G, B)$ bi-arakesiti, (F,A) ile (G,B)'nin soft althalkasıdır[11].

Teorem 5.1.1. (H,A), R de soft halka, I indis kümesi ve $\{(H_i, A_i)|i \in I\}$, (H, A) nın soft alt halkalarının boştan farklı ailesi olsun. Buna göre

- **i.** $\bigcap_{i \in I}(H_i, A_i)$, R de soft halkadır.
- **ii.** $\bigwedge_{i \in I}(H_i, A_i)$, R de soft halkadır.
- **iii.** $\forall i, j \in I\ için\ A_i \cap A_j = \emptyset\ ise, \bigcup_{i \in I}(H_i, A_i)$, R de soft halkadır[11].

5.2 SOFT TOPOLOJİK HALKA

Soft topolojik halka kavramı Shah ve Shaheen [10] tarafından literatüre kazandırılmıştır.

Bu kısımda R halkasını birimli ve değişimli olarak alacağız.

Tanım 5.2.1. τ, R üzerinde bir topoloji olsun. (K,A) boştan farklı R üzerinde bir soft küme olsun. Aşağıda verilen şartlar sağlanıyor ise (K,A,τ) ya R üzerinde bir soft topolojik halka denir.

- **i.** $\forall a \in A$ için K(a), R nin alt halkası
- **ii.** $\forall a \in A$ için K(a)x K(a)$\to$ K(a) , (x,y)$\to$ x-y sürekli
- **iii.** $\forall a \in A$ için K(a)x K(a)$\to$K(a) , (x,y)$\to$ x.y sürekli

Komşuluk terimi kullanarak (ii) ve (iii) şartları her x,y$\in$ K(a) ve x.y nin N komşuluğu için x in N_1 , y nin N_2 komşulukları var öyle ki $N_1 + N_2 \subset$ N (veya $N_1.N_2 \subseteq$ N) [10].

Örnek 5.2.1. R=Z_4 , $A = \{2,3\}$ ve $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0,2\}, \dots\}$ alalım. $F: A \to P(R)$ küme değerli fonksiyon $F(a) = \{b \in R | a.b = 0\}$ şeklinde tanımlayalım. O zaman $F(2) = \{0,2\}$ ve $F(3) = \{0\}$ R nin althalkaları Tanım 5.2.1. in (ii) ve (iii) şartları da sağlanır. Böylece (F,A,τ) , R de bir soft topolojik halkadır[10].

Teorem 5.2.1. Topolojik bir halka üzerinde (indiskret) her soft halka bir soft topolojik halkadır[10].

Örnek 5.2.2. $A = \mathbb{Z}^{+}, R = \mathbb{R}$ ve τ= Aralık topolojisi, $\mathbb{R}$ ve (F,A) da soft küme olarak tanımlanır. F(a), her $a \in \mathbb{Z}^{+}$ için $\mathbb{R}$ nin bir alt halkası olduğundan $F(a) = \mathbb{Q}[\sqrt{a}\,]$ tam kare sayı değilse ve $F(a) = \mathbb{Q}$. Bu nedenle $\left(F(a), \tau_{F(a)}\right)$, her $a \in \mathbb{Z}^{+}$ için$(\mathbb{R}, \tau)$nun topolojik alt halkasıdır.

Dolayısıyla (F,A,τ) , $(\mathbb{R}, \tau)$ de soft topolojik halkadır[10].

Teorem 5.2.2. (H,A,τ) ve (K,B,τ) , R de soft topolojik halka olsun. Burada τ , R üzerinde tanımlanan bir topolojidir.

- **i.** $(H, A, \tau) \,\tilde{\sqcap}\, (K, B, \tau)$ arakesiti R üzerinde boştan farklı bir topolojik halkadır.
- **ii.** $(H, A, \tau) \cap_E (K, B, \tau)$ genişletilmiş arakesiti R de soft topolojik halkadır[10].

Teorem 5.2.3. (H,A,τ) ve (K,B,τ) , R de soft topolojik halka olsunlar. O zaman $(H, A, \tau) \wedge (K, B, \tau)$ da R üzerinde boştan farklı soft topolojik halkadır[10].

Tanım 5.2.2. (H,A,τ) , R de soft topolojik halka olsun. Eğer $H(a) = \{0\}$ ise (H,A,τ) ya aşikar soft topolojik halka, $H(a) =$ R ise (H,A,τ) ya mutlak soft topolojik halka denir[10].

