

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEMİ-SİMETRİK HİPERYÜZEYLER

Nesibe Sevil AKATLI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak 2018

Tezin Başlığı : SEMİ-SİMETRİK HİPERYÜZEYLER

Tezi Hazırlayan : Nesibe Sevil AKATLI

Sınav Tarihi : 11.01.2018

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: Yrd.Doç.Dr. Cumali YILDIRIM

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. Bayram şAHİN

Ege Üniversitesi

Prof.Dr. Erol KILIÇ

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. Halil İbrahim ADIGÜZEL

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Semi-Simetrik Hiperyüzeyler” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Nesibe Sevil AKATLI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SEMİ-SİMETRİK HİPERYÜZEYLER

Nesibe Sevil AKATLI

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

45+iv sayfa

2018

Danışman : Yrd.Doç.Dr. Cumali YILDIRIM

Bu Yüksek Lisans Tezi dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş olarak düzenlenmiştir. İkinci bölümde, diğer bölümlere faydalı olacak temel tanım ve kavramlar; semi-Riemann manifoldlar, vektör demetleri, dejenere, non-dejenere metrik, quasi ortonormal bazlar ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, semi-Riemann manifoldlarda lightlike hiperyüzeylerin transversal vektör demetleri, indirgenmiş geometrik nesnelere ve gauss-codazzi denklemlerinin genel tanımları ve bazı teoremler ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde, semi-Öklidyen uzaylarda semi-simetrik lightlike hiperyüzeyler, Ricci semi-simetrik lightlike hiperyüzeyler incelenmiştir. Minkowski spacetime ekran konformal hiperyüzeyinin semi-simetrik olduğu ifade edilmiştir. Ayrıca ekran konformal lightlike hiperyüzeyin semi-simetrik olma koşulu ile ekran distribüsyonuna semi-simetrik olma koşulu arasında ilişki incelenmiştir. Son olarak semi-Öklidyen uzayların Ricci semi-simetrik lightlike hiperyüzeyleri ve bunlardan elde edilen bir şart altında total geodezikliği ele alınmıştır. Lorentz manifoldunun paralel lightlike hiperyüzeyler üzerinde bir karakterizasyonu verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Lightlike hiperyüzeyler, Gauss-Codazzi denklemleri, Semi-simetrik lightlike hiperyüzeyler, Ricci semi-simetrik lightlike hiperyüzey, paralel lightlike hiperyüzeyler

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SEMI-SYMMETRIC HYPERSURFACES

Nesibe Sevil AKATLI

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

45+iv pages

2018

Supervisor : Yrd.Doç.Dr. Cumali YILDIRIM

This master thesis consists of four chapters. The first chapter, is the introduction. In the second chapter, basic definitions and concepts of semi-Riemann manifolds, vektor bundls, degenerate metrics, quasi orthonormal bases which will be useful for other deperntments, are discussed.

In the third chapter, Lightlike hypersurface of semi-Riemann manifolds have been introduced and theorems about lightlike hypersurface have been given. In addition, the general definitions and some theorems of transversal vektor bundle lightlike hypersurfaces, Induced geometrical objects on lightlike hypersurfaces and guass-codazzi equations for lightlike hypersurfaces are given.

In the fourth chapter, we investigate lightlike hypersurfaces which are semi-symmetric, Ricci semi-symmetric, semi-parallel in a semi-Euclidean space. We obtain that every screen conformal lightlike hypersurface of the Minkowski spacetime is semi-symmetric. Besides we investigate the semi-symmetric condition of a screen conformal lightlike hypersurface reduces to the semi-symmetric condition of a leaf of its screen distribution. Finally we obtain that semi-symmetric and Ricci semi-symmetric lightlike hypersurface are totally geodesic under certain conditions. Moreover we showed that there exist no non-totally geodesic parallel hypersurfaces a lorentzian space.

KEYWORDS: Lightlike hypersurfaces, Gauss-Codazzi equations, Semi-symmetric lightlike hypersurfaces, Ricci semi-symmetric lightlike hypersurfaces, Paralel lightlike hypersurfaces

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamı yöneten ve tezin hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen kıymetli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Cumali YILDIRIM'a, çalışmalarım sırasında bana yardımcı olan, bilgi ve görüşlerinden istifade ettiğim değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Bayram ŞAHİN'e, Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e, bölüm başkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŐ'e ve bilhassa maddi manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1. Semi-Öklidyen Uzaylar	2
2.2. Semi-Öklidyen Uzayların Alt Uzayları	7
3. SEMİ-RIEMANN MANİFOLDLARDA LIGHTLIKE HİPERYÜZEYLER	15
3.1. Lightlike Hiperyüzeylerin Lightlike Transversal Vektör Demetleri	15
3.2. Lightlike Hiperyüzeylerde İndirgenmiş Geometrik Nesnelere	18
3.3. Lightlike Hiperyüzeylerin Gauss-Codazzi Denklemleri	26
4. SEMİ-SİMETRİK LIGHTLIKE HİPERYÜZEYLER	28
4.1. Semi-Öklidyen Uzayda Semi-Simetrik Lightlike Hiperyüzeyler	28
4.2. Semi-Öklidyen Uzaylarda Ricci Semi-Simetrik Lightlike Hiperyüzeyler ..	36
4.3. Paralel ve Semi-Paralel Lightlike Hiperyüzeyler	40
KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	45

1. GİRİŞ

Son yüzyıldan itibaren manifoldlar teorisi, matematiksel fizikte uygulama alanı bulduğundan bu yana belirsiz metrikler ve non-dejenere metrikler birlikte ele alınmaya başlandı. Bu manifoldlara, semi-Riemann manifold denir. Bu tür manifoldlar, son yıllarda lightlike altmanifoldların büyüyen bir önemi ve geniş kullanımı vardır. Lightlike geometri non-dejenere olması durumunda daha karışıktır. Bu lightlike ve non-dejenere altmanifoldlar arasındaki farktan kaynaklıdır. Bu farkın sebebi normal demetin tutumudur. Lightlike altmanifoldlarda normal demetin bir kısmı tanjant demette kalır, non-dejenere altmanifoldlarda ise tanjant demet ile normal demetin kesişimi sıfırdır. Lightlike altmanifoldlarda normal demetin boyutu bir ise altmanifoldda lightlike hiperyüzey denir.

M bir diferansiyellenebilir manifold ve ∇ , M üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. Eğer $p \in M$ noktasının bir U komşuluğunda involutive afin dönüşümü varsa ∇ ya $p \in M$ noktasında yerel simetriktir denir. Eğer ∇ torsiyonsuz ise ∇ konneksiyonunun yerel simetrik olması için gerek ve yeter şart $\nabla R = 0$ olmasıdır. Burada R eğrilik tensörünü göstermektedir. Eğrilik tensörü R , X ve Y teğet vektörleri için $R(X, Y) \cdot R = 0$ şartını sağlayan Riemann manifolda semi-simetrik manifold denir [1]. $R(X, Y) \cdot R = 0$ uzayları ilk olarak E. Carton tarafından incelenmiş, bu uzaylar simetrik uzayların genişletilmişleri olarak düşünülmüştür. Sonra Nomizu, Öklidyen uzayların semi-simetrik hiperyüzelerini sınıflandırmıştır. Semi-simetrik şartı diğer eğriliklere de taşınmıştır. Mesela; $R.Ric = 0$ şartı sağlanıyorsa bir semi-Riemann manifolda Ricci semi-simetrik manifold denir. Her semi-simetrik manifold Ricci semi-simetriktir. Tersini genelde doğru değildir. $R.R = 0$ ve $R.Ric = 0$ şartları genelde Öklidyen uzayların hiperyüzeyleri için geçerli olmadığını gösterir. Güneş, Şahin ve Kılıç [2] ve Şahin [3], $\nabla R = 0$ ve $R.R = 0$ şartlarının $R.Ric = 0$ durumlarını semi-Öklidyen uzayın lightlike hiperyüzeyleri için çalıştılar.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Semi-Öklidyen Uzaylar

Tanım 2.1.1. V , m - boyutlu reel vektör uzayı olsun. $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $\forall x, y, z \in V$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

i. $g(x, y) = g(y, x)$,

ii. $g(ax + by, z) = ag(x, z) + bg(y, z)$

$$g(x, ay + bz) = ag(x, y) + bg(x, z)$$

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V uzayı üzerinde **simetrik bilinear form** denir [4].

Tanım 2.1.2. V , m - boyutlu reel vektör uzayı ve V üzerinde bir bilinear form $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde olsun. Eğer V nin bir $\xi \neq 0$ vektörü var ve $\forall v \in V$ için $g(\xi, v) = 0$ ise g ye V üzerinde **dejenere** denir [5].

Tanım 2.1.3. V bir reel vektör uzayı, g ise V üzerinde bilinear form olsun. Eğer $\forall v \in V$ için $g(u, v) = 0$ olması ancak $u = 0$ ile mümkünse bu durumda g ye **non-dejenere** denir [5].

Tanım 2.1.4. V reel vektör uzayı üzerinde bilinear form g olsun. V uzayının

$$\text{Rad}V = \{\xi \in V \mid g(\xi, v) = 0, \forall v \in V\}$$

ile tanımlı olan V uzayına g ye göre **radikal uzay** yada **null uzay** denir.

$\text{Rad}V$ nin boyutu **nullV** ile gösterilir. Eğer

- $\text{null}V > 0$ ise g **dejenere**,
- $\text{null}V = 0$ ise g **non-dejenere**

dir [5].

Tanım 2.1.5. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form g olsun.

Eğer $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için

i. $g(v, v) > 0$ ise g ye **pozitif tanımlı**,

ii. $g(v, v) < 0$ ise g ye **negatif tanımlı**,

iii. $g(v, v) > 0$ ve $g(u, u) < 0$ olacak şekilde $u, v \in V$ mevcut ise g ye **definite**

denir [5].

Tanım 2.1.6. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form g olsun.

Eğer $\forall v \in V$ için

i. $g(v, v) \geq 0$ ve $u \neq 0$ için $g(u, u) = 0$ ise g ye **yarı pozitif tanımlı**,

ii. $g(v, v) \leq 0$ ve $u \neq 0$ için $g(u, u) = 0$ ise g ye **yarı negatif tanımlı** ya da **indefinite**

denir [5].

Her g simetrik bilinear formuna,

$$h : V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \rightarrow h(v) = g(v, v)$$

şeklinde tanımlı bir kuadratik form karşılık gelir. Burada h ile g arasında her $v, w \in V$ için

$$g(v, w) = \frac{1}{2}\{h(v+w) - h(v) - h(w)\}$$

bağıntısı vardır. V nin $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ bazına göre h kuadratik formu, $i \in \{1, \dots, m\}$ için $\lambda_i \in R$ ve (v^i) , v nin koordinat bileşenleri olmak üzere

$$h(v) = g(v, v) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (v^i)^2 \quad (2.1.1)$$

kanonikal formuna sahiptir. (2.1.1) ifadesinde p, q, r sırasıyla $\lambda_i \in \mathbb{R}$ lerin pozitif, negatif ve sıfır olanlarının sayısıdır. Ayrıca h nin kanonikal formu tek değildir. V nin bazına göre değişir [5].

Tanım 2.1.7. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form g olsun. Bu durumda;

$$i. g(x_i, x_j) = 0, i \neq j$$

$$ii. g(x_i, x_i) = -1, 1 \leq i \leq q$$

$$iii. g(x_i, x_i) = +1, q + 1 \leq i \leq p + q$$

$$iv. g(x_i, x_i) = 0, p + q + 1 \leq i \leq p + q + r = m$$

olacak şekilde V nin bir $B = \{x_1, \dots, x_m\}$ ortonormal bazı için $p + q + r = m$ olup (p, q, r) üçlüsüne g **formunun tipi** denir [5].

Önerme 2.1.1. h, V üzerinde (p, q, r) -tipinde g nin kuadratik formu olsun.

- i. $r > 0$ ise g dejeneredir; $r = 0$ ise non-dejenere,
- ii. $p = m$ ise g , pozitif tanımlıdır; $q = m$ ise g negatif tanımlı,
- iii. $g, q = 0, p > 0, r > 0$ ise yarı pozitif tanımlı ya da $p = 0, q > 0, r > 0$ ise yarı negatif tanımlıdır [5].

Tanım 2.1.8. V nin keyfi bir bazı $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ olsun. V üzerinde g simetrik bilinear formu

$$g_{ij} = g(u_i, u_j), 1 \leq i, j \leq m$$

olmak üzere $G = [g_{ij}]_{m \times m}$ simetrik matrisi ile ifade edilebilir. Bu durumda G matrisine g nin U bazına karşılık gelen matrisi denir [5].

