ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

RİEMANN SUBMERSİYONLARININ GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Yılmaz GÜNDÜZALP

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik AnaBilim Dalı

91+iv sayfa

2007

Danışman: Doç. Dr. Bayram ŞAHİN

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümü diğer bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için bazı temel kavramlara ayrılmıştır.

İkinci bölümde önce Riemann submersiyonların inşaasında kullanılacak temel kavramlar verildikten sonra, Riemann submersiyonlar için tanımlanan temel tensörler ve onların genel özellikleri incelendi. Bundan sonra ise temel tensörlerin geometrik anlamı üzerinde duruldu.

Son olarak, üçüncü bölümde, önce temel tensörlerin kovaryant türevleri elde edilip bazı temel özellikler incelendikten sonra bu özellikler kullanılarak iki Riemann manifoldunun eğrilikleri arasındaki bağıntılar elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Riemann submersiyon, temel tensör, kovaryant türev, eğrilik, Ricci tensör, skaler eğrilik, distribüsyon, vektör demeti.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON THE GEOMETRY OF RIEMANNIAN SUBMERSIONS

Yılmaz GÜNDÜZALP

İnönü Universty
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

91+iv pages

2007

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Bayram ŞAHİN

The first chapter of this thesis is devoted some basic topics, such as, Riemannian manifold, connection, curvatures, vector bundles and distributions. These terms are necessary for the other chapters of this thesis.

In the second chapter, after the basic terminology, the fundamental tensor fields for a Riemannian submersion are given and their basic properties are studied. Afterwards geometric meaning of basic tensors are investigated.

In the last chapter, firstly the covariant derivative of basic tensors are found and their basic properties are studied. Then the relation between two curvatures of Riemann manifolds are found by using these properties.

KEYWORDS: Riemann submersion, basic tensor, covariant derivative, curvature, Ricci tensor, scalar curvature, distribution, vector bundle.

TEŞEKKÜR

Tez konumu veren ve bu çalışmanın her aşamasında yardım, öneri ve desteklerini esirgemeden beni yönlendiren danışman hocam Doç. Dr. Bayram ŞAHİN' e, çalışmanın her adımında öneri ve desteğini esirgemeyen Matematik Bölüm Başkanı sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ' e, seminerlerde beni dinleyerek öneri ve eleştirilerde bulunan öğretim görevlisi Cumali YILDIRIM' a , ayrıca bana sürekli desteği ve sabrı için sevgili eşim Arife GÜNDÜZALP' a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Diferensiyel geometride en önemli çalışma alanlarından biri manifoldlar teorisidir. Manifoldlar teorisinde bir manifoldun geometrisi incelenirken kullanılan yöntemlerden biri, diğer bir manifolda uygun bir dönüşüm tanımlamaktır. Bu yöntemde , dönüşümün ve diğer manifoldun özelliklerinden faydalanılarak ele alınan manifoldun geometrisi incelenir. Bu tür dönüşümlerin en önemlileri, immersiyonlar ve submersiyonlardır. İmmersiyonlar teorisi, diferensiyel geometride en çok çalışılan konulardan biridir ve başlangıcı Gauss'un çalışmalarına dayanır. Submersiyonların immersiyonlara göre daha az çalışıldığı gözlemlenmektedir. Bunun nedeni submersiyonların, immersiyonlara göre daha az kullanışlı olması değil, bu konuyu çalışmanın araştırmacılar için çok daha kolay olmamasından kaynaklanır. Riemann manifoldları gözönüne alındığında bunun nedeni çok açık bir biçimde ortaya çıkar. Eğer M bir manifold, B bir Riemann manifoldu ve $\pi : M \longrightarrow B$ bir immersiyon ise, $g^{'}$, B üzerindeki Riemann metriği olmak üzere $\pi^{*}g^{'}$, M üzerine bir Riemann metriği indirger[3], burada π^{*} pull-back dönüşümüdür. Böylece π immersiyonu M manifoldu üzerinde de bir Riemann yapı kurmayı olanaklı kılar. Dolayısıyla, M üzerindeki Riemann metriği g olmak üzere,

$$g(X_1, X_2) = \pi^{*}g^{'}(X_1, X_2) = g^{'}(d\pi(X_1), d\pi(X_2)), \forall X_1, X_2 \in \chi(M)$$

şartını sağlayan izometrik immersiyonu tanımlanabilir, burada $d\pi$ türev dönüşümünü göstermektedir. Böylece iki manifoldun tanjant uzayları arasında bir izometri tanımlanmış olur.

Submersiyonlar teorisinde izometrik immersiyonların karşılığı olarak Riemann submersiyonlar, B. O'Neill tarafından 1966 yılında [11] de tanımlandı. Buna göre M ve B Riemann manifoldları ve $\pi : M \longrightarrow B$ bir submersiyon olsun. Eğer $(\text{ç}ekd\pi)^{\perp}$ üzerinde $d\pi$ bir izometri ise π ye bir Riemann submersiyonu adı verilir. Bu tanımın bir sonucu olarak, her $X_1, X_2 \in (\text{ç}ekd\pi)^{\perp}$ için

$$g(X_1, X_2) = g^{'}(d\pi(X_1), d\pi(X_2))$$

elde edilir.

O'Neill makalesinde, immersiyondaki ikinci temel form ve şekil operatörüne karşılık, Riemann submersiyonları için iki tane tensör alanı tanımladı ve bunların temel özelliklerini inceledi. Bu temel tensörler, günümüzde O'Neill tensörleri olarak adlandırılmakta ve Riemann submersiyonları için önemli araçlar olarak görülmektedir. Bu makalede ayrıca iki manifold arasındaki submersiyondan faydalanılarak, manifoldların eğrilikleri karşılaştırıldı. O'Neill' in makalesinden sonra bu konu üzerine bir çok makale yayınlandı ve Riemann submersiyonların diferensiyel geometride çok yaygın kullanım alanlarına sahip olduğu gösterildi. Bu konudaki diğer çalışmalar için son zamanlarda yayınlanan [6] nolu kaynağa bakılabilir.

Bu tezdeki amacımız, Riemann submersiyonlar teorisinin temel kavramlarını sunmak, temel metodları ve sonuçları ayrıntılı olarak incelemektir.

Birinci bölümde, tezin ikinci ve üçüncü bölümlerinin anlaşılması için gerekli olan temel kavramlar verilmektedir. Bu kavramlardan gerekli görülenler ispatlanmakta, fakat çoğu ispatsız olarak verilmektedir.

İkinci bölümde Riemann submersiyonları tanıtılmaktadır. Bu bölüm üç altbölüm olarak düzenlenmiştir. Birinci altbölümde submersiyon kavramı ayrıntılı olarak incelenmekte ve Riemann submersiyon kavramı tanımlanarak, örnekler verilmektedir. İkinci altbölümde O'Neill tarafından tanımlanan tensörler tanıtılmakta ve bu tensörlerin özellikleri incelenmektedir. Ayrıca $\pi : M \longrightarrow B$ Riemann submersiyonu verildiğinde, temel tensörler yardımıyla, M üzerindeki kovaryant türev ifadde edilmektedir. Üçüncü altbölümde, bu temel tensörlerden birinin π Riemann submersiyonunda liflerin tamamen geodezikliğini, diğer tensörün ise yatay distribüsyonun integrallenebilirliğini belirlediği gösterilmektedir.

Üçüncü bölümün birinci altbölümünde, temel tensörlerin kovaryant türevleri elde edilmekte, simetrikliği araştırılmakta ve bu tensörlerin parallelliği incelenmektedir. İkinci altbölümde, $\pi : M \longrightarrow B$ submersiyonunda, M ve B manifoldlarının eğrilik tensörleri arasındaki bağıntı elde edilmekte ve bundan faydalanılarak, iki manifoldun kesit eğrilikleri karşılaştırılmaktadır. Bu altbölümde, ayrıca iki manifoldun Ricci ve skaler eğrilikleri hespalanarak, aralarındaki bağıntılar verilmektedir.

I. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Riemann geometri ile ilgili bazı temel kavramlara ayırdığımız bu bölüm üç kısım olarak düzenlenmiştir. Birinci kısımda Riemann manifoldları ile ilgili bazı temel bilgiler verilip sonraki kısımlarda kullanılacak gösterimlerin açıklaması yapılacaktır. İkinci kısım Riemann manifoldları üzerindeki Riemann konneksiyonu ve ve eğriliklere ayrılmıştır. Üçüncü kısımda vektör demetleri ve distribüsyon verilmiştir.

I.1. Riemann Manifoldları

I.1.1.Tanım. E^n üzerinde bir $f : E^n \longrightarrow R$ reel fonksiyonu verilmiș olsun.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(p+tV) - f(p)}{t} \qquad V \in E^n$$

limiti mevcut ise bu limit değerine f nin $p \in E^n$ noktasında ve V **yönündeki türevi** denir. Bu türev

$$V_p[f] \;\; = \;\; df(V_p) = \frac{d}{dt}(f(p+tV))|_{t=0}$$

șeklinde gösterilir[8].

I.1.2.Tanım. M bir manifold ve $m \in M$ olsun.

$$C^\infty(M,R) = \{f | f : U \to R, f \in C^\infty(U)\}$$

cümlesini ele alalım. Bir

$$V_m : C^\infty(M,R) \;\; \to \;\; R$$

$$f \to V_m[f] \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} v_i|_m \frac{\partial f}{\partial x_i}|_m$$

dönüşümü için $\alpha, \beta \in R, \forall f, g \in C^\infty(M, R)$ olmak üzere

1) $V_m(\alpha f + \beta g) = \alpha V_m[f] + \beta V_m[g]$

2) $V_m(fg) = V_m[f]g(m) + f(m)V_m[g]$

özeliklerini sağlanıyorsa V_m fonksiyonuna M nin m noktasındaki **tanjant vektörü** denir[8].

M manifoldunun bir $m \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesini

$$T_mM = \{V_m | V_m : C^\infty(M, R) \to R\}$$

ile gösterelim. Bu cümle

$$\begin{aligned} (+) : T_mM \times T_mM &\to T_mM \\ (V_m, W_m) &\to V_m + W_m : C^\infty(M, R) \to R \\ &\quad\; (V_m + W_m)[f] = V_m[f] + W_m[f] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (.) : R \times T_mM &\to T_mM \\ (\alpha, V_m) &\to \alpha V_m : C^\infty(M, R) \to R \\ &\quad\; (\alpha V_m)[f] = \alpha V_m[f], \qquad \forall f \in C^\infty(M, R) \end{aligned}$$

işlemlerine göre R üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu uzaya M nin m noktasındaki **tanjant uzayı** denir[8].

$V_p = (v_1, ...v_n)|_p \in T_p(E^n)$ verilmiş olsun.

$$V_p[f] \;=\; \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}|_p =< \nabla f|_p, V_p >$$

dir. Burada $x_i : E^n \longrightarrow R$ koordinat fonksiyonudur.

I.1.3.Tanım. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Her $p \in M$ noktasına $X_p \in T_pM$ tanjant vektörünü karşılık getiren dönüşümüne **vektör alanı** denir.

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

tanjant demeti olsun.

$$\begin{aligned} X : M &\rightarrow TM \\ p &\rightarrow X_p \end{aligned}$$

dönüşümüne vektör alanı adı verilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} X_p &= \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p \\ (Xf) &= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla X vektör alanı M üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesinden fonksiyonların kümesine bir dönüşümdür. $X(f)$ dif.bilir ise X vektör alanına da diferensiyellenebilirdir denir[5].

I.1.4.Tanım. M bir m-manifold olsun. T_xM tanjant uzayının bir bazına $x \in M$ noktasında bir **çatı** denir. Bir (lokal hareketli) çatı $\{X_i\}$ $(i = 1, ..., m)$, her $x \in M$ için T_xM nin bir bazını veren C^∞ vektör alanlarından oluşan bir sistemdir[15].

I.1.5.Tanım. M manifoldu üzerinde iki vektör alanı X ve Y olsun. $f \in C^{\infty}(M)$ fonksiyonunu alalım.

$$[\,,\,] : \chi(M) \times \chi(M) \;\rightarrow\; \chi(M)$$

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \tag{I.1.1}$$

ile tanımlanan $[\,,\,]$ fonksiyonuna X ve Y nin **Lie(parentez) operatörü** denir ve bu operatör aşğıdaki özelikleri sağlar[5]:

$f, g \in C^{\infty}(M)$ ve $X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere

(i) $[X,Y] = -[Y,X]$

(ii) $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z] \qquad a, b \in R$

(iii) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$

(iv) $[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$

dır.

I.1.6.Tanım. M ve B manifoldları arasında bir

$$\pi : M \rightarrow B$$

C^∞ dönüşümünün türev dönüşümü

$$d\pi : \chi(M) \rightarrow \chi(B)$$

biçiminde gösterilir. Bu dönüşüm her $x \in M$ noktasında

$$(\pi_*)_x = d\pi_x : T_xM \rightarrow T_{\pi(x)}B$$

lineer dönüşümünü verir ve buna da π nin x noktasındaki **türev dönüşümü** denir[5].

$(x^1, x^2, ...x^m)$ ve $(y^1, y^2, ...y^n)$, sırasıyla M ve B üzerindeki lokal koordinat sistemleri olsun. $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$ olmak üzere π dönüṣümü iç̣in

$$\pi^j = y^j \circ \pi \quad \text{ve} \quad \pi_i^j = \frac{\partial \pi^j}{\partial x^i}$$

yazılabilir. Böylece

$$d\pi(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \pi_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}$$

elde edilir[5].

I.1.1.Önerme. M ve B manifoldlar,

$$\pi : M \rightarrow B$$

bir C^∞ dönüşüm, E, F ve $E^{'}$, $F^{'}$ sırasısıyla M ve B manifoldları üzerinde

$$d\pi(E) = E^{'} \quad \text{ve} \quad d\pi(F) = F^{'}$$

yani

$$d\pi_x(E_x) = E^{'}_{\pi(x)} \quad \text{ve} \quad d\pi_x(F_x) = F^{'}_{\pi(x)} \qquad (x \in M)$$

şartlarını sağlayan vektör alanları olsun. Bu durumda

$$d\pi([E,F]) = [E^{'}, F^{'}] \circ \pi \qquad \text{(I.1.2)}$$

dir[6].

I.1.7.Tanım. $\pi : M \to B$ bir C^∞ dönüşüm olsun. Eğer $d\pi(T_xM)$ nin boyutu r ise π dönüşümünün rankı r dir denir[15].

I.1.2.Önerme. Eğer her $x \in M$ için $rankd\pi = boyM = n$ ise $(\pi_*)_x$ bire birdir[15].

I.1.8.Tanım. M n- boyutlu manifold ve π bir C^∞ dönüşüm olsun. Eğer her $x \in M$ için

$$(\pi_*)_x X_x = X^{'}|_{\pi(x)}$$

ise X vektör alanına $\pi-$ bağlıdır denir[15].

I.1.1.Sonuç. $\pi : M_1^n \to M_2^m$ dönüşümünün türev dönüşümü $p \in M_1^n$ için $(\pi_*)_p$ olsun. Sırasıyla, $T_pM_1^n$ ve $T_{\pi(p)}M_2^m$ de

$$\psi = \{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\}, \quad \varphi = \{\frac{\partial}{\partial y_1}|_{\pi(p)}, ..., \frac{\partial}{\partial y_m}|_{\pi(p)}\}$$

standart bazları için $(\pi_*)_p$ nin karşılık geldiği matris $(J\pi)_p$ ile gösterildiğine göre,

$$(J\pi)_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial \pi_1}{\partial x_1}|_p & \frac{\partial \pi_1}{\partial x_2}|_p & . & \frac{\partial \pi_1}{\partial x_n}|_p \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial x_1}|_p & \frac{\partial \pi_2}{\partial x_2}|_p & . & \frac{\partial \pi_2}{\partial x_n}|_p \\ . & . & & . \\ \frac{\partial \pi_m}{\partial x_1}|_p & \frac{\partial \pi_m}{\partial x_2}|_p & . & \frac{\partial \pi_m}{\partial x_n}|_p \end{pmatrix}$$

dır[8].

I.1.9.Tanım. M bir diferensiyellenebilir manifold ve manifold üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$, $a, b \in R$ ve

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^{\infty}(M)$$

olmak üzere

1) $g(X, Y) = g(Y, X)$,

2) $g(X, X) \geq 0$, $\forall X$ için $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$,

3) Bilineer;

$$\begin{aligned} g(aX + bY, Z) &= ag(X, Z) + bg(Y, Z) \\ g(X, aY + bZ) &= ag(X, Y) + bg(X, Z) \end{aligned}$$

şartları sağlanıyorsa, g dönüşümüne **Riemann metriği**(veya metrik tensör) ve (M, g) ikilisine de **Riemann manifoldu** adı verilir[7].