Tanım 5.2.3.[10] (H,A,τ) , R de soft topolojik halka olarak verilsin. O zaman (G,B,τ) , (H,A,τ) nun bir soft topolojik alt halkası(ideal) dır. Eğer

- **i.** B⊂ A ve G(b), $\forall b \in sup(G, B)$ için H(b) nin alt halkası (ideal) dır.
- **ii.** G(a) ≠ 0 için G(a)x G(a) topolojik uzayının G(a) üzerine dönüşümü (x,y)→ x-y için süreklidir.

iii. Her a∈B için G(a)x G(a) topolojik uzayının G(a) üzerine dönüşümü (x,y)→ x.y için süreklidir.

Teorem 5.2.4. (H,A,τ) ve (G,B,τ) , R de soft topolojik halka olsun[10].

i. Her a∈ B⊂A için G(a)⊂ H(a) ise, o zaman (G,B), (H,A,τ) üzerinde soft topolojik alt halkadır.

ii. O zaman $(H, A, \tau) \tilde{\sqcap} (G, B, \tau)$, hem (H, A, τ) hem de (G, B, τ) nun soft topolojik alt halkası (ideal) dır.

Teorem 5.2.5. Bir soft topolojik halkanın her soft alt halkası (ideal), soft topolojik bir alt halka(ideal)dır[10].

Tanım 5.2.4. (F,A,τ) ve (G,B,τ') sırası ile R ve R' de soft topolojik halka olsun. Burada τ ve τ', sırasıyla R ve R' üzerinde tanımlanan topolojilerdir.$f: R \to R'$ ve $g: A \to B$ iki dönüşüm olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise (f,g) çiftine soft topolojik halka homomorfizması denir.

i. f, halka epimorfizmi ve g, örten fonksiyondur.

ii. f(F(a))= G(g(a))

iii. $f_a: (F(a), \tau_{F(a)}) \to (G(g(a)), \tau'_{G(g(a))})$ süreklidir.

O zaman (F,A,τ) nun topolojik olarak (G,B,τ') ye homomorfik olduğu söylenir ve $(F, A, \tau) \sim (G, B, \tau')$ şeklinde ifade edilir.

Eğer f bir halka izomorfizmi, g birebir ve örten ve f_a sürekli ve açıksa, (f,g) çiftine soft topolojik halka izomorfizmi denir.

Bu durumda (F,A,τ) , (G,B,τ') ye soft topolojik izomorfiktir ve $(F, A, \tau) \cong (G, B, \tau')$ şeklinde gösterilir.

Tanım 5.2.5. (F,A,τ) ve (G,B,τ') sırasıyla R ve R' de soft topolojik halka olsun. (F,A,τ) topolojik olarak (G,B,τ') ye homomorfik ve (f,g) de soft topolojik homomorfizm olsun. O zaman

i. $fF: B \to P(R')$ dönüşümü ile $(fF)b = f_a(F(a))$,burada b∈A için b=g(a)

ii. $\forall a \in A$ için $f^{-1}G: A \to P(R)$ dönüşümü ile $(f^{-1}G)a = f_a^{-1}\left(G(g(a))\right)$.

6. SOFT (ESNEK) MODÜLLER

6.1 Soft Modüller

Soft modül kavramı, Sun, Qiu-Mei ve arkadaşları [12] tarafından tanımlanmıştır. Bu bölümde bu kavram tanımlanıp, bazı örnekler verilecektir.

Soft Modüller ve Özellikleri

Bu bölümde M sol R-modül, A $\neq \emptyset$ bir küme, $H: A \rightarrow P(M)$ küme değerli bir fonksiyon ve (H,A), M' de soft küme olarak kullanılacaktır.

Tanım 6.1.1. (H,A), M de bir soft küme olsun. $\forall x \in A$ için H(x), M nin alt modülü ise (H,A) ya M de bir soft modül denir[12].

Örnek 6.1.1. Her G soft abel grubu bir soft ℤ-modüldür. (F,A), G üzerinde bir soft abel grubu olsun. Yani, $\forall a \in A$ için $F(a) \leq G$ dir. Üstelik,

$$\cdot : \mathbb{Z} \times F(a) \rightarrow F(a)$$
$$(n, x) \rightarrow n \cdot x = x + \cdots + x \ (n \ tane \ x)$$

işlemi modül şartlarını sağlar.