E nin bazlarından birine karşılık h nın (2.1.1) ifadesinden kanonikal formu oluşturulur. Burada $\{e_1, \dots, e_m\}$, G matrisinin öz vektörleri ve $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ de bu vektörlere karşılık gelen öz değerlerdir. Bu durumda,

- g nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $rankG = m$,
- g nin dejenere olması için gerek ve yeter şart $rankG < m$

olmasıdır [5].

Tanım 2.1.9. Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere, simetrik, bilinear g formuna V reel vektör uzayı üzerinde bir **skaler çarpım (yarı öklid metriği)** ve (V, g) ikilisine de **yarı-Öklid uzay** denir [5].

Tanım 2.1.10. V yarı-Öklid uzayı üzerinde tanımlı bir g skaler çarpım için $p \cdot q \neq 0$ olması durumunda g ye **proper yarı-Öklid metrik** ve (V, g) ikilisine de **proper yarı-Öklid uzay** denir [5].

Tanım 2.1.11. V yarı öklid uzayı üzerinde tanımlı bir g skaler çarpımı için

- g pozitif tanımlı ise g ye **Öklid metriği**, (V, g) ikilisine de **Öklid uzayı**,
- g nin indeksi $q = 1$ ise g ye **Lorentz(Minkowski) metriği** (V, g) ikilisine de **Lorentz(Minkowski) uzayı**

denir [5].

Tanım 2.1.12. (V, g) yarı-Öklid uzayı üzerinde

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightarrow \|v\| = |g(v, v)|^{1/2} ; \forall v \in V \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı dönüşüme V vektör uzayı üzerinde **norm dönüşümü** denir. $\|v\|$ sayısına da v **vektörünün uzunluğu** denir [5].

Tanım 2.1.13. Uzunluğu 1 birim yani $g(u, u) = \pm 1$ olan vektörlere **birim vektör** denir [5].

Tanım 2.1.14. V yarı öklid uzayı üzerinde tanımlı bir g skaler çarpımı için,

i. $g(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise v ye **spacelike**,

ii. $v \neq 0$ için $g(v, v) < 0$ ise v ye **timelike**,

iii. $v \neq 0$ iken $g(v, v) = 0$ ise v ye **lightlike (null veya isotropik) vektör**

denir. $v \in V$ vektörünün bu üç tipine v nin **causal karakteri** denir [5].

Tanım 2.1.15. V skaler çarpım uzayının bütün lightlike vektörlerinin,

$$\Lambda = \{v \in (V - \{0\}) | g(v, v) = 0\}$$

kümesine V nin **lightlike konisi** denir [5].

Tanım 2.1.16. $u, v \in V$ için $g(u, v) = 0$ ise bu iki vektör **ortogonaldır** denir ve $u \perp v$ ile gösterilir. Benzer olarak V nin iki alt kümesi U ve W olmak üzere herhangi $u \in U$ ve $w \in W$ için $u \perp w$ ise bu iki kümede ortogonaldır ve $U \perp W$ ile gösterilir [5].

Ortogonal birim vektörlerinin karşılıklı bir E kümesi ortonormal bir küme olarak adlandırılır ki bu küme lineer bağımsızdır. Bu nedenle m -boyutlu V nin ortonormal vektörlerinin kümesi V nin ortonormal bazı olarak adlandırılır [5].

Önerme 2.1.2. Sıfırdan farklı bir V semi-Öklidyen uzayının ortonormal bir bazı mevcuttur [5].

V vektör uzayının $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ ortonormal bazlarının kümesinin bir vektörü sayesinde

$$g(e_i, e_j) = e_i \delta_{ij}$$

olur ve verilen herhangi bir $v \in V$ vektörü

$$v = \sum_{i=1}^m \epsilon_i g(v, e_i) e_i$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_m\}$ ifadesine E bazının işaretlenmesi denir. Buradan da g nin h ile bağlantılı kuadratik formu,

$$h(v) = \sum_{i=1}^m \epsilon_i g(v, e_i)^2 \quad (2.1.2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada eğer p ve q , $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_m\}$ işaretlenmesinde pozitif ve negatif işaretlerin sayısı ise bu durumda semi-öklidyen metrik $(p, q, 0)$ tipindedir [5].

Örnek 2.1.1. \mathbb{R}^m standart vektör uzayı ve \mathbb{R}^m nin bazı $E = \{e_1 = (1, 0 \dots 0), \dots, e_m = (0, 0, \dots, 1)\}$ olsun. \mathbb{R}^m üzerinde $0 < q < m$ için proper semi-Öklidyen metrik,

$$g(x, y) = -\sum_{i=1}^q x^i y^i + \sum_{\alpha=q+1}^m x^\alpha y^\alpha; \forall x, y \in \mathbb{R}^m \quad (2.1.3)$$

olarak tanımlanır.

\mathbb{R}_q^m ile m -boyutlu q -indeksli proper semi-Öklidyen uzayı g metriği ile tanımlansın. Özel olarak \mathbb{R}_1^m , Lorentz(Minkowski) vektör uzayıdır. \mathbb{R}_q^m nin lightlike konisi \mathbb{R}_q^m tarafından verilen Λ_{q-1}^{m-1} hiperyüzeyidir.

$$\Lambda_{q-1}^{m-1} = \{x \in (\mathbb{R}_q^m - \{0\}) \mid -\sum_{i=1}^q (x^i)^2 + \sum_{\alpha=q+1}^m (x^\alpha)^2 = 0\}$$

dır. Sonuç olarak \mathbb{R}^m de g metriği,

$$g(x, y) = \sum_{A=1}^m x^A y^A$$

şeklinde ifade edilir [5].

2.2 Semi-Öklidyen Uzayların Alt Uzayları

(W, g) reel n -boyutlu lightlike vektör uzayı ve W nin radikali $RadW$ olsun. Bu durumda W nin bir alt uzayı dejenere olmayabilir. Bu ifadeyi desteklemek için aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 2.2.1. (W, g) , n -boyutlu *lightlike* vektör uzayı ve $\text{null}W = r < n$ olsun. Bu durumda $\text{Rad}W$ ye komplement her alt uzay non-dejenere'dir [5].

Tanım 2.2.1. W de $\text{Rad}W$ ye komplement alt uzay olan SW ye W nin bir **screen alt uzayı** denir [5].

SW , g ye göre non-dejenere olduğundan bir semi öklidyen uzay olur. O zaman önerme (2.1.2) den SW nin $\{u_{r+1}, \dots, u_{r+m}\}$ ortonormal bazı mevcuttur. Bu yüzden W nin bazı, verilen $B = \{f_1, \dots, f_r\}$ ve $f_i \in \text{Rad}W$, $i \in \{1, \dots, r\}$ ile

$$W = \text{Rad}W \perp SW$$

ifadesine uyarlanır. Bunu dikkate alarak $\text{Rad}W$ nin herhangi bir vektörü W ye ortogonaldır ve B ye karşılık gelen matris

$$[g] = \begin{bmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & \epsilon_{\alpha, \delta_{ab}} \end{bmatrix}$$

burada $a, b \in \{r+1, \dots, n\}$, $\epsilon_{\alpha} = g(u_a, u_b)$ dir [5].

Tanım 2.2.2. (V, g) m - boyutlu semi-Öklidyen uzay ve W de V nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda $g|_W$ dejenere olması durumunda W ye **lightlike(dejenere) alt uzay** denir. Aksi takdirde W ye **non-dejenere alt uzay** denir [5].

$$W^\perp = \{v \in V : g(v, w) = 0, \forall w \in W\}$$

Tanım 2.2.3. Eğer W , V nin bir alt uzayı ise

$$W^\perp = \{v \in V : v \perp W\}$$

ifadesinde V nin alt uzayı olan W^\perp , W nin **perp** denir [4].

Burada $W \cap W^\perp \neq \{0\}$ dir.

Örnek 2.2.1. $W = \{(x, y, x, y) \in \mathbb{R}_1^4 : x, y \in \mathbb{R}\}$ alt uzayını göz önüne alırsak

$$W \cap W^\perp = \{(x, 0, x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \neq 0$$

ifadesi elde edilir [5].

Önerme 2.2.2. (V, g) m -boyutlu semi-Öklidyen uzay ve W de V nin bir alt uzayı olsun. O zaman;

i. $\text{boy}W + \text{boy}W^\perp = m$

ii. $(W^\perp)^\perp = W$

iii. $\text{Rad}W = \text{Rad}W^\perp = W \cap W^\perp$

olur [5].

V bir vektör uzayı olsun. W_1 ve W_2 , V nin iki alt uzayı olmak üzere,

i. $W_1 \cup W_2 = V$

ii. $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

ise $V = W_1 \oplus W_2$ şeklinde ifade edilir [5]. Buradan hareketle şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.2.1. V bir semi-Öklidyen uzay ve W , V nin bir alt uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

i. W non-dejenere alt uzaydır.

ii. W^\perp non-dejenere alt uzaydır.

iii. W ve W^\perp , V nin komplement ortogonal alt uzaylarıdır.

iv. V , W ve W^\perp in ortogonal direkt toplamıdır, yani $V = W \perp W^\perp$ dir [5].

Ayrıca h kuadratik formu ve yukarıdaki iv ifadesini kullanarak V nin herhangi bir non-dejenere alt uzayı için,

$$\text{ind}V = \text{ind}W + \text{ind}W^\perp \quad (2.2.1)$$

ifadesi elde edilir.

Önerme 2.2.3. g, q -indeksli m -boyutlu V vektör uzayı üzerinde proper semi-Öklidyen metrik olsun. O zaman V nin $\min\{q, m - q\}$ boyutunu geçmeyen bir alt uzayı vardır, öyle ki $g|_W = 0$ dır [5].

Bundan sonra lightlike altmanifoldlar boyunca proper semi-Riemann manifoldlarında en uygun çatı yapılarının lightlike vektör alanlarını içerdiği gösterilecektir. Ayrıca bir lightlike alt uzay boyunca bazı semi-Öklidyen uzayların bazı özel tabanlarının nasıl inşa edileceği gösterilecektir.

(V, g) m -boyutlu proper semi-Öklidyen uzay olsun. V uzayının $\{e_1, \dots, e_q\}$ birim timelike ve $\{e_{q+1}, \dots, e_{q+p}\}$ birim spacelike vektörleri $p + q = m$ olacak şekilde bir $\{e_1, \dots, e_m\}$ ortonormal bazı göz önüne alınsın. Lightlike vektörleri içeren bazı için üç durum söz konusudur;

Durum 2.2.1. ($q < p$) olması durumunda,

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} + e_i\}, f_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} - e_i\} \quad (2.2.2)$$

şeklinde ifade edilir. Buradan

$$g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0, g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij}, i, j \in \{1, \dots, q\} \quad (2.2.3)$$

olduğu görülür. Böylece $\{f_1, \dots, f_q, f_1^*, \dots, f_q^*, e_{2q+1}, \dots, e_{q+p}\}$, V uzayının $2q$ tane lightlike vektör ve $p - q$ tane spacelike vektör içeren bir bazıdır.

Durum 2.2.2. ($p < q$) olması durumunda,

$$f_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+\alpha} + e_\alpha\}, f_\alpha^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+\alpha} - e_\alpha\}, \alpha \in \{1, \dots, p\} \quad (2.2.4)$$

buradan (2.2.3) ifadeleri elde edilir. Burada i, j yerine $\alpha, \beta \in \{1, \dots, p\}$ alınır.

Böylece $\{f_1, \dots, f_p, f_1^*, \dots, f_p^*, e_{2q+1}, \dots, e_{q+p}\}$, V uzayının $2p$ tane lightlike vektör ve $q - p$ tane de timelike vektör içeren bazıdır.

Durum 2.2.3. ($p = q$) olması durumunda $m = 2p = 2q$ olduğundan, (2.2.2) ifadesi yada (2.2.4) ifadesin de tanımlanan $\{f_1, \dots, f_q, f_1^*, \dots, f_q^*\}$ lightlike bazları elde edilir [5].

Tanım 2.2.4. İndeksi $q = 1$ olan non-dejenere 2-boyutlu bir vektör uzayına bir *hiperbolik düzlem* denir [5].