I.1.10.Tanım. Metrik tensörü $<,>$ olan bir Riemann manifoldu M olsun. Bir $X_p \in T_pM$ tanjant vektörünün **uzunluğu**

$$\|X_p\| = \sqrt{< X, X >_p} \tag{I.1.3}$$

reel sayısı ile tanımlanır[7].

I.1.11.Tanım. Metrik tensörü $<,>$ olan bir Riemann manifoldu M olsun. Sıfırdan farklı iki $X_p, Y_p \in T_pM$ tanjant vektörleri arasındaki θ **açısı**

$$< X_p, Y_p >= \|X_p\|\|Y_p\| \cos\theta \tag{I.1.4}$$

ile tanımlanır. Burada θ ölçüsünün $[0, \pi]$ kapalı aralığında kalacağını schwarz eşitsizliği denen

$$| < X_p, Y_p > | \leq \|X_p\|\|Y_p\|$$

den biliyoruz[9].

I.1.12.Tanım. Metrik tensörü $<,>$ olan bir Riemann manifoldu M olsun. $\{([a,b], \alpha)\}$ atlası ile verilen eğrinin teğet vektör alanı T ise, $\alpha([a,b]) \subset M$ eğrisinin $\alpha(a)$ dan $\alpha(b)$ ye kadar olan **yayının uzunluğu**

$$|\alpha|_a^b = \int_a^b \sqrt{< T(t), T(t) >} dt, \qquad t \in I \tag{I.1.5}$$

olarak tanımlaır[9].

I.1.1.Teorem. Riemann manifoldu üzerinde bir eğrinin yay uzunluğu atlas seçiminden bağımsızdır[9].

İspat. Riemann manifoldu M, C de M üzerinde bir eğri ve bu eğrinin farklı iki atlası da

$\{([a,b], \alpha)\}$ ve $\{([c,d], \beta)\}$ olsun. Bu iki atlas arasında

$$\begin{aligned} g : [c,d] &\rightarrow [a,b] \\ u &\rightarrow g(u) = t, \;\; g(c) = a, \;\; g(d) = b \end{aligned}$$

dir. $\beta = \alpha o g$ den

$$\beta(d) = \alpha(g(d)) = \alpha(b), \;\; \beta(c) = \alpha(g(c)) = \alpha(a)$$

parametre değişimini göz önüne alalım. O zaman eğrinin $\alpha(a), \alpha(b)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$\begin{aligned} |\alpha|_a^b &= \int_a^b \sqrt{< T_{\alpha(t)}, T_{\alpha(t)>}} dt, \qquad T_{\alpha(t)} = \alpha'_{(t)}|_{\alpha(t)} \\ &= \int_a^b \sqrt{< \alpha'(t), \alpha'(t) >} dt \end{aligned}$$

dir. $\beta = \alpha o g$ eşitliğinden

$$\beta'(u) = \frac{dg}{du}|_u \alpha'(g(u)) \Rightarrow \alpha'(t) = \beta'(u)\frac{du}{dg}$$

ve $g(u) = t$ eşitliğinden de $dg(u) = dt$ yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} |\alpha|_a^b &= \int_c^d \sqrt{< \beta'(u), \beta'(u) >} \frac{du}{dg}.dg \\ &= \int_c^d \sqrt{\beta'(u), \beta'(u) >} du \\ &= |\beta|_c^d \end{aligned}$$

dir.

I.1.2.Teorem. M bir $n-$ boyutlu Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M üzerindeki metrik tensörün ifadesi;

$$<,>= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i \otimes dx_j \qquad \text{(I.1.6)}$$

veya

$$(\frac{ds}{dt})^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \frac{d(x_i o \alpha)}{dt} \frac{d(x_j o \alpha)}{dt}$$

dır[9]. Burada $x_1, x_2, ...x_n$ ile M nin bir koordinat komşuluğundaki koordinat fonksiyonları gösterilmektedir.

I.1.13.Tanım. (M, g) , n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları verilmiş olsun. Her $p \in M$ için

$$X_p = (x_1, ..., x_n)|_p \in T_pM$$

dır. $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)|_p$ vektör alanı C^∞ sınıfındandır denir,

$$y_i : M \to R, 1 \leq i \leq n$$

koordinat fonksiyonları C^∞ sınıfından yani $y_i \in C^\infty(M, R)$ ise. Bu durumda Y nin X e göre **kovaryant türevi**

$$\nabla_X Y = (X_p[y_1], ..., X_p[y_n]) \tag{I.1.7}$$

şeklinde tanımlanır ve $\nabla_X Y$ ile gösterilir[8].

I.1.14.Tanım. M bir manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X \ \ , \ \ Y) &\longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

fonksiyonu için,

1) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z \qquad \forall X, Y, Z \in \chi(M),$

2) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

3) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$,

4) $\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y \qquad \forall f \in C^\infty(M)$,

özeliklerini sağlanıyorsa ∇ ya M manifoldu üstünde bir **afin konneksiyonu** denir[5].

I.1.15.Tanım. I, R nin bir açık aralığı olmak üzere,

$$\alpha : I \longrightarrow E^n$$

biçiminde diferensiyellenebilir bir α dönüşüne, E^n uzayı içinde bir **eğri** denir.

$\forall t \in I$ için, $\alpha'(t) \neq 0$ ise bu eğriye **regüler eğri** denir.

E^n uzayında Öklidiyen koordinat fonksiyonları $x_1, x_2, ..., x_n$ olmak üzere, bir

$$\alpha : I \to E^n$$

eğrisinin verildiğini varsayalım. α dönüşümün değer kümesi E^n olduğundan, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ile gösterilen n tane bileşeni vardır.

$$x_i \circ \alpha = \alpha_i \qquad 1 \leq i \leq n$$

ve

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

olduğundan

$$\frac{d\alpha}{dt} = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), ..., \alpha_n'(t)) \qquad t \in I$$

biçiminde yazabiliriz[8].

I.1.16.Tanım. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\begin{aligned} \|\alpha'\| : I &\rightarrow R \\ t &\rightarrow \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre **skaler hız fonksiyonu** ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da M nin (I, α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(t)$ noktasındaki **skaler hızı** denir[8].

I.1.3.Teorem. (M, g) bir Riemann manifoldu ve M de

$$\alpha : I \rightarrow M$$

bir geodezik olsun. Bu durumda, $\alpha^{'}(t)$ hız vektörünün $\|\alpha^{'}(t)\|$ uzunluğu eğri boyunca sabittir[7].

I.1.17.Tanım. Reel sayılar cismi üzerinde r-tane vektör uzayı $V_1, V_2, ..., V_r$ olsun.

$$f : V_1 \times V_2 \times ... \times V_r \rightarrow R$$

fonksiyonu $1 \leq i \leq r$ için $u_i, v_i \in V_i$ ve $a, b \in R$ olmak üzere

$$f(v_1...v_{i-1}, av_i + bv_i, v_{i+1}...v_r = af(v_1...v_{i-1}, v_i...v_r) + bf(v_1...v_{i-1}, v_i...v_r)$$

şeklinde tanımlı ise f ye r**-lineer fonksiyon** denir[8].

I.1.18.Tanım. $V_1 \times V_2 \times ... \times V_r$ den R ye bütün r-lineer fonksiyonlarının cümlesini

$$L(V_1 ... V_r : R)$$

ile gösterelim. Bu cümlede toplama ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla $\forall (u_1 ... u_r) \in V_1 \times V_2 \times ... \times V_r$ için

$$(f_1 + f_2)(u_1, ..., u_r) = f_1(u_1, ..., u_r) + f_2(u_1, ..., u_r)$$

ve $\lambda \in R$ için

$$(\lambda f)(u_1, ..., u_r) = \lambda f(u_1, ..., u_r)$$

şeklinde tanımlanırsa bu iki işleme göre $L(V_1 ... V_r : R)$ R üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayına $V_1^*, V_2^*, ..., V_r^*$ dual vektör uzaylarının **tensörel çarpımı** denir ve

$$L(V_1, V_2, ..., V_r) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes ... \otimes V_r^*$$

ile gösterilir. $V_1^* \otimes V_2^* \otimes ... \otimes V_r^*$ tensör uzayının her bir elemanına r. dereceden bir **tensör** denir.

$$V_1 = V_2 = V_3 = ... = V_r$$

ise $V^* \otimes V^* \otimes ... \otimes V^*$ uzayına bir kovaryant tensör uzayı ve bu uzayın her bir elemanına da r.mertebeden bir **kovaryant tensör** denir. $T^r(V)$ veya $\otimes^r V^*$ ile gösterilir[8].

I.1.1. Örnek. Bir V reel vektör uzayı üzerinde bir $<,>$ iç çarpım fonksiyonu tanımlansın.

$$<,>: V \times V \rightarrow R$$

iç çarpım fonksiyonu bilineer olduğundan bir 2. dereceden kovaryant tensördür[8].

I.1.19.Tanım. V bir vektör uzayı ϕ r. mertebeden kovaryant tensör olsun. S_n permütasyonlarının cümlesini göstermek üzere $\sigma \in S_n$ ve $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ için

i) Eğer

$$\phi(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(n)}) = \phi(v_1, ..., v_n)$$

ise $\phi \in T^r(V)$ kovaryant tensöre **simetriktir** denir.

ii) Eğer

$$\phi(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(n)}) = (sgn\sigma)\phi(v_1, ..., v_n)$$

ise $\phi \in T^r(V)$ ye **anti-simetrik(alterne)** tir denir. Simetrik ve anti-simetrik tensörlerinin cümlesi sırasıyla $\sum^r(V)$ ve $\wedge^r(V)$ ile gösterilir[3].

I.1.20.Tanım. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $\forall p \in M$ noktasına $\phi_p \in T^r(T_pM)$ tensörünü karşılık getiren ve $X_1, ..., X_r$ vektör alanları verildiğinde

$$\phi(X_1, ..., X_r)$$

C^∞- olacak şekilde ϕ dönüşümüne r. mertebeden **kovaryant tensör alanı** adı verilir[3].

Manifold üzerindeki Riemann metriği göz önüne alındığında, bu tensör alanının simetrik bir kovaryant tensör alanı olduğu kalayca görülür.

I.2. Riemann Konneksiyonu ve Eḡrilik

I.2.1.Tanım. M, n-boyutlu bir manifold ve M üzerindeki konneksiyon ∇ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} T : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,\ Y] \end{aligned} \qquad (\mathrm{I.2.1})$$

olarak tanımlanan vektör deḡerli tensöre M üzerinde tanımlı ∇ konneksiyonun **torsiyon tensörü** denir[8].

I.2.2.Tanım. (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y, Z) &\rightarrow R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z \end{aligned}$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \qquad (\mathrm{I.2.2})$$

olarak tanımlanan R tensör alanına ∇ konneksiyonunun **eğrilik tensörü** denir[7].

I.2.3.Tanım. M, n-boyutlu bir manifold ve M üzerindeki ∇ konneksiyonun torsiyon tensörü T olsun. Eḡer $T = 0$ ise ∇ konneksiyonuna **simetriktir** veya **sıfır torsiyonludur** denir[8].

I.2.4.Tanım. M bir manifold, g de bir simetrik, non-singüler bilineer form olsun. Eğer ∇ lineer konneksiyonu aşağıdaki iki özelliğe sahipse **Riemann**

konneksiyon veya **Levi-Civita konneksiyonu** adını alır[12]. Yani $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

1) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

2) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

dir.

M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ &\quad -g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned} \tag{I.2.3}$$

Kozsul eşitliği ile belirlenir[12].

I.2.1. Teorem. Bir Riemann manifoldu üzerinde bir tek Riemann konneksiyonu vardır[9].

I.2.5.Tanım. (M^m, g) bir Riemann manifoldu, (M^m, g) nin bir lokal koordinat sistemi $(x^1, x^2, ..., x^m)$ ve

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$$

olsun. Bu durumda

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

ile karekterize edilen Γ_{ij}^k fonksiyonlarına ∇ nın **Christoffel semboleri** denir.

$$\nabla_i = \nabla_{\partial_i}$$

olsun. Buradan Christoffel semboleri

$$\nabla_i \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

biçiminde de yazılabilir.

Y vektör alanının lokal ifadesi $Y = \sum_j Y^j \partial_j$ ise

$$\nabla_i Y = \sum_k \{\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k Y^j\} \partial_k$$

dır[12].

I.2.6.Tanım. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda

$$K : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M)$$

$$(X, Y, Z, W) \to K(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$$

olarak tanımlanan 4.mertebeden kovaryant tensöre M üzerinde **Riemann Christoffel eğrilik tensörü** denir[9].

I.2.1.Önerme. (M, g) bir Riemann manifoldu ve M üzerindeki Riemann konneksiyonu ∇ olsun. Aşağıdaki bağıntılar, M üzerinde geçerlidir[5]:

(i) $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$,

(ii) $K(X, Y, Z, W) = -K(Y, X, Z, W)$,

(iii) $K(X, Y, Z, W) = -K(X, Y, W, Z)$,

(iv) $K(X,Y,Z,W) = K(Z,W,X,Y)$

dır.

İspat. (i) İspat için jacobi özdeşliği ve

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

özeliğini kullanacağız.

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\
R(Z,X)Y &= \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]} Y \\
R(Y,Z)X &= \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
&R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X \\
&\qquad = \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) - \nabla_{[Y,Z]} X + \nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z) \\
&\qquad -\nabla_{[Z,X]})Y + \nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \nabla_{[X,Y]} Z \\
&\qquad = \nabla_X [Y,Z] - \nabla_{[Y,Z]} X + \nabla_Y [Z,X] \\
&\qquad -\nabla_{[Z,X]} Y + \nabla_Z [X,Y] - \nabla_{[X,Y]} Z \\
&\qquad = [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]]
\end{aligned}$$

elde edilir ki, burada sağ taraf jakobi özdeşliği olarak 0 dır.

(ii) (I.2.2) den

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\
R(Y,X)Z &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y,X]} Z
\end{aligned}$$

dir. Diḡer taraftan

$$[X,Y]=-[Y,X]$$

olduḡundan

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z \quad &= \nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{-[Y,X]}Z \\ &= -(\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_{[Y,X]}Z) \\ &= -R(Y,X)Z \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} K(X,Y,Z,W) \quad &= g(R(X,Y)Z,W) \\ &= g(-R(Y,X)Z,W) \\ &= -g(R(Y,X)Z,W) \\ &= -K(Y,X,Z,W) \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) (I.2.2) den

$$\begin{aligned} R(Z,W)Y &= \nabla_Z\nabla_W Y-\nabla_W\nabla_Z Y-\nabla_{[Z,W]}Y \\ R(W,Z)Y &= \nabla_W\nabla_Z Y-\nabla_Z\nabla_W Y-\nabla_{[W,Z]}Y \end{aligned}$$

dir. Diḡer taraftan

$$[Z,W]=-[W,Z]$$

olduḡundan

$$\nabla_{[Z,W]}Y=\nabla_{-[W,Z]}Y=-\nabla_{[W,Z]}Y$$

yazılabilir. O halde

$$R(Z,W)Y = -R(W,Z)Y$$

dir. Buna göre,

$$\begin{aligned} K(X,Y,Z,W) \quad &= g(X,R(Z,W)Y) \\ &= g(X,-R(W,Z)Y) \\ &= -g(X,R(W,Z)Y) \\ &= -K(X,Y,W,Z) \end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) (i) den biliyoruz ki;

$$R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0$$

dir. Bu eşitliğin her iki yanı W ile skaler çarpıma tabi tutulursa

$$g(W,R(X,Y)Z) + g(W,R(Z,X)Y) + g(W,R(Y,Z)X) = 0$$

$$K(W,Z,X,Y) + K(W,Y,Z,X) + K(W,X,Y,Z) = 0$$

bulunur. Buradan

$$K(Z,X,Y,W) + K(Z,W,X,Y) + K(Z,Y,W,X) = 0$$
$$K(X,Y,W,Z) + K(X,Z,Y,W) + K(X,W,Y,Z) = 0$$
$$K(Y,W,Z,X) + K(Y,X,W,Z) + K(Y,Z,X,W) = 0$$

olur. Bu eşitliklerin taraf tarafa toplanması ve (ii) ile (iii) ün de kullanılmasıyla eşitlik elde edilir.

I.2.7.Tanım. (M,g) bir Riemann manifoldu ve bir $p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayının iki boyutlu bir altuzayı P olsun. P nin bir bazı $\{X,Y\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K(P) &= \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X,Y)^2} \\ &= \frac{K(X,Y,X,Y)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X,Y)^2} \end{aligned} \tag{I.2.4}$$

olarak tanımlanan $K(P)$ reel sayısına P nin **kesit eğriliği** denir [7]. Bu tanımdaki $K(P)$ değerini genellikle $\bar{K}(X,Y)$ ile göstereceğiz.

