H-GRUPLAR ÜZERİNDE DEMETLER

VE

BAZI KARAKTERİZASYONLAR

DOKTORA TEZİ

Cemil YILDIZ
İ.Ü.Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü Asistanı

Ankara-1982

Bu Tez Konusunu veren,çalışmalarım süresince daima yol gösteren ve yakın alakaları ile beni teşvik eden , Muhterem Hocam Prof.Dr.Cengiz ULUÇAY'a en derin şükran ve hürmetlerimi arzetmeyı bir borç bilirim.

Cemil Yıldız

Ö N S Ö Z

Bu çalışmada,Cebirsel Topolojinin çok önemli iki konusu; Homotopi Teorisi-H grupları ve Demet Teorisi birlikte ele alınarak,H grupları vasıtasıyla yeni bir cebirsel yapılı demet inşa edilmiş ve önemli cebirsel topolojik karakterizasyonlar verilmiştir.

I.Bölüm ve II.Bölüm de çalışmanın kolay anlaşılmasını sağlamak gayesi ile Homotopi teorisi,H grupları ve Demet teorisine ait bilgiler verilmiştir. I.Bölümde Homotopinin tarifinden hareketle,konuyu H gruplarına getirerek,H grupları teşkil ve tetkik edilmiştir. II. Bölüm de Demet teorisine bir giriş yapılmış,Demetin tarifi ile birlikte önemli bazı tarif ve teoremler verilmiştir.Nihayet,bu bölümün sonunda demetlerin,topolojik yapılarının yanında bir cebirsel yapıyı da haiz olabilecekleri görülmüştür.

Çalışmamızın üçüncü Bölümünde,cebirsel yapılı demetlere bir misâl teşkil edecek şekilde,yeni bir demet teşkil edilmiştir. Şöyle ki;taban cümle olarak bir P topolojik uzayını gözönüne alıp, farklı her $p_i, i\in I$ noktası için (P,p_i) noktalı topolojik uzayları teşkil edilmiş ve (P,p_i) ile (P,p_j) , $i,j\in I$, $i\neq j$,noktalı topolojik uzayları aynı homotopi tipinde alındığında birisi H grubu ise diğeride H grubu olduğundan (P,p_i) H gruplarının herbirine, (X,x_o) herhangi bir noktalı topolojik uzay olmak üzere, $[X;(P,p_i)]$ farklı grupları tekabül etmektedir.Herbir (P,p) H grupları için P üzerinde $H(P)=\bigvee_{p\in P}[X;(P,p)]$ cümlesi teşkil edilmiş ve $\Psi:H(P)\to P$ tabii tasvir ,yani her $\sigma=[f]_p\in[X;(P,p)]=H(P)_p\subset H(P)$ için $\Psi(\sigma)=\Psi([f]_p)=p$,olmak üzere H(P) üzerinde bir tabii topoloji inşa edilmiş ve bu topolojiye nazaran Ψ nin lokal topolojik olduğu,H(P) nin saplarında ki grup operasyonunun bu topolojiye nazaran sürekliliği gösterilmiştir.

Daha sonra,bu tip demetler ve altındaki topolojik uzaylar arasında bazı cebirsel topolojik karakterizasyonlar verilmiştir.

İ Ç İ N D E K İ L E R

I.BÖLÜM

HOMOTOPİ VE H-GRUPLARI

II.BÖLÜM

DEMET TEORİSİ

III.BÖLÜM

I.BÖLÜM

HOMOTOPİ VE H-GRUPLARI

Bu bölümde Homotopi kavramı ele alındıktan sonra, problemimize temel teşkil eden H-Grupları üzerinde durulmuş ve çalışmamız doğrultusunda gerekli olan tarif, teorem ve karakterizasyonlar verilmiştir.

1.1 Homotopi Kavramı

Tarif 1.1.1. X bir topolojik uzay, $A\subset X$ bir altcümle ve $x\in X$ olsun. x noktasına A nın bir kapanış noktası denir, şayet x i ihtiva eden herbir açık cümle A ya ait bir nokta ihtiva ediyorsa. A nın kapanışı $\overline{A}$ ile gösterilecektir.

Teorem 1.1.1. U,V bir topolojik X uzayında iki altcümle ise, bu taktirde $\overline{U\cup V}=\overline{U}\cup\overline{V}$.

İspat: Bak [1] .

Teorem: 1.1.2. $f:X\longrightarrow Y$ tasviri süreklidir, yalnız ve yalnız herbir $A\subset X$ için $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ ise.

İspat: Bak [1] .

Teorem 1.1.3. Farzedelim ki X iki kapalı altuzayın birleşimidir, $X=A\cup B$. Şayet $f:A\longrightarrow Y$, $g:B\longrightarrow Y$ sürekli tasvirler ise $\ni$ $f|A\cap B=g|A\cap B$. Bu taktirde $h:X\longrightarrow Y$, öyleki $h|A=f$, $h|B=g$, tasviri süreklidir.

İspat: $Q\subset X$ bir altcümle olsun. $Q_1=Q\cap A$, $Q_2=Q\cap B$ vazedelim. Bu taktirde $Q=Q_1\cup Q_2$ ve dolayısıyla $h(Q)=h(Q_1)\cup h(Q_2)$. Teorem 1.1.1.den dolayı $\overline{Q}=\overline{Q}_1\cup\overline{Q}_2$. O halde, $h(\overline{Q})=h(\overline{Q}_1)\cup h(\overline{Q}_2)$. Şimdi, $x\in\overline{Q}_1=\overline{Q\cap A}$ bir nokta olsun. Bu taktirde x i ihtiva eden herbir açık cümle $Q\cap A$ ya ait bir nokta ihtive eder ve dolayısıyla A ya ait bir nokta ihtiva eder. O halde $x\in\overline{A}$. Fakat A kapalıdır, dolayısıyla $x\in A$. Demek ki $\overline{Q}_1\subset A$ ve dolayısıla $h(\overline{Q}_1)=f(\overline{Q}_1)$. Aynı şekilde $\overline{Q}_2\subset B$ ve $h(\overline{Q}_2)=g(\overline{Q}_2)$. Fakat f ve g sürekli olduklarından Teorem 1.1.2 den dolayı $f(\overline{Q}_1)\subset\overline{f(Q_1)}$ ve $g(\overline{Q}_2)\subset\overline{g(Q_2)}$. Dolayısıyla, $h(\overline{Q})=h(\overline{Q}_1)\cup h(\overline{Q}_2)=f(\overline{Q}_1)\cup g(\overline{Q}_2)\subset\overline{f(Q_1)}\cup\overline{g(Q_2)}=\overline{h(Q_1)}\cup\overline{h(Q_2)}$. Halbuki, Teorem 1.1.1.den dolayı, $\overline{h(Q)}=\overline{h(Q_1)\cup h(Q_2)}=\overline{h(Q_1)}\cup\overline{h(Q_2)}$. Dolayısıyla $h(\overline{Q})\subset\overline{h(Q)}$, yani h süreklidir.

Tarif 1.1.2. X,Y iki topolojik uzay ve $f,g:X\longrightarrow Y$ sürekli iki tasvir olsun. f,g ye homotoptur denir ve $f\sim g$ veya $f\overset{F}{\sim}g$ ile gösterilir, şayet $\exists F(x,t)=F:XxJ \longrightarrow Y \ni$ F tasviri sürekli ve her $x \in X$ için $F(x,o)=f, F(x,1)=g$.

F tasvirine ise f den g'ye homotopi denir.

Teorem 1.1.4. $\sim$ homotopi bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat: (i) $f\sim f$ dır. Zira, $F:XxJ \longrightarrow Y$ tasviri, $F(x,t)=f(x)$ olarak tarif edilirse, $F(x,o)=f(x)$, $F(x,1)=f(x)$ ve $F(x,t)$ süreklidir. Dolayısıyla $f\sim f$ dır.

(ii) $f\sim g$ ise $g\sim f$ dır. Zira, $f\sim g \Rightarrow \exists F(x,t):XxJ \longrightarrow Y$ tasviri sürekli ve $F(x,o)=f$, $F(x,1)=g$. $G(x,t)=F(x,1-t)$ şeklinde tarif edilmiş olsun. Bu taktirde G sürekli ve $G(x,o)=F(x,1)=g$, $G(x,1)=F(x,o)=f$, dolayısıyla $g\sim f$.

(iii) $f\sim g, g\sim h$ ise $f\sim h$ dır. Zira,

$f\sim g \Rightarrow \exists F(x,t):XxJ \longrightarrow Y \ni$ F sürekli ve $F(x,o)=f$, $F(x,1)=g$.

$g\sim h \Rightarrow \exists G(x,t):XxJ \longrightarrow Y \ni$ G sürekli ve $G(x,o)=g$, $G(x,1)=h$.

Şimdi $H(x,t):XxJ \longrightarrow Y$ tasvirini

$$H(x,t)=\begin{cases} F(x,2t), & 0\leq t\leq 1/2 \\ G(x,2t-1), & 1/2\leq t\leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tarif edelim. Teorem 1.1.3 den dolayı $H(x,t)$ süreklidir. Diğer taraftan $H(x,o)=F(x,o)=f$, $H(x,1)=G(x,1)=h$. Dolayısıyla $f\sim h$.

Demek ki, X topolojik uzayından Y topolojik uzayına bütün sürekli tasvirlerin cümlesi $\sim$ bağıntısı vasıtasıyla ayrık eşdeğerlik sınıflara ayrılmış bulunmaktadır. Bu eşdeğerlik sınıflara homotopi sınıfları denir ve bütün homotopi sınıflarının cümlesi $[X;Y]$ ile gösterilir. Şayet $f:X \longrightarrow Y$ ise, f nin homotopi sınıfı $[f]$ ile gösterilir.

Tarif 1.1.3. X,Y iki topolojik uzay, $X_o \subset X$ herhangibir altcümle ve $f,g:X \longrightarrow Y$ de her $x_o \in X_o$ için $f(x_o)=g(x_o)$ şartını sağlayan iki sürekli tasvir olsun. f tasviri X_o a nazaran g ye homotoptur denir ve $f\sim g$ rel. X_o ile gösterilir, şayet aşağıdaki şartları sağlayan bir $F(x,t):XxJ \longrightarrow Y$ sürekli tasviri varsa:

i) Her $x \in X$ için $F(x,o)=f$, $F(x,1)=g$.

ii) Her $x_o \in X_o$ için $F(x_o,t)=f(x_o)=g(x_o)$.

$X_o=\emptyset$ ise sadece $f\sim g$ yazıyoruz. Demek ki adi homotopi relatif homotopinin bir özel halidir.

Teorem 1.1.5. $f,g:X \longrightarrow Y$ sürekli tasvirler olsun,öyleki $f \sim g$.Şayet $h:Y \longrightarrow Z$ bir sürekli tasvir ise,bu taktirde $hf,hg:X \longrightarrow Z$ tasvirleri süreklidir ve $hf \sim hg$.

İspat:İki sürekli tasvirin terkibinin de sürekli bir tasvir olmasından dolayı,hf,hg süreklidirler.$f \sim g \Longrightarrow \exists F(x,t) = F:XxJ \rightarrow Y$ sürekli ve her $x \in X$ için $F(x,o) = f, F(x,1) = g$.Şimdi,$G:XxJ \longrightarrow Z$ tasvirini $G(x,t) = h(F(x,t))$ şeklinde tarif edelim.Böylece h,F sürekli ve $G = hoF$ olduğundan G süreklidir.Diğer taraftan $G(x,o) = h(F(x,o)) = h(f(x)) = hf$ ve $G(x,1) = h(F(x,1)) = h(g(x)) = hg$.Dolayısıyla $hf \sim hg$.

Teorem 1.1.6. $f:X \longrightarrow Y$, $g,h:Y \longrightarrow Z$ sürekli tasvirler,) $g \sim h$ olsun.Bu taktirde $gf,hf:X \longrightarrow Z$ tasvirleri süreklidirler ve $gf \sim hf$.

İspat: Açıktır ki gf ve hf süreklidirler.Ayrica $g \sim h \Longrightarrow \exists F:$ $YxJ \longrightarrow Z \ni F$ sürekli,her $y \in Y$ için $F(y,o) = g(y)$ ve $F(y,1) = h(y)$.Şimdi $G(x,t) = G:XxJ \longrightarrow Z$ tasvirini $G(x,t) = F(f(x),t)$ şeklinde tarif edelim. G süreklidir ve $G(x,t) = F(f(x),o) = gf, G(x,1) = F(f(x),1) = hf$.Dolayısıyla $gf \sim hf$.

Tarif 1.1.4. X,Y iki topolojik uzay ve $f:X \longrightarrow Y$ sürekli bir tasvir olsun.f tasvirine "homotopi eşdeğerlilik" denir,şayet aşağıdaki şartları sağlayan sürekli bir $f':Y \longrightarrow X$ tasviri varsa:

i) $ff' \sim 1_Y$

ii) $f'f \sim 1_X$

X uzayından Y uzayına,homotopi eşdeğerlilik bir f tasvirinin varlığı halında,X ve Y uzayları "homotopi eşdeğerdirler" veya "aynı homotopi tipindendirler" denir ve $X \sim Y$ sembolü ile gösterilir.

Teorem 1.1.7. Aynı homotopi tipinden olma bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat:Açıkca,yansıma ve simetri aksiyomlarının doğrudan doğruya tariften sağlandıkları görülür.Geçişme aksiyomuna gelince:

$X \sim Y, Y \sim Z \Longrightarrow X \sim Z$.Gerçekten,$X \sim Y \Longrightarrow \exists f:X \longrightarrow Y, f':Y \longrightarrow X$ öyleki f,f' sürekli ve $ff' \sim 1_Y, f'f \sim 1_X$.$Y \sim Z \Longrightarrow \exists g:Y \longrightarrow Z, g':Z \longrightarrow Y$ öyleki g,g' sürekli ve $gg' \sim 1_Z, g'g \sim 1_Y$.Diğer taraftan $h = gf:X \longrightarrow Z, h' = f'g':Z \longrightarrow X$ terkipleri sürekli tasvirlerdir.Üstelik,$h'h:X \longrightarrow X, hh':Z \longrightarrow Z$.Göstereli mki $h'h \sim 1_X, hh' \sim 1_Z$.Gerçekten $h'h = (f'g')(gf) = f'(g'g)f$.Halbuki $g'g \sim 1_Y$. Dolayısıla,Teorem 1.1.5 den dolayı $f'(g'g) \sim f'1_Y = f'$,yani $f'(g'g) \sim f'$. Yine teorem 1.1.6 dan dolayı,$f'(g'g)f \sim f'f$.Yani $h'h \sim f'f$ elde edilir. Halbuki $f'f \sim 1_X$ ve $\sim$ bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısı olduğundan,

$h'h \sim 1_X$ bulunur.Benzer şekilde,$hh' \sim 1_Z$ elde edilir.Dolayısıyla,$X \sim Z$.