- $(n + m) \cdot x = x + \cdots + x \ (n + m \ tane \ x)$

$= (x + \cdots + x) + (x + \cdots + x) = n \cdot x + m \cdot x$

- $(n \cdot m) \cdot x = x + \cdots + x \ (nm \ tane)$

$= mx + \cdots + mx \ (n \ tane)$
$= n \cdot (m \cdot x)$

- $n \cdot (x + y) = (x + y) + \cdots + (x + y) \ (n \ tane \ x + y)$

  $= (x + \cdots + x) + (y + \cdots + y)$
  $= n \cdot x + m \cdot y$

- $1 \cdot n = n$

Örnek 6.1.2. Bir R halkası üzerinde nxn matrisler kümesi $M_n(R)$ matrislerin toplama işlemine göre bir abel gruptur. Üstelik, A={1,2,…,n} olmak üzere;

$$F: A \to P(M_n(R))$$
$$k \to F(k) = M_k(R) \subseteq M_n(R), \qquad k \leq n$$

altgrubu tanımlanır. Yani (F, A), $M_n(R)$ üzerinde bir soft gruptur. Bu soft gruba özel olarak soft matris grubu denir. $\forall \left[a_{ij}\right]_{n\times n} \in M_n(R)$ ve $r \in R$ için

$$R \times M_n(R) \to M_n(R)$$
$$\left(r, \left[a_{ij}\right]_{n\times n}\right) \to r.\left[a_{ij}\right]_{n\times n} = \left[r.a_{ij}\right]$$

işlemi tanımlanır. $\forall k \in A$ için

$$R \times F(k) \to F(k)$$
$$\left(r, \left[a_{ij}\right]_{k\times k}\right) \to r.\left[a_{ij}\right]_{k\times k} = \left[r.a_{ij}\right]$$

modül aksiyomlarını sağlar. Yani $\forall k \in A$ için F(k) bir R-modüldür.

Örnek 6.1.3. (H,A), M abel grubunda soft grup olarak verilsin. Hom(M)' nin bir halka olduğunu Örnek 2.2.1. de göstermiştik. $\forall \alpha \in A$ için $H(\alpha) \leq M$ bir alt modüldür.
Gerçekten

$$: Hom(M) \times H(\alpha) \to H(\alpha)$$
$$(h, x) \to h'x = h(x)$$

şeklinde tanımlanan işlem modül şartlarını sağlar. O halde, (H,A) soft grubu bir soft modüldür.

Önerme 6.1.1 (H,A) ve (K,B) M de soft modül olarak verilsin. Buradan aşağıda verilen şartlar sağlanır[12].

- **i.** (H, A) $\tilde{\cap}$ (K,B), M üzerinde soft modül olur.
- **ii.** A ∩ B = Ø olmak şartıyla (H, A) $\tilde{\cup}$ (K,B) , M üzerinde soft modül olur.

İspat.

i. C= A ∩ B ve $\forall x \in C$ için, (H, A) ile (K,B) M üzerinde soft modül olduğu için $L(x) = H(x) \leq M \; veya \; L(x) = K(x) \leq M$ ‘dir ve (H, A) $\tilde{\cap}$ (K,B) =(L,C), M üzerinde bir soft modül olur.

ii. A ∩ B=Ø ve C= A ∪ B olmak şartıyla

$$L(x) = \begin{cases} H(x) & x \in A - B \\ K(x) & x \in B - A \end{cases}$$

ve (H,A) ∪ (K,B) = (L,C) olarak ifade edelim. (H,A) ile (K,B) soft modül olduğu için (L,C), M üzerinde bir soft modüldür.

Tanım 6.1.2. (H,A) ile (K,B) M üzerinde soft modül olsunlar. Bu soft modüllerin toplamı (H,A) + (K,B) = (L, A×B) şeklinde gösterilir. Bu tanımda $\forall(x, y) \in A \times B$ için L(x,y)= H(x) + K(y) olarak ifade edilir[12].

Önerme 6.1.2. (H,A) ile (K,B) M üzerinde soft modül olsunlar. O halde, (H,A) + (K,B)’de M üzerinde soft modül olur[12].

İspat. (H,A) ile (K,B), M üzerinde soft modül olsun. $\forall(x, y) \in A \times B$ için L(x,y)= H(x) + K(y) olması durumunda (H,A) + (K,B)= (L, A×B) şeklinde ifade edilir. H(x) ≤ M ve K(y) ≤ M olduğu için , Modül teorisinden H(x) + K(y) ≤ M dir. Böylelikle, (H,A) + (K,B), M üzerinde soft modüldür denir.