I.2.2. Teorem. Bir (M,g) Riemann manifoldunun T_pM tanjant uzayının 2-boyutlu br altuzayı P olsun. $P = S_p\{X,Y\}$ ise

$$\bar{K}(X,Y) = \frac{K(X,Y,X,Y)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X,Y)^2}$$

için

(i) $\bar{K}(X,Y) = \bar{K}(Y,X)$,

(ii) $\bar{K}(X,Y) = \bar{K}(rX,sY), \quad r \neq 0, \quad s \neq 0, \quad r,s \in R,$

(iii) $\bar{K}(X,Y) = \bar{K}(X+tY,Y), t \in R$
dır[5].

İspat. (i) (I.2.4) ten

$$\bar{K}(X,Y) = \frac{K(X,Y,X,Y)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X,Y)^2}$$

dır. Bu ifade de Önerme I.2.1'in (ii) ve (iii) şıkları kullanılırsa

$$\begin{aligned}\bar{K}(X,Y) &= \frac{-K(Y,X,X,Y)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X,Y)^2} \\ &= \frac{K(Y,X,Y,X)}{\|Y\|^2\|X\|^2 - g(Y,X)^2} \\ &= \bar{K}(Y,X)\end{aligned}$$

bulunur.

(ii) Benzer olarak

$$\begin{aligned}\bar{K}(rX,sY) &= \frac{K(rX,sY,rX,sY)}{\|rX\|\|sY\| - g(rX,sY)^2} \\ &= \frac{g(R(rX,sY)sY,rX)}{r^2s^2(\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X,Y)^2)} \\ &= \frac{rg((\nabla_{rX}\nabla_{sY}sY - \nabla_{sY}\nabla_{rX}sY - \nabla_{[rX,sY]}sY),X)}{r^2s^2(\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X,Y)^2)}\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\nabla_{rX}\nabla_{sY}sY - \nabla_{sY}\nabla_{rX}sY - \nabla_{[rX,sY]}sY = rs^2(\nabla_X\nabla_Y Y - \nabla_Y\nabla_X Y - \nabla_{[X,Y]}Y)$$

elde edilir. Bu ifadenin sonucu yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\bar{K}(rX,sY) &= \frac{r^2s^2g((\nabla_X\nabla_Y Y - \nabla_Y\nabla_X Y - \nabla_{[X,Y]}Y),X)}{r^2s^2(\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X,Y)^2)} \\ &= \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X,Y)^2} \\ &= \bar{K}(X,Y)\end{aligned}$$

olur.

(iii) (I.2.4) ten

$$\bar{K}(X+tY),Y) = \frac{g(R(X+tY,Y)Y,X+tY)}{\|X+tY\|^2\|Y\|^2 - g(X+tY,Y)^2}$$

dır. Burada, doğrudan işlemlerle

$$\|X+tY\|^2\|Y\|^2-[g(X,Y)+g(tY,Y)]^2=\|X\|^2\|Y\|^2-g(X,Y)^2$$

bulunur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
&g(R(X+tY,Y)Y,X+tY)\\
&\qquad=g((\nabla_{X+tY}\nabla_Y Y-\nabla_Y\nabla_{X+tY}Y-\nabla_{[X+tY,Y]}Y),X+tY)\\
&\qquad=g((\nabla_X\nabla_Y Y+\nabla_{tY}\nabla_Y Y-\nabla_Y\nabla_X Y-\nabla_Y\nabla_{tY}Y\\
&\qquad-\nabla_{[X,Y]}Y-\nabla_{[tY,Y]}Y),X+tY)\\
&\qquad=g((\nabla_X\nabla_Y Y-\nabla_Y\nabla_X Y-\nabla_{[X,Y]}),X+tY)\\
&\qquad=g((\nabla_X\nabla_Y Y-\nabla_Y\nabla_X Y-\nabla_{[X,Y]}Y),X)\\
&\qquad+g((\nabla_X\nabla_Y Y-\nabla_Y\nabla_X Y-\nabla_{[X,Y]}Y),tY)\\
&\qquad=g(R(X,Y)Y,X)+tg(R(X,Y)Y,Y)\\
&\qquad=g(R(X,Y)Y,X)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan ifadeler yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\bar{K}(X+tY,Y) &= \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{\|X\|^2\|Y\|^2-g(X,X)^2}\\
&= \bar{K}(X,Y)
\end{aligned}$$

bulunur.

I.2.8.Tanım. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda

$$r:\chi(M) \;\rightarrow\; C^\infty(M)$$

$$r(X) = \sum_{i=1}^{m} R(X, e_i)e_i \tag{I.2.5}$$

olarak tanımlanan operatöre (M, g) nin **Ricci operatörü** denir[7].

I.2.9.Tanım. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda

$$\rho : \chi(M) \times \chi(M) \ \rightarrow \ C^{\infty}(M)$$

$$\rho(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} g(R(X, e_i)e_i, Y) \tag{I.2.6}$$

olarak tanımlanan tensör alanına (M, g) nin **Ricci tensör alanı** denir ve ρ ile gösterilir. Burada $\{e_i\}$, (M, g) de ortonormal bir çatıdır[7].

I.2.2.Önerme. Ricci operatörü self-adjointtir. Yani (M, g) bir Riemann manifoldu ve $X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\rho(X), Y) = g(X, \rho(Y)) \tag{I.2.7}$$

dir[1].

I.2.10.Tanım. (M, g), m-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\tau \in C^{\infty}(M)$ olsun. $p \in M$ olmak üzere T_pM nin 2-boyutlu altuzaylarına göre kesit eğriliklerinin toplamına **skaler eğrilik** denir ve

$$\tau = \sum_{j=1}^{m} \rho(e_j, e_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i, e_j)e_j, e_i) \tag{I.2.8}$$

ile tanımlanır. Burada $\{e_i, e_j\}$, (M, g) de ortonormal bir çatıdır[7].

I.3. Vektör Demetleri ve Distribüsyon

I.3.1.Tanım. E, B, F C^∞ manifoldlar ve $\pi : E \to B$ bir C^∞ dönüşüm olsun. B nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ (I, indis kümesi) olmak üzere eğer

$$(\pi \circ \psi_\alpha)(x, y) = x \quad x \in U_\alpha,\ y \in F$$

olacak şekilde

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

diffeomorfizmlerinin bir $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ailesi varsa π, F ye göre **lokal çarpım özelliğine sahiptir** denir ve $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ sistemine de π nin **lokal ayrışması** denir[14].

I.3.2.Tanım. $\pi : E \to B$ dönüşümü lokal çarpım özelliğine sahip olsun. Bu durumda $\zeta = (E, \pi, B, F)$ dörtlüsüne bir diferensiyellenebilir **lif demeti** adı verilir[14].

Bir lif demetinde E ye **total uzay**, B ye **baz (taban) uzay**, F ye **lif modeli** ve π ye de **projeksiyon (fibrasyon)** adı verilir[14].

I.3.3.Tanım. $\pi : E \to B$ bir lif demeti olsun. $\forall x \in B$ için

$$\pi^{-1}(x) = F_x = \{p \in E|\pi(p) = x\}$$

kümesine x üzerinde bir **lif** denir. Tüm F_x liflerinin ayrık birleşimi E total uzayını verir[14].

I.3.4.Tanım. $\zeta = (E, \pi, B, F)$ bir diferensiyellenebilir lif demeti olsun. π nin D lokal ayrışmasına ζ lif demetinin **lokal koordinat temsilcisi** denir[14].

$\zeta = (E, \pi, B, F)$ lif demetinin $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ lokal koordinat temsilcisini göz önüne alalım. $\forall x \in U_\alpha$ için

$$\psi_{\alpha,x} : F \to F_x$$

dönüşümü $y \in F$ için

$$\psi_{\alpha,x}(y) = \psi_\alpha(x, y)$$

şeklinde tanımlanırsa ψ_α lar diffeomorfizm olduklarından, $\psi_{\alpha,x}$ ler de birebir, örten ve diffeomorfizmdirler[14].

I.3.5.Tanım. $\zeta = (E, \pi, B, F)$ bir diferensiyellenebilir lif demeti olsun. Eğer aşağıdaki iki özellik sağlanıyorsa ζ ya bir **vektör demeti** denir[14].

i) $\forall x \in B$ için F ve F_x bir K cismi üzerinde vektör uzayıdır.

ii) $\forall x \in B$ için $\psi_{\alpha,x} : F \to F_x$ dönüşümleri lineer izomorfizm olacak şekilde ζ nın bir $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ lokal koordinat temsilcisi vardır.

I.3.6.Tanım. $\pi : E \to B$ bir C^∞ lif demeti olsun. Bu durumda

$$\pi \circ S = I \;\; (I, \text{ B nin birim dönüşümü})$$

olacak şekilde

$$S : B \to E$$

C^∞ dönüşümüne **lif demetinin kesiti** denir ve $\Gamma(E)$ ile gösterilir[14].

I.3.7.Tanım. E bir vektör demeti olsun. $\forall p \in B$ için T_pB tanjant uzayına bir X_p vektörü taşıyan dönüşüme **vektör demetinin kesiti** denir. E nin $\Gamma(E)$ kesitlerinin uzayı K cismi üzerinde bir vektör uzayıdır[14].

I.3.1.Teorem. (Tam Fonksiyon Teoremi)

m, n doḡal sayılar $(m > n)$ ve

$$\pi : U \subset R^m \to R^n$$

bir C^r- dönüṣüm olsun. Eḡer $x \in \pi(U)$, π nin bir regüler deḡeri ise o zaman x in $\pi^{-1}(\{x\})$ ters görüntüsü, R^m nin bir $(m-n)-$ boyutlu altmanifoldudur[7].

I.3.8.Tanım. M, m-boyutlu bir manifold olsun. M üzerinde

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : M &\to T_xM \\ x &\to \mathcal{V}_x \subset T_xM \end{aligned}$$

ile tanımlanan $\mathcal{V}$ dönüşümüne bir **distribüsyon** denir[14].

$X \in \chi(M)$ için $p \in M$ olmak üzere $X_p \in \mathcal{V}_p$ oluyorsa X vektör alanı $\mathcal{V}$ ye aittir denir. Eğer her p noktası için $\mathcal{V}$ ye ait q-tane diferansiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı var ise $\mathcal{V}$ ye diferansiyellenebilirdir denir[14].

I.3.9.Tanım. M bir C^∞ manifold; $\mathcal{V}$, M manifoldu üzerinde q-boyutlu bir C^∞ distribüsyon ve B, M nin altmanifoldu olsun. Eğer B nin her x noktasında, B nin tanjant uzayı ile $\mathcal{V}_x$ aynı ise B ye $\mathcal{V}$ nin **integral manifoldu** denir[14]. Yani

$$\pi : B \to M$$

bir imbedding olmak üzere $\forall x \in B$ için

$$\pi_*(T_x B) = \mathcal{V}_x$$

dir. Eğer $\mathcal{V}$ nin B yi kapsayan bir başka integral manifoldu yoksa B ye $\mathcal{V}$ nin bir **maksimal integral manifoldu** (veya **leaf**) denir[14].

I.3.10.Tanım. M bir C^∞ manifold ve B, M nin bir altmanifoldu olsun. Eğer $\forall x \in B$ için $\mathcal{V}$ nin x i kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa $\mathcal{V}$ ye **integrallenebilirdir** denir[14].

I.3.11.Tanım. (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇, (M, g) üzerinde lineer konneksiyon olsun. Eğer $X \in \chi(M), Y \in \chi^v(M)$ için

$$\nabla_X Y \in \chi^v(M)$$

ise $\mathcal{V}$ **distribüsyonuna paraleldir** denir[14].

I.3.1.Önerme. (M, g), $\mathcal{V}$ ve $\mathcal{H}$ ortogonal distribüsyonuna sahip bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda $\mathcal{V}$ nin ∇ ya göre paralel olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{H}$ nin paralel olmasıdır[14].

II. BÖLÜM

RİEMANN SUBMERSİYONLARI

Bu bölüm üç altbölümden oluşmaktadır. Birinci altbölümde manifoldlar arasındaki submersiyon dönüşümleri ve bunların ürettiği distribüsyonlar tanıtılmakta, sonrada Riemann submersiyon tanımı verilmektedir. Ayıca Riemann submersiyonlar için örnekler verilmekte ve temel kavramlar ayrıntılı olarak incelenmektedir. İkinci altbölümde, O'Neill tarafından tanımlanan tensör alanları tanımlanmakta ve temel özellikleri araştırılmaktadır. Son altbölümde ise, ikinci altbölümde tanımlanan tensörlerin geometrik anlamları verilmektedir.

II.1. Riemann Submersiyonlarına Giriş

II.1.1.Tanım. (M,g) ve $(B,g^{'})$ sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere

$$\pi:(M,g)\to(B,g^{'})$$

bir örten C^{∞} dönüşümü için

$$rank\, d\pi_x = boy\, B$$

oluyorsa π ye $x\in M$ noktasında bir **submersiyon** denir. $\forall x\in M$ için π bir submersiyon ise π ye M üzerinde bir submersiyon adı verilir[6].

m ve n pozitif doğal sayılar ve $n<m$ olsun.

$$\pi:\ R^m\to R^n$$

dönüşümü

$$\pi : (x_1, ..., x_m) \rightarrow (x_1, ..., x_n)$$

ile verilsin. Bir x noktasında

$$d\pi_x(v_1, ..., v_m) = (v_1, ..., v_n) \qquad \text{(II.1.1)}$$

olduğundan $d\pi_x$ diferensiyeli örtendir[7]. Dolayısıyla, projeksiyon dönüşümü bir submersiyondur.

Herhangi bir $x \in B$ için $F_x = \pi^{-1}(x)$ üzerindeki lif, (M, g) manifoldunun $r = (m-n)$- boyutlu bir altmanifoldudur. $\pi^{-1}(x)$ altmanifoldlarına submersiyonun **lifleri** denir[15].

Herhangi bir $p \in M$ için (M, g) deki $\mathcal{V}$ **integrallenebilir distribüsyonu**

$$\mathcal{V}_p = \text{çek}\pi_{*p}$$

ile tanımlanır ve $\mathcal{V}_p$ ye submersiyonun **dikey distribüsyonu** denir.

$$\mathcal{H}_p = (\mathcal{V}_p)^{\perp}$$

ile tanımlanan distribüsyona ise submersiyonun **yatay distribüsyonu** denir[6].

II.1.1.Teorem. $\pi : M \rightarrow B$ bir submersiyon ve M nin dikey distribüsyonu $\mathcal{V}$ olsun. Bu durumda, $\pi(p) = x$ ve $p \in M$ için her $\mathcal{V}_p$ dikey distribüsyonu $\pi^{-1}(x)$ in tanjant uzayı ile çakışır[6].

İspat. $T_p\pi^{-1}(x)$ de bir v vektörü verilsin. Şimdi

$$c : [0, 1] \rightarrow \pi^{-1}(x)$$

bir eḡri öyleki;

$$c(0)=p, \quad c^{'}(0)=v$$

olsun. $(\pi \circ c)(t)=x, \;\; t \in [0,1]$ için

$$\pi_*(c^{'}(0))=(\pi \circ c)_* \frac{d}{dt}=0$$

elde edilir. Buradan

$$v=c^{'}(0) \in \mathcal{V}_p$$

dır. O halde $T_p\pi^{-1}(x)$, $\mathcal{V}_p$ nin $r=(m-n)$- boyutlu altuzayına dönüșür. Boyutların eșitliḡinden

$$\mathcal{V}_p=T_p\pi^{-1}(x)$$

yazılabilir.

II.1.2.Tanım. (M,g) ve $(B,g^{'})$ Riemann manifoldları ve

$$\pi:(M,g) \rightarrow (B,g^{'})$$

bir C^{∞} dönüşüm olsun. $x \in M$ için

$$\mathcal{V}_x=\mathcal{V}_x(\pi)=\text{çek}\, d\pi_x=\{X \in T_xM | d\pi_x(X)=0\} \subset T_xM$$

ve

$$\mathcal{H}_x=\mathcal{H}_x(\pi)=\mathcal{V}_x^{\perp} \subset T_xM$$

olarak tanımlayalım. $\mathcal{V}_x$ uzayına π nin x noktasındaki **dikey uzayı** denir. M deki g metriğine göre $\mathcal{V}_x$ dikey uzayının dik tümleyeni olan $\mathcal{H}_x$ uzayına ise π nin x noktasındaki **yatay uzayı** denir[1].

Böylece, M Riemann manifoldu $x \in M$ de

$$T_xM = \mathcal{V}_x \oplus \mathcal{H}_x = \mathcal{V}_x \oplus \mathcal{V}_x^{\perp}$$

ortogonal ayrışımına sahiptir.

II.1.3.Tanım. (M, g) ve $(B, g^{'})$ sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olsun. Bu durumda

$$\pi : (M, g) \to (B, g^{'})$$

C^{∞} dönüşümü için

$$rank\, d\pi_x < min\,\{m, n\}$$

şartını sağlayan $x \in M$ noktasına π nin bir **kritik noktası** denir ve π nin kritik noktalar kümesi(kritik küme) C_{π} ile gösterilir. Kritik noktanın π altındaki görüntüsüne ise **kritik değer** denir[7].