Neticede göstermiş oluyoruz ki,yukarıda tarifi verilen "homotopi eşdeğer" bağıntısı ile,topolojik uzeyların sınıfını,ayrık sınıflara ayırmak mümkündür,öyleki aynı sınıfa ait iki topolojik uzay aynı homotopi tipindendir.Bu sınıflar,topolojik eşdeğer uzayların sınıflarının cümlesinden daha geniştir.[2] .Dolayısıyla,topolojik eşdeğerlilik homotopi eşdeğerlilikten daha kuvvetlidir.Şöyleki,bir homotopi invaryant (yani homotopi eşdeğer uzayların taşıdığı bir değer)aynı zamanda bir topolojik invaryanttır.Aksine bir topolojik invaryant,bir homotopi invaryant olmayabilir.

Teorem 1.1.8. X,Y topolojik eşdeğer iki uzay olsun.Bu taktirde,X ve Y homotopi eşdeğerdir.

İspat:X,Y topolojik eşdeğer olduklarından $f:X \longrightarrow Y$ tasviri sürekli bire-bir ve üzerinedir.Ayrıca f nin $f^{-1}:Y \longrightarrow X$ inverside süreklidir.Dolayısıyla $ff^{-1} = 1_Y, f^{-1}f = 1_X$. $\sim$ bağıntısı,bir eşdeğerlik bağıntısı olduğundan $ff^{-1} \sim 1_Y$, $f^{-1}f \sim 1_X$. Binaenaleyh,tariften dolayı,$X \sim Y$.

Not:Bu teoremin karşıtı doğru olmayabilir.

Tarif 1.1.5. $(P,.)$ bir grup ve (P,τ) bir topolojik uzay öyleki, $\tau \times \tau$, PxP nin çarpım topolojisidir.Bu taktirde,$(P,.,\tau)$ üçlüsü bir topolojik grup olarak isimlendirilir,şayet aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa:

i) Her $(x,y) \in P\times P$ için bir $\mu:(P\times P,\tau\times\tau) \to (P,\tau)$ öyleki $\mu(x,y) = xy$ şeklinde tarif edilen μ tasviri süreklidir.

ii) Her $x \in P$ için $\alpha:(P,\tau) \longrightarrow (P,\tau) \ni \alpha(x) = x^{-1}$ şeklinde tarif edilen α tasviri süreklidir.

Tarif 1.1.6. P bir topolojik uzay ve $p_o \in P$ olsun.(P,p_o) çiftine noktalı toplojik uzay adı verilir.

Tarif 1.1.7. Bir X topolojik uzayı ve bunun bir $A \subset X$ altuzayı verilmiş olsun.(X,A) çiftine topolojik çift denir.

(X,A),(Y,B) iki topolojik çift iseler,$f:(X,A) \longrightarrow (Y,B)$ tasviri ile, X den Y ye $f(A) \subset B$ şartını sağlayan sürekli bir $f:X \longrightarrow Y$ tasviri ifade edilecektir.Ayrica (X,A) topolojik çifti verildiğinde $(X,A)\times J$ ile $(X\times J, A\times J)$ topolojik çiftini ifade edeceğiz.

Tarif 1.1.8. (X,A),(Y,B) topolojik çiftleri ve $X' \subset X$ altuzayı verilmiş olsun.Farzedelim ki $f_o,f_1:(X,A) \longrightarrow (Y,B)$ tasvirlerinin,X' ye tahditleri eşittir,yani $f_o|X' = f_1|X'$. Bu taktirde f_o,X' ye nazaran f_1 e homotoptur dıyoruz ve $f_o \sim f_1 rel.X'$ yazıyoruz, şayet $F(x,o)= f_o(x), F(x,1)= f_1(x)$ ve her $x \in X', t \in J$ için $F(x,t) = f_o(x) = f_1(x)$ şartlarını sağlayan bir $F:(X,A)xJ \longrightarrow (Y,B)$ sürekli tasviri mevcut ise.

F tasvirine rel.X' homotopi denir ve bu homotopi kısaca $f_o \overset{F}{\to} f_1 rel.X'$ ile ifade edilir.

Teorem 1.1.9. Homotopi tasvirlerin terkipleri (kompozisyonları) homotop tasvirlerdir.

İspat: $f_o, f_1:(X,A) \to (Y,B)$ tasvirleri $X' \subset X$ altuzayına ve $g_o, g_1: (Y,B) \to (Z,C)$ tasvirleride, $Y' \subset Y$ altuzayına nazaran homotop olsun. Burada $f_1(X') \subset Y'$. Bu taktirde, göstermek istiyoruz ki, $g_o f_o \sim g_1 f_1 rel.X'$.

$f_o \sim f_1 rel.X' \Longrightarrow \exists F(x,t):(X,A)xJ \to (Y,B) \ni F$ sürekli ve $F(x,o)= f_o(x)$ $F(x,1)= f_1(x)$ ve her $x \in X', t \in J$ için $F(x,t)= f_o(x)= f_1(x)$.

$g_o \sim g_1 rel.Y' \Longrightarrow \exists G(y,t):(Y,B)xJ \to (Z,C) \ni G$ sürekli ve $G(y,o)= g_o(y)$, $G(y,1)= g_1(y)$ ve her $y \in Y', t \in J$ için $G(y,t)= g_o(y)= g_1(y)$.

Şimdi, $H_1, H_2:(X,A)xJ \to (Z,C)$ tasvirlerini, $H_1(x,t)= g_o(F(x,t))$ ve $H_2(x,t)= G(f_1(x),t)$ şeklinde tarif edelim. Bu taktirde $H_1, H_2: XxJ \to Z$ tasvirleri sürekli tasvirlerin kompozisyonu olduğundan süreklidirler. Diğer taraftan, $H_1(AxJ) \subset C, H_2(AxJ) \subset C$. Üstelik, $H_1(x,o)= g_o(f_o(x)), H_1(x,1) = g_o(f_1(x))$, her $x \in X', t \in J$ için $H_1(x,t)= g_o(f_o(x))= g_o(f_1(x))$. Dolayısıyla $g_o f_o \sim g_o f_1 rel.X'$. Aynı şekilde, $H_2(x,o)= G(f_1(x),o)= g_o(f_1(x))$, $H_2(x,1)= G(f_1(x),1)= g_1(f_1(x))$ ve her $x \in X', t \in J$ için $H_2(x,t)= g_o(f_1(x))= g_1(f_1(x))$ olduğundan, $g_o f_1 \sim g_1 f_1 rel.X'$. Dolayısıyla, $\sim rel.X'$ bir eşdeğerlik bağıntısı olduğundan dolayı, $g_o f_o \sim g_1 f_1 rel.X'$.

1.2. Kategori ve Funktorlar

Tarif 1.2.1. Bir $\mathcal{C}$ kategorisi

(a) Nesnelerin bir sınıfıdır.

(b) Her X,Y sıralı nesne çifti için, hom(X,Y) ile gösterilen bir fonksiyon cümlesi tarif edilmiştir, öyleki herbir fonksiyona morfizm denir. Herbir morfizmin tarif bölgesi X, değer bölgesi ise Y dir. $f \in hom(X,Y)$ ise, $f:X \to Y$ veya $X \overset{f}{\to} Y$ yazılır.

(c) Morfizmler için bir kompozisyon tarif edilmiştir, öyleki her X,Y,Z sıralı nesne üçlüsü için $f:X \to Y$, $g:Y \to Z$ ise $gf= gof:X \to Z$ dir. $gf = gof$ ye f ve g nin terkibi veya kompozisyonu denir.

(a),(b),(c) aşağıdaki şartları sağlarlar:

(i) Asosyatiflik: $f:X \to Y$, $g:Y \to Z$, $h:Z \to W$ ise $h(gf)=(hg)f$.

(ii) Özdeşlik: Herbir Y nesnesi için $\exists 1_Y : Y \to Y$ morfizmi öyleki $f:X \to Y$, $h:Y \to Z$ ise, bu taktirde,

$$1_y f = f$$
$$h 1_y = h.$$

1_Y morfizmine özdeş morfizm denir.

Tarif 1.2.2. $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. $F:\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tasvirine funktor veya kovaryant funktor denir, şayet $\mathcal{C}$ ye ait herbir X nesneye $\mathcal{D}$ de bir F(X) nesne, $f:X \to Y$ morfizminede $\mathcal{D}$ de $F(f):F(X) \to F(Y)$ morfizmi tahsis olunmaktadır, şöyleki:

i) $F(1_X) = 1_{F(X)}$

ii) $F(gf) = F(g)F(f)$.

Tarif 1.2.3. $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. $F:\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tasvirine kofunktor veya kontravaryant funktor denir, şayet $\mathcal{C}$ ye ait herbir X nesneye $\mathcal{D}$ de bir F(X) nesne, $f:X \to Y$ morfizmine $\mathcal{D}$ de $F(f):F(Y) \to F(X)$ morfizmi tahsis olunmaktadır, şöyleki;

i) $F(1_X) = 1_{F(X)}$

ii) $F(gf) = F(f)F(g)$. [2].

1.3 H-Grupları

Bir uzaydan diğerine olan tasvirlerin homotopi sınıflarının cümlesinde, bazı hallerde bir tabii grup yapısı takdim etmek mümkündür. Bunun için P uzaylarını gözönüne alarak, bütün X ler için [X;P] cümlesini teşkil edelim. Bu cümle üzerindeki grup yapıları ile P üzerindeki grup yapıları arasında yakın bir bağlantı vardır. Şöyleki: P özdeş elamanı taban noktası olan bir topolojik grup olsun. Taban noktalarını muhafaza eden X den P ye sürekli bütün tasvirlerin cümlesinde, tasvirlerin noktasal çarpımı olarak tarif edilen bir kompozisyon kaidesi vardır. Yani, $g_1, g_2 : X \to P$ ise, bu taktirde $g_1 g_2 : X \to P \ni g_1 g_2(x) = g_1(x) g_2(x)$ olarak tarif edilir. Eşitliğin sağ tarafı P deki grup çarpımıdır. Bu kompozisyon kaidesi ile taban noktasını muhafaza eden X den P ye sürekli tasvirlerin cümlesi bir gruptur. (Şayet P komutatif ise, bu da komutatiftir.) Bu kompozisyon kaidesi, X den P ye taban noktasını muhafaza eden sürekli tasvirlerin [X;P] homotopi sınıflar cümlesi üzerinde bir operasyon intac eder, öyleki burada $[g_1][g_2] = [g_1 g_2]$ olup aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 1.3.1. Farzedelim ki P, bir topolojik grup olsun. Bu taktirde

Π^P, noktalı topolojik uzayların homotopi kategorisinden, gruplar ve homomorfizmleri kategorisine bir kontravaryant funktordur.

İspat: Burada noktalı topolojik uzayların homotopi kategorisinde nesneler noktalı topolojik uzaylar, morfizmler ise $f:X \to Y$ (X ve Y iki noktalı topolojik uzay) olduğunda, $[f]$ homotopi sınıflarıdır. Π^P kontravaryant funktoru ise, şöyle tarif edilmiştir: Herhangibir noktalı topolojik uzayların kategorisi ve bir P noktalı topolojik uzay (aynı zamanda bir topolojik grup) için Π^P, noktalı topolojik uzayların kategorisinden, gruplar ve homomorfizmler kategorisine bir kontravaryan funktordur, öyleki X noktalı topolojik uzayların kategorisinde herhangi bir nesne ise $\Pi^P(X)=[X;P]$ dir ve $f:X \to X'$ herhangibir morfizm ise $f^{*}:[X';P] \to [X;P]$ morfizmi, $[g']:X' \to P$ morfizmi için $f^{*}([g'])=[g' \circ f]$ şeklinde tarif edilir. f^{*} anlamlıdır, zira Teorem 1.1.9 dan dolayı homotop tasvirlirin terkipleri homotoptur.

P noktalı topolojik uzayı aynı zamanda bir topolojik grup olduğundan, $g_1g_2:X \to P$ için $(g_1g_2)(x)=g_1(x)g_2(x)$ şeklinde tarif edilen çarpımın $[X;P]$ üzerinde intac ettiği $[g_1][g_2]=[g_1g_2]$ şeklindeki çarpıma göre $[X;P]$ bir gruptur. Aynı şekilde $[X';P]$ bir gruptur. O halde f^{*} gruplar arasında bir morfizmdir.

Şimdi gösterelimki f^{*} bir homomorfizmdir; $[g'], [g''] \in [X';P]$ ve $f:X \to X'$ bir morfizm olsun. Yani

$$X \xrightarrow{f} X' \underset{g''}{\overset{g'}{\longrightarrow}} P \, .$$

$$f^{*}([g'][g''])=f^{*}([g'g''])=[g'g'' \circ f],$$

$X \xrightarrow{f} X' \underset{g''}{\overset{g'}{\longrightarrow}} P$ ise $[g'g'' \circ f](x)=((g'g'')f(x))=g'(f(x))g''(f(x))$ tır. O halde

$$f^{*}([g'][g''])=[g' \circ f][g'' \circ f]=f^{*}([g'])f^{*}([g'']).$$

Şimdi $\Pi^P(f)=f^{*}$ ise gösterelimki Π^P bir kontravaryant funktordur. 1_X noktalı topolojik uzayların homotopi kategorisinde $X \to X$ e özdeş morfizm olsun. Gösterelimki, $\Pi^P(1_X):[X;P] \to [X;P]$ morfizminde özdeş elamandır. Gerçekten, $\Pi^P(1_X)=1_X^{*}$. Halbuki, $[h] \in [X;P]$ ise

$$1_X^{*}([h])=[h \circ 1_X]=[h] \Longrightarrow \Pi^P(1_X)=1_{\Pi^P(X)} .$$

$f:X \to X'$, $g:X' \to X''$ ise

$\Pi^P(g \circ f)=\Pi^P(f) \circ \Pi^P(g)$ dir. Zira; $\Pi^P(f)=f^{*}$, $\Pi^P(g)=g^{*}$

$\Pi^P(f)([g'])=[g' \circ f]$, $[g_1] \in \Pi^P(X'')$ için, $\Pi^P(g)([g_1])=[g_1 \circ g]$ ve $[g']=[g_1 \circ g]$ olduğundan,

$$\Pi^P(f)([g']) = \Pi^P(f)([g_1 o g]) = [(g_1 o g) o f] = [g_1 o (g o f)] = \Pi^P(gof)([g_1]).$$
$$\Pi^P(f)([g']) = \Pi^P(f)(\Pi^P(g)([g_1])) = \Pi^P(f) o \Pi^P(g)([g_1])$$
$$\Longrightarrow \quad \Pi^P(gof) = \Pi^P(f) o \Pi^P(g).$$

Dolayısıyla Π^P, özdeşliği ve kompozisyonu muhafaza ettiğinden, bir kontravaryant funktordur.