Tanım 2.2.5. (V, g) proper semi-Öklidyen uzayın, $i, j \in \{1, \dots, r\}$, $\alpha, \beta \in \{1, \dots, t\}$, $2r + t = m$ ve $\epsilon_\alpha = \pm 1$ için

$$g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0, g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij},$$

$$g(u_\alpha, f_i) = g(u_\alpha, f_i^*) = 0, g(u_\alpha, u_\beta) = \epsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta},$$

şartını sağlayan bir $B = \{f_1, \dots, f_r, f_1^*, \dots, f_r^*, u_1, \dots, u_t\}$ baza vardır ve bu baza *quasi-ortonormal baz* denir [5].

Tanım 2.2.6. m - boyutlu bir proper semi-Öklidyen V uzayının n - boyutlu lightlike alt uzayı W olsun. Bu durumda $B = \{f_1, \dots, f_r, f_1^*, \dots, f_r^*, u_1, \dots, u_t\}$ quasi ortonormal bazı,

$$W = \text{Span} \{f_1, \dots, f_r, u_1, \dots, u_s\}, n = r + s, 1 \leq s \leq t$$

veya

$$W = \text{Span} \{f_1, \dots, f_n\}, n \leq r$$

ise W boyunca V uzayının *quasi ortonormal bazı* denir [5].

Tanım 2.2.7. (V, g) ve (\bar{V}, \bar{g}) iki semi-Öklidyen uzay ve $T : V \rightarrow \bar{V}$ bir lineer dönüşüm olsun. Her $v, w \in V$ için skaler çarpım korunuyorsa,

$$\bar{g}(T(v), T(w)) = g(v, w)$$

ifadesine ***T bilineer izometridir*** denir [5].

Önerme 2.2.4. T lineer dönüşümü bir izometri olması için gerek ve yeter şart V üzerinde g nin normunun korunmasıdır. Yani,

$$\| T(v) \| = \| v \|, \forall v \in V$$

dir [5].

Tanım 2.2.8. M ve N sırasıyla m ve n -boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ve $F : M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Bu durumda F dönüşümünün $p \in M$ noktasındaki rankı, F_* dönüşümünün rankı olarak tanımlanır. Eğer her p noktasındaki F dönüşümünün rankı m ise, yani $\text{rank}(F_{*p}) = m$ ise F dönüşümüne **dolgulama** veya **immersiyon** denir [6].

Tanım 2.2.9. \bar{M} bir m -boyutlu manifold olsun. \bar{M} üzerinde

$$D : \bar{M} \rightarrow \bigcup T_p \bar{M}$$

$$p \rightarrow D_p \subset T_p \bar{M}, \text{ boy}(D_p) = r$$

ile tanımlı D dönüşümüne **r -boyutlu distribüsyon** denir [6].

$X \in \chi(\bar{M})$ için $X_p \in D_p$ ise X vektör alanına D distribüsyonuna aittir denir. Eğer her p noktası için D_p alt uzayına ait r tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör varsa D distribüsyon **diferensiyellenebilirdir** denir [6].

Tanım 2.2.10. \bar{M} bir C^∞ -manifold ve D, \bar{M} üzerinde r -boyutlu bir distribüsyon olsun. Eğer $X, Y \in \Gamma(D)$ için $[X, Y] \in \Gamma(D)$ ise D distribüsyonuna **involutive** dir denir [6].

Tanım 2.2.11. \bar{M} bir C^∞ -manifold ve D, \bar{M} üzerinde r -boyutlu bir distribüsyon olsun. M, \bar{M} manifoldunun bir altmanifoldu olmak üzere eğer M nin her p noktasında M manifoldunun tanjant uzayı ile D_p aynı ise M ye D distribüsyonunun **integral manifoldu** denir. Yani $f : M \rightarrow \bar{M}$ bir imbeddig olmak üzere $\forall p \in M$ için

$$f_*(T_M(p)) = D_p$$

dir. Eğer D distribüsyonunun M altmanifoldunu kapsayan başka bir integral manifoldu yoksa bu manifolda distribüsyonun **maksimal integral manifoldu** denir [6].

Tanım 2.2.12. \bar{M} bir C^∞ -manifold ve M, \bar{M} manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer $\forall p \in M$ için D distribüsyonunun p noktasını kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa D distribüsyonuna **integrallenebilirdir** denir [6].

Tanım 2.2.13. M bir manifold ve ∇ , manifold üzerinde bir konneksiyon olsun. Eğer $X, Y \in \Gamma(D)$ için

$$\nabla_X Y \in \Gamma(D)$$

ise D distribüsyonuna **paraleldir** denir [6].

Tanım 2.2.14. M bir manifold ve ∇ manifold üzerinde lineer konneksiyon olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\rightarrow T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

ile tanımlı T tensör alanına ∇ lineer konneksiyonunun **torsiyon tensörü** denir. $T = 0$ olması durumunda ∇ lineer konneksiyonu **torsiyonsuzdur** denir [6].

Tanım 2.2.15. M bir n -boyutlu semi-Riemann manifold ve ∇ da M üzerinde lineer konneksiyon olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y, Z) &\rightarrow R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

ile tanımlı R tensör alanına ∇ lineer konneksiyonunun **eğrilik tensörü** denir [6].

Tanım 2.2.16. M bir diferensiyellenebilir manifold ve manifold üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ olsun. Bu durumda

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

ile tanımlı g bilinear formu simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$i. g(X, Y) = g(Y, X),$$

$$ii. g(X, X) \geq 0 \text{ ve her } X \text{ için } g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$$

şartları sağlanıyorsa g bilineer formuna **Riemann metriği** veya **metrik tensör** adı verilir. Bu durumda (M, g) ikilisine **Riemann manifoldu** denir [6].

Teorem 2.2.1. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M üzerinde torsiyonsuz ve g metriği ile uyumlu $(\nabla g = 0)$ bir tek ∇ lineer konneksiyon vardır [6].

(2.2.1) teoremin de verilen konneksiyonuna **Levi-Civita konneksiyon**, **Riemann konneksiyon** veya **metrik konneksiyon** adı verilir [6].

Tanım 2.2.17. (M, g) bir Riemann manifoldu ve X manifold üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer $L_X g = 0$ ise yani,

$$\begin{aligned} (L_X g)(Y, Z) &= Xg(Y, Z) - g(L_X Y, Z) - g(Y, L_X Z) \\ &= Xg(Y, Z) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]) = 0 \end{aligned}$$

X vektör alanına **Killing vektör alanı** denir [6].

Eğer $\forall X \in D$ için $L_X g = 0$ ise D distribüsyonuna **Killing distribüsyon** denir [5].

Tanım 2.2.18. (M, g) n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve M üzerinde lokal ortonormal vektör alanları e_1, \dots, e_n olsun. Bu durumda $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} S : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, R) \\ (X, Y) &\rightarrow S(X, Y) = izR(., X)Y \end{aligned}$$

dönüşümü ile tanımlı $(2, 0)$ -mertebeli,

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X)Y, e_i)$$

tensör alanına (M, g) manifoldunun **Ricci tensörü** denir [6].

Ricci operatörü Ric ise $g(RicX, Y) = S(X, Y)$ ile tanımlanır.

3. SEMİ-RIEMANN MANİFOLDLARDA LIGHTLIKE HİPERYÜZEYLER

3.1 Lightlike Hiperyüzeylerin Lightlike Transversal Vektör Demetleri

Bu bölümde proper semi-Riemann \overline{M} manifoldunun bir lightlike M hiperyüzeyinin diferansiyel geometrideki temeli oluşturulacaktır. Ayrıca screen distribüsyonu tanımlayıp, $tr(TM)$ transversal vektör demeti oluşturulacak ve indirgenmiş geometrik özdeşlikler verilecektir.

Tanım 3.1.1. $(\overline{M}, \overline{g})$, $(m+2)$ -boyutlu $m > 0$ ve $q \in \{1, \dots, m+1\}$ indeksli semi-Riemann manifoldun bir hiperyüzeyi M olsun. Herhangi bir $u \in M$ elemanı için $T_u M$, $(T_u \overline{M}, \overline{g}_u)$ semi-Öklidyen uzayının bir hiperdüzlemi olmak üzere;

$$T_u M^\perp = \{V_u \in T_u \overline{M} : \overline{g}_u(V_u, W_u) = 0, \forall W_u \in T_u M\}$$

şeklinde yazılır ve

$$RadT_u M = T_u M \cap T_u M^\perp$$

dir. Eğer herhangi $u \in M$ için

$$RadT_u M \neq \{0\}$$

ise M , \overline{M} nin **lightlike (null,dejenere) hiperyüzeyidir** denir [5].

Önerme 3.1.1. $(m+2)$ -boyutlu semi-Riemann manifold $(\overline{M}, \overline{g})$ manifoldunun bir hiperyüzeyi (M, g) olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir;

- i. M , \overline{M} nin bir lightlike hiperyüzeyidir.
- ii. g , M üzerinde sabit bir rank m ye sahiptir.

iii. $TM^\perp = \bigcup_{u \in M} T_u M^\perp$, M üzerinde bir distribüsyondur [5].

İspat. $i \Rightarrow ii$ $RadT_u M \neq \{0\}$ olduğundan $\xi_u \in RadT_u M$ vardır ve $\xi_u \neq 0$ dir. Öyle ki herhangi bir $x_u \in T_u M$ için $g_u(\xi_u, x_u) = 0$ dir. Dolayısıyla $rank g_u < m + 1$ dir. Diğer taraftan $boyT_u M^\perp = 1$ olduğundan dolayı $rank g_u \geq m$ dir. Bu iki ifadeden $rank g_u = m$ dir.

$ii \Rightarrow iii$ $rank g_u = m$ olduğundan sıfırdan farklı $\xi_u \in T_u M$ için $g_u(\xi_u, x_u) = 0$ olacak şekilde herhangi bir $x_u \in T_u M$ vardır. Bu ise $\xi_u \in T_u M^\perp$ gösterir. Bu yüzden her $z_u \in T_u M^\perp$ için $z_u = \alpha \xi_u$, $\alpha \in \mathbb{R}$ yazılabilir. Dolayısıyla $T_u M^\perp \subset T_u M$ olduğunu gösterir. Bu da $TM^\perp = \bigcup_{u \in M} T_u M^\perp$ dir.

$iii \Rightarrow i$ TM^\perp , TM nin bir alt vektör demeti olduğundan □

$$T_u M \cap T_u M^\perp = RadT_u M = TM^\perp \neq \{0\}$$

ifadesi elde edilir. Buradan M nin \overline{M} bir lightlike hiperyüzeyidir.

M , \overline{M} semi-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. TM de TM^\perp in tamamlayıcı olan $S(TM)$ distribüsyonuna ekran distribüsyonu denir ve

$$TM = S(TM) \perp TM^\perp \quad (3.1.1)$$

ayrışımı mevcuttur. Burada $S(TM)$ bir non-dejenere uzaydır. Böylece M boyunca

$$T\overline{M} |_{M} = S(TM) \perp S(TM)^\perp \quad (3.1.2)$$

ayrışımı yazılabilir [5].

Teorem 3.1.1. $(M, g, S(TM))$, $(\overline{M}, \overline{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. M üzerinde rankı 1 olan bir $tr(TM)$ vektör demeti vardır öyle ki $U \subset M$ koordinat komşuluğunda TM^\perp in sıfırdan farklı herhangi bir ξ kesiti için $tr(TM)$ nin U üzerinde,

$$\overline{g}(N, \xi) = 1, \overline{g}(N, N) = \overline{g}(N, W) = 0, \forall W \in \Gamma(S(TM) |_U) \quad (3.1.3)$$

olacak şekilde bir birim kesiti vardır [5].

Burada $tr(TM)$, bir lightlike vektör demetidir ve

$$tr(TM)_u \cap T_u M = \{0\}, \quad \forall u \in M$$

dır. Böylece (3.1.1) ve (3.1.2) ifadeleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} T\overline{M} \big|_M &= S(TM) \perp (TM^\perp \oplus tr(TM)) = S(TM) \perp TM^\perp \oplus tr(TM) \\ &= TM \oplus tr(TM) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

elde edilir. Her $S(TM)$ distribüsyonu için $T\overline{M} \big|_M$ de bir tek $tr(TM)$ vektör demeti vardır. Bu nedenle $tr(TM)$ demetine M lightlike hiperyüzeyinin $S(TM)$ ye göre lightlike transversal vektör demeti denir.