II.1.4.Tanım. (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \to (B, g^{'})$$

bir C^{∞} dönüşüm olsun. $x \in M$ noktasına T_xM nin sırasıyla $\mathcal{V}_x$ ve $\mathcal{H}_x$ alt uzaylarını karşılık getiren

$$x \to \mathcal{V}_x \quad \text{ve} \quad x \to \mathcal{H}_x$$

dönüşümleri $M \backslash C_{\pi}$ üzerinde sırasıyla $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\pi)$ ve $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\pi)$ ile gösterilen C^{∞} distribüsyonları tanımlar. $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\pi)$ ye π nin **dikey distribüsyonu** veya **dikey alt demeti**, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\pi)$ ye ise π nin **yatay distribüsyonu** veya

yatay alt demeti denir[1].

II.1.5.Tanım. M üzerindeki bir X vektör alanı yatay distibüsyona ait ise **yatay vektör alanı** olarak adlandırılır ve yatay vektör alanlarının kümesi $\chi^h(M)$ ile gösterilir[6].

II.1.6.Tanım. M üzerindeki bir X vektör alanı dikey distribüsyona ait ise **dikey vektör alanı** olarak adlandırılır ve dikey vektör alanlarının kümesi $\chi^v(M)$ ile gösterilir[6].

Herhangi bir $E \in \chi(M)$ vektör alanı için, E nin dikey ve yatay bileşenleri sırasıyla vE ve hE gösterilir.

II.1.7.Tanım. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, M üzerinde izdüşürülebilir(projectable) vektör alanlarının uzayı $\chi^c(M)$ ile gösterilir. Yani $\chi^c(M)$ nin her elemanı M üzerinde bir vektör alanı ve B üzerindeki bir vektör alanına $\pi-$ bağlıdır[6].

II.1.8.Tanım. M ve B Riemann manifoldları olsun. Eğer X yatay ve B üzerindeki X' vektör alanına π-bağlı ise M üzerindeki X vektör alanına **basic(temel) vektör alanı** denir[6].

Basic(temel) vektör alanlarının uzayı

$$\chi^b(M) = \chi^c(M) \cap \chi^h(M)$$

ile gösterilir.

M üzerindeki ortonormal çatılarının bir lokal alanı $\{e_1, ..., e_m\}$ olsun öyleki $e_1, ..., e_r$ dikey vektör alanları ve $e_{r+1}, ..., e_m$ temel vektör alanlarıdır. Burada, $r = boy\, M - boy\, B$ liflerin boyutudur[13].

II.1.9.Tanım. (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları arasındaki dönüşüm π olmak üzere,

$$\alpha : [t_1, t_2] \to B$$

eḡrisi B de bir smooth embedded eḡri ve

$$\beta : [t_1, t_2] \to M$$

eḡrisi de M de herhangi bir eḡrisi olsun. $\pi \circ \beta = \alpha$ eşitliḡini saḡlayan β eḡrisine α nın bir **lifti** denir.

$\forall t \in [t_1, t_2]$, $\beta^{'}(t) \in \mathcal{H}_{\beta(t)}$ için, β yataydır. Burada, $\beta(t_1) = x_0 \in M$ ve $\alpha(t_1) = \pi(x_0)$ dır. β eḡrisine x_0 da α nın bir **yatay lifti** denir[13].

II.1.10.Tanım. (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \to (B, g^{'})$$

bir C^{∞} dönüşüm olsun. Her $x \in M$ ve $U_x, V_x \in T_xM$ için

$$g(U_x, V_x) = g^{'}(\pi_*(U_x), \pi_*(V_x)) \qquad \text{(II.1.2)}$$

oluyorsa π ye M den B ye bir **izometri** denir.

Bu tanıma göre π bir izometri ise π_* dönüşümü T_xM ile $T_{\pi(x)}B$ uzaylarındaki iç çarpımları korur. Yani, π_* dönüşümü V_x ve $\pi_*(V_x)$ tanjant vektörlerinin uzunluklarını da korur[9].

II.1.1.Sonuç. $\pi : (M, g) \to (B, g^{'})$ bir izometri ise bir regüler dönüşümdür [9].

İspat. $\pi_*(V_x) = 0$ için

$$\|\pi_*(V_x)\| = \|V_x\| = 0 \Rightarrow V_x = 0$$

olmasını gerektirir. Bu da π_* in $1:1$ olması demektir. Her izometri aynı zamanda $1:1$ ve örten olan bir lokal izometridir.

Şimdi, bu tezin temel konusu olan Riemann submersiyonu kavramını tanımlayabiliriz.

II.1.11.Tanım. (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları olsun.

$$\pi : (M, g) \to (B, g^{'})$$

bir $C^{\infty}-$ submersiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa π ye bir **Riemann submersiyonu** denir[6]:

1) π dönüşümü maksimal ranka sahiptir.

2) Her $p \in M$ noktasında, π_{*p} dönüşümü yatay vektörlerinin uzunluğunu korur. Yani

$$g_p(u, v) = g^{'}_{\pi(p)}(\pi_{*p}u, \pi_{*p}v) \quad , \quad u, v \in \mathcal{H}_p \quad , \; p \in M \qquad \text{(II.1.3)}$$

dır. Bu ise, bir $p \in M$ noktasında π_* türev dönüşümünün $\mathcal{H}_p$ yatay uzayından $T_{\pi(p)}B$ üzerine bir lineer izometri olduğunu söyler[6].

Aşağıdaki örnekler, Riemann submersiyon örneklerinin kolayca elde edilebileceğini göstermektedir.

II.1.1.Örnek.

$$\begin{array}{rcl} \pi : R^4 & \rightarrow & R^2 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \rightarrow & (\dfrac{x_1 + x_3}{\sqrt{2}}, \dfrac{x_2 + x_4}{\sqrt{2}}) \end{array}$$

dönüşümü verilsin. Burada, $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ile R^4 ün bir koordinat sistemi gösterilmiştir. Doğrudan işlemlerle

$$d\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $rankd\pi = boyR^2 = 2$ dır. Yani, π bir submersiyondur. Diğer taraftan

$$çekd\pi = \mathcal{V} = Sp\{V_1 = (-1, 0, 1, 0), V_2 = (0, -1, 0, 1)\}$$

ve

$$\mathcal{V}^\perp = \mathcal{H} = Sp\{X_1 = (1, 0, 1, 0), X_2 = (0, 1, 0, 1)\}$$

elde edilir. Ayrıca

$$d\pi(X_1) = (\sqrt{2}, 0) \quad ve \quad d\pi(X_2) = (0, \sqrt{2})$$

dır. Böylece R^4 ve R^2 üzerindeki standart iç çarpımlar g ve g' ile gösterilirse

$$g'(d\pi(X_1), d\pi(X_1)) = 2 \quad ve \quad g'(d\pi(X_2), d\pi(X_2)) = 2$$

$$g(X_1, X_1) = 2 \ \ ve \ \ g(X_2, X_2) = 2$$

olur. Yani

$$g'(d\pi(X_1), d\pi(X_1)) = g(X_1, X_1), \ \ g'(d\pi(X_2), d\pi(X_2)) = g(X_2, X_2)$$

dır. Bu ise π nin bir Riemann submersiyon olduğunu gösterir.

II.1.2.Örnek. (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları olsun. Bu durumda, $M \times B$ çarpım manifoldunu ve π_1 ve π_2 de $M \times B$ den sırasıyla M ve B ye olan projeksiyonları göstersin. Bu durumda, $\forall X, Y \in \chi(M \times B)$ için

$$g_{M\times B}(X, Y) = \pi_1^* g(X, Y) + \pi_2^* g^{'}(X, Y)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu ifade

$$g_{M\times B}(X, Y) = g(\pi_{1*}X, \pi_{1*}Y) + g^{'}(\pi_{2*}X, \pi_{2*}Y)$$

şeklinde de yazılabilir. Kolayca görülürki $g_{M\times B}$, simetrik bilineer bir fonksiyondur. Diğer taraftan, kabul edelimki $V \neq 0$ için

$$g_{M\times B}(V, V) = 0, \qquad V \in \chi(M \times B)$$

olsun. Böylece

$$\begin{aligned} g_{M\times B}(V, d\pi_1(V)) \quad &= g(d\pi_1(V), d\pi_1(V)) = 0 \\ &\Rightarrow d\pi_1(V) = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g_{M\times B}(V, d\pi_2(V)) \quad &= g(d\pi_2(V), d\pi_2(V)) = 0 \\ &\Rightarrow d\pi_2(V) = 0 \end{aligned}$$

olur. Bu ifadelerden $V = 0$ elde edilir. Bu ise $g_{M\times B}$ pozitif tanımlı olduğunu gösterir. Şimdi de

$$\pi_1 : (M \times B, g_{M\times B}) \to (M, g)$$

ve

$$\pi_2 : (M \times B, g_{M\times B}) \to (B, g^{'})$$

projeksiyonlarını gözönüne alalım. Açıkça görülürki π_1 ve π_2 birer Riemann submersiyondur[12].

II.1.3.Örnek. (Ortogonal projeksiyon)

$$\begin{aligned} \pi : R^m &\to R^n \qquad m \geq n \geq 1 \\ (x_1, ..., x_m) &\to (x_1, ..., x_n) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan bir dönüşümdür. $x \in R^m$ noktasında yatay uzay

$$\mathcal{H}_x = Sp\,\{\frac{\partial}{\partial\, x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial\, x_n}\}$$

ve dikey uzay

$$\mathcal{V}_x = Sp\,\{\frac{\partial}{\partial\, x_{n+1}}, ..., \frac{\partial}{\partial\, x_m}\}$$

şeklindedir. π nin lifleri total geodeziktir. Yatay distribüsyon integrallenebilirdir ve

$$x_{n+1} = ... = x_m = sabit$$

ile verilen integral altmanifoldları total geodeziktir[1].

II.1.1. Önerme. (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları

$$\pi : (M, g) \to (B, g^{'})$$

bir Riemann submersiyonu, ∇ ve ∇' sırasıyla M ve B nin Levi-Civita konneksiyonları olsun. M üzerindeki X, Y temel vektör alanları , X', Y' vektör alanlarına π-bağlı olsun. Bu durumda

(i) $g(X, Y) = g'(X', Y') \circ \pi$;

(ii) $h[X, Y]$ temel vektör alanı, $[X', Y']$ vektör alanına $\pi-$ bağlıdır.

(iii) $h(\nabla_X Y)$ temel vektör alanı ve $\nabla'_{X'} Y'$ $\pi-$ bağlıdır.

(iv) Herhangi bir $V \in \chi^v(M)$ için, $[X, V]$ dikey vektör alanıdır.

İspat. (i) $p \in M$, $X, Y \in \chi^b(M)$ için

$$g_p(X, Y) = g'_{\pi(p)}(\pi_{*p} X, \pi_{*p} Y)$$

dir. Buradan

$$g(X, Y) = g'(X', Y') \circ \pi$$

elde edilir.

(ii) $X, Y \in \chi^b(M)$ için

$$\begin{aligned} \pi_*([X, Y]) &= \pi_* h([X, Y]) + \pi_* v([X, Y]) \\ &= \pi_* h([X, Y]) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \pi_* h([X, Y]) &= [\pi_* X, \pi_* Y] \\ &= [X', Y'] \circ \pi \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$h[X,Y] \sim [X^{'},Y^{'}] \circ \pi$$

bulunur. Yani, $h[X,Y]$ temel vektör alanı $[X^{'},Y^{'}]$ ne $\pi-$bağlıdır.

(iii) (I.2.3) ten herhangi bir $X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
X[g(Y,Z)] \quad + \quad & Y[g(Z,X)] - Z[g(X,Y)] \\
& = g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y Z, X) \\
& + g(\nabla_Y X, Z) - g(\nabla_Z X, Y) - g(\nabla_Z Y, X) \\
& = g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z) + g(\nabla_X Z - \nabla_Z X, Y) \\
& + g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X) \\
& = g(2\nabla_X Y - [X,Y], Z) + g([X,Z],Y) + g([Y,Z],X)
\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y, Z) \quad & = X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) \\
& + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X) \quad \text{(II.1.4)}
\end{aligned}$$

elde edilir. O zaman X,Y,Z temel vektör alanları $X^{'},Y^{'},Z^{'}$ vektör alanlarının yatay liftleri olarak göz önüne alınırsa, herbiri için;

$$\begin{aligned}
X(g(Y,Z)) &= X(g^{'}(Y^{'},Z^{'})) \circ \pi = X^{'}(g^{'}(Y^{'},Z^{'})) \circ \pi \\
Y(g(X,Z)) &= Y(g'(X^{'},Z^{'})) \circ \pi = Y^{'}(g^{'}(X^{'},Z^{'})) \circ \pi \\
Z(g(X,Y)) &= Z(g^{'}(X^{'},Y^{'})) \circ \pi = Z^{'}(g^{'}(X^{'},Y^{'})) \circ \pi \\
g([X,Y],Z) &= g^{'}([X^{'},Y^{'}],Z^{'}) \circ \pi \\
g([Z,X],Y) &= g^{'}([Z^{'},X^{'}],Y^{'}) \circ \pi \\
g([Y,Z],X) &= g^{'}([Y^{'},Z^{'}],X^{'}) \circ \pi
\end{aligned}$$

dir ve Levi-Civita konneksiyonu ile bağıntıya girdiğinde,

$$g^{'}(\pi_*(h\nabla_X Y), Z^{'})\circ\pi = g(h\nabla_X Y, Z) = g^{'}(\nabla^{'}_{X^{'}}Y^{'}, Z^{'})\circ\pi$$

elde edilir. π dönüşümü örten ve $Z^{'}$ keyfi seçildiğinden, $h\nabla_X Y$ temel vektör alanı $\nabla^{'}_{X^{'}}Y^{'}$ vektör alanına $\pi-$ bağlıdır.

(iv) Herhangi bir $V\in\chi^v(M)$ ve $X\in\chi^b(M)$ için X temel vektör alanı $X^{'}$ vektör alanına $\pi-$ bağlı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\pi_*[X,V] &= [\pi_*X, \pi_*V]\\ &= [X^{'},0]\circ\pi\\ &= [X^{'},0]\\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $[X,V]$ ve $[X^{'},0]$, π- bağlıdır.

II.2. Temel Tensörler

Bu alt bölümde O'Neill tarafından, Riemann submersiyonları için tanımlanan temel tensörler ve onların temel özelikleri araştırılacaktır.

II.2.1.Tanım. (M,g) ve $(B,g^{'})$ Riemann manifoldları ve

$$\pi:(M,g)\to(B,g^{'})$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $(1,2)$ mertebeli T **temel tensör alanı**

$$T(E,F) = T_E F = h\nabla_{vE}vF + v\nabla_{vE}hF, \quad E,F\in\chi(M) \qquad \text{(II.2.1)}$$

ile tanımlanır [6].

Burada, v ve h sembolleri sırasıyla $\mathcal{V}$ ve $\mathcal{H}$ üzerinde ortogonal projeksiyonlar ve ∇ (M, g) nin Levi-Civita konneksiyonudur.

T temel tensör alanı aşağıdaki özelikleri sağlar[12]:

(i) $E \in \chi(M)$ için T_E anti-simetrik ve lineer operatördür.

(ii) $E \in \chi(M)$ için T_E yatay ve dikey altuzaylarının rollerini değiştirir.

(iii) T dikey tensör alanıdır. Yani,$E \in \chi(M)$ için, $T_E = T_{vE}$ dir.

(iv) T dikey tensör alanı simetriktir. Yani $V, W \in \chi^v(M)$ için

$$T_V W = T_W V$$

dır.

Yukarıda verilen özellikler daha sonra ispatlanacaktır.

II.2.2.Tanım. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \rightarrow (B, g')$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $(1, 2)$ mertebeli A **temel tensör alanı**

$$A(E, F) = A_E F = v\nabla_{hE} hF + h\nabla_{hE} vF, \quad E, F \in \chi(M) \qquad \text{(II.2.2)}$$

ile tanımlanır [6].

A temel tensör alanı aşağıdaki özelikleri sağlar[12]:

(i) $E \in \chi(M)$ için A_E anti-simetrik ve lineer operatördür.

(ii) $E \in \chi(M)$ için A_E yatay ve dikey altuzaylarının rollerini değiştirir.

(iii) A yatay tensör alanıdır. Yani, $E \in \chi(M)$ için, $A_E = A_{hE}$ dir.

(iv) A yatay tensör alanı alterleyendir. Yani $X, Y \in \chi^h(M)$ için

$$A_X Y = -A_Y X$$

dır.

A tensör alanı için verilen özellikler daha sonra ispatlanacaktır.