$[X;P]$ üzerinde bir grup yapısı, taban noktosını muhafaza eden $X \to P$ ye sürekli tasvirlerin grup yapısından elde edilir. Aşağıdaki tarifler, bir P noktalı uzayına ek yapılar tarif etmek için kullanılacaktır; öyleki Π^P, gruplar ve homomorfizmleri kategorisinde değerler alsın.

Şayet $f:X \to Y$ ve $g:X \to Z$ tasvirler ise, bu taktirde $(f,g):X \to YxZ$ tasvirini, $x \in X$ için $(f,g)(x) = (f(x),g(x))$ şeklinde tarif ediyoruz.

Tarif 1.3.1. Bir H uzayı, bir P noktalı topolojik uzayı ile bir $\mu:PxP \to P$ sürekli çarpmasını ihtiva eder, öyleki, $c:P \to P$ sabit tasviri (birtek) bir "homotopi özdeşliktir", yani herbir $P \xrightarrow{(c,1)} PxP \xrightarrow{\mu} P$ ve $P \xrightarrow{(1,c)} PxP \xrightarrow{\mu} P$ kompozisyonu 1_P ye homotoptur.

μ çarpmasına "homotopi asosyatiftir" denir, şayet

$$\begin{array}{ccc} PxPxP & \xrightarrow{\mu x 1} & PxP \\ {\scriptstyle 1x\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ PxP & \xrightarrow{\mu} & P \end{array}$$

karesi, homotopi komutatif ise. Yani $\mu o(\mu x1) \sim \mu o(1x\mu)$.

Bir $\phi:P \longrightarrow P$ sürekli tasvirine P ve μ için bir "homotopi inverstir" denir, şayet $P \xrightarrow{(1,\phi)} PxP \xrightarrow{\mu} P$ ve $P \xrightarrow{(\phi,1)} PxP \xrightarrow{\mu} P$ kompozisyonun herbiri $c:P \to P$ sabit tasvirine homotop ise. (Yani, $\mu o(1,\phi) \sim c$ ve $\mu o(\phi,1) \sim c$).

Tarif (H-Grubu) 1.3.2. Bir homotopi inversli; homotopi asosyatif H uzayı, homotopi grup aksiyomlarını sağlar. Böyle bir noktalı uzaya H-Grubu denir.

Herhangibir topolojik grubun, bir H-Grubu olduğu açıktır.

Bir H uzayında bir μ çarpmasına "homotopi abeliandır" denir, şayet $T(p_1,p_2) = (p_2,p_1)$ olmak üzere

$$\begin{tikzcd} PxP \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\mu"'] & & PxP \arrow[dl, "\mu"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

üçgeni homotopi komutatif ise. Bir homotopi abelian çarpmalı H-Grubuna abelian H-Grubu denir.

μ ve μ', sırası ile, P ve P' H uzaylarının çarpmaları ise, bu taktirde bir $\alpha:P \to P'$ sürekli tasvirine "homomorfizm" denir, şayet

$$\begin{tikzcd} PxP \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha x\alpha"'] & P \arrow[d, "\alpha"] \\ P'xP' \arrow[r, "\mu'"] & P' \end{tikzcd}$$

karesi homotopi komutatif ise(Yani, $\mu' o(\alpha\, x\alpha\,) \sim \alpha o\mu$ ise).

Tarif 1.3.3. P,P' herhangi iki H grubu ve $\alpha:P \to P'$ bir homomorfizm olsun. α ya izomorfizm denir, şayet α birebir ve α^{-1} sürekli ise.

Teorem 1.3.2. Bir H uzayı (veya bir H grubu) ile aynı homotopi tipini haiz bir noktalı uzayın kendiside bir H uzayıdır(veya bir H grubudur), homotopi eşdeğerlik bir homomorfizmdir.

İspat: $f:P \to P'$ ve $g:P' \to P$ homotopi inversler ve P, çarpması $\mu:PxP \to P$ olan bir H uzayı olsun. Şayet $\mu':P'xP' \to P'$, $P'xP' \xrightarrow{gxg} PxP \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{f} P'$ kompozisyonu olarak tarif edilmiş ise, bu taktirde μ', P' de bir sürekli çarpmadır ve $P' \xrightarrow{(1,c')} P'xP' \xrightarrow{\mu'} P'$ kompozisyonu $P' \xrightarrow{g} P \xrightarrow{(1,c)} PxP \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{f} P'$ kompozisyonuna eşit olup, bu $P' \xrightarrow{g} P \xrightarrow{f} P'$ kompozisyonuna homotoptur. Zira, $fg \sim 1_{P'}$, $\mu' o(1,c') \sim 1_{P'}$. Benzer şekilde, $\mu' o(c',1)$ tasviri $1_{P'}$ ye homotoptur. Bundan dolayı P' bir H uzayıdır.

$$\begin{tikzcd} P'xP' \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "gxg"'] & P' \arrow[d, "g"] \\ PxP \arrow[r, "\mu"] & P \end{tikzcd}$$

karesi homotopi komutatiftir, zira $\mu' = fo\mu o(gxg)$ olduğundan, $go\mu' = (gof)o(\mu o(gxg))$ ve $gof = gf \sim 1_P$ olduğundan Teorem 1.1.6

den dolayı $(gof)o(\mu o(gxg)) \sim 1_P o(\mu o(gxg)) = \mu o(gxg)$ dir.
O halde $go\mu' \sim \mu ogxg$ dir. Binaenaleyh, g bir homomorfizmdir.
Aynı şekilde f nin de bir homomorfizm olduğu gösterilir.
Şayet μ homotopi asosyatif veya homotopi abelian ise, μ' de homotopi asosyatif veya homotopi abeliandir, zira
$1x\mu' = 1x(fo\mu o(gxg)) \sim fxfo1x\mu ogxgxg$. ve $1x\mu \sim \mu x1$ olduğundan
$fxfo1x\mu ogxgxg \sim fxfo\mu x1ogxgxg = \mu' x1$.
O halde $1x\mu' \sim \mu' x1$, yani μ' homotopi asosyatiftir. Aynı şekilde μ' nün homotopi abelian olduğu gösterilir.

Şayet $\phi : P \to P$, P ve μ için bir homotopi invers ise, bu taktirde $f\phi g : P' \to P'$, P' ve μ' için bir homotopi inverstir, zira; $f\phi g = \phi'$ dersek
$\mu' o(1,\phi') = (fo\mu o(gxg))o(1,\phi') = (fo\mu o(gxg))o(1,f\phi g) \sim$
$fo\mu o(1,\phi)og$. Halbu ki $\mu o(1,\phi) \sim c$(sabit tasvir)dir. O halde $fo\mu o(1,\phi)og \sim c'$(sabit tasvir). Binaenaleyh $f\phi g$, P' ve μ' için bir homotopi inverstir. Dolayısıyla P' bir H grubudur.

Bir P, H uzayı verilmiş olsun. Herhangi bir X noktalı uzayı için $[g_1][g_2] = [\mu o(g_1, g_2)]$ ile tarif edilen $[X;P]$ de bir terkip kanunu vardır. Şayet P bir H grubu ise $[X;P]$ bu terkip kanunu ile birlikte bir grup olur. Şöyleki:

(i) Asosyatiflik: $[g_1], [g_2], [g_3] \in [X;P]$ ise

$$[g_1]\ ([g_2][g_3]) = [g_1]\ ([\mu o(g_2, g_3)] = [\mu o(g_1, \mu o(g_2, g_3))]$$
$$= [\mu o(1x\mu)o(g_1,(g_2,g_3))]$$. Halbuki,

$\mu o(1x\mu) \sim \mu o(\mu x1)$ idi. Dolayısıyla,

$$[g_1]([g_2][g_3]) = [\mu o((\mu x1)o((g_1, g_2), g_3)] = ([g_1][g_2])[g_3].$$

(ii) Özdeş eleman:
$[g] \in [X;P]$ ve $[p] \in [X;P]$ $\Rightarrow$ $p : X \longrightarrow P$ ve $p(X) = p_o$(taban nokta)$\in P$ olsun. $[g][p] = [\mu o(g,p)] = [\mu o(1,c)og]$. Halbuki, $\mu o(1,c) \sim 1_P$ olduğundan $\mu o(1,c)og \sim 1_P og = g$. O halde $[g][p] = [g]$. Aynı şekilde $[p][g] = [g]$ olduğu gösterilir. Dolayısıyla $p : X \longrightarrow P$ sabit tasvir olmak üere $[p] \in [X;P]$ özdeş elamandir.

(iii) İnvers eleman: $\phi : P \to P$, μ ve P için bir homotopi invers olsun. $g:X \to P$ bir tasvir ise, $\phi o g:X \to P$ bir tasvirdir.O halde $[\phi o g] \in [X;P]$ dir.

$$[g][\phi o g]=[\mu o(g,\phi o g)]=[\mu o(1,\phi) o g] \quad .$$

Halbuki, $\mu o(1,\phi)\sim c$ olduğundan $\mu o(1,\phi) o g \sim c o g = p$. Binaenaleyh, $[g][\phi o g]=[p] \in [X;P]$ dir.Aynı şekilde $[\phi o g][g]=[p] \in [X;P]$ ($[p]$ özdeş eleman).Dolayısıyla $[\phi o g]$,$[X;P]$ nin invers elamanıdır.

Şayet, $f:X \to Y$ ise,bu taktirde $f^*:[Y;P] \to [X;P]$ bir homomorfizmdir.Zira; $[g_1]$, $[g_2] \in [Y;P]$ ise

$$f^*([g_1][g_2]) = [\mu o(g_1,g_2)] o [f]=[\mu o((g_1,g_2) o f)]$$
$$= [\mu o(g_1 o f, g_2 o f)] \quad . \quad (1)$$

$$f^*([g_1])f^*([g_2])=([g_1] o [f])([g_2] o [f])=[g_1 o f][g_2 o f]$$
$$=[\mu o(g_1 o f, g_2 o f]] \quad (2)$$

O halde (1) ve (2) den $f^*([g_1][g_2])=f^*([g_1])f^*([g_2])$.

Teorem 1.3.3. Farzedelim ki P,bir H grubu ise,bu taktirde Π^P,noktalı topolojik uzayların homotopi kategorisinden gruplar ve homomorfizmleri kategorisine bir funktordur. Şayet P bir abelian H grubu ise,bu funktor değerlerini abelian gruplar kategorisinde alır.

İspat: Gösterdik ki,P bir H grubu ve X herhangibir noktalı uzay ise,$[X;P]$ bir gruptur.Şayet,P H grubu abelian ise $[X;P]$ nin de abelian olduğu gösterilir.Ayrıca,yine gösterdik ki, $f:X \to Y$ bir morfizm ise, $f^*:[Y;P] \to [X;P]$ bir homomorfizmdir.

Şimdi,$\Pi^P(f)=f^*$ dersek Π^P nin kontravaryant funktor şartlarını sağladığını,aşağıda olduğu gibi gösterebiliriz;

(i) $1_X:X \to X$ özdeş morfizm olsun. $\Pi^P(1_X)=1_X^*:[X;P] \to [X;P]$. $[g] \in [X;P] \Longrightarrow 1_X^*([g])=[g] o [1_X]=[g o 1_X]=[g]$;
O halde, $\Pi^P(1_X)=1_{\Pi^P(X)}$.

(ii) $f:X \to Y$ ve $h:Y \to Z$ ise, $\Pi^P(h o f)=\Pi^P(f)\Pi^P(h)$ dır. Zira, $\Pi^P(f)=f^*:[Y;P]\to[X;P]$, $\Pi^P(h)=h^*:[Z;P] \to [Y;P]$
$\Pi^P(f)([g])=[g] o [f]=[g o f]$, $\Pi^P(h)([s])=[s] o [h]=[s o h]$ ve

$g = soh$ olduğundan,

$$\Pi^P(f)([g]) = \Pi^P(f)([soh]) = [soh]o[f] = [sohof] = [so(hof)]$$
$$= \Pi^P(hof)([s]).$$

$$\Pi^P(f)([g]) = \Pi^P(f)([soh]) = \Pi^P(f)(\Pi^P(h)([s]) = (\Pi^P(f)\Pi^P(h)([s])$$

$$\Rightarrow \Pi^P(hof)([s]) = (\Pi^P(f)\Pi^P(h))([s]) \Rightarrow \Pi^P(hof) = \Pi^P(f)\Pi^P(h).$$

Dolayısıyla Π^P kontravaryant bir funktordur.

Teorem 1.3.4. Farzedelim ki P bir noktalı uzay, öyleki Π^P, değerlerini gruplar kategorisinde alsın. Bu taktirde, P bir H grubudur (abeliandir, şayet Π^P değerlerini abel grupları kategorisinde alırsa.) Üstelik herhangi bir X noktalı uzayı için, $\Pi^P(X)$ üzerindeki grup yapısı Teorem 1.3.3. ile verilenin aynıdır.

İspat: $p_1:PxP \to P$ ve $p_2:PxP \to P$ projeksiyonlar olsun. $\mu:PxP \to P$ bir tasvir $\ni [\mu] = [p_1] * [p_2]$ olmak üzere $[PxP;P]$ grubunda bir kompozisyon kaidesidir. Herhangi $f,g:X \to P$ tasvirleri için $(f,g)^{\#}:[PxP;P] \to [X;P]$ bir homomorfizmdir ve

$$[\mu o(f,g)] = (f,g)^{\#}[\mu] = (f,g)^{\#}([p_1]*[p_2])$$
$$= (f,g)^{\#}[p_1]*(f,g)^{\#}[p_2] = [f]*[g]$$

Bu göstermektedir ki $[X;P]$, μ çarpma tasviri tarafından istintaç edilmiştir.