Uyarı 3.1.1. *Herhangi bir $u \in M$ de $\{\xi_u, N_u\}$ çifti ile gerilen düzlem hiperbolik düzlem olduğundan*

$$T\overline{M} \big|_M = S(TM) \perp (TM^\perp \oplus tr(TM))$$

ve

$$indT\overline{M} \big|_M = indS(TM) + indS(TM)^\perp$$

ifadelerinden $S(TM)$ screen distribüsyonu sabit indeksli $q - 1$, non dejenere dir. Lorentz manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi üzerinde herhangi screen distribüsyonu Riemann'dır. Yani $S(TM)$ üzerindeki metrik pozitif tanımlıdır [5].

Örnek 3.1.1. \mathbb{R}_2^4 de

$$M : x^3 = x^0 + \frac{1}{2}(x^1 + x^2)^2$$

hiperyüzeyi verilsin. M nin bir lightlike hiperyüzey olduğu ve

$$TM^\perp = span \left\{ \xi = \frac{\partial}{\partial x^0} + (x^1 + x^2) \frac{\partial}{\partial x^1} - (x^1 + x^2) \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \right\}$$

lightlike transversal vektör demeti,

$$\begin{aligned} tr(TM) &= span \left\{ N = -\frac{1}{2(1 + (x^1 + x^2)^2)} \left(\frac{\partial}{\partial x^0} + (x^1 + x^2) \frac{\partial}{\partial x^1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (x^1 + x^2) \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \right\} \end{aligned}$$

screen distribisyon,

$$S(TM) = \left\{ W_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} - (x^1 + x^2) \frac{\partial}{\partial x^0}, W_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + (x^1 + x^2) \frac{\partial}{\partial x^3} \right\}$$

uyarıdan hareket edilerek kolaylıkla bulunur.

3.2 Lightlike Hiperyüzeylerde İndirgenmiş Geometrik Nesnelere

(\bar{M}, \bar{g}) , $(m+2)$ -boyutlu semi-Riemann manifoldun bir lightlike hiperyüzeyi (M, g) ve $\bar{\nabla}$ de \bar{M} manifoldu üzerinde \bar{g} ye karşılık gelen Levi-Civita konneksiyon olsun. $S(TM)$ ve $tr(TM)$ sırasıyla M nin screen distribüsyonu ve transversal vektör demeti olmak üzere (3.1.4) ifadesinde ki ayrışımın ikinci kısmı kullanılırsa, herhangi $X, Y \in \Gamma(tr(TM))$ ve $V \in \Gamma(TM)$ için

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad (3.2.1)$$

$$\bar{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla_X^t V \quad (3.2.2)$$

dir. Burada $\nabla_X Y, A_V X \in \Gamma(TM)$ ve $h(X, Y), \nabla_X^t V \in \Gamma(tr(TM))$ aittir. h , $\Gamma(TM)$ üzerinde $\Gamma(tr(TM))$ değerli simetrik bilinear form ve A da $\Gamma(tr(TM)) \times \Gamma(TM)$ üzerinde torsiyonsuz $\Gamma(TM)$ değerli bilinear formdur. ∇ ve ∇^t ye sırasıyla TM ve $tr(TM)$ de indirgenmiş konneksiyonlardır. Riemann hiperyüzeylerin klasik teorisine uyumlu olması açısından h ve A_V ye \bar{M} ve M lightlike immerisyonun sırasıyla **İkinci temel formu**, **Şekil operatörü** denir. Ayrıca (3.2.1) ve (3.2.2) denklemlerine de sırasıyla **Gauss ve Weingarten formülleri** denir [5].

$\{\xi, N\}$, (3.1.1) de tanımlanmış olan $U \subset M$ üzerinde kesitlerin çifti olduğunu göz önüne alalım. Bu durumda U üzerinde simetrik $F(U)$ - bilinear form B ve 1 - form τ olmak üzere

$$B(X, Y) = \bar{g}(h(X, Y), \xi), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM|_U) \quad (3.2.3)$$

$$\tau(X) = \bar{g}(\nabla_X^t N, \xi), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM|_U) \quad (3.2.4)$$

tanımlanır. Buradan

$$h(X, Y) = B(X, Y) N \quad (3.2.5)$$

ve

$$\nabla_X^t N = \tau(X) N \quad (3.2.6)$$

ifadeleri U üzerinde (3.2.1) ve (3.2.2) denklemleri kullanılırsa,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y) N \quad (3.2.7)$$

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N Y + \tau(X) N \quad (3.2.8)$$

elde edilir. Lightlike hiperyüzeylerin geometrisi screen distribüsyon seçimine bağlı olduğundan, iki screen distribüsyon tarafından indirgenmiş geometrik nesnelere arasındaki ilişkileri incelemek önemlidir. Bunun için aşağıdaki sonuç lightlike hiperyüzeyler için önemlidir [5].

Önerme 3.2.1. $S(TM)$ ve $S(TM)'$, M de iki screen distribüsyon olsun. h ve h' sırasıyla $tr(TM)$ ve $tr(TM)'$ e göre ikinci temel formlar olsun. Bu durumda U da $B = B'$ dır ki M nin iki temel formu U da screen distribüsyon seçiminden bağımsızdır [7].

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma(TM|_u)$

$$B(X, Y) = \bar{g}(h(X, Y), \xi)$$

$$B'(X, Y) = \bar{g}(h'(X, Y), \xi)$$

olmak üzere (3.2.1) ve (3.2.2) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \bar{g}(h(X, Y), \xi) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, \xi) - \bar{g}(\nabla_X Y, \xi) \\
&= \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, \xi)
\end{aligned}$$

elde edilir. $B(X, Y) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, \xi)$ dir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
B'(X, Y) &= \bar{g}(h'(X, Y), \xi) \\
&= \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \xi) \\
&= \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, \xi)
\end{aligned}$$

buradan da $B'(X, Y) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, \xi)$ elde edilir. Dolayısıyla

$$B(X, Y) = B'(X, Y) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, \xi)$$

yazılır ki bu ise M nin ikinci temel formunun U da screen distribisyon seçiminden bağımsız olduğunu gösterir. \square

Sonuç 3.2.1. *Lightlike hiperyüzeylerin ikinci temel formu dejeneredir [5].*

Tanım 3.2.1. M üzerinde V ve W iki vektör alanı olsun. Eğer $B(V, W) = 0$ ise V ve W vektör alanlarına **konjuge** denir. $B(V, V) = 0$ ise **self-konjuge asimptotik vektör alanı** denir [8].

Önerme 3.2.2. \bar{M} nin lightlike hiperyüzeyi M üzerindeki herhangi bir vektör alanıyla konjusedir. Herhangi $\xi \in \Gamma(TM^\perp|_U)$ için ξ asimptotik bir vektör alanıdır.

Yani;

$$\bar{g}(\xi, \xi) = 0$$

dır.

İspat. \bar{M} nin lightlike hiperyüzeyi M üzerinde herhangi vektör alanı konjuge olduğundan $\xi \in \Gamma(TM^\perp|_U)$ ve $V \in \Gamma(TM|_U)$ için $B(V, \xi) = 0$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
B(V, \xi) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_V \xi, \xi) = 0 \\
&\Rightarrow 2\bar{g}(\bar{\nabla}_V \xi, \xi) = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{g}(\bar{\nabla}_V \xi, \xi) + \bar{g}(\xi, \bar{\nabla}_V \xi) = 0$$

$$\Rightarrow V\bar{g}(\xi, \xi) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{g}(\xi, \xi) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla ξ asimptotik vektör alanıdır. \square

$P, TM = S(TM) \perp TM^\perp$ ayrışımına göre $S(TM)$ de TM nin projeksiyon morfizmi tanımlansın. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(TM), \forall U \in \Gamma(TM)^\perp$ için

$$\nabla_X PY = \nabla_X^* PY + h^*(X, PY) \quad (3.2.9)$$

$$\nabla_X U = -A_U^* X + \nabla_X^t U \quad (3.2.10)$$

ve $\nabla_X^* PY, A_U^* X \in \Gamma(S(TM))$ ye, $h^*(X, PY), \nabla_X^t U \in \Gamma(TM^\perp)$ ye bağlıdır. ∇^* ve ∇^t sırasıyla $S(TM)$ ve TM^\perp vektör demetlerinde lineer konneksiyondur. h^* bir $\Gamma(TM^\perp)$ değerli bilinear formu $\Gamma(TM) \times \Gamma(S(TM))$ de değer alır. A_U^* ise $\Gamma(S(TM))$ de değer alır. $\Gamma(TM)$ 'de $\mathcal{F}(M)$ -lineer operatördür [5].

h^* ve A_U^* a sırasıyla $S(TM)$ screen distiribüsyonunun **İkinci temel formu ve şekil operatörü** denir. Ayrıca yukardaki (3.2.9) ve (3.2.10) denklemlerine screen distiribüsyon $S(TM)$ için sırasıyla **Gauss ve Weingarten denklemler** denir. (3.2.1), (3.2.2), (3.2.9) ve (3.2.10) denklemleri kullanılarak herhangi bir $X, Y, W \in \Gamma(TM), U \in \Gamma(TM^\perp)$ ve $V \in \Gamma(tr(TM))$ için

$$g(A_V Y, PW) = \bar{g}(V, h^*(Y, PW)); \bar{g}(A_V Y, V) = 0, \quad (3.2.11)$$

$$g(A_U^* X, PY) = \bar{g}(U, h(X, PY)); \bar{g}(A_U^* X, V) = 0 \quad (3.2.12)$$

eşitlikleri elde edilir. Lokal olarak U üzerinde

$$C(X, PY) = \bar{g}(h^*(X, PY), N),$$

$$\epsilon(X) = \bar{g}\left(\nabla_X^t \xi, N\right) \quad (3.2.13)$$

ifadeleri ile tanımlanır. Böylece

$$h^*(X, PY) = C(X, PY) \xi \quad (3.2.14)$$

ve

$$\epsilon(X)\xi = \nabla_X^* \xi \quad (3.2.15)$$

dir. Diğer taraftan (3.2.10), (3.2.11), (3.1.3), (3.2.1) ve (3.2.2) ifadeleri kullanılırsa,

$$\epsilon(X) = \bar{g}(\nabla_X \xi, N) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X \xi, N) = -\bar{g}(\xi, \bar{\nabla}_X N) = -\tau(X)$$

elde edilir. Böylece lokal olarak (3.2.9) ve (3.2.10) ifadelerini kullanılırsa,

$$\nabla_X PY = \nabla_X^* PY + C(X, PY)\xi \quad (3.2.16)$$

ve

$$\nabla_X \xi = -A_\xi^* X - \tau(X)\xi \quad (3.2.17)$$

ifadeleri elde edilir. Son olarak (3.2.11) ve (3.2.12) ifadeleri kullanılırsa,

$$g(A_N Y, PW) = C(Y, PW); \bar{g}(A_N Y, N) = 0, \quad (3.2.18)$$

$$g(A_\xi^* X, PY) = B(X, PY); \bar{g}(A_\xi^* X, N) = 0 \quad (3.2.19)$$

ifadeleri elde edilir.

Önerme 3.2.3. $(M, g, S(TM)), (\bar{M}, \bar{g})$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M nin A_N şekil operatörü sıfır olan bir özdeğere sahiptir [5].

Tanım 3.2.2. Bir semi-Riemann manifoldun $(M, g, S(TM))$ lightlike hiperyüzeyi

$$A_N = \varphi A_\xi^*$$

şartını sağlıyor ise M ye **ekran konformal lightlike hiperyüzey** denir. Burada A_N ve A_ξ^* sırasıyla M ve $S(TM)$ nin şekil operatörleridir. φ , M de sıfırdan farklı diferansiyellenebilir bir fonksiyondur. φ sıfırdan farklı bir sabit ise M ye ekran homotetik denir [9].

Sonuç 3.2.2. Screen distiribüsyonun ikinci temel formu da dejeneredir [5].

Teorem 3.2.1. $(M, g, S(TM)), (\overline{M}, \overline{g})$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda ∇ indirgenmiş konneksiyonu tektir. Yani $\nabla, S(TM)$ den bağımsızdır; gerek ve yeter şart M nin ikinci temel formu h, M de sıfırdır [5].

Genelde ∇ indirgenmiş konneksiyonu metrik konneksiyon değildir. Bunu ifade etmek için U üzerinde bir η 1-formu,

$$\eta(X) = \overline{g}(X, N), \forall X \in \Gamma(TM|_U) \quad (3.2.20)$$

şeklinde ifade edilir [5].