II.2.1.Lemma. (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \to (B, g^{'})$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda A_E ve T_E anti-simetrik operatörlerdir. Herhangi bir $E, F, G \in \chi(M)$ için

$$g(T_E F, G) = -g(T_E G, F) \qquad \text{(II.2.3)}$$

$$g(A_E F, G) = -g(A_E G, F) \qquad \text{(II.2.4)}$$

dır[6].

İspat. E, G dikey vektör alanları ve F yatay vektör alanı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} T_E F &= h\nabla_{vE} vF + v\nabla_{vE} hF \\ &= v\nabla_E F \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T_E G &= h\nabla_{vE} vG + v\nabla_{vE} hG \\ &= h\nabla_E G \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} E(g(F,G)) &= g(\nabla_E F, G) + g(\nabla_E G, F) \\ 0 &= g(T_E F, G) + g(T_E G, F) \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer yolla A_E nin anti-simetrikliğini gösterelim. E, G yatay vektör alanları ve F dikey vektör alanı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} A_E F &= v\nabla_{hE} hF + h\nabla_{hE} vF \\ &= h\nabla_E F \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} A_E G &= v\nabla_{hE} hG + h\nabla_{hE} vG \\ &= v\nabla_E G \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} E(g(F,G)) &= g(\nabla_E F, G) + g(\nabla_E G, F) \\ 0 &= g(A_E F, G) + g(A_E G, F) \end{aligned}$$

elde edilir.

(M, g) bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ olsun. Kolayca görülür ki, herhangi bir $u, w \in T_pM$ için $T_E F(p)$ ve $A_E F(p)$, M üzerindeki E, F vektör alanlarının seçiminden bağımsızdır öyleki;

$$E(p) = u, \qquad F(p) = w$$

dir.

II.2.3.Tanım. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ olsun. T_pM üzerindeki T_u, A_u **lineer operatörleri**

$$T_u w = (T_E F)(p), \quad A_u w = (A_E F)(p) \tag{II.2.5}$$

ile tanımlanır. Burada $E, F \in \chi(M)$ ve $E(p) = u, \quad F(p) = w$ dir[6].

II.2.1. Önerme. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \to (B, g')$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Herhangi bir $p \in M$,$u \in T_pM$ için; T_u ve A_u operatörleri (T_pM, g_p) üzerinde anti-simetrik operatörlerdir ve $p \in M$ noktasında yatay ve dikey altuzaylarının rollerini değiştirirler[15].

İspat. Anti-simetrik özeliği Lemma II.2.1 den elde edilir. Şimdi T ve A tensörlerinin verilen özelliklerini gösterelim. E bir vektör alanı öyleki $E(p) = u$ ve herhangi bir $w \in \mathcal{V}_p$ için, F bir dikey vektör alanı öyleki $F(p) = w$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} T_u w &= (h\nabla_{vE} vF)(p) + (v\nabla_{vE} hF)(p) \\ &= (h\nabla_{vE} F)(p) \in \mathcal{H}_p \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer olarak, herhangi bir $w \in \mathcal{H}_p$ için, F bir yatay vektör alanı öyleki $F(p) = w$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} T_u w &= (h\nabla_{vE} vF)(p) + (v\nabla_{vE} hF)(p) \\ &= (v\nabla_{vE} F)(p) \in \mathcal{V}_p \end{aligned}$$

dir.

Benzer olarak, $u \in T_pM$ verilsin. E bir vektör alanı öyleki $E(p) = u$ ve herhangi bir $w \in \mathcal{H}_p$ için, F bir yatay vektör alanı öyleki $F(p) = w$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} A_u w &= (v\nabla_{hE} hF)(p) + (h\nabla_{hE} vF)(p) \\ &= (v\nabla_{hE} F)(p) \in \mathcal{V}_p \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer olarak, herhangi bir $w \in \mathcal{V}_p$ için, F bir dikey vektör alanı öyleki $F(p) = w$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} A_u w &= (v\nabla_{hE} hF)(p) + (h\nabla_{hE} vF)(p) \\ &= (h\nabla_{hE} F)(p) \in \mathcal{H}_p \end{aligned}$$

elde edilir.

II.2.2. Önerme. (M,g) ve $(B,g^{'})$ Riemann manifoldları ve

$$\pi:(M,g)\to(B,g^{'})$$

bir Riemann submersiyonu olmak üzere, tensör alanları T ve A aşağıdaki özelikleri sağlar[11]:

(i) $T_UW=T_WU$, $\quad U,W\in\chi^v(M)$;

(ii) $A_XY=-A_YX$, $\quad X,Y\in\chi^h(M)$;

(iii) $A_XY=\frac{1}{2}v[X,Y]$, $\quad X,Y\in\chi^h(M)$

dır.

İspat. (i) $U,W\in\chi^v(M)$ için

$$\begin{aligned}T_UW &= h\nabla_{vU}vW+v\nabla_{vU}hW\\ T_WU &= h\nabla_{vW}vU+v\nabla_{vW}hU\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}T_UW-T_WU \quad &= h(\nabla_{vU}vW-\nabla_{vW}uU)\\ &+v(v\nabla_{vU}hW-v\nabla_{vW}hU)\\ &= h[U,W]\\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$T_U W = T_W U$$

elde edilir.

(ii) Herhangi bir $X \in \chi^h(M)$ için, $A_X X = 0$ olduğunu göstermeliyiz. X temel vektör alanı olsun. Önerme II.1.1 in (iv) ünden, herhangi bir $W \in \chi^v(M)$ için

$$\begin{aligned} W(g(X,X)) &= g(\nabla_W X, X) + g(X, \nabla_W X) \\ &= 2g(\nabla_W X, X) = 2g(\nabla_X W, X) \\ &= -2g(\nabla_X X, W) \\ &= -2g(A_X X, W) \end{aligned}$$

dır.Buradan

$$\begin{aligned} g(A_X X, W) &= -\frac{1}{2} W(g(X,X))) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Çünkü $g(X,X)$ her lif üzerinde sabittir. Buradan $A_X X$ in dikey vektör alanı olduğu sonucuna varılır. Yani

$$A_X X = 0, \quad A_X X = v(\nabla_X X)$$

dır. X keyfi olduğundan

$$A_{X+Y} X + Y = 0$$

yazılabilir. Üstelik A lineer olduğundan

$$A_{X+Y} X + Y = A_X X + A_X Y + A_Y X + A_Y Y$$

$$
\begin{aligned}
&= A_X Y + A_Y X \\
0 &= A_X Y + A_Y X
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan (ii) ispatlanmış olur.

(iii) $X, Y \in \chi^h(M)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
v[X, Y] &= v(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
&= A_X Y - A_Y X \\
&= 2A_X Y
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Aksi belirtilmedikçe liflerin geometriksel özelikleri ^ sembolü ile gösterilecektir. Örneğin kovaryant türev için,

$$\hat{\nabla}_V W = v\nabla_V W$$

dır. Burada V ve W dikey vektör alanlarıdır.

II.2.2.Lemma. (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \to (B, g^{'})$$

bir Riemann submersiyonu olmak üzere, $X, Y \in \chi^h(M)$ ve $V, W \in \chi^v(M)$ için

(i) $\nabla_V W = T_V W + \hat{\nabla}_V W$,

(ii) $\nabla_V X = h\nabla_V X + T_V X$,

(iii) $\nabla_X V = A_X V + v\nabla_X V$,

(iv) $\nabla_X Y = h\nabla_X Y + A_X Y$

dır. Ayrıca, X temel vektör alanı ise; $[X, V]$ dikey vektör alanı olduğundan

$$h\nabla_V X = h\nabla_X V = A_X V$$

dur[11].

İspat. (i) (II.2.1) den

$$\begin{aligned} T_V W &= h\nabla_{vV} vW + v\nabla_{vV} hW \\ &= h\nabla_V W \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\nabla_V W = h\nabla_V W + v\nabla_V W$$

olduğundan

$$\nabla_V W = T_V W + \hat{\nabla}_V W$$

elde edilir.

(ii) (II.2.1) den

$$\begin{aligned} T_V X &= h\nabla_{vV} vX + v\nabla_{vV} hX \\ &= v\nabla_V X \end{aligned}$$

dır. Diḡer tarftan,

$$\nabla_V X = v\nabla_V X + h\nabla_V X$$

olduḡundan

$$\nabla_V X = h\nabla_V X + T_V X$$

elde edilir.

(iii) (II.2.2) den

$$\begin{aligned} A_X V &= v\nabla_{hX} hV + h\nabla_{hX} vV \\ &= h\nabla_X V \end{aligned}$$

bulunur. Diḡer taraftan,

$$\begin{aligned} \nabla_X V &= h\nabla_X V + v\nabla_X V \\ &= A_X V + v\nabla_X V \end{aligned}$$

dır.

(iv) Benzer yolla,

$$\begin{aligned} A_X Y &= v\nabla_{hX} hY + h\nabla_{hX} vY \\ &= v\nabla_X Y \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= h\nabla_X Y + v\nabla_X Y \\ &= h\nabla_X Y + A_X Y \end{aligned}$$

dir.

II.3. T ve A Temel Tensörlerinin Geometrik Anlamı

Bu altbölümde, temel tensör alanlarının, Riemann submersiyonun geometrisini incelemede nasıl bir rol oynadığı ve bunların geometrik anlamları araştırılacaktır. Önerme II.2.2 den kolayca görülür ki, $T_U W$ liflerin ikinci temel formuna, $A_X Y$ ise yatay distribüsyonun integrallenebilirlik tensörüne karşılık gelir.

II.3.1.Teorem. (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları,

$$\pi : (M, g) \to (B, g^{'})$$

bir Riemann submersiyonu ve (M, g) üzerindeki yatay distribüsyon $\mathcal{H}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{H}$ yatay distribüsyonnun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $A = 0$ olmasıdır[6].

İspat. Herhangi bir $X, Y \in \chi^h(M)$ için

$$\begin{aligned} A_X Y &= v\nabla_{hX} hY + h\nabla_{hX} vY \\ &= v\nabla_X Y \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$A_X Y - A_Y X = v[X, Y]$$

elde edilir. Burada Önerme II.2.2 (ii) kullanılırsa

$$2A_X Y = v[X, Y]$$

olur. Diğer taraftan, $U \in \chi^v(M)$ için

$$\begin{aligned} A_U = A_{hU} \Rightarrow A_{hU} &= 0 \\ \Rightarrow A &= 0 \end{aligned}$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

II.3.1. Tanım. (M,g) ve $(B,g^{'})$ Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M,g) \rightarrow (B,g^{'})$$

bir Riemann submersiyonu olsun. (M,g) Riemann manifoldunun dikey distribüsyonu $\mathcal{V}$, yatay distribüsyon $\mathcal{H}$ üzerine olan projeksiyonlar v ve h olmak üzere

$$\bar{\nabla}_E F = v(\nabla_E vF) + h(\nabla_E hF) \quad , E, F \in \chi(M) \tag{II.3.1}$$

ile tanımlı konneksiyona **Schouten konneksiyonu** adı verilir [6].

II.3.1.Lemma. (M,g) ve $(B,g^{'})$ Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M,g) \rightarrow (B,g^{'})$$

bir Riemann submersiyonu verilsin. Bu durumda, her $E,F \in \chi(M)$ için

$$\nabla_E F = \bar{\nabla}_E F + T_E F + A_E F \tag{II.3.2}$$

dır [6].

İspat. Schouten konneksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_E F \quad &= v(\nabla_E vF) + h(\nabla_E hF) \\
&= v(\nabla_{vE+hE} vF) + h(\nabla_{vE+hE} hF) \\
&= v\nabla_{vE} vF + v\nabla_{hE} vF + h\nabla_{vE} hF + h\nabla_{hE} hF \\
&= v\nabla_{vE} vF + v\nabla_{hE} vF + h\nabla_{vE} hF \\
&+ h\nabla_{hE} hF + \nabla_E F - \nabla_E F
\end{aligned} \tag{II.3.3}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\nabla_E F &= h\nabla_E F + v\nabla_E F \\
&= h(\nabla_{(vE+hE)}(vF + hF)) + v(\nabla_{(vE+hE)}(vF + hF)) \\
&= h\nabla_{vE}vF + h\nabla_{vE}hF + h\nabla_{hE}vF + h\nabla_{hE}hF \\
&+v\nabla_{vE}vF + v\nabla_{vE}hF + v\nabla_{hE}vF + v\nabla_{hE}hF \qquad \text{(II.3.4)}
\end{aligned}$$

bulunur. (II.3.4), (II.3.3) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_E F &= v\nabla_{vE}vF + v\nabla_{hE}vF + h\nabla_{vE}hF + h\nabla_{hE}hF + \nabla_E F \\
&-h\nabla_{vE}vF - h\nabla_{vE}hF - h\nabla_{hE}vF - h\nabla_{hE}hF \\
&-v\nabla_{vE}vF - v\nabla_{vE}hF - v\nabla_{hE}vF - v\nabla_{hE}hF \\
&= \nabla_E F - (h\nabla_{vE}vF + v\nabla_{vE}hF) - (v\nabla_{hE}hF + h\nabla_{hE}vF)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (II.2.1) ve (II.2.2) kullanılırsa

$$\bar{\nabla}_E F = \nabla_E F - T_E F - A_E F$$

olur. Buradan

$$\nabla_E F = \bar{\nabla}_E F + T_E F + A_E F$$

elde edilir.

II.3.1.Önerme . (M^m, g) ve $(B^n, g^{'})$ Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M^m, g) \longrightarrow (B^n, g^{'})$$

Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $x \in B$ için, herhangi bir $\pi^{-1}(x)$ lifi üzerinde $\bar{\nabla}$ Schouten konneksiyonu, g metrik tensöründen indirgenen metrik tarafından belirlenen Levi-Civita konneksiyonu ile çakışır [6].

İspat. Herhangi bir $U, W \in \chi^v(M)$ için

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_U W &= v(\nabla_U vW) + h(\nabla_U hW) \\ &= v(\nabla_U vW) \end{aligned} \qquad \text{(II.3.5)}$$

bulunur. Diğer taraftan, (II.2.1) ve (II.2.2) den

$$\begin{aligned} T_U W &= h\nabla_{vU} vW + v\nabla_{vU} hW \\ &= h\nabla_{vU} vW \end{aligned} \qquad \text{(II.3.6)}$$

ve

$$\begin{aligned} A_U W &= v\nabla_{hU} hW + h\nabla_{hU} vW \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(II.3.7)}$$

elde edilir. Böylece (II.3.5), (II.3.6) ve (II.3.7) kullanılırsa

$$\nabla_U W = \bar{\nabla}_U W + T_U W, \quad U, W \in \chi^v(M) \qquad \text{(II.3.8)}$$

elde edilir.

Bu yüzden, T dikey tensör alanının $\chi^v(M) \times \chi^v(M)$ ye kısıtlanması herhangi bir lifin ikinci temel formuna karşılık gelir. (II.3.8) denklemine **Gauss denklemi** ve T ye **ikinci temel formu** denir.

Böylece altmanifoldlar teorisine ([4], [10]) uygun olarak, aşağıdaki tanım verilebilir.

II.3.2.Tanım. (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \longrightarrow (B, g^{'})$$

Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda eḡer T tensör alanı sıfır ise π nin herhangi bir lifine M nin total geodezik altmanifoldu denir[6].

III. BÖLÜM

RİEMANN SUBMERSİYONLAR İÇİN TEMEL DENKLEMLER

Bu bölümde, önce temel tensörlerin kovaryant türevleri elde edilmekte ve temel özellikleri incelenmektedir. Sonra da bu özellikler kullanılarak iki manifoldun eğrilikleri arasındaki bağıntılar elde edilmektedir.

III.1. T ve A Temel Tensörlerinin Kovaryant Türevleri

III.1.1.Tanım. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $E, F, H \in \chi(M)$ olsun. $(1, 2)$ mertebeli A ve T tensör alanlarının **kovaryant türevleri**

$$(\nabla_E A)_F H = (\nabla_E A)(F, H) = \nabla_E(A_F H) - A_{\nabla_E F}(H) - A_F(\nabla_E H)$$

ve

$$(\nabla_E T)_F H = (\nabla_E T)(F, H) = \nabla_E(T_F H) - T_{\nabla_E F}(H) - T_F(\nabla_E H)$$

ile tanımlanır. Bu durumda ∇A ve ∇T $(1, 1)-$ mertebeli tensör alanları olarak elde edilirler[10].

III.1.1.Lemma. (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \to (B, g^{'})$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $X, Y \in \chi^h(M)$ ve $V, W \in \chi^v(M)$ için

(i) $(\nabla_V A)_W = -A_{T_V W}$,

(ii) $(\nabla_X T)_Y = -T_{A_X Y}$,

(iii) $(\nabla_X A)_W = -A_{A_X W}$,

(iv) $(\nabla_V T)_Y = -T_{T_V Y}$
dır[11].