Tanım 6.1.3. M ve N modül ve $(H, A) \; ile \; (K, B)$ sırası ile M ve N üzerinde iki soft modül olsunlar. $\forall(x, y) \in A \times B$ için $L(x, y) = H(x) \times K(x)$ olacak şekilde $(H, A) \; ve \; (K, B)$ soft modüllerin çarpımı $(H, A) \times (K, B) = (L, A \times B)$ şeklindedir[12].

Önerme 6.1.3. M ve N iki modül ve (H, A) ile (K, B) sırasıyla M ve N de iki soft modül olsunlar. Buradan $(H, A) \times (K, B)$, $M \times N$ de soft modül olur[12].

İspat. (H,A), M üzerinde soft modül olduğu için $H(x) \leq M$ ve (K,B), N üzerinde soft modül olduğu için $K(x) \leq N$ olur. $H(x) \times K(x) \leq M \times N$ olduğunu kolayca görebiliriz. Bundan dolayı $(H, A) \times (K, B)$ nin $M \times N$ de soft modül olduğunu görürüz.

Tanım 6.1.4. (H,A) ve (K,B), M üzerinde iki soft modül olsunlar. O zaman,

i. $B \subset A$ ve

ii. $\forall x \in B$ için $K(x) \leq H(x)$

şartları sağlanıyor ise (K,B)'ye, (H,A) nın soft alt modülüdür denir ve $(K,B) \lesseqqgtr (H,A)$ şeklinde ifade edilir[12].

Önerme 6.1.4. (H,A) ve (K,B) M üzerinde iki soft modül olsunlar. $\forall x \in B$ için $K(x) \subseteq H(x)$ ise (K,B), (H,A) nın soft alt modülü denir[12].

Tanım 6.1.5. (H,A), M' de soft modül olarak veilsin. Eğer

i. M'nin birim elemanı {0} olmak üzere $\forall x \in A$ için $H(x) = \{0\}$ ise (H,A)' ya M' de birim soft modül,

ii. $\forall x \in A$ için $H(x) = M$ ise (H,A)'ya G'de mutlak soft modül denir [12].

Önerme 6.1.5. (H,A), M de soft modül ve $\{(G_i, B_i) | i \in I\}$, (H,A) nın boştan farklı soft alt modüller ailesi olarak verilsin. Buna göre aşağıdakiler sağlanır[12].

i. $\bigcap_{i \in I}(G_i, B_i), (H,A)$ nın soft alt modülü olur.

ii. $\sum_{i \in I}(G_i, B_i), (H,A)$ nın soft alt modülü olur.

iii. $\forall i, j \in I$ için $B_i \cap B_j = \emptyset$ olmak üzere $\bigcup_{i \in I}(G_i, B_i), (H,A)$ nın soft alt modülü olur.

Önerme 6.1.6. (H,A) ve (K,B), M'de iki soft modül ve (K,B) , (H,A) nın bir soft alt modülü olsun. $f: M \rightarrow N$ bir modül homomorfizması ise $(f(H), A)$ ve $(f(K), B)$ N de soft modüllerdir ve $(f(K), B)$, $(f(H), A)$ nın soft alt modülüdür[12].

İspat. $f: M \rightarrow N$ modül homomorfizması olduğu için, $\forall x \in A$ ile $\forall y \in B$ için $f(H(x))$ ile $f(K(y))$ N üzerinde alt modüllerdir. Bu durumda $(f(H), A)$ ile $(f(K), B)$ N üzerindede soft modüllerdir. (K,B), (H,A) nın bir soft altmodülüyse, bu durumda $\forall x \in B$ için K(x), H(x)'in bir alt modülüdür ve $f\big(K(y)\big)$, $f(H(x))$'in bir alt modülüdür. Buradan, $(f(K), B)$, $(f(H), A)$ nın soft alt modülüdür.

Tanım 6.1.6. (H,A) ve (K,B), sırası ile M ve N üzerinde soft modül, $f: M \to N$, $g: A \to B$ iki fonksiyon olarak verilsinler. $(f,g):(H,A) \to (K,B)$ dönüşümü aşağıdaki verilen koşulları sağlıyorsa soft homomorfizma olarak ifade edilir.

i. $f: M \to N$ modül epimorfizması,

ii. $g: A \to B$ bir örten fonksiyon,

iii. $\forall a \in A$ için $f\big(H(a)\big) = f(K(b))$.