Önerme 3.2.4. *i. ∇^* lineer konneksiyonu $S(TM)$ de metrik konneksiyondur.*

$$\nabla_X PY = \nabla_X^* PY + h^*(X, PY)$$

ii. M üzerinde indirgenmiş ∇ konneksiyon $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM|_U)$ için,

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = B(X, Y)\eta(Z) + B(X, Z)\eta(Y) \quad (3.2.21)$$

denklemini sağlanır [5].

İspat. *i. $PY, PZ \in \Gamma S(TM)$ için metrik konneksiyon tanımından*

$$\begin{aligned} (\nabla_X g)(PY, PZ) &= X(g(PY, PZ)) - g(\nabla_X PY, PZ) - g(PY, \nabla_X PZ) \\ &= g(\nabla_X PY, PZ) + g(PY, \nabla_X PZ) - g(\nabla_X PY, PZ) \\ &\quad - g(PY, \nabla_X PZ) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bu ise ispatı tamamlar.

ii. ∇ metrik konneksiyon olduğundan $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM|_u)$ için

$$\begin{aligned} 0 &= (\overline{\nabla}_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\overline{\nabla}_X Y, Z) - g(Y, \overline{\nabla}_X Z) \\ &= X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y + h(X, Y), Z) - g(Y, \nabla_X Z + h(X, Z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(h(X, Y), Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\
&\quad - g(Y, h(X, Z)) \\
&= (\nabla_X g)(Y, Z) - B(X, Y)g(N, Z) - B(X, Z)g(Y, N) \\
&= (\nabla_X g)(Y, Z) - B(X, Y)\eta(Z) - B(X, Z)\eta(Y) \\
&\Rightarrow (\nabla_X g)(Y, Z) = B(X, Y)\eta(Z) + B(X, Z)\eta(Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Tanım 3.2.3. (\overline{M}, g) bir Riemann manifold ve M, \overline{M} manifoldunun altmanifoldu olsun. Eğer h ikinci temel formu sıfır ise altmanifoldta **total(tamamen) geodezik** denir [6].

(3.2.1) Gauss formülü total geodezik kavramının geometrik olarak ne anlama geldiğini söylemektedir. Gerçekten Gauss formülünden, bir altmanifoldun total geodezik olması için gerek ve yeter şart M altmanifoldundaki her geodeziğin aynı zamanda \overline{M} manifoldunun da geodezik olmasıdır.

Önerme 3.2.5. $(M, g, S(TM)), (\overline{M}, \overline{g})$ semi-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. M total geodeziktir.
- ii. h, M de sıfırdır.
- iii. A_U^* herhangi $u \in \Gamma(TM^\perp)$ için M de sıfırdır.
- iv. M de $\overline{\nabla}$ da indirgenmiş tek torsiyonsuz metrik ∇ konneksiyon vardır.
- v. TM^\perp, ∇ ya göre paralel distribüsyondur.
- vi. TM^\perp, M de Killing distrbüsyondur [5].

Önerme 3.2.6. $(M, g, S(TM)), (\overline{M}, \overline{g})$ semi-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

i. $S(TM)$ integrallenebilir distribüsyondur.

ii. $h^*(X, Y) = h^*(Y, X), \forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$ dir.

iii. M nin şekil operatörü g ye göre simetriktir; yani $\forall X, Y \in \Gamma(S(TM)), V \in \Gamma(tr(TM))$ için

$$g(A_V X, Y) = g(X, A_V Y)$$

dir [7].

Önerme 3.2.7. $(M, g, S(TM)), (\bar{M}, \bar{g})$ semi-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

i. $S(TM)$ indirgenmiş ∇ konneksiyonuna göre paraleldir.

ii. h^* , M de sıfırdır.

iii. A_N , M de sıfırdır [7].

İspat. $i) \Rightarrow ii) \forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için $\eta(X) = 0$ ve $\eta(Y) = 0$ olup $\eta([X, Y]) = 0$ olduğunu görelim:

$$\begin{aligned} \eta([X, Y]) &= \bar{g}([X, Y], N) \\ &= \bar{g}(\nabla_X Y - \nabla_Y X, N) \\ &= \bar{g}(\nabla_X^* Y + h^*(X, Y), N) - \bar{g}(\nabla_Y^* X + h^*(Y, X), N) \\ &= \bar{g}(\nabla_X^* Y - \nabla_Y^* X, N) + \bar{g}(h^*(X, Y), N) - \bar{g}(h^*(Y, X), N) \\ &= \bar{g}([X, Y], N) + \bar{g}(h^*(X, Y), N) - \bar{g}(h^*(Y, X), N) \\ &= 0 \end{aligned}$$

∇ ya göre paralel olması için radikalın elemanı olması gerekir. Dolayısıyla h^* sıfırdır.

$ii) \Rightarrow iii)$

$$g(A_V Y, PW) = \bar{g}(V, h^*(Y, PW)); \bar{g}(A_V Y, V) = 0$$

ifadesini göz önüne alarak $g(A_N Y, PW)$ nin sıfır olabilmesi için $PW \in S(TM) \neq 0$ olmalıdır. O halde $A_N Y = 0$ dir. \square

3.3 Lightlike Hiperyüzeylerin Gauss-Codazzi Denklemleri

$(M, g, S(TM)), (\bar{M}, \bar{g})$ semi-Riemann manifoldun lightlike hiperyüzeyi $\bar{\nabla}$ de \bar{M} üzerinde Levi-Civita konneksiyon ve ∇ da M üzerinde indirgenmiş konneksiyon olsun. $\bar{\nabla}$ nin eğrilik tensörünü \bar{R} ve ∇ nun eğrilik tensörünü de R ile tanımlansın. (2.2.5) denkleminde

$$R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z$$

(3.2.1), (3.2.2) ifadeleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z) \\ &\quad + A_{h(X, Z)}Y - A_{h(Y, Z)}X \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

elde edilir. Herhangi $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = \nabla_X^t(h(X, Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \quad (3.3.2)$$

dir. Herhangi $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM), U \in \Gamma(TM^\perp), V \in \Gamma(tr(TM))$ için (3.3.1) ifadesinde (3.2.5), (3.2.11) ve $B(X, \xi) = 0$ ifadeleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, PW) &= g(R(X, Y)Z, PW) + \bar{g}(h(X, Y), h^*(Y, PW)) \\ &\quad - \bar{g}(h(Y, Z), h^*(X, PW)) \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

$$\bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, U) = \bar{g}((\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z), U) \quad (3.3.4)$$

ve

$$\bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, V) = \bar{g}(R(X, Y)Z, V) \quad (3.3.5)$$

ifadeleri elde edilir. (3.3.3), (3.3.4) ve (3.3.5) denklemlerine $(M, g, S(TM))$ lightlike hiperyüzeyinin **Gauss-codazzi denklemleri** denir. (3.3.3), (3.3.4) ve (3.3.5)

denklemlerinde Z ile U nun yerleri deđiştirildiđinde $\forall X, Y \in \Gamma(TM), U \in \Gamma(TM^\perp)$ için

$$R(X, Y)U = \bar{R}(X, Y)U \quad (3.3.6)$$

elde edilir [5]. Bu durumda řu önerme verilebilir.

Önerme 3.3.1. $(M, g, S(TM)), (\bar{M}, \bar{g})$ semi-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. TM^\perp üzerinde ∇ nın eğrilik formunun kısıtlanması $S(TM)$ den bağımsızdır [5].

şimdi teorem (3.1.1) den $U \subset M$ üzerinde $\{\xi, N\}$ çiftini alalım. Burada (3.2.5), (3.2.6) ve (3.2.14) ifadeleri kullanılırsa (3.3.3), (3.3.4) ve (3.3.5) ifadeleri için

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, PW) &= g(R(X, Y)Z, PW) + B(X, Z)C(Y, PW) \\ &\quad - B(Y, Z)C(X, PW) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, \xi) &= (\nabla_X B)(Y, Z) - (\nabla_Y B)(X, Z) + B(Y, Z)\tau(X) \\ &\quad - B(X, Z)\tau(Y) \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

$$\bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, N) = \bar{g}(R(X, Y)Z, N) \quad (3.3.9)$$

ifadeleri elde edilir. Herhangi $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM|_U)$ için

$$(\nabla_X B)(Y, Z) = X(B(Y, Z)) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z) \quad (3.3.10)$$

(3.2.19) ifadesi kullanılırsa,

$$B(X, A_\xi^* Y) = B(Y, A_\xi^* X)$$

elde edilir.

Önerme 3.3.2. \bar{M} nin lightlike hiperyüzeyi M nin herhangi screen distribüsyonun şekil operatörü M nin ikinci temel formuna göre simetriktir [5].

4. SEMİ-SİMETRİK LIGHTLIKE HİPERYÜZEYLER

4.1 Semi-Öklidyen Uzayda Semi-Simetrik Lightlike Hiperyüzeyler

Bu bölümde \mathbb{R}_q^{n+2} semi-Öklidyen uzayının bir lightlike hiperyüzeyi için Gauss denklemi verilecektir. Minkowski spacetime her ekran konformal hiperyüzeyinin semi-simetrik olduğu gösterilecek ve yüksek boyutlar için bir M ekran konformal lightlike hiperyüzeyinin semi-simetrik olma koşulu ile ekran distribüsyonunun semi-simetrik olması koşulu arasında açık bir ilişki olduğu ifade edilecektir.

Önerme 4.1.1. *Bir \mathbb{R}_q^{n+2} semi-Öklidyen uzayının bir lightlike hiperyüzeyi M olsun. M nin Gauss denklemi $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(tr(TM))$ için*

$$R(X, Y)Z = B(Y, Z)AX - B(X, Z)AY \quad (4.1.1)$$

denklemini ifade edilir [3].

İspat. Bir semi-Riemann \bar{M} manifoldunun lightlike hiperyüzeyi, (3.3.1) ifadesinde,

$$\bar{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z) + A_{h(X, Z)}Y - A_{h(Y, Z)}X$$

\bar{M} ve M nin eğrilik tensörleri sırasıyla \bar{R} ve R dir.

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = \nabla_X^t(h(X, Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)$$

ile tanımlanır. $\bar{M} = \mathbb{R}_q^{n+2}$ bir semi-Öklidyen uzay olduğundan $\bar{R} = 0$ dir. Buradan da (3.3.1) ifadesi

$$R(X, Y)Z + (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z) + A_{h(X, Z)}Y - A_{h(Y, Z)}X = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.2.5) ifadesi kullanılırsa,

$$R(X, Y)Z + B(X, Z)A_N Y - B(Y, Z)A_N X + (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z) = 0$$

elde edilir. Burada teğetsel ve transversal parçalarının karşılaştırılması göz önüne alınır (4.1.1) ifadesi elde edilir. \square

Genelde lightlike hiperyüzeyler için $\forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$g(R(X, Y)Z, W) \neq g(R(X, Y)W, Z)$$

dir.

Tanım 4.1.1. *Bir semi-Öklidyen uzayın bir lightlike hiperyüzeyi M olsun.*

$X, Y, X_1, X_2, X_3, X_4 \in \Gamma(TM)$ için

$$(R(X, Y) \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0 \quad (4.1.2)$$

koşulu sağlanıyorsa M ye **semi-simetrik** denir [3].