İspat. (i) M üzerinde keyfi bir vektör alanı E olsun. O zaman,

$$(\nabla_V A)_W E = \nabla_V (A_W E) - A_{\nabla_V W}(E) - A_W(\nabla_V E)$$

dır. $A_X = A_{hX}$ yatay tensör alanı olduğundan , $W \in \chi^v(M)$ için

$$A_W = A_{hW} = 0 \qquad \text{(III.1.1)}$$

dır. Lemma II.2.2 den,

$$\begin{aligned} A_{\nabla_V W}(E) &= A_{(T_V W + v\nabla_V W)}(E) \\ &= A_{T_V W}(E) + A_{v\nabla_V W}(E) \\ &= A_{T_V W}(E) \qquad \text{(III.1.2)} \end{aligned}$$

dır. (III.1.1) ve (III.1.2) ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$(\nabla_V A)_W E = (\nabla_V A)(W, E) = -A_{T_V W}(E)$$

bulunur.

(ii) M üzerinde keyfi bir vektör alanı E olsun. O zaman,

$$(\nabla_X T)_Y E = \nabla_X(T_Y E) - T_{\nabla_X Y}(E) - T_Y(\nabla_X E)$$

dır. $T_W = T_{vW}$ dikey tensör alanı olduğundan , $Y \in \chi^h(M)$ için

$$T_Y = T_{vY} = 0 \tag{III.1.3}$$

dır. Lemma II.2.2 den,

$$\begin{aligned} T_{\nabla_X Y}(E) &= T_{(A_X Y + h\nabla_X Y)}(E) \\ &= T_{A_X Y}(E) + T_{h\nabla_X Y}(E) \\ &= T_{A_X Y}(E) \end{aligned} \tag{III.1.4}$$

dır. (III.1.3) ve (III.1.4) denklemleri yerlerine yazılırsa,

$$(\nabla_X T)_Y E = (\nabla_X T)(Y, E) = -T_{A_X Y}(E)$$

bulunur.

(iii) Benzer olarak, A tensör alanının kovaryant türevi

$$(\nabla_X A)_W E = \nabla_X(A_W E) - A_{\nabla_X W}(E) - A_W(\nabla_X E)$$

dır. $A_X = A_{hX}$ yatay tensör alanı olduğundan , $W \in \chi^v(M)$ için

$$A_W = A_{hW} = 0 \tag{III.1.5}$$

elde edilir. Lemma II.2.2 den,

$$\begin{aligned} A_{\nabla_X W}(E) &= A_{(A_X W + v\nabla_X W)}(E) \\ &= A_{A_X W}(E) + A_{v\nabla_X W}(E) \\ &= A_{A_X W}(E) \end{aligned} \tag{III.1.6}$$

olur. (III.1.5) ve (III.1.6) ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$(\nabla_X A)_W E = (\nabla_X A)(W, E) = -A_{A_X W}(E)$$

bulunur.

(iv) M üzerinde keyfi bir vektör alanı E olsun. O zaman,

$$(\nabla_V T)_Y E = \nabla_V (T_Y E) - T_{\nabla_V Y}(E) - T_Y(\nabla_V E)$$

olur. $T_V = T_{vV}$ dikey tensör alanı olduğundan , $Y \in \chi^h(M)$ için

$$T_Y = T_{vY} = 0 \tag{III.1.7}$$

dır. Lemma II.2.2 den,

$$\begin{aligned} T_{\nabla_V Y}(E) &= T_{(T_V Y + h\nabla_V Y)}(E) \\ &= T_{T_V Y}(E) + T_{h\nabla_V Y}(E) \\ &= T_{T_V Y}(E) \end{aligned} \tag{III.1.8}$$

elde edilir. (III.1.7) ve (III.1.8) değerleri yerlerine yazılırsa,

$$(\nabla_V T)_Y E = (\nabla_V T)(Y, E) = -T_{T_V Y}(E)$$

bulunur.

T_E veA_E her noktada anti-simetrik ve lineer operatörlerdir. Aşağıdaki lemma, bu tensör alanlarının kovaryant türevleri için benzer sonucu ifade etmektedir.

III.1.2. Lemma. (M,g) ve $(B,g^{'})$ Riemann manifoldları ve

$$\pi:(M,g)\rightarrow(B,g^{'})$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $E\in\chi(M)$, $Y,X\in\chi^h(M)$ ve $U,V,W\in\chi^v(M)$ için

(i) $g((\nabla_U A)_X V,W)=g(T_U V,A_X W)-g(T_U W,A_X V)$;

(ii) ∇T simetriktir. Yani, $g((\nabla_E T)_V W,X)=g((\nabla_E T)_W V,X)$;

(iii) ∇A anti-simetriktir. Yani, $g((\nabla_E A)_X Y,V)=-g((\nabla_E A)_Y X,V)$ dır[6].

İspat. (i) Tanım III.1.1,Lemma II.2.1 ve Lemma II.2.2 den,

$$\begin{aligned} g((\nabla_U A)_X V,W) &= g(\nabla_U(A_X V)-A_{\nabla_U X}(V)-A_X(\nabla_U V),W)\\ &= g(\nabla_U(A_X V),W)-g(A_{\nabla_U X}(V),W)\\ &\quad -g(A_X(\nabla_U V),W)\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} g(\nabla_U(A_X V),W) &= -g(A_X V,\nabla_U W)\\ &= -g(A_X V,T_U W+v\nabla_U W)\\ &= -g(A_X V,T_U W)-g(A_X V,v\nabla_U W)\\ &= -g(A_X V,T_U W) \qquad \text{(III.1.9)}\end{aligned}$$

bulunur. Benzer olarak

$$g(A_{\nabla_U X}(V),W) = g(A_{h\nabla_U X}V+A_{T_U X}V,W)$$

$$
\begin{aligned}
&= g(A_{h\nabla_U X}V, W) + g(A_{T_U X}V, W) \\
&= 0 \qquad \text{(III.1.10)}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
g(A_X(\nabla_U V), W) &= g(A_X(T_U V), W) + g(A_X(v\nabla_U V), W) \\
&= -g(T_U V, A_X W) \qquad \text{(III.1.11)}
\end{aligned}
$$

bulunur. (III.1.9) , (III.1.10) ve (III.1.11) değerleri yerlerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
g((\nabla_U A)_X V, W) &= -g(T_U W, A_X V) - 0 - (-g(T_U V, A_X W)) \\
&= g(T_U V, A_X W) - g(T_U W, A_X V)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(ii) Tanım III.1.1 ve Önerme II.2.2 den

$$
\begin{aligned}
g((\nabla_E T)_V W, X) &= g(\nabla_E T_V W, X) - g(T_{\nabla_E V} W, X) - g(T_V \nabla_E W, X) \\
&= g(\nabla_E T_W V, X) - g(T_W \nabla_E V, X) - g(T_{\nabla_E W} V, X) \\
&= g(\nabla_E T_W V - T_{\nabla_E W} V - T_W \nabla_E V, X) \\
&= g((\nabla_E T)_W V, X)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(iii) Tanım III.1.1 ve Önerme II.2.2 den

$$
\begin{aligned}
g((\nabla_E A)_X Y, V) &= g(\nabla_E A_X Y, V) - g(A_{\nabla_E X} Y, V) - g(A_X \nabla_E Y, V) \\
&= g(-\nabla_E A_Y X, V) - g(-A_Y \nabla_E X, V) - g(-A_{\nabla_E Y} X, V) \\
&= -[g(\nabla_E A_Y X - A_{\nabla_E Y} X - A_Y \nabla_E X, V)] \\
&= -g((\nabla_E A)_Y X, V)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

III.1.3. Lemma. (M,g) ve $(B,g^{'})$ Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M,g) \to (B,g^{'})$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $X,Y,Z \in \chi^h(M)$ ve $V \in \chi^v(M)$ için

$$\sigma g((\nabla_Z A)_X Y, V) = \sigma g(A_X Y, T_V Z)$$

dır[6]. Burada σ, X,Y ve Z yatay vektör alanları üzerindeki toplamı ifade ediyor.

İspat. Bu bir tensör denklemi olduğu için ; X,Y ve Z vektör alanlarını temel ve $[X,Y],[Y,Z],[Z,X]$ braketlerini dikey kabul edebiliriz. Böylece

$$\frac{1}{2}[X,Y] = A_X Y$$

özdeşliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g([[X,Y],Z],V) &= g([A_X Y, Z], V) \\ &= g(\nabla_{A_X Y} Z, V) - g(\nabla_Z (A_X Y), V) \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} g(\nabla_{A_X Y} Z, V) &= g(h\nabla_{A_X Y} Z + T_{A_X Y} Z, V) \\ &= g(T_{A_X Y} Z, V) \\ &= -g(Z, T_{A_X Y} V) \\ &= -g(Z, T_V (A_X Y)) \\ &= g(T_V Z, A_X Y) \end{aligned}$$

olduğundan, Jacobi özdeşliğinden,

$$\sigma g(\nabla_Z(A_X Y), V) = \sigma g(T_V Z, A_X Y)$$

elde edilir. Böylece

$$\sigma g(\nabla_Z A_X Y, V) = \sigma g((\nabla_Z A)_X Y, V)$$

eşitliğini gösterirsek ispat tamamlanmış olur. A tensör alanının kovaryant türevinden

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z(A_X Y), V) &- g((\nabla_Z A)_X Y, V) \\ &= g(\nabla_Z(A_X Y), V) - g(\nabla_Z(A_X Y), V) + g(A_{\nabla_Z X} Y, V) \\ &+ g(A_X(\nabla_Z Y), V) \\ &= g(A_{\nabla_Z X} Y, V) + g(A_X(\nabla_Z Y), V) \end{aligned}$$

dır. Bu denklemde eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim

$$g(A_{\nabla_Z X} Y, V) = -g(A_Y(h\nabla_Z X), V)$$

ve $[X, Z] = 0$ olduğundan

$$g(A_{\nabla_Z X} Y, V) = -g(A_Y(h\nabla_X Z), V)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z(A_X Y), V) - g((\nabla_Z A)_X Y, V) &= -g(A_Y(\nabla_X Z), V) + g(A_X(\nabla_Z Y), V) \\ g(\nabla_Z(A_X Y), V) &= g((\nabla_Z A)_X Y, V) \end{aligned}$$

bulunur. O halde,

$$\sigma g((\nabla_Z A)_X Y, V) = \sigma g(A_X Y, T_V Z)$$

dır.

III.1.1. Önerme. (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \to (B, g^{'})$$

bir Riemann submersiyonu olmak üzere

(i) A yatay tensör alanı paralel ise, $A = 0$.

(ii) T dikey tensör alanı paralel ise, $T = 0$ dır [6].

İspat. (i) Herhangi bir $X \in \chi^h(M)$ ve $W \in \chi^v(M)$ için A tensör alanının kovaryant türevi

$$\begin{aligned} g((\nabla_X A)_W X, W) &= g(\nabla_X (A_W X) - A_{\nabla_X W}(X) - A_W(\nabla_X X), W) \\ &= g(\nabla_X (A_W X), W) - g(A_{\nabla_X W}(X), W) - g(A_W(\nabla_X X), W) \end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan, Lemma III.1.1,Lemma II.2.2, Lemma II.2.1 ve Önerme II.2.2 kullanılırsa ,

$$\begin{aligned} g((\nabla_X A)_W X, W) &= -g(A_{\nabla_X W}(X), W) \\ &= -g(A_{(A_X W + v\nabla_X W)}(X), W) \\ &= -g(A_{A_X W}(X), W) - g(A_{v\nabla_X W}(X), W) \\ &= g(A_X A_X W, W) \\ &= -g(A_X W, A_X W) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, A yatay tensör alanı paralel ise A_X dikey distribüsyon üzerinde sıfırdır. Yani,

$$A_X W = 0$$

dır. Ayrıca Lemma II.2.1 den $g(A_X W, Y) = -g(A_X Y, W) = 0$ elde edilir. $A_X Y$ dikey distribüsyonuna ait bir vektör alanı ve W keyfi bir dikey vektör alanı olduğundan, $A_X Y = 0$ olur. Böylece $A_X Y = 0$ ve $A_X W = 0$ olduğundan, $A_X = 0$ dır. Üstelik, yatay tensör alanı $A_E = A_{hE}$ olduğundan, $W \in \chi^v(M)$ için

$$A_W = A_{hW} = 0$$

dır. Buradan (i) ispatlanmış olur.

(ii) Benzer olarak herhangi bir $X \in \chi^h(M)$ ve $W \in \chi^v(M)$ için T tensör alanının kovaryant türevi

$$\begin{aligned} g((\nabla_W T)_X W, X) &= g(\nabla_W (T_X W) - T_{\nabla_W X}(W) - T_X(\nabla_W W), X) \\ &= g(\nabla_W (T_X W), X) - g(T_{\nabla_W X}(W), X) - g(T_X(\nabla_W W), X) \end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan Lemma III.1.1, Önerme II.2.2 (i) ve Lemma II.2.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} g((\nabla_W T)_X W, X) &= -g(T_{\nabla_W X}(W), X) \\ &= -g(T_{(T_W X + h\nabla_W X)}(W), X) \\ &= -g(T_{T_W X}(W), X) - g(T_{h\nabla_W X}(W), X) \\ &= -g(T_{T_W X}(W), X) \\ &= -g(T_W T_W X, X) \\ &= g(T_W X, T_W X) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $T_W X = 0$ olur. O halde, T dikey tensör alanı paralel ise T_W yatay distribüsyon üzerinde sıfırdır. Diğer taraftan,V bir dikey vektör alanı olmak üzere, Lemma II.2.1 tekrar kullanılırsa $g(T_W X, V = -g(X, T_W V) = 0$ elde edilir. $T_W V$ yatay vektör alanı ve X keyfi vektör alanı olduğundan $T_W V = 0$ dır. Böylece $T_W V = 0$ ve $T_W X = 0$ olduğundan $T_W = 0$ elde edilir. Üstelik, dikey tensör alanı $T_E = T_{vE}$ olduğundan, $X \in \chi^h(M)$ için

$$T_X = T_{vX} = 0$$

dır. Böylece (ii) de ispatlanmış olur.

Daha önce de belirtildiği gibi, A tensör alanı, yatay distribüsyonun integrallenebilirliğini ve T tensör alanı ise liflerin total geodezikliğini karakterize eder. Böylece Önerme III.1.1 den, paralel A tensör alanına sahip bir Riemann submersiyonda yatay distribüsyon integrallenebilir ve paralel T tensör alanına sahip bir Riemann submersiyonunda ise lifler total geodezik olur.

III.2. Eğrilikler Arasındaki Bağıntılar

Bu alt bölümde, manifoldların eğriliklerini, A, T temel tensör alanları ve onların kovaryant türevleri cinsinden elde edeceğiz.

III.2.1.Tanım. (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları ve (M, g) manifoldunun yatay distribüsyonu $\mathcal{H}$ olsun. $X^h(M)$ üzerinde $(1,3)-$ mertebeli eğrilik tensör alanını R^* ile gösterelim. Herhangi bir $X, Y, Z \in \chi^h(M)$ ve $p \in M$ için

$$R^{'}_{\pi(p)}(\pi_{*p}X_p, \pi_{*p}Y_p, \pi_{*p}Z_p)$$

tensörünün yatay lifti $R^*(X,Y,Z)$ ile ifade edilir. $(B,g^{'})$ manifoldunun $R^{'}$ **Riemann eğriliği** kısaca;

$$\pi_*(R^*(X,Y,Z)) = R^{'}(\pi_*X,\pi_*Y,\pi_*Z)$$

ile tanımlanabilir. Ayrıca, herhangi bir $X,Y,Z,H \in \chi^h(M)$ için

$$\begin{aligned} R^*(X,Y,Z,H) &= g(R^*(X,Y,Z),H) \\ &= R^{'}(\pi_*X,\pi_*Y,\pi_*Z,\pi_*H)\circ\pi \end{aligned}$$

dir[6].

$x \in B$ için, herhangi bir $(\pi^{-1}(x),\hat{g}_x)$ lifinin Riemann eğriliğini de $\hat{R}$ ile gösterelim. Benzer gösterim kovaryant türevlerde de kullanılacaktır.

III.2.1.Teorem. (M,g) ve $(B,g^{'})$ Riemann manifoldları,

$$\pi:(M,g)\to(B,g^{'})$$

bir Riemann submersiyonu ve $R,\hat{R}$ sırasıyla M ve $(\pi^{-1}(x),\hat{g}_x)$ lifinin Riemann eğrilik tensörleri olsun. Bu durumda, herhangi bir $U,V,W,F \in \chi^v(M)$ ve $X \in \chi^h(M)$ için

$$\begin{aligned} g(R(U,V)W,F) &= g(\hat{R}(U,V)W,F) + g(T_UW,T_VF) \\ &\quad -g(T_VW,T_UF) \qquad \text{(III.2.1)} \\ g(R(U,V)W,X) &= g((\nabla_UT)_VW,X) - g((\nabla_VT)_UW,X) \qquad \text{(III.2.2)} \end{aligned}$$

dır[12]. (III.2.1) ve (III.2.2) denklemleri submersiyonlar için Gauss ve Codazzi denklemleri olarak gözönüne alınabilir.