Aynı halde (H,A)'dan (K,B)'ye soft homomorfizma var ise (H,A), (K,B)'ye soft homomorfiktir denir.$(H,A) \simeq (K,B)$ şeklinde gösterilir.

Bu tanımdan g, A'dan B'ye bire-bir dönüşüm ve f, M'den N'ye izomorfizma ise (H,A), (K,B)'ye soft izomorftur denir. $(H,A) \cong (K,B)$ şeklinde gösterilir[12].

Tanım 6.1.7. (H,A), M de soft modül olarak verilsin. Buna göre, eğer $\forall a \in A$ için $H(a) = M$ $(H(a) = \{0\})$ ise , (H,A) soft modülüne tam(aşikar) soft modül denir. Her soft modül, aşikar soft alt modüle sahiptir[12].

Tanım 6.1.8. (H,A) ve (K,B), M de soft modüller ve $(K,B) \precapprox (H,A)$, M'de soft modül olsun. $\forall a \in B$ için K(a),H(a) nın maximal alt modülüyse (K,B), (H,A) nın maximal soft alt modülüdür denir[12].

Önerme 6.1.7. M ve N, R-modülleri verilsin.$\forall \alpha \in A$ için $f: M \to N$ R-modül homomorfizmi olsun.

$$F: A \to P(M)$$
$$F(\alpha) = Kerf = \{m \in M | f(m) = 0\}$$

bir soft R-modüldür.

Önerme 6.1.8. $\forall \alpha \in A$ için daha fazlası

$$F: A \to P(N)$$
$$\alpha \to F(\alpha) = Im(f) = \{f(m) | m \in M\} \leq N$$

bir soft R-modüldür.

Önerme 6.1.9. R birimli halka ve M, R-modül olsun. $\forall m \in M$ için

$$F: M \to P(M)$$
$$F(m) = Rm = \{r.m | r \in R\} \leq M$$

bir soft R-modüldür(buna "soft dairesel modül " denir).

Önerme 6.1.10. (F,A), M'de soft R-modül ve (H,B), N üzerinde (F,A)'nın bir soft alt modülü olsun. $\forall \beta \in B$ için,

$$K: B \to P(M/N)$$
$$K(\beta) = F(\beta)/H(\beta) = \{m + H(\beta) | m \in F(\beta)\}$$

(K, B), M/N üzerinde soft değişmeli grup olarak tanımlanır.
Üstelik, $\forall r \in R$ ve $\forall m + H(\beta) \in K(\beta)$ için

$$: R \times K(\beta) \to K(\beta)$$
$$\big(rm + H(\beta)\big) \to r.m + H(\beta)$$

işlemiyle (K,B) M/N üzerinde soft R-modül yapısıdır.

Tanım 6.1.9. (F,A), M'de bir soft R-modül ve (H,B), N üzerinde (F,A)'nın soft alt modülü olarak alınsın. M/N üzerinde Önerme 6.1.10 ile verilen (K,B) soft modülüne "soft bölüm modülü" denir.

6.2 SOFT TOPOLOJİK MODÜL

Bu bölüm tezin orijinal kısmıdır. Sun, Zhang, Liu ve arkadaşları [12] tarafından tanımlanan soft modül kavramının topolojik versiyonu bu bölümde sunulacaktır.
Bu bölümde M abel grubunu bir R-modül olarak alacağız.

Tanım 6.2.1. τ, M üzerinde topoloji olsun. (F,A) boştan farklı M'de bir soft küme olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (F,A,τ) ya M'de soft topolojik modül denir.

- **i.** $\forall \alpha \in A$ için F(α), M nin R-alt modülü
- **ii.** $\forall \alpha \in A$ için $F(\alpha) \times F(\alpha) \to F(\alpha)$, $(x,y) \to x-y$ sürekli
- **iii.** $\forall \alpha \in A$ ve $\forall r \in R$ için $R \times F(\alpha) \to F(\alpha)$, $(x,y) \to rx$ sürekli

Örnek 6.2.1. Her G soft topolojik abel grubu bir soft topolojik R-modüldür.