Tanımdan $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ için $X_4 = \xi$ alınır,

$$(R(X, Y) \cdot R)(X_1, X_2, X_3, \xi) = 0$$

olduğu kolayca görülür. Böylece (4.1.2) koşulu $X, Y, X_1, X_2, X_3, X_4 \in \Gamma(TM)$ için

$$(R(X, Y) \cdot R)(X_1, X_2, X_3, PX_4) = 0 \quad (4.1.3)$$

koşuluna eşdeğerdir. $\forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

$$g(R(X, Y)Z, W) \neq g(R(X, Y)W, Z)$$

olduğundan (4.1.2) ve (4.1.3) denklemleri $\forall X, Y, U, V, W \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} (R(X, Y) \cdot R)(U, V)W &= R(X, Y)R(U, V)W - R(U, V)R(X, Y)W \\ &- R(R(X, Y)U, V)W - R(U, R(X, Y)V)W = 0 \end{aligned}$$

eşitliği anlamına gelmez. Şimdi (4.1.3) ifadesinde semi-simetrik eğrilik koşulu kullanılırsa, $\forall X, Y, X_1, X_2, X_3, PX_4 \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} (R(X, Y) \cdot R)(X_1, X_2, X_3, PX_4) &= -R(R(X, Y) X_1, X_2, X_3, PX_4) \\ &- R(X_1, R(X, Y) X_2, X_3, PX_4) - R(X_1, X_2, R(X, Y) X_3, PX_4) \\ &- R(X_1, X_2, X_3, R(X, Y) PX_4) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

elde ederiz. Daha sonra (4.1.1) ifadesini kullanılırsa,

$$\begin{aligned} R(R(X, Y) X_1, X_2, X_3, PX_4) &= R(B(Y, X_1) AX - B(X, X_1) AY, X_2, X_3, PX_4) \\ &= B(Y, X_1) R(AX, X_2, X_3, PX_4) - B(X, X_1) R(AY, X_2, X_3, PX_4) \\ &= B(Y, X_1) g(R(AX, X_2) X_3, PX_4) - B(X, X_1) g(R(AY, X_2) X_3, PX_4) \\ &= B(Y, X_1) [g(B(X_2, X_3) A^2X - B(AX, X_3) AX_2), PX_4] \\ &- B(X, X_1) [g(B(X_2, X_3) A^2Y - B(AY, X_3) AX_2), PX_4] \\ &= -B(Y, X_1) [B(X_2, X_3) g(A^2X, PX_4) - B(AX, X_3) g(AX_2, PX_4)] \\ &- B(X, X_1) [B(X_2, X_3) g(A^2Y, PX_4) - B(AY, X_3) g(AX_2, PX_4)] \end{aligned}$$

benzer şekilde

$$\begin{aligned} R(X_1, R(X, Y) X_2, X_3, PX_4) &= B(Y, X_2) [B(AX, X_3) g(AX_1, PX_4) \\ &- B(X_1, X_3) g(A^2X, PX_4)] - B(X, X_2) [B(AY, X_3) g(AX_1, PX_4) \\ &- B(X_1, X_3) g(A^2Y, PX_4)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(X_1, X_2, R(X, Y) X_3, PX_4) &= B(Y, X_3) [B(X_2, AX) g(AX_1, PX_4) \\ &- B(X_1, AX) g(AX_2, PX_4)] - B(X, X_3) [B(X_2, AY) g(AX_1, PX_4) \\ &- B(X_1, AY) g(AX_2, PX_4)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(X_1, X_2, X_3, R(X, Y) PX_4) &= B(Y, PX_4) [B(X_2, X_3) g(AX_1, AX) \\ &- B(X_1, X_3) g(AX_2, AX)] - B(X, PX_4) [B(X_2, X_3) g(AX_1, AY) \\ &- B(X_1, X_3) g(AX_1, AY)] \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadeleri (4.1.4) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
(R(X, Y) R)(X_1, X_2, X_3, PX_4) &= B(Y, X_1) [B(AX, X_3) g(AX_2, PX_4) \\
&- B(X_2, X_3) g(A^2X, PX_4)] \\
&+ B(X, X_1) [B(X_2, X_3) g(A^2Y, PX_4) - B(AY, X_3) g(AX_2, PX_4)] \\
&+ g(AX_1, PX_4) [B(Y, X_2) B(AX, X_3) - B(X, X_2) B(AY, X_3)] \\
&+ B(X_1, X_3) [B(Y, X_2) g(A^2X, PX_4) - B(X, X_2) B(A^2Y, PX_4)] \quad (4.1.5) \\
&+ g(AX_1, PX_4) [-B(X_3, Y) B(X_2, AX) + B(X, X_3) B(X_2, AY)] \\
&+ g(AX_2, PX_4) [B(X_3, Y) B(X_1, AX) - B(X, X_3) B(X_1, AY)] \\
&+ B(X_2, X_3) [-B(Y, PX_4) g(AX_1, AX) + B(X, PX_4) g(AX_1, AY)] \\
&+ B(X_1, X_3) [B(Y, PX_4) g(AX_2, AX) - B(X, PX_4) g(AX_2, AY)]
\end{aligned}$$

elde edilir [3].

Önerme 4.1.2. *Minkowski spacetime uzayının her screen konformal lightlike hiperyüzeyi bir semi-simetrik lightlike hiperyüzeydir [3].*

İspat. (4.1.5) den $X, Y, X_2, X_3, X_4 \in \Gamma(TM)$, $\xi \in \Gamma(RadTM)$ ve $X_1 = \xi$ için

$$\begin{aligned}
(R(X, Y) R)(\xi, X_2, X_3, PX_4) &= B(Y, \xi) [B(AX, X_3) g(AX_2, PX_4) \\
&- B(X_2, X_3) g(A^2X, PX_4)] \\
&+ B(X, \xi) [B(X_2, X_3) g(A^2Y, PX_4) - B(AY, X_3) g(AX_2, PX_4)] \\
&+ g(A\xi, PX_4) [B(Y, X_2) B(AX, X_3) - B(X, X_2) B(AY, X_3)] \\
&+ B(\xi, X_3) [B(Y, X_2) g(A^2X, PX_4) - B(X, X_2) B(A^2Y, PX_4)] \\
&+ g(A\xi, PX_4) [-B(X_3, Y) B(X_2, AX) + B(X, X_3) B(X_2, AY)] \\
&+ g(AX_2, PX_4) [B(X_3, Y) B(\xi, AX) - B(X, X_3) B(\xi, AY)] \\
&+ B(X_2, X_3) [-B(Y, PX_4) g(A\xi, AX) + B(X, PX_4) g(A\xi, AY)] \\
&+ B(\xi, X_3) [B(Y, PX_4) g(AX_2, AX) - B(X, PX_4) g(AX_2, AY)]
\end{aligned}$$

elde edilir. $B(X, \xi) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
(R(X, Y) R)(\xi, X_2, X_3, PX_4) &= g(A\xi, PX_4) [-B(Y, X_2) B(AX, X_3) \\
&+ B(X, X_2) B(AY, X_3)] + g(A\xi, PX_4) [-B(X_3, Y) B(X_2, AX) \\
&+ B(X, X_3) B(X_2, AY)] + B(X_2, X_3) [-B(Y, PX_4) g(A\xi, AX) \\
&+ B(X, PX_4) g(A\xi, AY)]
\end{aligned}$$

elde edilir. $A_N = \varphi A_\xi^*$ kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (R(X, Y) R)(\xi, X_2, X_3, PX_4) &= \varphi g(A_\xi^* \xi, PX_4) [-B(Y, X_2) B(AX, X_3) \\ &- B(X, X_2) B(AY, X_3)] \\ &+ \varphi g(A_\xi^* \xi, PX_4) [-B(X_3, Y) B(X_2, AX) + B(X, X_3) B(X_2, AY)] \\ &+ \varphi B(X_2, X_3) [-B(Y, PX_4) B(A_\xi^* \xi, AX) + B(X, PX_4) g(A_\xi^* \xi, AY)] \end{aligned}$$

elde edilir. $g(A_\xi^* X, PY) = B(X, PY)$ ve $B(X, \xi) = 0$ ele alınırsa $X = 0$ için $A_\xi^* \xi = 0$ olur. Dolayısıyla

$$(R(X, Y) R)(\xi, X_2, X_3, PX_4) = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan benzer yöntemlerle

$$\begin{aligned} (R(X, Y) R)(X_1, X_2, \xi, PX_4) &= 0, (R(\xi, Y) R)(X_1, X_2, \xi, PX_4) = 0, \\ (R(X, Y) R)(X_1, \xi, X_3, PX_4) &= 0 \text{ ve } (R(X, \xi) R)(X_1, X_2, X_3, PX_4) = 0 \end{aligned}$$

gösterilebilir. \mathbb{R}_1^4 da quasi ortonormal bazı $\{X_1, X_2, \xi, N\}$, $S(TM) = \text{span}\{X_1, X_2\}$ ve $\text{tr}(TM) = \text{span}\{N\}$ olsun. (4.1.5) den

$$\begin{aligned} (R(X_1, X_2) R)(X_1, X_2, X_1, X_2) &= B(X_2, X_1) [B(AX_1, X_1) g(AX_2, X_2) \\ &- B(X_2, X_1) g(A^2 X, X_2)] \\ &+ B(X_1, X_1) [B(X_2, X_1) g(A^2 X_2, X_2) - B(AX_2, X_1) g(AX_2, X_2)] \\ &+ g(AX_1, X_2) [-B(X_2, X_1) B(AX_1, X_1) + B(X_1, X_2) B(AX_2, X_1)] \\ &+ B(X_1, X_1) [B(X_2, X_1) g(A^2 X_1, X_2) - B(X_1, X_2) g(A^2 X_2, X_2)] \\ &+ g(AX_1, X_2) [-B(X_1, X_2) B(X_2, AX_1) + B(X_1, X_1) B(X_2, AX_2)] \\ &+ g(AX_2, X_2) [B(X_1, X_2) B(X_1, AX_1) - B(X_1, X_1) B(X_1, AX_2)] \\ &+ B(X_2, X_1) [-B(X_2, X_2) B(AX_1, AX_1) + B(X_1, X_2) g(AX_1, AX_2)] \\ &+ B(X_1, X_1) [B(X_2, X_2) g(AX_2, AX_1) - B(X_1, X_2) g(AX_2, AX_2)] \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

elde edilir. $\forall X \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(\text{tr}(TM))$ ve $A_N = A$, $A_N X \in \Gamma(S(TM))$ ve $S(TM)$ üzerinde self-adjoint olduğundan (3.2.19) ve $A_N = \varphi A_\xi^*$ ifadelerini

(4.1.6) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& (R(X_1, X_2) R)(X_1, X_2, X_1, X_2) = \varphi B(X_2, X_1) [B(AX_1, X_1) g(A_\xi^* X_2, X_2) \\
& - B(X_2, X_1) g(A_\xi^* X_1, AX_2)] \\
& + \varphi B(X_1, X_1) [B(X_2, X_1) g(A_\xi^* X_2, AX_2) - B(AX_2, X_1) g(A_\xi^* X_2, X_2)] \\
& + \varphi g(A_\xi^* X_1, X_2) [-B(X_2, X_2) B(AX_1, X_1) + B(X_1, X_2) B(AX_2, X_1)] \\
& + \varphi B(X_1, X_1) [B(X_2, X_2) g(A_\xi^* X_1, AX_2) - B(X_1, X_2) g(A_\xi^* X_2, AX_2)] \\
& + \varphi g(A_\xi^* X_1, X_2) [-B(X_1, X_2) B(X_2, AX_1) + B(X_1, X_1) B(X_2, AX_2)] \\
& + \varphi g(A_\xi^* X_2, X_2) [B(X_1, X_2) B(X_1, AX_1) - B(X_1, X_1) B(X_1, AX_2)] \\
& + \varphi B(X_2, X_1) [-B(X_2, X_2) g(A_\xi^* X_1, AX_1) - B(X_1, X_2) g(A_\xi^* X_1, AX_2)] \\
& + \varphi B(X_1, X_1) [B(X_2, X_2) g(A_\xi^* X_2, AX_1) - B(X_1, X_2) g(A_\xi^* X_2, AX_2)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $g(A_\xi^* X, PY) = B(X, PY)$ kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& (R(X_1, X_2) R)(X_1, X_2, X_1, X_2) = \varphi B(X_2, X_1) [(B(AX_1, X_1) B(X_2, X_2) \\
& - B(X_2, X_1) B(X_1, AX_2)] \\
& + \varphi B(X_1, X_1) [B(X_2, X_1) B(X_2, AX_2) - B(AX_2, X_1) B(X_2, X_2)] \\
& + \varphi B(X_1, X_2) [-B(X_2, X_2) B(AX_1, X_1) + B(X_1, X_2) B(AX_2, X_1)] \\
& + \varphi B(X_1, X_1) [B(X_2, X_1) B(X_1, AX_2) - B(X_1, X_2) B(X_2, AX_2)] \\
& + \varphi B(X_1, X_2) [-B(X_1, X_2) B(X_2, AX_1) + B(X_1, X_1) B(X_2, AX_2)] \\
& + \varphi B(X_2, X_2) [B(X_1, X_2) B(X_1, AX_1) - B(X_1, X_1) B(X_1, AX_2)] \\
& + \varphi B(X_2, X_1) [-B(X_2, X_2) B(X_1, AX_1) - B(X_1, X_2) B(X_1, AX_2)] \\
& + \varphi B(X_1, X_1) [B(X_2, X_2) B(X_2, AX_1) - B(X_1, X_2) B(X_2, AX_2)]
\end{aligned}$$