X bir tek nokta uzayı olsun. Birtek $X \to P$ tasviri, $[X;P]$ grubunun özdeş elamanını temsil eder. Birtek $P \to X$ tasviri bir $[X;P] \to [P;P]$ homomorfizmini istintaç ettiğinden dolayı $P \to X \to P$ kompozisyonu, ki bu $c:P \to P$ sabit tasviridir, $[P;P]$ nin özdeş elemanını temsil eder. Buradan

$$\mu o(1_P,c) \sim 1_P \text{ ve } \mu o(c,1_P) \sim 1_P .$$

Bundan dolayı P bir H uzayıdır.

μ nün homotopi asosyatif olduğunu ispat etmek için $q_1,q_2,q_3:PxPxP \to P$ projeksiyonlarını gözönüne alalım. Bu taktirde,

$$[\mu o(1x\mu)] = (1x\mu)^{\#}[\mu] = (1x\mu)^{\#}[p_1]*(1x\mu)^{\#}[p_2]$$
$$= [q_1]*[\mu o(q_2,q_3)] = [q_1]*([q_2]x[q_3]) \text{ dir.}$$

Benzer şekilde, $[\mu o(\mu x1)] = ([q_1] * [q_2]) * [q_3]$ dür. $[PxPxP;P]$ nin bir asosyatif çarpması olduğundan

$$\mu o(1x\mu) \sim \mu o(\mu x1).$$

P nin bir homotopi inversi olduğunu göstermek için $\phi : P \to P \ni [1_P] * [\phi] = [c]$ olsun, bu taktirde $\mu o(1_P, \phi) \sim c$. Aynı zamanda, $[\phi] * [1_P] = [c]$ olup, böylece $\mu o(\phi, 1_P) \sim c$. Böylelikle ϕ, P nin bir homotopi inversidir. Bu ispat etmektedir ki, P bir H grubudur, ve Π^P deki çarpma P üzerinden istintaç edilir. Şayet $[PxP;P]$ bir abelian grup ise, benzer düşünce ile P nin bir abelian H grubu olduğu gösterilir.

II. BÖLÜM

DEMET TEORİSİ

Bu bölümde evvelâ, genel olarak demet kavramı ele alınmış ve demetlerle ilgili, bazı tarif ve teoremler verilmiştir. Daha sonra demetlerin topolojik ve cebirsel yapıları üzerinde durulmuştur. Nihayet, cebirsel yapılı demetlere misâl teşkil edecek şekilde iki önemli demet incelenmiştir.

2.1. Demet Kavramı.

Tarif 2.1.1. X,S iki topolojik uzay ve $\Pi: S \to X$ lokal topolojik bir tasvir olsun. Bu taktirde (S,Π) çiftine X üzerinde bir demet denir.

Her $x \in X$ için $S_x = \Pi^{-1}(x)$ e x üzerinde (S,Π) nın veya sadece S nin sapı denir.

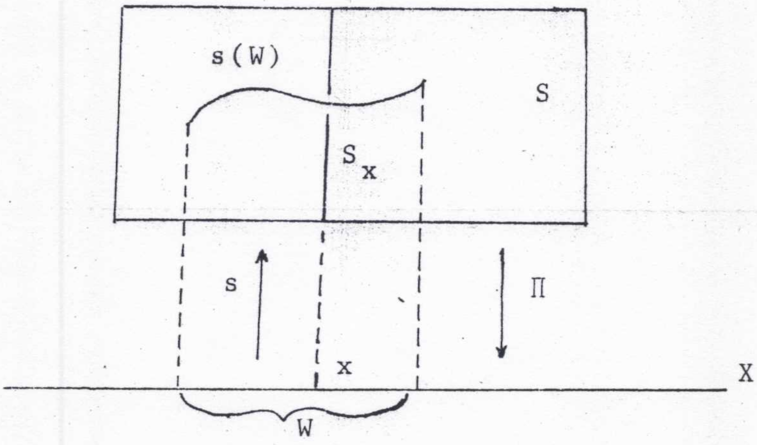
Tarif 2.1.2. (S,Π), X üzerinde bir demet olsun. $S^* \subset S$ açık bir cümle ve $\Pi^* = \Pi|S^*$ ise, bu taktirde (S^*, Π^*) a, S nin altdemeti denir.

Not: Herbir altdemet bir demettir. Bunu görebilmek için $\Pi^*: S^* \to X$ tasvirinin lokal topolojik olduğunu göstermek yeterlidir. Gerçekten, herbir $\sigma \in S^*$ için $\exists U(\sigma) \subset S$ ve $V(\Pi(\sigma)) \subset X$ açık cıvarları $\ni$ $\Pi|U: U \to V$ tasviri topolojiktir. Fakat $U^* = U \cap S^*$ ve $V^* = \Pi(U^*)$ sırasıyla σ nın S^* da ve $\Pi(\sigma)$ nın X de açık cıvarlarıdır. Diğer taraftan $\Pi^*|U^* = \Pi|U^*: U^* \to V^*$ topolojiktir.

$W \subset X$ açık ve $\Pi^{-1}(W) = S|W$, S nin W ye tahditi ise, bu taktirde $S|W$ açıktır ve $(S|W, \Pi(S|W))$ de bir demettir, S nin W ye tahditidir.

Tarif 2.1.3. (S,Π), X üzerinde bir demet, $W \subset X$ açık bir cümle ve $s: W \to S$ sürekli bir tasvir olsun, ve öyleki $\Pi o s = 1_W$. Bu taktirde s ye S nin W üzerinde kesiti denir. (Şekil 1.)

S nin W üzerindeki kesitlerinin tamamını $\Gamma(W,S)$ ile göstereceğiz.



Şekil 1.

Teorem 2.1.1. (S,Π), X üzerinde bir demet, $W \subset X$ bir açık cümle ve $s \in \Gamma(W,S)$ olsun. Bu taktirde $\Pi : s(W) \to W$ topolojiktir ve $s = (\Pi|s(W))^{-1}$.

İspat: $\Pi o s = 1_W$ gözönünde tutulursa, $x \in W$ için $so(\Pi|s(W))os(x) = so(\Pi os)(x) = s(x)$ dır.
O halde $so(\Pi|s(W)) = 1_{s(W)}$.

Teorem 2.1.2. (S,Π), X üzerinde bir demet, $W \subset X$ bir açik cümle ve $s : W \to S$ bir tasvir olsun, öyleki $\Pi o s = 1_W$. Bu taktirde $s \in \Gamma(W,S)$ yalnız ve yalnız $s(W)$, S de bir açık ise.

İspat:

(i) Farzedelim ki s süreklidir. $\sigma_o \in s(W)$ ve $x_o = \Pi(\sigma_o)$ $\Longrightarrow s(x_o) = \sigma_o$. Üstelik $V(x_o) \subset W$, $U(\sigma_o) \subset S$ açık cıvarları vardır öyleki $\Pi|U : U \to V \cap W$ topolojiktir. Süreklilik hipotezinden dolayı $\exists V'(x_o) \subset V \ni s(V') \subset U$. Binaenaleyh, $(\Pi|U)o(s|V') = (\Pi o s)|V' = 1_{V'}$. Fakat bu taktirde, $(\Pi|U)^{-1}(V') = s(V) \subset s(W)$ σ_o ın açık bir cıvarıdır. Yani σ_o, $s(W)$ nin bir iç noktasıdır.

(ii) Farzedelim ki $s(W)$ açık, $x_o \in W$ ve $\sigma_o = s(x_o)$ olsun. Bu taktirde $V(x_o) \subset W$, $U(\sigma_o) \subset s(W)$ açık cıvarları vardır öyleki $\Pi|U : U \to V$ topolojiktir. $s = (\Pi|s(W))^{-1}$, böylece $s|V = (\Pi|U)^{-1}$ ve bu tasvir x_o da süreklidir.

Teorem 2.1.3. (S,Π), X üzerinde bir demet ve $\sigma \in S$ olsun. Bu taktirde bir $V \subset W$ açık cümlesi ve $\sigma \in s(V)$ şartını sağlayan bir $s \in \Gamma(W,S)$ kesiti vardır.

İspat: $x = \Pi(\sigma)$ olsun. $U(\sigma) \subset S$ ve $V(x) \subset X$ açık civarlarını seçelim şöyleki, $\Pi|U : U \to V$ topolojiktir. Bu durumda V ve $s = (\Pi|U)^{-1}$ istenen şartları sağlar.

Teorem 2.1.4. (S,Π), X üzerinde bir demet ve $W \subset X$ bir açık cümle olsun. Şayet $s_1, s_2 \in \Gamma(W,S)$ kesitleri bir $x \in W$ noktasında eşit iseler: $s_1(x) = s_2(x)$, bu taktirde bir $V(x) \subset W$ açık civarında eşittirler; $s_1|V = s_2|V$.

İspat: $\sigma = s_1(x) = s_2(x)$ alalım. Bu taktirde $U = s_1(W) \cap s_2(W)$ σ nın açık bir civarıdır, ve $\Pi|U : U \to V = \Pi(U) \subset W$ tasviri topolojiktir. Dolayısıyla $s_1|V = (\Pi|U)^{-1} = s_2|V$.

Tarif 2.1.4. (S_1,Π_1), (S_2,Π_2), X üzerinde iki demet olsun.

1. $\phi : S_1 \to S_2$ sapları muhafaza ediyor denir, şayet $\Pi_2 o \phi = \Pi_1$ ise. (Dolayısıyla $\phi((S_1)_x) \subset (S_2)_x$, her $x \in X$ için)

2. Demet morfizmi diye, sapları muhafaza eden sürekli $\phi : S_1 \to S_2$ tasvirine denir.

3. Demet izomorfizmi diye, saplıın muhafaza eden topolojik $\phi : S_1 \to S_2$ tasvirine denir.

S_1, S_2 demetlerine izomorfik veya izomorf denir, şayet aralarında demet izomorfizmi mevcutsa.

Teorem 2.1.5. (S_1,Π_1), (S_2,Π_2), X üzerinde iki demet, $\phi : S_1 \to S_2$ sapları muhafaza eden bir tasvir olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler muadildirler.

1. ϕ bir demet izomorfizmidir.

2. Herbir $W \subset X$ açık cümlesi ve herbir $s \in \Gamma(W,S_1)$ kesiti için, $\phi o s \in \Gamma(W,S_2)$.

3. Herbir $\sigma \in S_1$ için bir $W \subset X$ açık cümlesi ve bir $s \in \Gamma(W,S_1)$ kesiti vardır öyleki $\sigma \in s(W)$ ve $\phi o s \in \Gamma(W,S_2)$.

İspat:

(a) ϕ sürekli, $W \subset X$ açık ve $s \in \Gamma(W,S_1)$ ise, bu taktirde $\phi o s$ de süreklidir. Üstelik $\Pi_2 o(\phi o s) = (\Pi_2 o \phi) o s = \Pi_1 o s = 1_W$. Dolayısıyla $\phi o s \in \Gamma(W,S_2)$.

(b) $\sigma \in S_1$ ise, bu taktirde bir $W \subset X$ açık cümlesi ve bir $s \in \Gamma(W,S_1)$ vardır $\ni$ $\sigma \in s(W)$. (2) deki şartlar sağlanmış ise, bu taktirde $\phi o s \in \Gamma(W,S_2)$.

(c). (3) deki şatlar altında $s:W \to s(W)$ topolojiktir. Dolayısıyla $\phi|s(W) = (\phi o s) o s^{-1}: s(W) \to S_2$ süreklidir. Binaenaleyh ϕ, σ da süreklidir.

Not: bir $\phi: S_1 \to S_2$ demet morfizmi, her $W \subset X$ açık cümlesi için bir $\phi_*: \Gamma(W,S_1) \to \Gamma(W,S_2)$ tasvirini intaç eder, öyleki $\phi_*(s) = \phi o s$ [6,7]

Tarif 2.1.5. Farzedelim ki herbir $W \subset X$ açık cümlesine bir M_W cümlesi tekabül ediyor ve herbir $(V,W), V \subset W$ açık cümle çifti için bir $\gamma_{W,V}: M_W \to M_V$ tasviri verilmiştir, öyleki

(i) $\gamma_{W,W} = 1_{M_W}$, her $W \subset X$, W açık

(ii) $U \subset V \subset W \Longrightarrow \gamma_{V,U} o \gamma_{W,V} = \gamma_{W,U}$.

Bu taktirde $\{X, M_W , \gamma_{W,V}\}$ kolleksiyonuna öndemet denir. $\gamma_{W,V}$ tasvirlerine, tahdit edici tasvirler denir.

Herbir (S,Π) demetine tabii bir şekilde bir öndemet tekabül eder: Nitekim $(V,W), V \subset W$, X ın açık cümleleri ise $M_W = \Gamma(W,S)$ ve $\gamma_{W,V}(s) = s|V$, $s \in M_W$ vazedilebilir. Bu taktirde $\{X, \Gamma(W,S), \gamma_{W,V}\}$ bir öndemettir. Bu öndemete S demetinin kanonik öndemeti denir.

Teorem 2.1.6. Herbir $\{X, M_W, \gamma_{W,V}\}$ öndemetine bir demet tekabül ettirilebilir. (İndüktif limit teşkil etmek suretiyle) [1].

Teorem 2.1.7. S, X üzerinde bir demet olsun. $\{X, \Gamma(W,S), \gamma_{W,V}\}$ kanonik öndemet tarafından tarif edilen demet S ye kanonik izomorftur.

İspat: Kanonik öndemetin tarif ettiği demeti (S^*, Π^*) ile gösterelim.

1) $(W_1,s_1) \overset{x}{\sim} (W_2,s_2) \Longleftrightarrow s_1(x) = s_2(x)$ bağıntısı, $\phi: (W,s)_x \to s(x)$ tasvirinin belirtiği $\phi: S^* \to S$ tasviri injektif ve sapları muhafaza eder. Şimdi ϕ nin sürjektif olduğunu gösterelim. Gerçekten, $\sigma \in S_x$ ise, bu taktirde, bir $W(x)$ cıvarı ve bir $s \in \Gamma(W,S)$ vardır $\ni$ $s(x) = \sigma$. Binaenaleyh, $\gamma s(x) = (W,s)_x \in S^*_x$ ve $\phi(\gamma s(x)) = \phi((W,s)_x) = s(x) = \sigma$.

2) ϕ, $\sigma^* = \gamma s(x)$ de süreklidir. Gerçekten, bu taktirde,

bir $W\subset X$ açık cümle ve bir $s\in\Gamma(W,S)$ elamanı vardır öyleki, $\sigma^{*}=(W,s)_x=\gamma s(x)$. Dolayısıyla, $\gamma s\in\Gamma(W,S^{*})$, $\sigma^{*}\in\gamma s(W)$ ve $\phi o\gamma s=s\in\Gamma(W,S)$. Buradan ϕ nin σ^{*} da sürekli olduğu çıkar.