İspat. (I.2.2) den

$$R(U,V)W = \nabla_U \nabla_V W - \nabla_V \nabla_U W - \nabla_{[U,V]} W \tag{III.2.3}$$

dır. Lemma II.2.1 ve Lemma II.2.2 den

$$\begin{aligned} \nabla_U \nabla_V W \quad & = \nabla_U T_V W + \nabla_U \hat{\nabla}_V W \\ & = h\nabla_U T_V W + T_U T_V W \\ & + T_U \hat{\nabla}_V W + \hat{\nabla}_U \hat{\nabla}_V W \end{aligned} \tag{III.2.4}$$

$$\begin{aligned} \nabla_V \nabla_U W \quad & = \nabla_V T_U W + \nabla_V \hat{\nabla}_U W \\ & = h\nabla_V T_U W + T_V T_U W \\ & + T_V \hat{\nabla}_U W + \hat{\nabla}_V \hat{\nabla}_U W \end{aligned} \tag{III.2.5}$$

ve

$$\begin{aligned} \nabla_{[U,V]} W & = T_{[U,V]} W + \hat{\nabla}_{[U,V]} W \\ & = h\nabla_{[U,V]} W + \hat{\nabla}_{[U,V]} W \end{aligned} \tag{III.2.6}$$

bulunur. (III.2.4),(III.2.5) ve (III.2.6) denklemleri (III.2.3) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} R(U,V)W \quad & = h\nabla_U T_V W + T_U T_V W + T_U \hat{\nabla}_V W \\ & + \hat{\nabla}_U \hat{\nabla}_V W - h\nabla_V T_U W - T_V T_U W \\ & - T_V \hat{\nabla}_U W - \hat{\nabla}_V \hat{\nabla}_U W - h\nabla_{[U,V]} W \\ & - \hat{\nabla}_{[U,V]} W \end{aligned} \tag{III.2.7}$$

olur. (III.2.7) denkleminin her iki yanını F ile skaler çarparsak

$$\begin{aligned} g(R(U,V)W,F) \quad & = g(\hat{\nabla}_U \hat{\nabla}_V W - \hat{\nabla}_V \hat{\nabla}_U W - \hat{\nabla}_{[U,V]} W, F) \\ & + g(T_U T_V W, F) - g(T_V T_U W, F) \\ & = g(\hat{R}(U,V)W,F) - g(T_U F, T_V W) + g(T_V F, T_U W) \end{aligned}$$

elde edilir. (III.2.7) denkleminin her iki yanını X ile skaler çarparsak

$$
\begin{aligned}
g(R(U,V)W,X) \quad &= g(h\nabla_U T_V W, X) + g(T_U \hat{\nabla}_V W, X) - g(h\nabla_V T_U W, X) \\
&\quad -g(T_V \hat{\nabla}_U W, X) - g(h\nabla_{[U,V]} W, X) \qquad \text{(III.2.8)}
\end{aligned}
$$

olur. Diğer yandan, direkt işlemlerle

$$
\begin{aligned}
h\nabla_{[U,V]} W &= h\nabla_{\nabla_U V} W - h\nabla_{\nabla_V U} W \\
&= T_{\nabla_U V} W - T_{\nabla_V U} W \qquad \text{(III.2.9)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. (III.2.8) ve (III.2.9) denklemlerinden

$$
\begin{aligned}
g(R(U,V)W,X) \quad &= g(\nabla_U T_V W - T_{\nabla_U V} W - T_V \nabla_U W, X) \\
&\quad -(g(\nabla_V T_U W - T_{\nabla_V U} W - T_U \nabla_V W, X)) \\
&= g((\nabla_U T)_V W, X) - g((\nabla_V T)_U W, X)
\end{aligned}
$$

olur.

III.2.2.Teorem. (M,g) ve$(B,g^{'})$ Riemann manifoldları,

$$\pi : (M,g) \to (B,g^{'})$$

bir Riemann submersiyonu ve $R, R^{'}$ sırasıyla M ve B nin Riemann eğrilik tensörleri olsun. Bu durumda, herhangi bir $X,Y,Z,H \in \chi^h(M)$ ve $V,W \in \chi^v(M)$ için,

$$
\begin{aligned}
g(R(X,Y)Z,H) \quad &= g(R^{'}(X,Y)Z,H) + 2g(A_X Y, A_Z H) \\
&\quad -g(A_Y Z, A_X H) + g(A_X Z, A_Y H) \qquad \text{(III.2.10)} \\
g(R(X,Y)Z,V) \quad &= -g((\nabla_Z A)_X Y, V) - g(A_X Y, T_V Z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +g(A_Y Z, T_V X) - g(A_X Z, T_V Y) && \text{(III.2.11)} \\
g(R(X,Y)V,W) &= g((\nabla_V A)_X Y, W) - g((\nabla_W A)_X Y, V) \\
& +g(A_X V, A_Y W) - g(A_X W, A_Y V) \\
& -g(T_V X, T_W Y) + g(T_W X, T_V Y) && \text{(III.2.12)} \\
g(R(X,V)Y,W) &= g((\nabla_X T)_V W, Y) + g((\nabla_V A)_X Y, W) \\
& -g(T_V X, T_W Y) + g(A_X V, A_Y W) && \text{(III.2.13)}
\end{aligned}
$$

dır[6].

İspat. (III.2.10) ve (III.2.11) denklemlerini ispatlayacağız. Bu iki denklem tensör denklemleri olduğundan; X, Y, Z yi temel vektör alanları ve $[X,Y], [Y,Z], [Z,X]$ braketlerini dikey olarak kabul edebiliriz. Ayrıca

$$[X,Y] = 2A_X Y$$

olduğundan, $h\nabla_X Y$ temel vektör alanını $\nabla'_X Y$ gibi yazabiliriz. Lemma II.2.2 den

$$
\begin{aligned}
\nabla_Y Z &= h\nabla_Y Z + A_Y Z \\
&= \nabla'_Y Z + A_Y Z
\end{aligned}
$$

elde edilir. (I.2.2) den

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

dır. Buradaki bileşenleri bulalım. Lemma II.2.2 den

$$
\begin{aligned}
\nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X (\nabla'_Y Z + A_Y Z) \\
&= \nabla_X \nabla'_Y Z + \nabla_X A_Y Z \\
&= \nabla'_X \nabla'_Y Z + A_X \nabla'_Y Z + A_X A_Y Z + v\nabla_X A_Y Z
\end{aligned}
$$

olur. Benzer olarak

$$\begin{aligned}\nabla_Y \nabla_X Z &= \nabla_Y(\nabla'_X Z + A_X Z)\\ &= \nabla_Y \nabla'_X Z + \nabla_Y A_X Z\\ &= \nabla'_Y \nabla'_X Z + A_Y \nabla'_X Z + A_Y A_X Z + v\nabla_Y A_X Z\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\nabla_{[X,Y]} Z &= h\nabla_{[X,Y]} Z + T_{[X,Y]} Z\\ &= h\nabla_{A_X Y} Z + 2T_{A_X Y} Z\\ &= 2A_Z A_X Y + 2T_{A_X Y} Z\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z \quad &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z\\ &= \nabla'_X \nabla'_Y Z - \nabla'_Y \nabla'_X Z + A_X A_Y Z - A_Y A_X Z - 2A_Z A_X Y\\ &\quad -2T_{A_X Y} Z + v\nabla_X A_Y Z - v\nabla_Y A_X Z + A_X \nabla'_Y Z - A_Y \nabla'_X Z\\ &= R'(X,Y)Z + A_X A_Y Z - A_Y A_X Z - 2A_Z A_X Y - 2T_{A_X Y} Z\\ &\quad +v\nabla_X A_Y Z - v\nabla_Y A_X Z + A_X \nabla'_Y Z - A_Y \nabla'_X Z \qquad \text{(III.2.14)}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $h[X,Y] = 0$ olduğundan

$$\pi_*[X,Y] = 0 \Rightarrow \nabla'_{[X,Y]} Z = 0$$

dır. (III.2.14) denkleminin her iki yanını H ile skaler çarparsak

$$\begin{aligned}g(R(X,Y)Z,H) \quad &= g(R'(X,Y)Z,H) + g(A_X A_Y Z,H) - g(A_Y A_X Z,H)\\ &\quad -2g(A_Z A_X Y,H) - 2g(T_{A_X Y} Z,H) + g(v\nabla_X A_Y Z,H)\\ &\quad -g(v\nabla_Y A_X Z,H) + g(A_X \nabla'_Y Z,H) - g(A_Y \nabla'_X Z,H)\end{aligned}$$

$$= g(R^{'}(X,Y)Z,H) + 2g(A_ZH, A_XY) - g(A_YA_XZ,H)$$
$$+g(A_XA_YZ,H)$$
$$= g(R^{'}(X,Y)Z,H) + 2g(A_ZH, A_XY)$$
$$+g(A_YH, A_XZ) - g(A_XH, A_YZ)$$

elde edilir. (III.2.14) denkleminin her iki yanını V ile skaler çarparsak

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,V) &= g(R^{'}(X,Y)Z,V) + g(A_XA_YZ,V) - g(A_YA_XZ,V) \\ &-2g(A_ZA_XY,V) - 2g(T_{A_XY}Z,V) + g(v\nabla_XA_YZ,V) \\ &-g(v\nabla_YA_XZ,V) + g(A_X\nabla^{'}_YZ,V) - g(A_Y\nabla^{'}_XZ,V) \\ &= -2g(T_{A_XY}Z,V) + g(\nabla_XA_YZ,V) - g(\nabla_YA_XZ,V) \\ &+g(A_X\nabla_YZ,V) - g(A_Y\nabla_XZ,V) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan, Lemma II.2.1 ve Önerme II.2.2 den

$$g(T_{A_XY}Z,V) = -g(T_{A_XY}V,Z) = -g(T_VA_XY,Z) = g(T_VZ,A_XY)$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} &g((\nabla_XA)_YZ,V) - g((\nabla_YA)_XZ,V) \\ &= g(\nabla_XA_YZ,V) - g(A_{\nabla_XY}Z,V) - g(A_Y\nabla_XZ,V) \\ &-g(\nabla_YA_XZ,V) + g(A_{\nabla_YX}Z,V) + g(A_X\nabla_YZ,V) \\ &= g(\nabla_XA_YZ,V) - g(A_Y\nabla_XZ,V) - g(\nabla_YA_XZ,V) \\ &+g(A_X\nabla_YZ,V) \qquad \text{(III.2.15)} \end{aligned}$$

bulunur. $[X,Y]$ dikey olduğundan, $\nabla_XY = \nabla_YX$ alınır. (III.2.15) ve lemma II.2.2 den

$$g(R(X,Y)Z,V) = -2g(T_VZ,A_XY) + g(\nabla_XA_YZ,V)$$

$$-g(A_Y\nabla_X Z, V) - g(\nabla_Y A_X Z, V) + g(A_X \nabla_Y Z, V)$$
$$= -g(\nabla_Z A_X Y - A_{\nabla_Z X} Y - A_X \nabla_Z Y, V)$$
$$-g(A_X Y, T_V Z) + g(A_Y Z, T_V X) - g(A_X Z, T_V Y)$$
$$= -g((\nabla_Z A)_X Y, V) - g(A_X Y, T_V Z)$$
$$+g(A_Y Z, T_V X) - g(A_X Z, T_V Y)$$

elde edilir.

III.2.3.Teorem. (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları

$$\pi : (M, g) \to (B, g^{'})$$

bir Riemann submersiyonu ve $K, K^{'}, \hat{K}$ sırasıyla M, B ve lifin kesit eğrilikleri olsun. X, Y ortonormal yatay vektörler ve U, V ortonormal dikey vektörler olmak üzere

(i) $K(U, V) = \hat{K}(U, V) + \|T_U V\|^2 - g(T_U U, T_V V)$,

(ii) $K(X, Y) = K^{'}(X^{'}, Y^{'}) \circ \pi - 3\|A_X Y\|^2$,

(iii) $K(X, V) = g((\nabla_X T)_V V, X) - \|T_V X\|^2 + \|A_X V\|^2$

dir[12].

İspat. (i) (III.2.1) de W yerine V ve F yerine U alınırsa elde edilir.
(ii) (III.2.10) da Z yerine Y ve H yerine X alınırsa

$$K(X, Y) \;=\; K'(X', Y') + 2g(A_X Y, A_Y X) - g(A_Y Y, A_X X)$$

$$+ \quad g(A_X Y, A_Y X)$$

elde edilir. Burada $A_X X = A_Y Y = 0$ olduğundan, Önerme II.2.2 (ii) kulanılısa denklem elde edilir.

(iii) Tanım I.2.6 dan

$$\begin{aligned} K(X,V) &= K(X,V,X,V) \\ &= g(R(X,V)V,X) \\ &= g(\nabla_X \nabla_V V - \nabla_V \nabla_X V - \nabla_{[X,V]} V, X) \\ &= g(\nabla_X \nabla_V V, X) - g(\nabla_V \nabla_X V, X) - g(\nabla_{\nabla_X V} V, X) \\ &+ g(\nabla_{\nabla_V X} V, X) \end{aligned} \tag{III.2.16}$$

dir. (III.2.16) denkleminin terimlerini bulalım. Lemma II.2.1, Lemma II.2.2 ve Önerme II.2.2 den

$$g(\nabla_X \nabla_V V, X) = g(\nabla_X T_V V + \nabla_X v \nabla_V V, X), \tag{III.2.17}$$

$$g(\nabla_V \nabla_X V, X) = g(h \nabla_V \nabla_X V + T_V \nabla_X V, X), \tag{III.2.18}$$

$$g(\nabla_{\nabla_X V} V, X) = g(A_{\nabla_X V} V + v \nabla_{\nabla_X V} V, X), \tag{III.2.19}$$

$$g(\nabla_{\nabla_V X} V, X) = g(T_{\nabla_V X} V + v \nabla_{\nabla_V X} V, X) \tag{III.2.20}$$

olur. Diğer taraftan $X \in \chi^h(M)$ için

$$T_X = 0 \Rightarrow T_{\nabla_X V} V = 0$$

dır. (III.2.17), (III.2.18), (III.2.19) ve (III.2.20) denklemleri (III.2.16) de yerlerine yazılıp düzenlenirse;

$$K(X,V) = g(\nabla_X T_V V - T_V \nabla_X V, X)$$

$$
\begin{aligned}
&-g(A_{\nabla_X V}V, X) + g(T_{\nabla_V X}V, X) \\
&= g((\nabla_X T)_V V, X) + g(A_{\nabla_X V}X, V) + g(T_V \nabla_V X, X) \\
&= g((\nabla_X T)_V V, X) - g(A_X \nabla_X V, V) - g(T_V X, T_V X) \\
&= g((\nabla_X T)_V V, X) + g(A_X V, A_X V) - g(T_V X, T_V X) \\
&= g((\nabla_X T)_V V, X) + \|A_X V\|^2 - \|T_V X\|^2
\end{aligned}
$$

elde edilir.

III.2.2.Tanım. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X_i \in \chi^h(M)$ ve $\forall U_j \in \chi^v(M)$ için, (M, g) üzerindeki $\{X_i, U_j\}_{1\le i\le n, 1\le j\le r}$ bir lokal ortonormal çatıya π**-uyumludur** denir[6].

III.2.1.Lemma. $\pi : (M, g) \to (B, g')$ bir Riemann submersiyonu, U, V dikey vektör alanları ve X, Y yatay vektör alanları olsun. (M, g) üzerindeki $\{X_i, U_j\}_{1\le i\le n, 1\le j\le r}$ bir π-uyumlu çatı olmak üzere

(i) $\sum_{i=1}^n g(T_U X_i, T_V X_i) = \sum_{j=1}^r g(T_U U_j, T_V U_j)$,

(ii) $\sum_{i=1}^n g(A_X X_i, A_Y X_i) = \sum_{j=1}^r g(A_X U_j, A_Y U_j)$,

(iii) $\sum_{i=1}^n g(A_X X_i, T_U X_i) = \sum_{j=1}^r g(A_X U_j, T_U U_j)$

dır[6].