elde edilir. B simetrik olduğundan

$$\begin{aligned}
& (R(X_1, X_2) R)(X_1, X_2, X_1, X_2) = \varphi \{ B(X_2, X_1) B(AX_1, X_1) B(X_2, X_2) \\
& - B(X_2, X_1)^2 B(X_1, AX_2) + B(X_1, X_1) B(X_2, X_1) B(X_2, AX_2) \\
& - B(X_1, X_1) B(AX_2, X_1) B(X_2, X_2) - B(X_1, X_2) B(X_2, X_2) B(AX_1, X_1) \\
& + B(X_1, X_2)^2 B(AX_2, X_1) + B(X_1, X_1) B(X_2, X_2) B(X_1, AX_2) \\
& - B(X_1, X_1) B(X_1, X_2) B(X_2, AX_2) - B(X_1, X_2)^2 B(X_2, AX_1) \\
& + B(X_1, X_1) B(X_1, X_2) B(X_2, AX_2) - B(X_2, X_2) B(X_1, X_2) B(AX_1, X_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -B(X_1, X_1) B(X_2, X_2) B(X_1, AX_2) - B(X_2, X_1) B(X_2, X_2) B(X_1, AX_1) \\
& -B(X_1, X_2)^2 B(X_1, AX_2) + B(X_1, X_1) B(X_2, X_2) B(X_2, AX_1) \\
& -B(X_1, X_1) B(X_1, X_2) B(X_2, AX_2) \}
\end{aligned}$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
(R(X_1, X_2) R)(X_1, X_2, X_1, X_2) &= \varphi \{ B(X_2, X_1)^2 B(X_1, AX_2) \\
&- B(X_1, X_2)^2 B(X_2, AX_1) - B(X_2, X_2) B(X_1, X_1) B(X_1, AX_2) \\
&+ B(X_1, X_1) B(X_2, X_2) B(X_2, AX_1) \} \quad (4.1.7)
\end{aligned}$$

elde edilir. $g(A_\xi^* X, Y) = B(X, Y)$ ve $A_N = \varphi A_\xi^*$ ifadeleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
B(AX_2, X_1) &= g(A_\xi^* X_1, AX_2) = g(\varphi A_\xi^* X_1, A_\xi^* X_2) \\
&= g(AX_1, A_\xi^* X_2) = B(X_2, AX_1)
\end{aligned}$$

dönüşür.(3.2.19) ve $A_N = \varphi A_\xi^*$ kullanılarak

$$B(AX_2, X_1) = B(X_2, AX_1) \quad (4.1.8)$$

elde edilir.(4.1.7) ve (4.1.8) den

$$(R(X_1, X_2) .R)(X_1, X_2, X_1, X_2) = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$(R(X_1, X_2) .R)(X_1, X_1, X_2, X_2) = (R(X_1, X_2) .R)(X_2, X_1, X_1, X_2) = 0$$

$$(R(X_1, X_2) .R)(X_2, X_1, X_2, X_1) = (R(X_1, X_2) .R)(X_2, X_2, X_1, X_1) = 0$$

dir. Bu da ispatı tamamlar. □

Uyarı 4.1.1. (4.1.2) önermesinden, \mathbb{R}_1^4 in lightlike koni, \mathbb{R}_1^4 lightlike monge hiperyüzey ve \mathbb{R}_1^3 in lightlike yüzeyleri semi-simetrik lightlike hiperyüzler için örnekleridir. (4.1.1) önermesinde $1 \leq q \leq 4$ koşulu altında \mathbb{R}_q^4 semi-Öklidyen uzayın için geçerlidir [10].

M , $(n + 2)$ –boyutlu semi-Öklidyen uzayın bir ekran konformal lightlike hiper-yüzeyi olsun. M nin ekran distribüsyonu integrallenebilir. Ekran distribüsyonunun lifini M' ile gösterelim. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.1. M , bir $(n + 2)$ -boyutlu semi-Öklidyen uzayın bir ekran konformal lightlike hiperyüzeyi olsun. M nin semi simetrik olması için gerek ve yeter şart $S(TM)$ nin her M' lifinin semi-Öklidyen uzayda semi simetrik olmasıdır [3].

İspat. (4.1.1) ve $A_N = \varphi A_\xi^*$ ifadeleri kullanılırsa $\forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
g(R(X, Y)PZ, PW) &= B(Y, PZ)g(AX, PW) - B(X, PZ)g(AY, PW) \\
&= B(Y, PZ)g(\varphi A_\xi^* X, PW) - B(X, PZ)g(\varphi A_\xi^* Y, PW) \\
&= \varphi \{B(Y, PZ)g(A_\xi^* X, PW) - B(X, PZ)g(A_\xi^* Y, PW)\} \\
&= \varphi \{B(Y, PZ)B(X, PW) - B(X, PZ)B(Y, PW)\}
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

elde edilir. (3.2.16), (3.2.17), (3.2.18), $B(X, \xi) = 0$ ve $A_N = \varphi A_\xi^*$ ifadeleri kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
g(R(X, Y)PZ, PW) &= g(R^*(X, Y)PZ, PW) - \varphi \{B(Y, PZ)B(X, PW) \\
&\quad + B(X, PZ)B(Y, PW)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.9) denkleminin sağ tarafı yukarıdaki denklemde göz önüne alınırsa,

$$g(R(X, Y)PZ, PW) = \frac{1}{1 + \varphi} g(R^*(X, Y)PZ, PW)$$

elde edilir. (3.2.18) ve (4.1.1) denklemlerinden

$$g(R(X, Y)Z, N) = 0$$

$\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, $N \in \Gamma(tr(TM))$ elde edilir. Buradan da

$$R(X, Y)PZ = \frac{1}{1 + \varphi} R^*(X, Y)PZ$$

sonucu çıkar. Eğrilik tensör alanının cebirsel özellikleri kullanılarak $\forall X, Y, U, V, W \in \Gamma(S(TM))$ için

$$(R(X, Y) \cdot R)(U, V, W, Z) = \frac{1}{1 + \varphi} (R^*(X, Y) \cdot R^*)(U, V, W, Z)$$

dir. Bu da ispatı tamamlar. \square

Uyarı 4.1.2. *Teorem(4.1.1), $(n + 2)$ –boyutlu semi-Öklidyen uzayın bir ekran konformal lightlike hiperyüzeyinin semi-simetrikliği, integrallanabilir ekran distribüsyonunun bir M' lifinin semi-simetrikliği ile ilişkilendirilebilir olduğunu gösterir. Lorentz durumunda ekran distribüsyonu Riemann olduğundan bir ekran konformal lightlike hiperyüzeyinin semi-simetrikliği Riemann manifold ile aynıdır. Gerçekten, teorem(4.1.1) in ispatından ekran konformal lightlike hiperyüzeyinin eğrilik şartları, ekran distribüsyonunun bir lifinin eğrilik şartlarına indirgenbilir olduğu görülebilir [3].*

4.2 Semi-Öklidyen Uzaylarda Ricci Semi-Simetrik Lightlike Hiperyüzeyler

Bu kısımda semi-Öklidyen uzayların Ricci semi-simetrik lightlike hiperyüzeyleri ve Ricci semi-simetrik hiperyüzeylerden elde edilen bir şart altında total geodezik çalışıldı. Ricci tensör bakımından semi-Öklidyen uzayın semi-simetrik lightlike hiperyüzeylerde ele alındı. İlk olarak lightlike hiperyüzeyde Ricci tensör ifadesini verelim.

Lemma 4.2.1. *$(n + 2)$ –boyutlu Semi-Öklidyen uzayın lightlike hiperyüzeyi M olsun. M nin Ricci tensörü Ric olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$Ric(X, Y) = - \sum_{i=1}^n \epsilon_i \{B(X, Y) C(w_i, w_i)\} - g(A_{\xi}^* Y, AX) \quad (4.2.1)$$

ile verilir, $\epsilon_i = \pm 1$ ve $\{w_i\}_{i=1}^n$, $S(TM)$ nin ortonormal bir bazıdır [3].

İspat. Bir lightlike hiperyüzeyinin Ricci tensörü $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, $\xi \in (TM^\perp)$, $N \in \Gamma(\text{tr}(TM))$ ve $\{w_i\}_{i=1}^n$ de $S(TM)$ nin bir bazı olmak üzere,

$$\begin{aligned}
Ric(X, Y) &= - \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(R(X, w_i)Y, w_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(B(w_i, Y)AX - B(X, Y)Aw_i, w_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \epsilon_i (B(w_i, Y)g(AX, w_i) - B(X, Y)g(Aw_i, w_i)) \\
&= - \sum_{i=1}^n \epsilon_i \{ (B(X, Y)C(w_i, w_i) - B(Y, w_i)C(X, w_i)) \} \\
&= - \sum_{i=1}^n \epsilon_i \{ B(X, Y)C(w_i, w_i) \} - g(A_\xi^*Y, w_i)g(AX, w_i) \\
&= - \sum_{i=1}^n \epsilon_i \{ B(X, Y)C(w_i, w_i) \} - g\left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i g(A_\xi^*Y, w_i)w_i, AX\right)
\end{aligned}$$

bu ise (3.2.1) verir. □

Tanım 4.2.1. M , semi-Öklidyen uzayının bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $X, Y, X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ için

$$(R(X, Y)Ric)(X_1, X_2) = 0$$

koşulu sağlanıyorsa M ye **Ricci semi-simetrik** denir [3].

Aşağıda verilen teorem semi-Öklidyen uzayın lightlike hiperyüzeyler geometrisinde Ricci-semi-simetrik koşulunun sonuçlarını verecektir [3].

Teorem 4.2.1. M , $(n+2)$ – boyutlu semi-Öklidyen uzayın bir Ricci semi-simetrik lightlike hiperyüzeyi olsun. $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ için ya M total geodeziktir ya da $Ric(\xi, A\xi) = 0$ dir. Burada Ric , M nin Ricci tensör alanı ve A da şekil operatörüdür [3].

İspat. (4.1.1), (4.2.1) ifadeleri kullanılırsa $X, Y, X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$

$$(R(X, Y)Ric)(X_1, X_2) = -Ric(R(X, Y)X_1, X_2) - Ric(X_1, R(X, Y)X_2)$$

$$\begin{aligned}
&= -Ric (AX, X_2) B (Y, X_1) + Ric (AY, X_2) B (X, X_1) \quad (4.2.2) \\
&\quad - Ric (X_1, AX) B (Y, X_2) + Ric (X_1, AY) B (X, X_2)
\end{aligned}$$

bu ifadeler açılırsa;

$$\begin{aligned}
-Ric (AX, X_2) B (Y, X_1) &= -\left[-\sum_{i=1}^n \epsilon_i \{B (AX, X_2) C (w_i, w_i)\} \right. \\
&\quad \left. - g (A_\xi^* X_2, A^2 X)\right] B (Y, X_1) \\
&= \sum_{i=1}^n \epsilon_i C (w_i, w_i) B (AX, X_2) B (Y, X_1) \\
&\quad + B (X_2, A^2 X) B (Y, X_1) \\
&= \alpha \{B (Y, X_1) B (AX, X_2)\} + B (Y, X_1) B (X_2, A^2 X)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$Ric (AY, X_2) B (X, X_1), Ric (X_1, AX) B (Y, X_2), \text{ ve } Ric (X_1, AY) B (X, X_2)$$

ifadeleride açılırsa,

$$Ric (AY, X_2) B (X, X_1) = -\alpha \{B (AY, X_2) B (X_2, X_1)\} - B (X_2, A^2 Y) B (X, X_1)$$

$$-Ric (X_1, AX) B (Y, X_2) = \alpha \{B (X_1, AX) B (Y, X_2)\} + B (X_2, AY) B (Y, X_2)$$

$$Ric (X_1, AY) B (X, X_2) = -\alpha \{B (X_1, AY) B (X, X_2)\} - B (AY, AX) B (X, X_2)$$

elde edilir. Bu ifadeleri (4.2.2) da yerine yazıp $\alpha = -\sum_{i=1}^n \epsilon_i C (w_i, w_i)$ göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
(R (X, Y) Ric) (X_1, X_2) &= \alpha \{B (Y, X_1) B (AX, X_2) - B (AY, X_2) B (X, X_1) \\
&\quad + B (X_1, AX) B (Y, X_2) - B (X_1, AY) B (X, X_2)\} \\
&\quad + B (Y, X_1) B (X_2, A^2 X) - B (X_2, A^2 Y) B (X, X_1) \\
&\quad + B (X_2, AY) B (Y, X_2) - B (AY, AX) B (X, X_2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi M nin Ricci semi-simetrik lightlike hiperyüzey olduğunu kabul edelim. $X_1 = \xi$ olsun. Bu durumda $B(X, \xi) = 0$ olduğundan

$$-B(X, X_2) B(AY, AX_1) + B(Y, X_2) B(AX, A\xi) = 0$$

elde edilir. Burada $Y = \xi$ alırsak;

$$B(X, X_2) B(A\xi, A\xi) = 0$$

elde edilir. Eğer $B(X, X_2) = 0$ ise M total geodeziktir. Eğer M total geodezik değilse,

$$B(A\xi, A\xi) = 0$$

olur. O halde (4.2.2) den $Ric(\xi, A\xi) = 0$ elde edilir. \square

Teorem 4.2.2. M , $(n + 2)$ –boyutlu semi-Öklidyen uzayın bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Öyle ki $\forall X \in \Gamma(TM)$, $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ için $Ric(\xi, X) = 0$ ve $A\xi$ bir null olmayan vektör olsun. O halde M nin semi-simetrik olması için gerek ve yeter şart M nin total geodezik olmasıdır. Burada Ric , M nin Ricci tensörü ve A da şekil operatörüdür [3].