3) ϕ^{-1} süreklidir. $W\subset X$ açık ve $s\in\Gamma(W,S)$ ise, bu taktirde $\phi^{-1}(s)=\gamma s\in\Gamma(W,S^{*})$.

Tarif 2.1.6. $\phi:S_1\to S_2$ demet morfizmine açık tasvir denir, şayet S_1 de herhangi bir açık cümle S_2 de bir açık cümleye dönüşüyorsa.

Teorem 2.1.8. Herbir demet morfizmi bir açık tasvirdir.

İspat: $\phi:S_1\to S_2$ bir demet morfizmi olsun. S_1, $\{X,\Gamma(W,S_1),\gamma_{W,V}\}$ kanonik öndemeti ile tarif edilen S_1^{*}'re izomorf olduğundan, $s(W)\ni s\in\Gamma(W,S_1)$, cümleleri S_1 üzerindeki topoloji için bir taban teşkil ederler. Şayet $s\in\Gamma(W,S_1)$ ise, bu taktirde, $\phi os\in\Gamma(W,S_2)$, ve dolayısıyla, $\phi(s(W))=(\phi os)(W)$, S_2 de açıktır. $s(W)$ S_1 de açık olduğundan teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Tarif 2.1.7. $(S_1,\Pi_1),\ldots,(S_k,\Pi_k)$, X üzerinde demetler olsun. $W\subset X$ açık için, $M_W=\Gamma(W,S_1)x\ldots x\Gamma(W,S_k)$ kartezyen çarpımını teşkil edelim. $s=(s_1,\ldots,s_k)\in M_W$ ve $V\subset W$ için $\gamma_{W,V}(s)=(s_1|V,\ldots,s_k|V)$ olsun. Bu taktirde $\{X,M_W,\gamma_{W,V}\}$ bir öndemettir. Bu öndemetin tarif ettiği demete; $S^{*}=S_1\oplus S_2\oplus\ldots\oplus S_k$, $S_1,\ldots,S_k$ demetlerinin Whitney toplamı denir.

Teorem 2.1.9. (S_i,Π_i), $i=1,\ldots,k$, X üzerinde demetler ve $S^{*}=S_1\oplus S_2\oplus\ldots\oplus S_k$ Whitney toplamları olsun. Bu taktirde her $x\in X$ için $(W,(s_1,\ldots,s_k))_x\to(s_1(x),\ldots,s_k(x))$ şeklinde tarifli bir $\phi:S_x^{*}\to(S_1)_x\, x\ldots x(S_k)_x$ bijeksiyonu vardır.

İspat:

(1) $\lambda=1,2$ $x\in W_1\cap W_2$ için $s_\lambda=(s_1^\lambda,\ldots,s_k^\lambda)\in\Gamma(W_\lambda,S^{*})$ olsun. $(W_1,s_1)\overset{x}{\sim}(W_2,s_2)$ dir, yalnızve yalnız $\exists V(x)\subset W_1\cap W_2$ cıvarı varsa, öyleki

$$(s_1^1|V,\ldots,s_k^1|V)=(s_1^2|V,\ldots,s_k^2|V).$$

Bu, $i=1,2,\ldots,k$ için $s_i^1(x)=s_i^2(x)$ ile eşdeğerdir. Dolayısıyla $(W,(s_1,\ldots,s_k))_x\to(s_1(x),\ldots,s_k(x))$ şeklinde tarif edilen tasvir injektiftir.

(2) Şayet $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in (S_1)_x x \ldots x (S_k)_x$ ise ve $\sigma_i = s_i^*(x) \ni s_i^* \in \Gamma(W_i, S_i)$ dersek, bu taktirde $W = \bigcap_{i=1}^{k} W_i$ x ın bir cıvarıdır, ve $s_i^*|W = s_i \in \Gamma(W, s_i)$ dir.

Netice olarak $s = (s_1, \ldots, s_k)$ M_W dedir ve $\gamma s, \gamma s(x) = (W, s)_x \to s(x) = \sigma$ olacak şekilde S demetinin bir kesitidir. Dolayısıyla yukarıda ki tarifli tasvir sürjektiftir.

Bundan böyle $(s_1 \oplus s_2 \oplus \ldots \oplus s_k)_x$ i $(s_1)_x$ $x \ldots x (s_k)_x$ ile özdeşliyoruz.

Teorem 2.1.10. $(S_1, \Pi_1), \ldots, (S_k, \Pi_k)$, X üzerinde demetler olsun. Bu taktirde $p_i : S_1 \oplus \ldots \oplus S_k \longrightarrow S_i$ kanonik projeksiyonu (öyleki $p_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) = \sigma_i$) demet morfizmidir.

İspat: Tarifden dolayı, p_i tasviri sapları muhafaza eder. Şayet $\sigma \in (S_1 \oplus \ldots \oplus S_k)_x = (S_1)_x$ $x \ldots x (S_k)_x$ ise, bu taktirde S_i de s_i kesiti vardır, öyleki $s = (s_1, \ldots, s_k)$ için $s_i(x) = p_i(\sigma)$ ve $\gamma s(x) = \sigma$. Dolayısıyla $p_i o \gamma s = s_i$ süreklidir, ve p_i demet morfizmidir.

Yukarıda olduğu gibi gösterilebilir ki $\Gamma(W, S_1 \oplus \ldots \oplus S_k)$ ile $\Gamma(W, S_1) x \ldots x \Gamma(W, S_k)$ özdeşlenebilir [7]

Tarif 2.1.1. ile S demetinin ve Tarif 2.1.3 ilede $s \in \Gamma(W, S)$ kesitlerinin tarifleri verildi. Ayrica görüldü ki $W \subset X$, X de açık ise, Π lokal topolojik olduğundan $s(W)$, S de açıktır ve S nin açık cümleleri bu tip açık cümlelerin birleşimidir. Diğer taraftan yine gördük ki $s_1, s_2 \in \Gamma(W, S)$ ve bir $x \in X$ için $s_1(x) = s_2(x)$ ise, bu taktirde bütün W de $s_1 = s_2$. Nihayet S nin herbir elamanına, S ye ait kesitlerin birer hüvesi gözü ile bakılabilir.

Şimdi demetlerde birde cebirsel yapı olduğunu görelim:

Tarif 2.1.8. Bir X topolojik uzayı üzerinde Abelyen grupların bir demeti, bir S topolojik uzayı ile beraber bir $\Pi : S \to X$ tasviridir, öyleki aşağıdaki şartlar sağlanmıştır:

1) Π bir lokal topolojik tasvirdir.

2) Herbir $x \in X$ için $\Pi^{-1}(x) = S_x$ sapı bir Abel grubudur.

3) $S \oplus S \xrightarrow{+} S$ (yani $(\sigma_1,\sigma_2) \to \sigma_1+\sigma_2$) süreklidir. Yani grup işlemliri S nin topolojisinde süreklidir[6]

(1) şartının manası şudur:Her $\sigma \in S$ noktası için σ nın S de bir U ve $\Pi(\sigma)$ nın X de bir W açık civarı mevcuttur öyleki Π tasvirinin U ya tahditi, $\Pi|U:U \to W = \Pi(U)$ bir topolojik tasvirdir.Bu taktirde herbir $x \in W$ noktası Π tasviri altında bir $\sigma \in U$ noktasının resmidir ve $(\Pi|U)^{-1}:W \to U$ tasviri,yani herhangi bir $x \in W$ noktasının bir $\sigma \in U$ noktasına gönderen tasvir,bir $s:W \to S$ topolojik tasviridir.Daha öncede belirtildiği gibi,Π tasvirinin lokal tersleri S demetinin kesitleridir.Neticede açıktır ki herhangi $\sigma \in S$ noktasında $\Pi(\sigma) \in X$ ın bir açık cıvarı üzerinde demetin enaz bir kesiti geçer.(2).şartın manası açıktır.(3).şart ise:SxS kartezyen çarpımında SoS aşağıda ki gibi tarifli bir altcümle olsun:

$$SoS = \{ (\sigma_1,\sigma_2) \in SxS: \Pi(\sigma_1) = \Pi(\sigma_2) \}.$$

Buradanda anlaşıldığı gibi Π nin bir $\Pi^*:SoS \to X$ tasvirine bir tabii temditi vardır.(Gerçekten SxS,XxX kartezyen çarpımı üzerinde bir demettir,ve SoS,$\Pi^{*-1}(X) \subset SxS$ altcümlesidir, burada $X \subset XxX$ diagonel olarak dahil edilmiştir.) Şimdi,S nin saplarında grup işlemleri $(\sigma_1,\sigma_2) \to \sigma_1-\sigma_2$ şeklinde iyi tarifli bir tasviri gerektirir.Bu tasvir sürekli ise,üçüncü şart sağlanmış olur.

Şimdi farzedelim ki,enaz bir $W \subset X$ açık cümlesi için $s_1,s_2 \in \Gamma(W,S)$ dir.Bu taktirde $x \to (s_1(x),s_2(x))$ tasviri W den SoS ye bir tasvirdır ve buradan $SoS \to S$ tasviri ile terkibi $x \to (s_1(x)-s_2(x)) \in S$ tasviridir,üstelik süreklidir.Şu halde s_1-s_2,W üzerinde bir kesittir ve dolayısıyla $\Gamma(W,S)$ cümlesi tabii bir gruptur.Açıkca $\Gamma(W,S)$ nin sıfır elamanı,herbir $x \in W$ noktasına $0_x \in S_x$ sıfır elamanını tekabül ettiren bir kesittir. $\Gamma(W,S)$ nin grup işlemleri altında kapalı olma şartı (3) şartına eşdeğerdir.

Tarif 2.1.9. X üzerinde bir (S,Π) demetine C-cebiri demeti denir,şayet şu şartlar sağlanıyorsa:

1) Herbir S_x sapı,1 li komütatif C-cebiridir.

2) $S\oplus S \xrightarrow{+} S$ (yani $(\sigma_1,\sigma_2) \to \sigma_1+\sigma_2$) süreklidir.

3) $S\oplus S \xrightarrow{\cdot} S$ (yani $(\sigma_1,\sigma_2) \to \sigma_1.\sigma_2$) süreklidir.

4) Herbir $c\in\mathbb{C}$ için $S \xrightarrow{c} S$ (yani $\sigma \to c.\sigma$) süreklidir.

5) $I:X \to I_x \in S_x \Longrightarrow I\in\Gamma(X,S)$.

Neticeler:

1) $0:x \to 0_x \in S_x$,$\Gamma(X,S)$ dedir.

2) $S \xrightarrow{-} S$ ($\sigma\to -\sigma$ özelliğini haiz) süreklidir.

3) Şayet $W\subset X$ açık ise,bu taktirde $\Gamma(W,S)$ de bir C-cebiridir.[7,8]

Tarif 2.1.10. $\mathcal{A}$, X üzerinde C-cebirlerinin bir demeti ve S, X üzerinde bir demet olsun.S ye $\mathcal{A}$- modüllerin demetidir denir,şayet şu şartlar sağlanıyorsa;

1) Her $x\in X$ için,S_x 1 li bir $\mathcal{A}_x$-modüldür.

2) $S\oplus S \xrightarrow{+} S$ süreklidir.

3) $\mathcal{A}\oplus S \xrightarrow{\cdot} S$ süreklidir.

Not: 0_x,S_x in sıfır elamanı olsun. $0:x \to 0_x$ sıfır kesitini tarif eder,$0\in\Gamma(X,S)$.

Herbir W için $\Gamma(W,S)$ bir $\Gamma(W,\mathcal{A})$-modüldür.

2.2. Demetlere Misâller.

2.2.1. Yakınsak Kuvvet Serilerinin Demeti.

$z^o\in\mathbb{C}^n$ bir nokta olsun.z^o ın bir cıvarında tarifli fonksiyonları gözönüne alalım.İki fonksiyona eşdeğerdir diyeceğiz,şayet bu iki fonksiyon z^o ın bir cıvarında çakışıyorlarsa.Bu bir eşdeğerlik bağıntısı tarif eder,ve f nin z^o daki eşdeğerlik sınıfı f_{z^o} ile gösterilir,ve f nin z^o da ki nüvesi denir.f bir holomorf fonksiyon ise,f_{z^o} nüvesi,z^o etrafında yakınsak bir kuvvet serisinden ibarettir:

$$f_{z^o} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z^o)^\nu .$$

Binaenaleyh,$z^o\in\mathbb{C}^n$ ise,bu taktirde, $\mathcal{O}_{z^o} = (H_n)$,$z^o$ etrafında yakınsak f_{z^o} kuvvet serilerinin C-Cebirini veya halkasını gösterir.

Demek ki her $z\in\mathbb{C}^n$ için bi $\mathcal{O}_z$ C-cebiri vardır.

$\mathcal{O}_z$ C-cebirlerinin $\mathcal{O}=\bigvee_{z\in\mathbb{C}^n}\mathcal{O}_z$ ayrık birleşimi $\mathbb{C}^n$ üzerinde bir cümledir. $\Pi:\mathcal{O}\to\mathbb{C}^n$ tabii projeksiyonu f_z yi f_z kuvvet serisinin etrafında açıldığı z noktasına dönüştürür.

$\mathcal{O}$ cümlesi üzerinde tabii bir topoloji vardır, öyleki bu topoloji Π yı sürekli bir tasvir yapar ve herbir $\mathcal{O}_z$ sapı üzerinde diskret bir topoloji tevlid eder.Gerçekten $f_{z^o}\in\mathcal{O}$ ise,bir $U(z^o)\subset\mathbb{C}^n$ açık cıvarı ve U üzerinde holomorf bir f fonksiyonu vardır,öyleki f_{z^o} serisi U da f ye üniform yakınsaktır.Ayrıca f, U nun herbir z noktasında yakınsak bir kuvvet serisine açılabilir.Böylece,f bir $s:U\to\mathcal{O}$ tasvirini istintaç eder,öyleki

1) $\Pi o s = 1_U$
2) $s(z^o)= f_{z^o}\in s(U)$

Binaenaleyh,$s(U)=\bigcup_{z\in U} f_z$ açık cümle olarak tarif edilirse, bu gibi cümlelerin kolleksiyonu da açık cümlelerin tabanını teşkil ettiğinden $\mathcal{O}$ da bir topoloji tarif edilmiş olur.[7]

Tarif 2.2.1. $\mathcal{O}$ ya yukarda ki topoloji uygulandığı taktirde $\mathcal{O}$ topolojik uzayına yakınsak kuvvet serilerin demeti denir.