(F,A), G'de soft topolojik grup olsun. Yani $\forall\alpha \in A$ için $F(\alpha) \leq G$ altgrup ve $F(\alpha) \times F(\alpha) \to F(\alpha), (x, y) \to x - y$ süreklidir. $\mathbb{Z}$, diskret topolojisini donatırsak,

$$\cdot : \mathbb{Z} \times F(\alpha) \to F(\alpha)$$

$$(n, x) \to n \cdot x = x + \cdots + x \ (n\ tane\ x)$$

işlemi F(α) üzerinde sürekli işleminin bir terkibidir, dolayısıyla süreklidir.

Önerme 6.2.1. (F, A, τ) ve (G, B, τ), M'de soft topolojik modül olsunlar. Buna göre

- **i.** $(F, A) \tilde{\cap} (G, B)$ kesişimi M'de topolojik soft modüldür.
- **ii.** $A \cap B = \emptyset$ olmak kaydıyla $(F, A) \tilde{\cup} (G, B)$ birleşimi M üzerinde soft topolojik modüldür.

İspat:

- **i.** $C = A \cap B$ olmak üzere $\forall x \in C$ için (F, A) ve (G, B), M' de soft topolojik modül olduğu için

$H(x) = F(x) \leq M$ veya $H(x) = G(x) \leq M$ olup, $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (H, C)$, M'de bir soft topolojik modül olduğu görülür.

- **ii.** $A \cap B = \emptyset$ olduğundan, $C = A \cup B$ olmak üzere

$$H(x) = \begin{cases} F(x), x \in A \\ G(x), x \in B \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, C)$ bir soft topolojik modüldür.

Teorem 6.2.1. (F,A,τ) ve (H,B,τ) , M'de soft topolojik modül olsun.

- **i.** $(F, A, \tau) \tilde{\sqcap} (H, B, \tau)$ arakesiti M'de boştan farklı bir topolojik modüldür.
- **ii.** $(F, A, \tau) \cap_E (H, B, \tau)$ genişletilmiş arakesiti M'de bir soft topolojik modüldür.

Teorem 6.2.2. (F,A,τ) ve (H,B,τ) , M'de iki soft topolojik modül olsun. O zaman $(F, A, \tau) \wedge (H, B, \tau)$ da M üzerinde boştan farklı soft topolojik modüldür.

Tanım 6.2.2. (F,A,τ) , M' de bir soft topolojik modül olsun. Eğer $F(a) = \{0\}$ ise (F,A,τ) ya birim soft topolojik modül, $F(a) = M$ ise (F,A,τ) ya mutlak soft topolojik modül denir.

Önerme 6.2.2. M ve N topolojik R- modül ve $\varphi: M \rightarrow N$ sürekli R-modül homomorfizmi olsun.

i. $\forall m \in M$ için $F(m) = Ker\varphi = \{m \in M | \varphi(m) = 0\}$ ile tanımlanan (F, M), M üzerinde bir soft topolojik R-modüldür.

ii. $\forall m \in M$ için $F: M \rightarrow P(N)$, $F(m) = Im(\varphi) = \{f(m) | m \in M\}$ soft R-modülü bir soft topolojik R-modüldür.

İspat:

i. $\forall m \in M$ için $F(m) \leq M$ alt modül olduğunu biliyoruz. $\forall m \in M$ için $F(m)$ alt uzay topolojisine sahiptir.

$$: F(m) \times F(m) \rightarrow F(m)$$
$$(x, y) \rightarrow x - y$$

ve

$$R \times F(m) \rightarrow F(m)$$
$$(r, m) \rightarrow r \cdot m$$

işlemleri M üzerinde süreklidir. O zaman (F,M), M üzerinde bir soft topolojik R-modüldür.

ii. $\forall m \in M$ için $F(m) \leq N$ alt modül olduğunu biliyoruz. N bir topolojik modül olduğından, $\forall m \in M$ için N üzerindeki işlemlerin F(m)' ye kısıtlanmaları;

$$: F(m) \times F(m) \rightarrow F(m)$$
$$(x, y) \rightarrow x - y$$

ve

$$R \times F(m) \rightarrow F(m)$$
$$(r, m) \rightarrow r \cdot m$$

süreklidir.

Önerme 6.2.3. M, R birimli halkası üzerinde bir topolojik modül olsun. $\forall m \in M$ için $F(m) = R.m = \{r.m | r \in R\}$ şeklinde tanımlanan (F,M) soft dairesel modülü bir topolojik soft modüldür.