İspat. M nin $(n + 2)$ –boyutlu Semi-öklidyen yüzeyin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. (4.1.5) denkleminde $X_1 = \xi$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \{-B(Y, X_2) B(AX, X_3) + B(X, X_2) B(AY, X_3)\} g(A\xi, PX_4) \\ & \{-B(X_3, Y) B(X_2, AX) + B(X, X_3) B(X_2, AY)\} g(A\xi, PX_4) \\ & \{-B(Y, PX_4) g(A\xi, AX) + B(X, PX_4) g(A\xi, AY)\} B(X_2, X_3) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $Y = \xi$ için

$$\begin{aligned} & B(X, X_2) B(A\xi, X_3) g(A\xi, PX_4) + B(X, X_3) B(X_2, A\xi) g(A\xi, PX_4) \\ & + B(X, PX_4) g(A\xi, A\xi) B(X_2, X_3) = 0 \end{aligned}$$

olur. Burada $Ric(\xi, X) = 0$ varsayımıyla $B(X, A\xi) = 0$ olur. Buradan,

$$B(X, PX_4)g(A\xi, A\xi)B(X_2, X_3) = 0$$

elde edilir. Hipotezden $A\xi$ null olmayan bir vektör alanı olduğundan $X = X_3$ ve $X_4 = X_2$ alınırsa,

$$B(X_3, PX_2)g(A\xi, A\xi)B(X_2, X_3) = B^2(X_3, X_2)g(A\xi, A\xi) = 0$$

$g(A\xi, A\xi) \neq 0$, $A\xi$ null olmayan vektör alanı olduğundan $A\xi \neq 0$ dir. Dolayısıyla $B(X_3, X_2) = 0$ olup M bir total geodeziktir. $Ric(\xi, X) = 0$ olduğu tanım (4.2.1) den açıktır. \square

Sonuç 4.2.1. M , \mathbb{R}_1^{n+2} Lorentz uzayının bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $\forall X \in \Gamma(TM)$, $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ için $Ric(\xi, X) = 0$ dir M total geodezik olması için gerek ve yeter şart M nin semi-simetriktir olmasıdır [3].

4.3 Paralel ve Semi-Paralel Lightlike Hiperyüzeyler

Bu kısımda bir Lorentz manifoldun paralel lightlike hiperyüzeyler üzerinde bir karakterizasyonu verilecektir. Gerçekten bir Lorentz manifoldda total geodezik olmayan paralel lightlike hiperyüzeyler olmadığı gösterilecektir. Ayrıca, semi-Ökliden uzayda lightlike hiperyüzeylerin geometrisinde semi-paralel olma şartının sonuçları verilecektir.

Tanım 4.3.1. (\bar{M}, \bar{g}) Lorentz manifoldunun lightlike hiperyüzeyi M olsun. $\forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

$$(R(X, Y)h)(Z, W) = -h(R(X, Y)Z, W) - h(Z, R(X, Y)W) = 0$$

koşulu sağlanıyorsa M ye **semi-paraleldir** denir [3].

Teorem 4.3.1. M , \bar{M} Lorentz manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. M nin ikinci temel formun paralel olması için gerek ve yeter şart M nin total geodezik olmasıdır [3].

İspat. M bir Lorentz manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Kabul edelim ki h ikinci temel formu paralel olsun. (3.2.7) ve (3.3.2) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (\nabla_X h)(Y, Z) &= \nabla_X^t h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \\ &= \nabla_X^t B(Y, Z)N - B(\nabla_X Y, Z)N - B(Y, \nabla_X Z)N \\ &= X(B(Y, Z)N) - B(\nabla_X Y, Z)N - B(Y, \nabla_X Z)N = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $B(X, \xi) = 0$ ve $Y = \xi$ alınırsa,

$$-B(\nabla_X \xi, Z)N = 0$$

elde edilir. (3.2.17) den,

$$\begin{aligned} -B(\nabla_X \xi, Z)N &= 0 \\ B(-A_\xi^* X + \tau(X)\xi, Z)N &= B(A_\xi^* X, Z)N - \tau(X)B(\xi, Z)N = 0 \\ B(A_\xi^* X, Z)N &= 0 \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$B(A_\xi^* X, Z) = 0$$

bulunur. $B(X, \xi) = 0$ eşitliği göz önüne alınırsa, $Z \in \Gamma(S(TM))$ olduğu kabul edilir. (3.2.19) den $g(A_\xi^* X, A_\xi^* Z) = 0$ olur. $X = Z$ için $g(A_\xi^* X, A_\xi^* X) = 0$ olur. Diğer taraftan bir Lorentz manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyinin her $S(TM)$ ekran distiribüsyonu Riemann'dır. O zaman $\forall X \in \Gamma(TM)$ için $A_\xi^* X = 0$ dır. Böylece bu eşitlik ve $B(X, \xi) = 0$ den ispat tamamlanır. Tersisi de açıktır. \square

Teorem 4.3.2. $(n+2)$ -boyutlu semi-Öklidyen uzayın bir semi-paralel lightlike hiperyüzeyi M olsun. M ya total geodeziktir yada $\forall U \in \Gamma(S(TM))$ ve $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ için $C(\xi, A_\xi^* U) = 0$ dır. C ve A_ξ^* sırasıyla $S(TM)$ nin ikinci temel formu ve şekil operatörüdür [3].

İspat. M , bir semi-paralel lightlike hiperyüzey olduğundan $\forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

$$h(R(X, Y)Z, W) + h(Z, R(X, Y)W) = 0$$

dır. (4.1.1) den

$$B(X, Z)B(AY, W) - B(Y, Z)B(AX, W) + B(X, W)B(Z, AY) - B(Y, W)B(AX, Z) = 0$$

elde edilir. Burada $X = \xi$ için $B(X, \xi) = 0$ ifadesi kullanılırsa,

$$B(Y, Z)B(A\xi, W) + B(Y, W)B(A\xi, Z) = 0$$

olur. $W = Z$ için

$$B(Y, Z)B(A\xi, Z) = 0$$

elde edilir. Eğer $B(Y, Z) = 0$ ise M total geodeziktir. $B(Y, Z) \neq 0$ ise (3.2.18)

den $\forall U \in \Gamma(S(TM))$ için

$$C(\xi, A_\xi^*U) = 0$$

elde edilir. □

Örnek 4.3.1. \mathbb{R}_2^4 de

$$x_1 = x_2 + \sqrt{2}\sqrt{x_3^2 + x_4^2}$$

ile verilen bir hiperyüzey düşünelim. M nin bir lightlike hiperyüzey olduğu açıktır.

Bu

$$\xi = \sqrt{x_3^2 + x_4^2} \frac{\partial}{\partial x_1} - \sqrt{x_3^2 + x_4^2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \sqrt{2}x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \sqrt{2}x_4 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

ile hesaplanan radikal distiribüsyondur. O zaman lightlike transvarsal vektör demeti,

$$\begin{aligned} \text{tr}(TM) = \text{span}N = \left\{ \frac{1}{4(x_3^2 + x_4^2)} \left(-\sqrt{x_3^2 + x_4^2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{x_3^2 + x_4^2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \sqrt{2}x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{2}x_4 \frac{\partial}{\partial x_4} \right) \right\} \end{aligned}$$

ile tanımlanır. O halde $S(TM)$,

$$\left\{ Z_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}, Z_2 = -x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} \right\}$$

ile tanımlanır. Gerekli hesaplamalarla $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\bar{\nabla}_X Z_1 = \bar{\nabla}_{Z_2} X = 0, \bar{\nabla}_\xi \xi = \sqrt{2}\xi, \bar{\nabla}_{Z_2} \xi = \bar{\nabla}_\xi Z_2 = \sqrt{2}Z_2$$

ve

$$\bar{\nabla}_{Z_2} Z_2 = -x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

elde edilir. Gauss formülü kullanılarak,

$$\nabla_X Z_1 = 0, \nabla_{Z_2} Z_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \xi, \nabla_\xi Z_2 = \nabla_{Z_2} \xi = \sqrt{2} Z_2, \nabla_{Z_1} Z_1 = 0$$

ve

$$B(Z_2, Z_2) = -\sqrt{2}(x_3^2 + x_4^2), B(Z_1, Z_1) = 0, B(Z_1, Z_2) = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\bar{\nabla}_\xi N = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{x_3}{x_3^2 + x_4^2} \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{2} \frac{x_4}{x_3^2 + x_4^2} \frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$\bar{\nabla}_{Z_1} N = 0$$

$$\bar{\nabla}_{Z_2} N = -\frac{x_4}{2\sqrt{2}(x_3^2 + x_4^2)} \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_3}{2\sqrt{2}(x_3^2 + x_4^2)} \frac{\partial}{\partial x_4}$$

dır. (3.2.8) ifadesinden

$$A_N \xi = 0, A_N Z_1 = 0, A_N Z_2 = \frac{x_4}{2\sqrt{2}(x_3^2 + x_4^2)} Z_2$$

elde edilir. O zaman yukarıdaki denklemler

$$(R(Z_1, Z_2)h)(Z_1, Z_1) = 0, (R(Z_1, Z_2)h)(Z_1, Z_2) = 0, (R(Z_1, Z_2)h)(Z_2, Z_2) = 0$$

ifadelerini doğrular. Sonuç olarak $B(X, \xi) = 0$ ve $(R(X, Y)h)$ eğrilik tensörü tanımını kullanılırsa $\forall X, Y, U \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ için

$$(R(X, Y)h)(U, \xi) = 0$$

bulunur. Böylece M, \mathbb{R}_2^4 nin total geodezik olmayan semi-paralel hiperyüzeyidir [3].

KAYNAKLAR

- [1] Defever, F. (2000). Ricci semi-symmetric hypersurfaces, *Balkan J. of Geometry and Its Appl.* **5(1)**, 81-91.
- [2] Günes, R., Sahin, B., Kiliç, E. (2003). On Lightlike Hypersurfaces of Semi-Rieamanian Space form, *Turk J. Math.* **27**, 283-297.
- [3] Sahin, B. (2007). Lightlike Hypersurfaces of Semi-Euclidean Spaces Satisfying Curvature Conditions of Semi-Symmetry type, *Turk J. Math.* **31**, 139-162.
- [4] O'Neill, B. (1983). *Semi Rieamannian Geometry*. Academic Press, New York.
- [5] Duggal, K.L., Bejancu, A. (1996). *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Application*, Kluwer Academic.
- [6] Şahin, B. (2012). *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*, Nobel Yayınevi.
- [7] Duggal, K.L., Bejancu, A. (1991). Degenerate hypersurfaces of semi-Riemannian manifolds, *Bull. Inst. Politehnic Iaşi (S.1)*. **37**, 13-22.
- [8] Vaisman, I. (1983). *A first Course in Differential Geometry*, Marcel Dekker, New York.
- [9] Duggal, K.L., Atindogbe, C. (2004). Conformal Screen on Lightlike Hypersurfaces, *Int. J. Pure Appl. Math.* **11(4)**, 421-422.
- [10] Akivis, M.A., Goldberg, V.V. (1999). Lightlike Hypersurface on a Four-Dimensional Manifold Endowed With Pseudo Conformal Structure of Signature (2,2), *rendiconti del Seminario di Messina serie II*.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Nesibe Sevil AKATLI
Doğum Yeri ve Yılı : Elazığ, 1990
Medeni Hali : Bekar
İletişim : sevilakatli.23@hotmail.com

Eğitim

Lisans : Fırat Üniversitesi,
Fen Fakültesi, Matematik Bölümü (2013)
Pedagojik Formasyon : Fırat Üniversitesi (2014)
Tezli Yüksek Lisans : İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Ana Bilim Dalı (2017)