İspat. (i) Herhangi bir $i \in \{1, 2, ..., n\}$ ve $V \in \chi^v(M)$ için

$$T_V X_i \quad = h\nabla_{vV} vX_i + v\nabla_{vV} hX_i$$

$$= v\nabla_V X_i$$

dır. Dolayısıyla, $T_V X_i$ dikey tensör alanıdır. Buradan

$$\begin{aligned} T_V X_i &= \sum_{j=1}^{r} g(T_V X_i, U_j) U_j \\ &= -\sum_{j=1}^{r} g(T_V U_j, X_i) U_j \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylce $U \in \chi^v(M)$ için

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} g(T_U X_i, T_V X_i) &= \sum_{i=1}^{n} g(T_U X_i, -\sum_{j=1}^{r} g(T_V U_j, X_i) U_j) \\ &= -\sum_i \sum_j g(T_V U_j, X_i) g(T_U X_i, U_j). \end{aligned}$$

dır. Burada Lemma II.2.1 (i) kullanılırsa

$$\sum_{i=1}^{n} g(T_U X_i, T_V X_i) = \sum_j \sum_i g(T_V U_j, X_i) g(T_U U_j, X_i)$$

olur. Böylece doğrudan işlemlerle

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} g(T_U X_i, T_V X_i) &= \sum_j \sum_i g(g(T_V U_j, X_i) X_i, T_U U_j) \\ &= \sum_j g(T_V U_j, T_U U_j) \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) Herhangi bir $i \in \{1, 2, ..., n\}$ ve $Y \in \chi^h(M)$ için

$$\begin{aligned} A_Y X_i &= v\nabla_{hY} h X_i + h\nabla_{hY} v X_i \\ &= v\nabla_Y X_i \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla, $A_Y X_i$ dikey tensör alanıdır. Buradan

$$\begin{aligned} A_Y X_i &= \sum_{j=1}^{r} g(A_Y X_i, U_j) U_j \\ &= -\sum_{j=1}^{r} g(A_Y U_j, X_i) U_j \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylce $X \in \chi^h(M)$ için

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} g(A_X X_i, A_Y X_i) &= \sum_{i=1}^{n} g(A_X X_i, -\sum_{j=1}^{r} g(A_Y U_j, X_i) U_j) \\ &= -\sum_i \sum_j g(A_Y U_j, X_i) g(A_X X_i, U_j) \end{aligned}$$

dır. Burada Lemma II. 2.1 (ii) kullanılırsa

$$\sum_{i=1}^{n} g(A_X X_i, A_Y X_i) = \sum_j \sum_i g(A_Y U_j, X_i) g(A_X U_j, X_i)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} g(A_X X_i, A_Y X_i) &= \sum_j \sum_i g(g(A_Y U_j, X_i) X_i, A_X U_j) \\ &= \sum_j g(A_Y U_j, A_X U_j) \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) Herhangi bir $i \in \{1, 2, ..., n\}$ ve $U \in \chi^v(M)$ için

$$\begin{aligned} T_U X_i &= h\nabla_{vU} vX_i + v\nabla_{vU} hX_i \\ &= v\nabla_U X_i \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla, $T_U X_i$ dikey tensör alanıdır. Buradan, Lemma II.2.1 (i) gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} T_U X_i &= \sum_{j=1}^{r} g(T_U X_i, U_j) U_j \\ &= -\sum_{j=1}^{r} g(T_U U_j, X_i) U_j \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylce $X \in \chi^h(M)$ için

$$\sum_{i=1}^{n} g(A_X X_i, T_U X_i) = \sum_{i=1}^{n} g(A_X X_i, -\sum_{j=1}^{r} g(T_U U_j, X_i) U_j)$$

dır. Tekrar Lemma II.2.1 (i) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} g(A_X X_i, T_U X_i) &= \sum_{j}\sum_{i} g(T_U U_j, X_i) g(A_X U_j, X_i) \\ &= \sum_{j}\sum_{i} g(g(T_U U_j, X_i) X_i, A_X U_j) \\ &= \sum_{j} g(A_X U_j, T_U U_j) \end{aligned}$$

elde edilir.

III.2.3.Tanım. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $\mathcal{V}$ dikey distribüsyonun bir lokal ortonormal çatısı $\{U_j\}_{1 \leq j \leq r}$ olsun. (M, g) üzerindeki N **yatay vektör alanı** lokal olarak

$$N = \sum_{j=1}^{r} T_{U_j} U_j$$

ile tanımlanır[6].

III.2.4.Tanım. (M^m, g) ve $(B^n, g^{'})$ Riemann manifoldları ve $r = (m - n)-$boyutlu bir lif olsun.

$$\pi : (M^m, g) \to (B^n, g^{'})$$

bir Riemann submersiyonu olmak üzere, herhangi bir lifin **ortalama eğrilik vektör alanı**

$$H = \frac{1}{r} iz(T) = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} T_{U_j} U_j$$

ile tanımlanır. Burada $\{U_j\}_{1\leq j\leq r}$ $\mathcal{V}$ nin bir lokal ortonormal çatısıdır. Tanım III.2.3 ten

$$N = rH$$

yazılabilir[6].

III.2.2.Lemma. $\pi : (M, g) \rightarrow (B, g^{'})$ bir Riemann submersiyonu ve $\mathcal{V}$ nin bir lokal ortonormal çatısı $\{U_j\}_{1\leq j\leq r}$ olsun. Bu durumda, herhangi bir $E \in \chi(M)$ ve $X \in \chi^h(M)$ için

$$g(\nabla_E N, X) = \sum_{j=1}^{r} g((\nabla_E T)_{U_j} U_j, X)$$

dır[6].

İspat. Herhangi bir $X \in \chi^h(M)$ için, Tanım III.1.1 den

$$\begin{aligned} g(\nabla_E N, X) \quad &= \sum_{j=1}^{r} g((\nabla_E T)_{U_j} U_j, X) \\ &= \sum_{j=1}^{r} g(\nabla_E T_{U_j} U_j - T_{\nabla_E U_j} U_j - T_{U_j} \nabla_E U_j, X) \\ &= \sum_{j=1}^{r} g(\nabla_E T_{U_j} U_j, X) - \{\sum_{j=1}^{r} g(T_{\nabla_E U_j} U_j + T_{U_j} \nabla_E U_j, X)\} \end{aligned}$$

dır. Buradan,

$$\sum_{j=1}^{r} g(T_{\nabla_E U_j} U_j + T_{U_j} \nabla_E U_j, X) = 0$$

olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur. Herhangi bir $j \in \{1, ..., r\}$ için, Tanım II.2.1,Önerme II.2.2 ve Lemma II.2.1 den

$$g(T_{\nabla_E U_j} U_j + T_{U_j} \nabla_E U_j, X)$$

$$\begin{aligned} &= g(T_{U_j} \nabla_E U_j, X) + g(T_{U_j} \nabla_E U_j, X) \\ &= -2g(T_{U_j} X, \nabla_E U_j) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan, dikey tensör alanı

$$T_{U_j} X = \sum_{h=1}^{r} g(T_{U_j} X, U_h) U_h$$

yazılabilir. Benzer işlemler takip edilerek

$$\sum_{j=1}^{r} g(T_{\nabla_E U_j} U_j + T_{U_j} \nabla_E U_j, X)$$

$$\begin{aligned} &= -2 \sum_{j=1}^{r} g(T_{U_j} X, \nabla_E U_j) \\ &= -2 \sum_{j=1}^{r} g(\sum_{h=1}^{r} g(T_{U_j} X, U_h) U_h, \nabla_E U_j)) \\ &= 2 \sum_{j,h=1}^{r} g(T_{U_j} U_h, X) g(U_h, \nabla_E U_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$(M, g), (B, g^{'})$ Riemann manifoldlarının ve $x \in B, \pi^{-1}(x)$ lifinin Ricci tensörleri sırasıyla $\rho, \rho^{'}$ ve $\hat{\rho}$ ile gösterelim. Aşağıdaki önerme bu tensörler arasındaki bağıntıları vermektedir.

III.2.1.Önerme. (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları

$$\pi : (M, g) \rightarrow (B, g^{'})$$

bir Riemann submersiyonu ve $\{X_i, U_j\}$ bir π-uyumlu çatı olsun. Bu durumda, herhangi bir $U, V \in \chi^v(M)$ ve $X, Y \in \chi^b(M)$ için ρ Ricci tensörü aşağıdaki özelikleri sağlar[6]:

$$\begin{aligned}
(i)\ \rho(U,V) &= \hat{\rho}(U,V) - g(N, T_U V) \\
&+ \sum_i \{g((\nabla_{X_i} T)_U V, X_i) + g(A_{X_i} U, A_{X_i} V)\}, \\
(ii)\ \rho(X,Y) &= \rho^{'}(X^{'}, Y^{'}) \circ \pi + \frac{1}{2}\{g(\nabla_X N, Y) + g(\nabla_Y N, X)\} \\
&- 2\sum_i g(A_X X_i, A_Y X_i) - \sum_j g(T_{U_j} X, T_{U_j} Y), \\
(iii)\ \rho(U,X) &= g(\nabla_U N, X) - \sum_j g((\nabla_{U_j} T)_{U_j} U, X) \\
&+ \sum_i \{g((\nabla_{X_i} A)_{X_i} X, U) - 2g(A_X X_i, T_U X_i)\}
\end{aligned}$$

dır, burada X, Y ve $X^{'}, Y^{'}$ vektör alanları π- bağlıdır.

İspat. (i) $U, V \in \chi^v(M)$ için (III.2.1),(III.2.13) ve Lemma III.2.1 den;

$$\begin{aligned}
\rho(U,V) &= \sum_i R(X_i, U, X_i, V) - \sum_j R(U_j, U, V, U_j) \\
&= \sum_i \{g((\nabla_{X_i} T)_U V, X_i) + g((\nabla_U A)_{X_i} X_i, V) \\
&- g(T_U X_i, T_V X_i) + g(A_{X_i} U, A_{X_i} V)\} \\
&- \sum_j \{\hat{R}(U_j, U, V, U_j) + g(T_{U_j} U_j, T_U V) \\
&- g(T_U U_j, T_{U_j} V)\} \\
&= \hat{\rho}(U,V) - g(N, T_U V) \\
&+ \sum_i \{g((\nabla_{X_i} T)_U V, X_i) + g(A_{X_i} U, A_{X_i} V)\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) X temel vektör alanı ve X' ne π-bağlı olsun. Teorem III.2.3 (ii),(III.2.13), Önerme II.2.2 ve Lemma III.2.1 (ii),Lemma III.2.2 kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
\rho(X,X) &= \sum_i R(X,X_i,X,X_i) + \sum_j R(X,U_j,X,U_j) \\
&= \sum_i \{R^*(X,X_i,X,X_i) - 3\|A_X X_i\|^2\} \\
&+ \sum_j \{g((\nabla_X T)_{U_j} U_j, X) + g((\nabla_{U_j} A)_X X, U_j) \\
&- g(T_{U_j} X, T_{U_j} X) + g(A_X U_j, A_X U_j)\} \\
&= \sum_i \{R^*(X,X_i,X,X_i) - 3\|A_X X_i\|^2\} \\
&+ \sum_j \{g((\nabla_X T)_{U_j} U_j, X) - \|T_{U_j} X\|^2 + \|A_X U_j\|^2\} \\
&= \rho'(X',X')\circ\pi + g(\nabla_X N, X) - 2\sum_i \|A_X X_i\|^2 - \sum_j \|T_{U_j} X\|^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $U \in \chi^v(M)$ ve $X \in \chi^h(M)$ için Önerme II.2.2, Teorem III.2.2, Lemma III.2.2 ve Teorem III.2.1 den

$$\begin{aligned}
\rho(U,X) &= \sum_i R(X,X_i,U,X_i) - \sum_j R(U,U_j,U_j,X) \\
&= \sum_i \{g((\nabla_X A)_{X_i} X, U) + g(A_{X_i} X, T_U X_i) - g(A_X X_i, T_U X_i) \\
&- g(A_{X_i} X_i, T_U X)\} \\
&- \sum_j \{g((\nabla_{U_j} T)_U U_j, X) - g((\nabla_U T)_{U_j} U_j, X)\} \\
&= \sum_i \{g((\nabla_X A)_{X_i} X, U) - 2g(A_X X_i, T_U X_i)\} \\
&- \sum_j g((\nabla_{U_j} T)_U U_j, X) + g(\nabla_U N, X)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$(M,g),(B,g^{'})$ Riemann manifoldlarının ve $x \in B, \pi^{-1}(x)$ lifinin skaler eğrilikleri sırasıyla $\tau, \tau^{'}$ ve $\hat{\tau}$ ile gösterelim. Aşağıdaki önerme

$$\pi : (M,g) \to (B,g^{'})$$

Riemann submersiyonunda, (M,g) Riemann manifoldunun τ skaler eğriliğinin, $(B,g^{'})$ nün $\tau^{'}$ skaler eğriliği ile herhangi bir lifinin $\hat{\tau}$ skaler eğriline bağlı olduğunu göstermektedir.

III.2.2.Önerme. (M,g) ve $(B,g^{'})$ Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M,g) \to (B,g^{'})$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda

$$\tau = \hat{\tau} + \tau^{'} \circ \pi - \|N\|^2 - \|A\|^2 - \|T\|^2 + 2\sum_i g(\nabla_{X_i} N, X_i)$$

dır[6].

İspat. $\{X_i, U_j\}$ bir $\pi-$ uyumlu çatısını düşünelim. Önerme III.2.1 ve Lemma II.2.1 den

$$\begin{aligned}
\tau \quad &= \Sigma_j \rho(U_j,U_j) + \Sigma_i \rho(X_i,X_i) \\
&= \Sigma_j \{\hat{\rho}(U_j,U_j) - g(N, T_{U_j}U_j) + \Sigma_i [g((\nabla_{X_i}T)_{U_j}U_j, X_i) \\
&+ g(A_{X_i}U_j, A_{X_i}U_j)]\} \\
&+ \sum_i \{\rho^{'}(X_i^{'}, X_i^{'}) \circ \pi + \frac{1}{2}[g(\nabla_{X_i}N, X_i) + g(\nabla_{X_i}N, X_i)] \\
&-2\sum_i g(A_{X_i}X_i, A_{X_i}X_i) - \sum_j g(T_{U_j}X_i, T_{U_j}X_i)\} \\
&= \hat{\tau} + \tau^{'} \circ \pi - \|N\|^2 + \Sigma_{i,j}\{g((\nabla_{X_i}T)_{U_j}U_j, X_i) + g(A_{X_i}U_j, A_{X_i}U_j) \\
&-g(T_{U_j}X_i, T_{U_j}X_i)\} + \sum_i g(\nabla_{X_i}N, X_i) - 2\sum_{i,j} g(A_{X_i}U_j, A_{X_i}U_j)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan, Lemma III.2.2 den

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j} g(A_{X_i}U_j, A_{X_i}U_j)$$
$$\|T\|^2 = \sum_{i,j} g(T_{U_j}X_i, T_{U_j}X_i)$$

yazılabilir. O halde,

$$\tau = \hat{\tau} + \tau^{'} \circ \pi - \|N\|^2 - \|A\|^2 - \|T\|^2 + 2\sum_{i} g(\nabla_{X_i}N, X_i)$$

olur.

References

KAYNAKLAR

[1] BAIRD, P. and WOOD, J. C., *Harmonic morphisms betweeen Riemannian manifolds*, Clarendon Press, Oxford, 2003.

[2] BEJANCU, A. and FARRAN, H. R., *Foliations and Geometric structures*, Springer, 2006.

[3] BOOTBY, W.M., *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press Inc, 1986.

[4] CHEN, B. Y., *Geometry of Submanifolds*, Marcel Dekker, New York, 1973.

[5] DO CARMO, M.P., *Riemannian Geometry*, Birkhauser Boston, 1992.

[6] FALCITELLI, M.,IANUS, S. and PASTORE, A. M., *Riemannian Submersions and Related Topics*, World Scientific Company, 2004.

[7] GUNDMUNDSON, S., *An Introduction to Riemannian Geometry*,Lecture Notes, University of Lund, Mathematics, Faculty of Science 2006.

[8] HACISALİHOĞLU, H.H., *Diferansiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi Fen-Ed.Fak.Mat.No:2,1982.

[9] HACISALİHOĞLU, H.H., *Diferensiyel Geometri* ,Cilt:3, Ankara Ünv. Fen Fakültesi, 2003.

[10] KOBAYASHI, S. and NOMIZU, K., *Foundations of Differential Geometry*, vol:1, I-II, New York, 1963.

[11] O'NEILL, B., *The Fundamental Equations of a Submersions*, Michigan Math. J. 13(1966) 459-469.

[12] O'NEILL, B., *Semi-Riemann Geometry*, Academic Press, New York, 1983.

[13] SUZUKI, ARBEU C., *Mappings With Maximal Rank*, arXiv:math.DG/0606091V1, 2006.

[14] ŞAHİN, B., *CR-Altmanifoldların Geometrisi*, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, 1996.

[15] YANO, K., KON,M., *Structures on Manifolds*, World Scientific Publishing Company Pte. Ltd., 1984.

ÖZGEÇMİŞ

05.05.1974 yılında Diyarbakır'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Diyarbakır'da tamamladı. 1992 de Dicle Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümüne girmeye hak kazandı. 1996 yılında buradan mezun oldu. Aynı yıl Gaziantep'te Matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 2005 yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans yapmaya hak kazandı. Yılmaz Gündüzalp evli ve 2 çocuk babasıdır.