İspat: $F(m) \leq M$ nin bir alt modül olduğunu biliyoruz. M topolojik modül olduğundan $\forall m \in M$ için $F(m)$ alt uzay topolojisine sahip

$$F(m) \times F(m) \to F(m)$$
$$(rm, r'm) \to rr'm$$

ve

$$R \times F(m) \to F(m)$$
$$(r', rm) \to r'rm$$

işlemleri süreklidir. O halde (F,M), M üzerinde soft topolojik modüldür.

Önerme 6.2.4. (F,A), M' de bir soft topolojik R- modül ve (H,B), N üzerinde M'nin bir soft alt modülü olsun. $\forall \beta \in B$ için $K(\beta) = {F(\beta)}/{H(\beta)} \leq {M}/{N}$ soft bölüm modülü (Tanım 6.1.9) bir soft topolojik modüldür.

İspat: $\forall \beta \in B$ için $K(\beta) \leq {M}/{N}$ alt uzay topolojisine sahiptir. ${M}/{N}$ topolojik bölüm grubunun inşaasında işlemlerinin

$$K(\beta) \times K(\beta) \to K(\beta)$$
$$\big(m + H(\beta)\big) - \big(m' + H(\beta)\big) = m - m' + H(\beta)$$

kısıtlaması süreklidir. Üstelik, (F,A) topolojik soft modül olduğundan

$$R \times K(\beta) \to K(\beta)$$
$$\big(r, m + H(\beta)\big) \to r.m + H(\beta)$$

işlemi sürekli olur.

Tanım 6.2.3. (F,A,τ) , M' de soft topolojik modül olsun. O zaman (K,B,τ) , (F,A,τ) nun bir soft topolojik alt modülüdür. Eğer

- **i.** B⊂ A ve K(b), $\forall b \in sup(K, B)$ için F(b) nin alt modülüdür.
- **ii.** $K(a) \neq \emptyset$ için K(a)x K(a) topolojik uzayının K(a) üzerine dönüşümü (x,y)→ x-y için süreklidir.
- **iii.** $\forall a \in B$ için K(a)x K(a) topolojik uzayının K(a) üzerine dönüşümü (x,y)→ x.y için süreklidir.
- **iv.** $\forall a \in B$ için R x K(a) topolojik uzayının K(a) üzerine dönüşümü (r,x) →r.x için süreklidir.

Teorem 6.2.4. (F,A,τ) ve (K,B,τ) , M’ de soft topolojik modülleri verilsin.

i. $\forall a \in B \subset A$ için K(a) ⊂ F(a) ise, o zaman (K,B), (F,A,τ) üzerinde soft topolojik alt modüldür.

ii. $(F, A, \tau) \tilde{\sqcap} (K, B, \tau)$ kesişimi hem (F, A, τ) hem de (K, B, τ) nun soft topolojik alt modülüdür.

Teorem 6.2.5. Bir soft topolojik modülün her soft alt modülü, soft topolojik alt modüldür.

Tanım 6.2.4. (F,A,τ) ve (H,B,τ′) sırası ile M ve M′ üzerinde soft topolojik modül olsun. Burada τ ve τ′, sırasıyla M ve M′ üzerinde tanımlanan topolojilerdir.

$f: M \rightarrow M'$ ve $g: A \rightarrow B$ iki dönüşüm olsun. Aşağıda verilen şartlar sağlanıyorsa (f,g) çiftine soft topolojik modül homomorfizması denir.

i. f, grup epimorfizmi ve g, örten fonksiyondur.

ii. f(F(a))= H(g(a))

iii. $f_a: (F(a), \tau_{F(a)}) \rightarrow (H(g(a)), \tau'_{H(g(a))})$ süreklidir.

O zaman (F,A,τ) nun topolojik olarak (H,B,τ′) ye homomorfik olduğu söylenir ve $(F, A, \tau) \sim (H, B, \tau')$ şeklinde ifade edilir.

Eğer f bir modül izomorfizmi, g birebir ve örten ve f_a sürekli ve açıksa, (f,g) çiftine soft topolojik modül izomorfizmi denir.

Bu durumda (F,A,τ) , (G,B,τ′) ye soft topolojik izomorfiktir ve $(F, A, \tau) \cong (G, B, \tau')$ şeklinde gösterilir.

7. SONUÇ

Bu çalışmada ön bilgi olarak grup, halka, modül gibi kavramlar verilerek bu kavramların soft kavramı üzerine yansıması incelenmiştir.