$\mathcal{O}_z = \Pi^{-1}(z)$ C-cebirine demetin sapı denir.

Π lokal topolojiktir ve $\mathcal{O}$ daki cebirsel operasyonlar bu topolojide süreklidirler.[1]

Binaenaleyh, $\mathcal{O}$ bir C-cebir demeti,hatta bir $\mathcal{O}$ -modül demetidir.[10,11]

Not: $B\subset\mathbb{C}^n$ bir açık cümle olsun.B de holomorf bir f fonksiyonundan,B nin herbir z noktasına,bu noktanın üzerinde bir f_z nüvesini karşılık tutan $f:B\to\mathcal{O}$ tasviri anlaşılabilir.

2.2.2. Holomorf Fonksiyonların Nüvelerinin Demeti.

$B\subset\mathbb{C}^n$ bir bölge olsun.Herbir $W\subset B$ açık cümlesine W üzerinde holomorf fonksiyonların M_W halkasını tekabül ettirelim.(V,W), $V\subset W$ açık cümle çifti için $\gamma_{W,V}:M_W\to M_V$ tasvirini,öyleki her $f\in M_W$ için $\gamma_{W,V}(f)=f|V$ şeklinde tarif edelim.Bu taktirde kolaylıkla gösterilebilir ki

$\{B, M_W, \gamma_{W,V}\}$ kolleksiyonu bir öndemettir. Teorem 2.1.6 dan dolayı bu öndemete bir demet tekabül eder. Gerçekten: $\{(W,f): W, z$ nin bir açık cıvarı, $f \in M_W\}$ ailesi üzerinde şu eşdeğerlik bağıntısını tarif edelim: $(W_1,f_1) \overset{z}{\sim} (W_2,f_2)$ diyoruz yalnız ve yalnız z nin bir V açık cıvarı varsa öyleki $V \subset W_1 \cap W_2$ ve $f_1|V = f_2|V$, yani, f_1 ve f_2, z nin bir cıvarında aynı kuvvet serisini haiz ise. (W,f) çiftlerinin eşdeğerlik sınıflarını $(W,f)_z$ ile, $(W,f)_z$ sınıflarının tamamını ise S_z ile gösterelim. Eşdeğerlik bağıntısının tarifinden dolayı $(W,f)_z$ sınıfı f_z nüvesi ile, S_z cümlesi $\mathcal{O}_z$ cümlesi ile özdeşlenebilir. Dolayısıyla, $S = \bigvee_{z \in B} S_z$ yerine $\mathcal{O} = \bigvee_{z \in B} \mathcal{O}_z$ yazabiliriz.

$\Pi: \mathcal{O} \to B$ tabii projeksiyonu olsun. $W \subset B$ açık ve $f \in M_W$ ise, herbir f elamanına, $\gamma f(z) = f_z$, $z \in W$ ile tarifli $\gamma f = s: W \to \mathcal{O}$ tasvirini karşılık tutuyoruz. Bu taktirde, gösterilebilir ki,

$$T = \{(\gamma f = s)(W): W \subset B \text{ açık}, f \in M_W\}$$

$\mathcal{O}$ üzerinde bir topoloji tabanıdır. Dolayısıyla, $\mathcal{O}$ ya ait açık cümleler T ye ait elamanların keyfi birleşimleridir. Π bu topolojiye nazaran lokal topolojiktir. $\mathcal{O}$ daki cebirsel operasyonlar bu topolojide süreklidirler. Bu demete $B \subset \mathbb{C}^n$ üzerinde holomorf fonksiyonların nüvelerinin demeti denir. $\mathcal{O}$ bir C-cebir demetidir.

Tarif 2.2.3. B üzerinde $\mathcal{O}$-modüllerinin S demetine B üzerinde analitik demet denir.

$\mathcal{O}$ bir analitik demettir. [11,12,15] .

III.BÖLÜM

3.1. H gruplar üzerinde demetler.

Bu çalışmada taban cümle olarak bir P topolojik uzayını gözönüne alıp, farklı her p_i, $i\in I$ noktası için (P,p_i) noktalı topolojik uzayları teşkil edilmiştir, öyleki (P,p_i) ile (P,p_j), $i,j\in I$ noktalı topolojik uzayları aynı homotopi tipinde alındığında, bunlardan biri bir H grubu ise, diğerininde H grubu olduğu Teorem 1.3.2.den gösterilebilir. Yani $i,j\in I$, $i\neq j$ için (P,p_i) bir H grubu ise (P,p_j) de bir H grubudur. Üstelik (P,p_i) H gruplarının herbirine farklı $[X;(P,p_i)]$ grupları tekabül etmektedir. (Burada X herhangi bir noktalı topolojik uzay ve $[X;(P,p_i)]$ ise, X den (P,p_i) ye taban noktalarını muhafaza eden sürekli bütün tasvirlerin homotopi sınıflarının cümlesidir). Gerçekten $[X;(P,p_o)]$, $[X;(P,p_1)]$ iki keyfi grup ve $[f]\in[X;(P,p_o)]$, $[g]\in[X;(P,p_1)]$ keyfi elamanlar ise, bu taktirde (X,x_o), $f(x_o)=p_o$ ve $g(x_o)=p_1$ dir. Dolayısıyla $[f]\neq[g]$ dir. $[f]$ ve $[g]$ keyfi olduklarından $[X;(P,p_o)]\neq[X;(P,p_1)]$. Binaenaleyh, her $i,j\in I$, $i\neq j$ için $[X;(P,p_i)]\neq[X;(P,p_j)]$ dir.

Herbir $(P,p\ )$ H grupları için $[X;(P,p\ )]$ gruplarının $H(P)=\bigvee_{p\in P}[X;(P,p)]$ ayrık birleşimi P uzayı üzerinde bir cümledir. $\Psi:H(P)\to P$ tabii tasvirini her $\sigma\in H(P)$ $(\sigma\in H(P)\Longrightarrow\exists\, p\in P$ için $\sigma\in H(P)_p=[X;(P,p)]\Rightarrow\sigma=[f]_p$) için $\Psi(\sigma\ )=\Psi([f]_p\ )=p$ şeklinde tarif edelim.

Şimdi, H(P) cümlesi üzerinde, Ψ tasvirini lokal topolojik kılan ve herbir $H(P)_p=[X;(P,p)]$ sapında diskret topoloji tevlid eden, bir tabii topolojinin inşasına geçelim.

$\sigma=[f]_p\in H(P)_p\subset H(P)\Longrightarrow\Psi(\sigma)=\Psi([f]_p\ )=p$ ve $W\subset P$ keyfi bir açık olsun. W de bir p_o keyfi sabit noktasını seçelim. O halde $W=W(p_o)$ olarak gözönüne alabiliriz. Şimdi, $s:W\to H(P)$ tasvirini şöyle tarif edelim:

$p_o\in P$ ise $[X;(P,p_o)]\subset H(P)$ grubu vardır.

$[f]_{p_o} \in [X;(P,p_o)]$ homotopi sınıfını alalım. O halde $y \in W$ herhangi bir nokta ise, (P,p_o) ve (P,y) homotopik eşdeğer olduklarından $\Phi:(P,p_o) \longrightarrow (P,y)$ homotopi eşdeğerlilik tasviri vardır. Dolayısıyla,

$$\begin{tikzcd}
(X,x_o) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\Phi o f"'] & (P,p_o) \arrow[d, "\Phi"] \\
 & (P,y)
\end{tikzcd}$$

üçgen diagramında görüldüğü gibi $\Phi o f:(X,x_o) \to (P,y)$ ye sürekli ve taban noktasını muhafaza eder. $\Phi o f$ tasvirinin homotopi sınıfı $[\Phi o f]_y \in [X;(P,y)]$ dir. O halde $s(y) = [\Phi o f]_y$ diyelim. Bu şekilde tarif edilen s tasviri tek anlamlıdır ve aşağıdaki şartları sağlar:

1) Her $y \in W$ için $(\Psi o s)(y) = \Psi(s(y)) = \Psi([\Phi o f]_y) = y$. O halde $\Psi o s = 1_W$.

2) p_o, W de keyfi bir nokta olmak üzere $W = W(p_o)$ için $s(p_o) = [1_P o f]_{p_o} = [f]_{p_o} \in s(W)$. O halde herhangi bir $y \in W$ için $s(y) = [\Phi o f]_y$ olduğundan $\Phi o f = h$ dersek $s(y) = [\Phi o f]_y = [h]_y$. Bu taktirde $s(W) = \bigcup_{y \in W} [h]_y$ olarak yazılabilir. $s(W)$ yı açık cümle olarak tarif edersek, gösterebiliriz ki

$$T = \{s(W) : W = W(p\ ) \subset P\ \}$$

ailesi $H(P)$ üzerinde bir topoloji tabanıdır. Bunun için $s_1(W_1), s_2(W_2) \in T$ olmak üzere, $s_1(W_1) \cap s_2(W_2) \in T$ olduğunu göstermek kâfidir. Halbuki;

i) $s(W) = s_1(W_1) \cap s_2(W_2) \neq \emptyset \Rightarrow \exists [f]_y \in s(W)$ öyleki $y \in W(y) = (W_1 \cap W_2)(y)$ dir. Bu taktirde $s(W(y)) = s_1(W_1) = s_2(W_2)$. Dolayısıyla $s_1(W_1) \cap s_2(W_2) \in T$.

ii) $s_1(W_1) \cap s_2(W_2) = \emptyset$ ise, $\emptyset \in T$ olduğundan $s_1(W_i) \cap s_2(W_2) \in T$.

Binaenaleyh, T, $H(P)$ üzerinde bir topoloji tabanıdır ve $H(P)$ nin açık cümleleri T nin elamanlarının keyfî birleşimleridir. Dolayısıyla, bu topoloji ile birlikte $H(P)$ bir topolojik uzaydır.

Şimdi gösterelim ki $\Psi: H(P) \to P$ tabii tasviri bir lokal topolojik tasvirdir. Bunun için göstermiliyiz ki, her $\sigma = [h]_y \in H(P), y \in P$ için bir $U(\sigma) \subset H(P)$ ve $W(y = \Psi(\sigma)) \subset P$ açık cıvarları vardır öyleki $\Psi|U : U \to W$ bir topolojik tasvirdir. Halbuki, $\sigma = [h]_y \in H(P)$ için $\Psi(\sigma) = \Psi([h]_y) = y$ idi. Bu taktirde y yi ihtiva eden W açık cıvarı için bir $s: W \to H(P)$ tasviri vardır $\ni$ $s(y) = \sigma$. Ayrıca, $U(\sigma) = s(W)$ ve $\Psi|U = \Psi^*$ vazedelim.

1) $\Psi^* = \Psi|s(W): U \to W$ bire-birdir. Zira; $y \in W$ ve s tasviri (X, x_0) dan (P, y) ye taban noktalarını muhafaza eden sürekli tasvirlerin homotopi sınıfı olarak tarif edildiğinden, herhangi $\sigma_1, \sigma_2 \in s(W)$ için W de sırasıyla $y_1, y_2 \in W$ olan noktalar vardır $\ni$ $\sigma_1 = s(y_1) = [\Phi o f]_{y_1}$, $\sigma_2 = s(y_2) = [\Phi' o f]_{y_2}$

$$
\begin{tikzcd}
(X, x_o) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\Phi o f"'] & (P, p_o) \arrow[d, "\Phi"] \\
& (P, y_1)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(X, x_o) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\Phi' o f"'] & (P, p_o) \arrow[d, "\Phi'"] \\
& (P, y_2)
\end{tikzcd}
$$

Şimdi $\Psi^*(\sigma_1) = \Psi^*(\sigma_2)$ ise, bu demektir ki

$$\Psi^*(s(y_1)) = \Psi^*(s(y_2)) \Longrightarrow \Psi^*([\Phi o f]_{y_1}) = \Psi^*([\Phi' o f]_{y_2}) = y_1 = y_2,$$

dolayısıyla $\Phi \sim \Phi' \Longrightarrow \Phi o f \overset{l}{\sim} \Phi' o f \Longrightarrow [\Phi o f]_{y_1} = [\Phi' o f]_{y_2} = \sigma_1 = \sigma_2$

O halde Ψ^* bire-birdir.

2) $\Psi^* = \Psi|U: U \to W$ süreklidir. Zira; $\sigma \in U = s(W)$ herhangi bir elaman ve $\Psi^*(\sigma) = y \in W$ ve $V = V(y) \subset W$ herhangi bir cıvar olmak üzere $s(V) \subset U = s(W)$, σ nın bir cıvarıdır ve $\Psi^*(s(V)) = V \subset W$ dir. Dolayısıyla, Ψ^* süreklidir.

3) $\Psi^{*-1} = (\Psi|U)^{-1} = s: W \to U = s(W)$ süreklidir. Zira; $y \in W$ herhangi bir nokta, $s(y) = \sigma \in U$ ve $U' = U'(\sigma) \subset U$ de σ nın bir cıvarı ise, bu taktirde $(\Psi|U)(U') \subset W$, y nin W de bir cıvarıdır ve $s((\Psi|U)(U')) = U'$. O halde s süreklidir.

O halde aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 3.1.1. P, H grupları, $H(P) = \bigvee_{p \in P} [X; (P, p)]$ ve $\Psi: H(P) \to P \ni$ her $\sigma = [h]_p \in [X; (P, p)]$, $p \in P$ için

$\Psi(\sigma) = \Psi([h]_p) = p$, tabii tasviri olsun. Bu taktirde $H(P)$ üzerinde tabii bir topoloji varıdır $\ni$ bu topolojiye nazaran Ψ lokal topolojik bir tasvirdir ve $(H(P),\Psi)$ ikilisi bir demettir.

Tarif 3.1.1. Teorem 3.1.1. ile elde edilen $(H(P),\Psi)$ demetine P,H grubunun intac ettiği grupların demeti denir.

Tarif 3.1.2. Herbir $p \in P$ için $[X;(P,p)] = \Psi^{-1}(p)$ grubuna demetin p üzerindeki sapı denir.

Biliyoruzki $p \in P$ herhangi bir nokta ise, (P,p) noktalı topolojik uzayında, p yi ihtiva eden bir $W = W(p)$ açık cıvarı ve bu cıvar üzerinde $\Psi o s = 1_W'$ şartını sağlayan bir $s: W \to H(P)$ sürekli tasviri vardır. Bu s tasvirine H(P) nin W üzerindeki kesiti diyelim ve H(P) nin W üzerindeki bütün kesitlerinin cümlesinide $\Gamma(W,H(P))$ ile gösterelim.

Teorem 3.1.2. $(P,p_i), i \in I$ aynı homotopi tipinden noktalı topolojik uzayların H grupları, $(H(P),\Psi)$, P nin intac ettiği grupların demeti ve $\Gamma(W,H(P))$, W üzerindeki bütün kesitlerin cümlesi olsun. Bu taktirde $\Gamma(W,H(P))$ aşağıda tarifi verile (.) operasyonuna nazaran bir gruptur.

İspat: Herhangi $s_1, s_2 \in \Gamma(W,H(P))$ ve $y \in W$ için $\Gamma(W,H(P))$ deki çarpmayı $(s_1 . s_2)(y) = s_1(y) s_2(y)$ şeklinde tarif edelim. $s_1 . s_2 \in \Gamma(W,H(P))$ dir. Zira; $s_1, s_2 \in \Gamma(W,H(P))$ için $y \in W$ de $s_1(y) = [\Phi o f]_y = [h]_y$, $s_2(y) = [\Phi' o f]_y = [g]_y$ olsun. O halde

$$s_1(y) s_2(y) = [h]_y [g]_y = [\mu o(h,g)]_y \in [X;(P,y)] .$$

Dolayısıyla, $s_1 . s_2 \in \Gamma(W,H(P))$. (Bu çarpma iyi tariflidir, çünkü $h' \in [h]_y$, $g' \in [g]_y$ ise $h' \sim h$ ve $g' \sim g \Rightarrow [h']_y = [h]_y$ ve $[g']_y = [g]_y$. Dolayısıyla $[h']_y [g']_y = [\mu o(h',g')]_y = [\mu o(h,g)]_y$).

1) Asosyatiflik: Her $s_1, s_2 \in \Gamma(W,H(P))$ için $((s_1 . s_2) . s_3)(y) = (s_1 . s_2)(y) s_3(y) = (s_1(y) s_2(y)) s_3(y) \in [X;(P,y)]$. $[X;(P,y)]$ bir grup olduğundan $(s_1(y) s_2(y)) s_3(y) = s_1(y)(s_2(y) s_3(y))$. Dolayısıyla, $(s_1 . s_2) . s_3(y) = (s_1 . (s_2 . s_3))(y)$. Bu ise $(s_1 . s_2) . s_3 = s_1 . (s_2 . s_3)$ demektir. Yani çarpma operasyonu asosyatiftir.

2) Özdeş eleman: Her $s\in\Gamma(W,H(P))$ ve $y\in W$ için $[p]$, $[X;(P,y)]$ de özdeş eleman olmak üzere $I(y)=[1_p o p]_y=[p]_y$ şeklinde tarifli $I\in\Gamma(W,H(P))$ kesitini gözönüne alalım. Bu taktirde $(I.s)(y)=I(y)s(y)=[p]_y[\Phi of]_y=[p]_y[h]_y=[\mu o(p,h)]_y=[\mu o(c,1)oh]_y$.
Halbuki $\mu o(c,1)\sim 1_p$ olduğundan $\mu o(c,1)oh\sim 1_p oh=h$. O halde $[\mu o(c,1)oh]_y=[h]_y=s(y)$.Aynı şekilde $(s.I)(y)=s(y)I(y)=[\Phi of]_y[p]_y=[h]_y[p]_y=[\mu o(h,p)]_y=[\mu o(1,c)oh]_y$.
Halbuki,$\mu o(1,c)\sim 1_p$ olduğundan $\mu o(1,c)oh\sim 1_p oh=h$. O halde $[\mu o(1,c)oh]_y=[h]_y=s(y)$.Dolayısıyla $I\in\Gamma(W,H(P))$ de özdeş elemandir.

3) Ters eleman: $s\in\Gamma(W,H(P))$ herhangi bir kesit ve her $y\in W$ için $s(y)=[\Phi of]_y=[h]_y$ olsun.ϕ,P H grubunun homotopi inversi olmak üzere her $y\in W$ için $s^{-1}(y)=[\phi o\Phi of]_y=[\phi oh]_y$ şeklinde tarifli $s^{-1}:W\to H(P)$ tasvirini gözönüne alalım. $s^{-1}\in\Gamma(W,H(P))$ ve

$$(s.s^{-1})(y)=s(y)s^{-1}(y)=[\Phi of]_y[\phi o\Phi of]_y=[h]_y[\phi oh]_y$$
$$=[\mu o(h,\phi oh)]_y=[\mu o(1,\phi)oh]_y\,.$$

Halbuki,$\mu o(1,\phi)\sim c$ olduğundan $\mu o(1,\phi)oh\sim coh=p$. Binaenaleyh, $(s.s^{-1})(y)=s(y)s^{-1}(y)=[h]_y[\phi oh]_y=[\mu o(1,\phi)oh]_y=[p]_y=I(y)$.
Ayrica,
$(s^{-1}.s)(y)=s^{-1}(y)s(y)=[\phi oh]_y\,[h]_y=[\mu o(\phi oh,h)]_y=[\mu o(\phi,1)oh]_y$.
Halbuki $\mu o(\phi,1)\sim c$ olduğundan $\mu o(\phi,1)oh\sim coh=p$. Dolayısıyla $(s^{-1}.s)(y)=s^{-1}(y)s(y)=[\phi oh]_y[h]_y=[\mu o(\phi,1)oh]_y=[p]_y=I(y)$.
O halde, $s.s^{-1}=s^{-1}.s$. Dolayısıyla $s^{-1}\in\Gamma(W,H(P))$, s nin tersidir.

Binaenaleyh,verilen çarpma ile birlikte $\Gamma(W,H(P))$ bir gruptur.

3.2. Karakterizasyonlar

P_1, P_2 herhangi H grupları ve $H(P_1), H(P_2)$ sırasıyla mütekabil demetler olsun.Notasyon olarak bunu $(P_1, H(P_1))$ ve $(P_2, H(P_2))$ ile gösterelim.

Tarif 3.2.1. $(P_1, H(P_1))$ ve $(P_2, H(P_2))$ çiftleri verilmiş olsun.Bu çiftler arasında bir homomorfizm vardır denir ve $F=(\alpha^*, \alpha):(P_1, H(P_1)) \to (P_2, H(P_2))$ yazılır,şayet bir $F=(\alpha^*, \alpha)$ çifti varsa,öyleki:

1) $\alpha: P_1 \to P_2$ homomorfizmdir.
2) $\alpha^*: H(P_1) \to H(P_2)$ süreklidir.
3) α^*, α ya nazaran sapları muhafaza eder.Yani

$$\begin{tikzcd}
H(P_1) \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[d, "\Psi_1"'] & H(P_2) \arrow[d, "\Psi_2"] \\
P_1 \arrow[r, "\alpha"] & P_2
\end{tikzcd}$$

kare diagramı komutatiftir.

4) Her $p_1 \in P_1$ için $\alpha^* | H(P_1)_{p_1} : H(P_1)_{p_1} \to H(P_2)_{\alpha(p_1)}$ bir homomorfizmdir.

Tarif 3.2.2. $(P_1, H(P_1))$ ve $(P_2, H(P_2))$ çiftleri verilmiş olsun,öyleki $F=(\alpha^*, \alpha):(P_1, H(P_1)) \to (P_2, H(P_2))$ bir homomorfizmdir. $F=(\alpha^*, \alpha)$ ye bir izomorfizm denir,ve $(P_1, H(P_1)) \overset{F}{\simeq} (P_2, H(P_2))$ yazılır,şayet α^* ve α topolojik ise.

Bu taktirde $(P_1, H(P_1))$ ve $(P_2, H(P_2))$ çiftlerine izomorfiktirler denir.

Teorem 3.2.1. $(P_1, H(P_1))$ ve $(P_2, H(P_2))$ çiftleri verilmiş olsun.Şayet $\alpha: P_1 \to P_2$ bir homomorfizm olarak verilmiş ise,bu taktirde $(P_1, H(P_1))$ ve $(P_2, H(P_2))$ çiftleri arasında bir homomorfizm vardır.

İspat: $p_1 \in P_1$ keyfî sabit bir nokta olsun.Bu taktirde $\alpha(p_1) \in P_2$ ve $[X;(P_1, p_1)] = H(P_1)_{p_1} \subset H(P_1)$, $[X;(P_2, \alpha(p_1))] = H(P_2)_{\alpha(p_1)} \subset H(P_2)$ mütekabil saplardır.

Şimdi X herhangi bir noktalı topolojik uzay olmak üzere, taban noktaları sırasıyla p_1 ve $\alpha(p_1)$ olan (P_1,p_1), $(P_2,\alpha(p_1))$ H gruplarını gözönüne alalım. Şayet $f_1,g_1:(X,x_o)\to(P_1,p_1)$ taban noktalarını muhafaza eden sürekli tasvirler olarak alınırsa, bu taktirde $f_2,g_2:(X,x_o)\to(P_2,\alpha(p_1))$ taban noktalarını muhafaza eden sürekli tasvirleri $f_2=\alpha o f_1$ ve $g_2=\alpha o g_1$ şeklinde tarif edebiliriz. Yine $f_1\sim g_1 \text{rel}.x_o$ ise, kolaylıkla gösterilebilir ki $f_2\sim g_2 \text{rel}.x_o$. Dolayısıyla $[f]_{p_1}\longrightarrow[\alpha o f]_{\alpha(p_1)}$ tek anlamlıdır ve (X,x_o) dan (P_1,p_1) e taban noktalarını munafaza eden sürekli tasvirlerin homotopi sınıflarını, (X,x_o) dan $(P_2,\alpha(p_1))$ e taban noktalarını muhafaza edèn sürekli tasvirlèrin homotopi sınıflarına tasvir eder. Yani bu tekabüller $[f]_{p_1}$ elemanına birtek $[\alpha o f]_{\alpha(p_1)}$ elemanını karşılık tutarlar.

Şimdi $p_1\in P_1$ i serbest bırakırsak, bu taktirde bize bir $\alpha^*:H(P_1)\to H(P_2)$ tasvirini verir, öyleki her $[f]\in H(P_1)$ için $\alpha^*([f])=[\alpha o f]\in H(P_2)$

$$\begin{tikzcd}
H(P_1) \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[d, "\Psi_1"'] & H(P_2) \arrow[d, "\Psi_2"] \\
P_1 \arrow[r, "\alpha"] & P_2
\end{tikzcd}$$

1) α^* süreklidir. Zira; $U_2\subset H(P_2)$ herhangi bir açık cümle ise, gösterilebilir ki $\alpha^{*-1}(U_2)=U_1\subset H(P_1)$ bir açık cümledir. Gerçekten $U_2\subset H(P_2)$ bir açık cümle ise, $W_i\subset P_2$, $i\in I$ açık cıvarlar ve $s_i^2:W_i\to H(P_2)$ kesitler olmak üzere $U_2=\bigcup_{i\in I} s_i^2(W_i)$ ve $\Psi_2(U_2)=\bigcup_{i\in I} W_i$ dir. Dolayısıyla, $\bigcup_{i\in I} W_i\subset P_2$ açıktır ve α sürekli olduğundan $\alpha^{-1}(\bigcup_{i\in I} W_i)=\bigcup_{i\in I}\alpha^{-1}(W_i)\subset P_1$ açıktır. Ayrıca, yine α sürekli olduğundan $\alpha^{-1}(W_i)$, $i\in I$, P_1 de açık cıvarlardır ve $\exists s_i^1$, $i\in I$ kesitleri vardır, öyleki $\bigcup_{i\in I} s_i^1(\alpha^{-1}(W_i))\subset H(P_1)$ bir açık cümledir. Gösterelim ki

$U_1=\bigcup_{i\in I} s_i^1(\alpha^{-1}(W_i))$ dir.

Şimdi $\sigma_1=[f]_{p_1}\in U_1$ ise $\exists\sigma_2=[h]_{\alpha(p_1)}\in U_2 \ni \alpha^*(\sigma_1)=\sigma_2$.
$\Psi_2(\sigma_2)=\Psi_2([h]_{\alpha(p_1)})=\alpha(p_1)$. Dolayısıyla, $\exists\, i\in I$ için $\alpha(p_1)\in W_i$ ise,
$p_1\in\alpha^{-1}(W_i)$ ve $\sigma_1=[f]_{p_1}\in\bigcup_{i\in I} s_i^1(\alpha^{-1}(W_i))$. O halde
$U_1\subset\bigcup_{i\in I} s_i^1(\alpha^{-1}(W_i))$.

Diğer taraftan $\sigma_1\in\bigcup_{i\in I} s_i^1(\alpha^{-1}(W_i))\Rightarrow\exists\, i\in I$ için
$\sigma_1\in s_i^1(\alpha^{-1}(W_i))$. Burada $\sigma_1=[f]_{p_1}$ ise $\Psi_1(\sigma_1)=p_1$ ve αof,
$\alpha(p_1)\in W_i$ olmak üzere $(X,x_o)\to(P_2,\alpha(p_1))$ e taban noktalarını muhafaza eden sürekli bir tasvirdir. Dolayısıyla
$[\alpha of]_{\alpha(p_1)}=\sigma_2\in U_2$. Buradan $\sigma_1\in U_1$. O halde $\bigcup_{i\in I} s_i^1(\alpha^{-1}(W_i))\subset U_1$.
Binaenaleyh, $U_1=\bigcup_{i\in I} s_i^1(\alpha^{-1}(W_i))$ dir. Demek ki α^* süreklidir.

2) α^*, α ya nazaran sapları muhafaza eder, zira; her
$\sigma=[f]_{p_1}\in H(P_1)_{p_1}\subset H(P_1)$ için

$$(\alpha o\Psi_1)([f]_{p_1})=\alpha(\Psi([f]_{p_1}))=\alpha(p_1)$$
$$(\Psi_2 o\alpha^*)([f]_{p_1})=\Psi_2(\alpha^*([f]_{p_1}))=\Psi_2([\alpha of]_{\alpha(p_1)})=\alpha(p_1).$$

Dolayısıyla, α^*, α ya nazaran sapları muhafaza eder.

3) Her $p_1\in P_1$ için $\alpha^*|H(P_1)_{p_1}:H(P_1)_{p_1}\to H(P_2)_{\alpha(p_1)}$
bir homomorfizmdir. Gerçekten $p_1\in P_1$ için
$f_1,g_1:(X,x_o)\to(P_1,p_1)$ taban noktalarına muhafaza eden sürekli tasvirler ve $f_2=\alpha of_1, g_2=\alpha og_1:(X,x_o)\to(P_2,\alpha(p_1))$
mütekabil tasvirler ise, bu taktirde $[f_1]_{p_1}$, $[g_1]_{p_1}\in H(P_1)_{p_1}$,
$[\alpha of_1]_{\alpha(p_1)}$, $[\alpha og_1]_{\alpha(p_1)}\in H(P_2)_{\alpha(p_1)}$ dir.

Şimdi
$$\alpha^*([f_1]_{p_1}[g_1]_{p_1})=\alpha^*([\mu o(f_1,g_1)]_{p_1})$$
$$=[\alpha o\mu o(f_1,g_1)]_{\alpha(p_1)}.$$

Diğer taraftan

$$\alpha^*([f_1]_{p_1})\alpha^*([g_1]_{p_1})=[\alpha of_1]_{\alpha(p_1)}[\alpha og_1]_{\alpha(p_1)}=$$
$$[\mu' o(\alpha of_1,\alpha og_1)]_{\alpha(p_1)}=[\mu' o\alpha x\alpha o(f_1,g_1)]_{\alpha(p_1)}.$$

Halbuki α homomorfizm olduğundan $\mu' o \alpha x \alpha \sim \alpha o \mu$. Dolayısıyla $\alpha^*([f_1]_{P_1}[g_1]_{P_1}) = \alpha^*([f_1]_{P_1})\alpha^*([g_1]_{P_1})$ dir. Binaenaleyh $F=(\alpha^*,\alpha)$ ikilisi bir homomorfizmdir.

Şimdi, aşağıdaki teoremi ispat edebiliriz.

Teorem 3.2.2. $(P_1,H(P_1)),(P_2,H(P_2)),(P_3,H(P_3))$ çiftleri ve $\alpha_1:P_1 \to P_2$, $\alpha_2:P_2 \to P_3$ homomorfizmleri verilmiş olsun. Bu taktirde, bir $F=(\alpha^*,\alpha):(P_1,H(P_1)) \to (P_3,H(P_3))$ homomorfizmi vardır, öyleki $\alpha=\alpha_2 o \alpha_1$, $\alpha^* = \alpha_2^* o \alpha_1^*$.

İspat: $\alpha_2 o \alpha_1 : P_1 \to P_3$ homomorfizm olduğundan, Teorem 3.2.1 den dolayı $F=(\alpha^*,\alpha_2 o \alpha_1):(P_1,H(P_1)) \to (P_3,H(P_3))$ homomorfizmi vardır. $\alpha^* = \alpha_2^* o \alpha_1^*$ olduğunu gösterebilirsek ispat tamamlanmış olur. Bunun için ise herhangi bir $[f] \in H(P_1)$ için $\alpha^*([f]) = (\alpha_2^* o \alpha_1^*)([f])$ olduğunu göstermek kâfidir. Halbuki

$$\alpha^*([f]) = [\alpha o f] = [(\alpha_2 o \alpha_1) o f] = [\alpha_2 o (\alpha_1 o f)]$$
$$= \alpha_2^*([\alpha_1 o f]) = (\alpha_2^* o \alpha_1^*)([f]).$$

$\alpha^* = \alpha_2^* o \alpha_1^*$.

Şimdi,

$\mathcal{C}$: H grupları ve homomorfizmlerinin kategorisi,

$\mathcal{D}$: Demetler ve demet homomorfizmlerinin kategorisi

olsun.

Bir $T:\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tasvirini, her P ve $P_1 \xrightarrow{\alpha} P_2$ için $T(P) = H(P)$ ve $T(P_1 \xrightarrow{\alpha} P_2) = H(P_1) \xrightarrow{\alpha^*} H(P_2)$ şeklinde tarif edelim.

Kolaylıkla gösterebiliriz ki,

1) $P_1 = P_2$ ve $\alpha = 1_{P_1} \Longrightarrow T(1_{P_1}) = 1_{H(P_1)} = T(P_1)$.

Zira, $T(1_{P_1}) = (1_{P_1})^*$ ve her $[f] \in H(P_1)$ için

$(1_{P_1})^*([f]) = [1_{P_1} o f] = [f] \Rightarrow (1_{P_1})^* = 1_{H(P_1)} = T(P_1)$.

2) $\alpha_1 : P_1 \to P_2$ ve $\alpha_2 : P_2 \to P_3$ $\}$ $\alpha_2 o \alpha_1 : P_1 \to P_3$ ve α_1, α_2 homomorfizm olduğundan $\alpha_2 o \alpha_1$ de homomorfizmdir. Dolayısıyla, $T(\alpha_2 o \alpha_1) : H(P_1) \to H(P_3)$ bir homomorfizmdir. Halbuki, $T(\alpha_2 o \alpha_1) = (\alpha_2 o \alpha_1)^*$ ve Teorem 3.2.2 den dolayı $(\alpha_2 o \alpha_1)^* = \alpha_2^* o \alpha_1^* = T(\alpha_2) o T(\alpha_1)$.

Binaenaleyh, $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ bir kovaryant funktordur.

O halde Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2 birlikte funktoriyel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Teorem 3.2.3. H grupları ve homomorfizmleri kategorisinden, demetler ve demet homomorfizmleri kategorisine bir kovaryant funktor vardır, öyleki bu funktor X, herhangi bir noktalı topolojik uzay olmak üzere, bir H grubuna, bu H grubun intac ettiği grupların demetini, α homomorfizmine ise α^* demet homomorfizmini tahsis eder.

Teorem 3.2.4. $(P_1, H(P_1))$ ve $(P_2, H(P_2))$ çiftleri verilmiş olsun. Şayet $\alpha : P_1 \to P_2$ bir izomorfizm olarak verilmiş ise, bu taktirde $(P_1, H(P_1))$ ve $(P_2, H(P_2))$ çiftleri arasında bir izomorfizm vardır.

İspat: Bir kere, Teorem 3.2.1 de gösterdik ki $\alpha : P_1 \to P_2$ homomorfizm ise, bir $\alpha^* : H(P_1) \to H(P_2)$ sürekli tasviri vardır, öyleki $F = (\alpha^*, \alpha)$ çifti $(P_1, H(P_1)), (P_2, H(P_2))$ çiftleri arasında bir homomorfizmdir. Tarif 3.2.2 de gözönünde tutulacak olursa, $(P_1, H(P_1))$ ile $(P_2, H(P_2))$ çiftleri arasında bir izomorfizmin varlığını göstermek için α^* ın bire-bir ve α^{*-1} inde sürekli olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{tikzcd} H(P_1) \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[d, "\Psi_1"'] & H(P_2) \arrow[d, "\Psi_2"] \\ P_1 \arrow[r, "\alpha"] & P_2 \end{tikzcd}$$

α izomorfizm olduğundan α^{-1} homomorfizmdir.Zira; α homomorfizm olduğundan

$$\begin{tikzcd} P_1 x P_1 \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha x \alpha"'] & P_1 \arrow[d, "\alpha"] \\ P_2 x P_2 \arrow[r, "\mu'"] & P_2 \end{tikzcd}$$

$\mu' o (\alpha x \alpha) \sim \alpha o \mu$ dır. $\alpha o \mu o\ (\alpha^{-1} x \alpha^{-1}) \sim \mu' o (\alpha x \alpha) o (\alpha^{-1} x \alpha^{-1}) =$
$\mu' o 1_{(P_2 x P_2)} = \mu' \sim \alpha o \mu o\ (\alpha^{-1} x \alpha^{-1})$

$$\Longrightarrow \alpha^{-1} o \alpha o \mu o\ (\alpha^{-1} x \alpha^{-1}) \sim \alpha^{-1} o \mu'$$
$$1_{P_1}\ o \mu o (\alpha^{-1} x \alpha^{-1}) \sim \alpha^{-1} o \mu'$$
$$\mu o (\alpha^{-1} x \alpha^{-1}) \sim \alpha^{-1} o \mu'.$$

O halde Teorem 3.2.1 den dolayı α ve α^{-1} tasvirleri sırası ile $F = (\alpha^*, \alpha)$, $F^{-1} = ((\alpha^{-1})^*, \alpha^{-1})$ homomorfizmlerini istitac ederler.Ayrıca, $\alpha^{-1} o \alpha = 1_{P_1}$, $\alpha o \alpha^{-1} = 1_{P_2}$ olduğundan teorem 3.2.3 den dolayı

$$(1_{P_1})^* = 1_{H(P_1)}\ ,\ (1_{P_2})^* = 1_{H(P_2)}\ .$$

Herhangi $[f_1]$, $[g_1] \in H(P_1)$ için $\alpha^*([f_1]) = \alpha^*([g_1])$
$\Longrightarrow [f_2] = [g_2] \Longrightarrow (\alpha^{-1})^*([f_2]) = (\alpha^{-1})^*([g_2]) \Longrightarrow$
$(\alpha^{-1})^*(\alpha^*([f_1])) = (\alpha^{-1})^*(\alpha^*([g_1]))$. Halbuki,Teorem 3.2.3 den dolayı $(\alpha^{-1})^* o \alpha^* = (\alpha^{-1} o \alpha)^*$. Dolayısıyla $\alpha^{-1} o \alpha = 1_{P_1}$ olduğundan $(\alpha^{-1} o \alpha)^* = 1_{H(P_1)}$. O halde $[f_1] = [g_1]$ .Dolayısıyla α^* bire-birdir.Diğer taraftan $\alpha^{*-1} = (\alpha^{-1})^*$ olduğundan α^{*-1} süreklidir.

O halde $F = (\alpha^*, \alpha)$ bir izomorfizmdir.Aynı şekilde gösterilebilir ki, $F^{-1} = ((\alpha^{-1})^*, \alpha^{-1})$ de bir izomorfizmdir.

Teorem 3.2.5. $(P_1,H(P_1)),(P_2,H(P_2))$ çiftleri ve $\alpha_1,\alpha_2:P_1 \to P_2$ homomorfizmleri verilmiş olsun. Bu taktirde, mütekabil $F_1=(\alpha_1^*,\alpha_1)$ ve $F_2=(\alpha_2^*,\alpha_2)$ homomorfizmlerdeki $\alpha_1^*=\alpha_2^*$ dır yalnız ve yalnız $\alpha_1=\alpha_2$ ise.

İspat:

i) $\alpha_1=\alpha_2$ ise, açık olarak $\alpha_1^*=\alpha_2^*$ dır.

ii) $\alpha_1^*=\alpha_2^*$ olsun. Bu taktirde, her $[f]\in H(P_1)$ için $\alpha_1^*([f])=[\alpha_1 o f]$, $\alpha_2^*([f])=[\alpha_2 o f]$ ve $[\alpha_1 o f]=[\alpha_2 o f]$. O halde $f,(X,x_o)$ dan (P_1,p_1) noktalı topolojik uzayına, taban noktaları muhafaza eden sürekli bir tasvir olduğundan $\alpha_1 o f,(X,x_o)$ dan $(P_2,\alpha_1(p_1))$ e ve $\alpha_2 o f,(X,x_o)$ dan $(P_2,\alpha_2(p_1))$ e taban noktaları muhafaza eden sürekli tasvirlerdir. Halbuki $[\alpha_1 o f]=[\alpha_2 o f] \Longrightarrow \alpha_1(p_1)=\alpha_2(p_1)$ ve $\alpha_1 o f \sim \alpha_2 o f$ rel. $(\alpha_1(p_1))$. $p_1 \in P_1$ keyfî olduğundan $\alpha_1=\alpha_2$.

Not: Herhangi bir $p_1 \in P_1$ keyfî taban noktası için $\alpha_1^*|H(P_1)_{p_1}$ ve $\alpha_2^*|H(P_1)_{p_1}$ tasvirlerinin eşit olması için $\alpha_1 \sim \alpha_2$ rel. p_1 olması kâfidir. Zira; bu taktirde her $[f]\in H(P_1)_{p_1}$ için $\alpha_1 o f \sim \alpha_2 o f$ rel. $(\alpha(p_1))$. Dolayısıyla $\alpha_1^*([f])=\alpha_2^*([f])$.

REFERANSLAR

[1] C.Uluçay, Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri, K.T.Ü.Temel Bilimler Fakültesi Yayınları, 2.Baskı(1978).

[2] E.H.Spanier, Algebraic Topology,Mc Graw-Hill Publishing Company,Ltd.(1966).

[3] F.H Croom, Basic Concepts of Algebraic Topology Springer-Verlag,New York Heidelberg Berlin(1978).

[4] B.Gray, Homotopy Theory, Academic Press New York San Francisco London(1975).

[5] P.J.Hilton, An Introduction To Homotopy Theory, Cambridge University Press,(1953).

[6] R.C.Gunning,H.Rossi, Analytic of Several Complex Variables, Englewood Clıffs: N.J.Prentice-Hall (1965).

[7] H.Gaurent,K.Fritzsche, Sevreal Complex Varıables, Springer-Verlag,(1976).

[8] M.J.Greenberg, Lectures On Algebraic Topology,Northeastern University,(1967).

[9] C.Uluçay, Characterization of n-Dimensional Complex Manifolds,Journal of The Fac.Sc.of The K.T.Ü. Vol.II.Fasc.1 pp.1-15,(1979).

[10] ________, Global Formulation of Weierstrass Preparation Theorem,Journal of The Fac.Sc.of The K.T.Ü. Vol.III.,Fasc.4,(1980).

[11] ________, Restricted Sheaf Theory,Journal of the Fac.Sc.of The K.T.Ü. Vol.III.,Fasc.7,(1980).

[12] C.Uluçay, On Coherance Theorems And The Related Chomology Group,Journal of The Fac.Sc.of The K.T.Ü. Vol.III. Fasc.8,(1980).

[13] __________, On The Homology Group of The Complex Analytic Manifold, Communications, De La Faculté Des Sciences De L'Université D'Ankara,Serie A_1: Mathématiques Tome 30 (37-44),(1981).

[14] S.Balcı, The Sheaf of The Fundamental Groups, Communications,De La Facuté Des Sciences De L'Université D'Ankara,Série A_1:Mathématiques (1982)(Baskıda).

[15] J.P.Serre, Faisc Eaux Algebraiques Cohéerents,Ann. Vol.61., pp.197-278,(1955).

[16] Sze-Tsen Hu, Structure of the Homotopy Groups of Mapping Spaces,American Journal of math.Vol.LXX1,No:3, pp.574-586,(1949).