Soft kavramı, çözülmesi zor problemlerin daha kolay şekilde çözüme kavuşturulmasında etkili olan bir teoridir. Soft kavramı Molodtsov tarafından detaylı olarak incelenmiştir [7].

Soft kavramı üzerine topolojik yapılar eklenerek soft topolojik grup [19], soft topolojik halka [10] kavramları daha önce literatüre kazandırılmıştır.

Bu tez çalışmasında özgün olarak soft kavramı üzerine modüllerin topolojik versiyonu yüklenerek Soft Topolojik Modüller tanımlanmış ve örneklendirilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Çallıalp F., Çözümlü Soyut Cebir Problemleri, Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi, İstanbul, 1998**.**

[2] Şenkon H**.**, Soyut Cebir Dersleri II, İ.Ü. Fen Fakültesi Basımevi, İstanbul, 1993.

[3] G. Oguz, M. H. Gursoy and I. Icen, "On soft topological categories," Hacettepe J. Math. Stat., vol.48, no.6, pp.1675-1681, 2019, doi:10.15672/HJMS.2018.600.

[4] G. Oguz, I. Icen and M. H. Gursoy, "Lie Rough Groups," Filomat, vol.32, no.16, pp.5735-5741, 2018, doi:10.2298/fil1816735o.

[5] H. Tasbozan, I. Icen, N. Bagirmaz, A. F. Ozcan, "Soft sets and soft topology on nearness approximation spaces," Filomat, vol.31, no.13, pp.4117-4125, 2017, doi:10.2298/fil1713117t.

[6] Hacısalihoğlu H.H., Lineer Cebir Cilt I., 2010.

[7] D. A. Molodtsov, Soft set theory- First results, Comput. Math. Appl. , 37 (4-5) (1999) 19-31.

[8] P. K. Maji, R. Biswas and R. Roy. Soft set theory, Comput. Math. Appl. , 45 (4-5) (2003) 555-562.

[9] H. Aktas and N. Cagman, Soft sets and soft groups, Inform. Sci. , 77 (13) (2007) 2726-2735

[10] T. Shah, S. Shaheen, Soft topological groups and rings, Ann. Fuzzy Math. Inform. 7 (2014), No.5, 725-743

[11] Acar, U. , Koyuncu, F. , Tanay, B. , "Soft sets and Soft rings", Computers and Mathematics with Applications, 59, 3458-3463, (2010).

[12] Sun, Q , M. , Zhang, Z. L. and Liu, J. , "Soft Sets and Soft Modules", Springer- Verlag Berlin Heidelberg, 403-409, (2008).

[13] Anderson, F.W., Fullar, K. R. : Rings and Categories of Modules. Springer, Heidelberg (1992).

[14] Kassel, C. : Quantum Groups. Springer, Berlin (1991).

[15] P. K. Maji, R. Biswas and R. Roy, An application of soft sets in a decision making problem, Comput. Math. Appl. , 44(2002) 1077-1083.

[16] S. Oztunc, Some properties of soft categories, IJMO, 6(2) (2016) 91-95.

[17] A. O. Atagun, A. Sezgin, Soft substructures of rings, fields and modules, Comput. Math. Appl. , 61(2011) 592-601.

[18] M. Shabir and M. Irfan Ali. Soft ideals and generalized fuzzy ideals in semigroups, New Math. Nat. Comput. 5 (3) (2009) 599-615.

[19] Sk. Nazmul and Sk. Samanta, Soft topological groups, Kochi J. Math. 5 (2010) 151-161.

[20] T. Shah and Z. Abdullah, Some ring theoratic notions in a soft ring, Submitted.

[21] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Inform. Control 8 (1965) 338-353.

[22] Z. Pawlak, Rough sets, Int. J. Inform. Computer Sci. 11 (1982) 341-356.

[23] D. Chen, E. C. C. Tsong, D. S. Yeung and X. Wang, The parameterization reduction of soft sets and its applications, Comput. Math. Appl. 49 (2005) 757-763.

[24] G. Oguz, “Bazı cebirsel yapılara esnek (soft) yaklaşım,” Doktora tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, pp. 1-26, 2018.

[25] J. F, Peters New Sets. Special Theory about nearness of objects, Funda menta Informaticae 75, 407-433.

[26] D. J. S. Robinson, A Course in the Theory of Groups, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, Springer- Verlag, New York, 1996, 502 p.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad **:** Aslı GÜLER

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** **:** 2017, İnönü Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü