

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

KANAL YÜZEYLERİNİN GAUSS DÖNÜŞÜMÜ



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hilal ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Rifat GÜNEŞ

TEMMUZ 2022

**T.C
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

KANAL YÜZEYLERİNİN GAUSS DÖNÜŞÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Hilal ŞAHİN
(36193614053)**

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Rifat GÜNEŞ

TEMMUZ 2022

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitiminin boyunca engin bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan ve bu tez çalışmasını yöneten çok kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ'e ve tüm eğitim hayatım boyunca bana destek olan çok kıymetli aileme, sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



ONUR SÖZÜ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Kanal Yüzeylerinin Gauss Dönüşümü” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Hilal Şahin



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ	ii
ONUR SÖZÜ	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1 Öklid Uzayında Eğriler ve Yüzeyleer	4
2.2 Minkowski Uzayında Eğriler ve Yüzeyleer	17
3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KANAL YÜZEYLERİ.....	21
4. 3-BOYUTLU MINKOWSKİ UZAYINDA KANAL YÜZEYLERİ.....	47
KAYNAKLAR.....	67
ÖZGEÇMİŞ	69

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 : Kürelerin zarfı olarak kanal yüzeyi.....	1
Şekil 1.2 : Boru yüzeyi.....	1
Şekil 1.3 : Torus.....	2
Şekil 2.1 : Yüzey.....	6
Şekil 2.2 : Torus (Yönlendirilebilir yüzey).....	7
Şekil 2.3 : Mobius şeridi (Yönlendirilemez yüzey)..	8
Şekil 2.4 : Gauss dönüşümü.....	9
Şekil 2.5 : Hiperboloid (Negatif Gauss Eğriliği), Silindir (Sıfır Gauss Eğriliği), Küre (Pozitif Gauss Eğriliği).....	10
Şekil 2.6 : Ortalama eğriliği sabit yüzeyler: Küre, Silindir, Unduloid	10
Şekil 2.7 : Katenoid (Minimal yüzey).....	11
Şekil 3.1 : Yarıçapı $r(t)$ olan bir kanal yüzeyi.....	21
Şekil 3.2 : Tüp yüzeyi.....	22

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

E, F, G	: Birinci Temel Formun Bileşenleri
\mathbb{G}	: Gauss Dönüşümü
K	: Yüzeyin Gauss Eğriliği
L, M, N	: İkinci Temel Formun Bileşenleri
e, f, g	: Üçüncü Temel Formun Bileşenleri
Δ	: Laplace Operatörü
H	: Ortalama Eğriliği
E_1^3	: Minkowski Uzayı
E^3	: Öklid Uzayı
\mathbb{R}	: Reel Sayılar Kümesi
κ	: Eğrilik Fonksiyonu
τ	: Burulma Fonksiyonu
K_{II}	: İkinci Gauss Eğriliği
A_G	: Weingarten Tasviri

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KANAL YÜZEYLERİNİN GAUSS DÖNÜŞÜMÜ

HİLAL ŞAHİN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
MATEMATİK Anabilim Dalı

69+VIII sayfa

2022

Danışman: Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada, ilk önce Öklid uzayındaki kanal yüzeyleri hakkında bilgiler verilecek ve $\Delta\mathbb{G} = f(\mathbb{G} + C)$ koşulunu sağlayan bir M kanal yüzeyinin geometrisi incelenecektir. Burada \mathbb{G} , M yüzeyinin Gauss dönüşümü, f , M üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve C bir sabit vektördür. Daha sonra Öklid uzayında yapılan işlemlere benzer olarak Minkowski uzayında kanal yüzeylerinin Gauss dönüşümü hesaplanarak, yüzeyin Causal karakterlerine göre kanal yüzeylerinin sınıflandırmaları yapılacaktır.

Anahtar Kelimeler: Kanal yüzeyi, Gauss dönüşümü, Gauss eğriliği, Ortalama eğriliği

ABSTRACT

Master Thesis

GAUSSIAN MAP OF CHANNEL SURFACES

Hilal ŞAHİN

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

69+VIII sayfa

2022

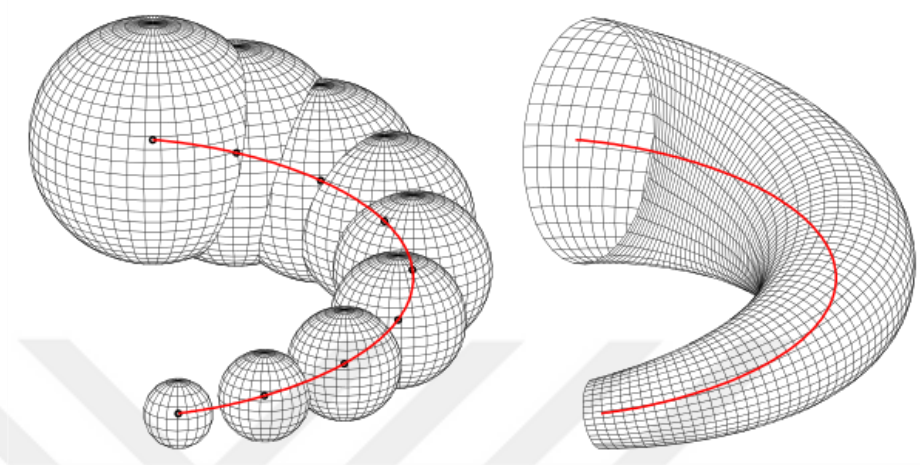
Supervisor: Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ

In this study, which is prepared as a master thesis, firstly, information about the channel surfaces in Euclidean space will be given and the geometry of an M channel surface satisfying the $\Delta\mathbb{G} = f(\mathbb{G} + C)$ condition will be examined. Here \mathbb{G} is the Gaussian map of the surface M , f is a differentiable function on M , and C is a constant vector. After then, similar to the operations performed in Euclidean space, the Gaussian map of the channel surfaces in Minkowski space will be calculated and classifications will be made according to the causal characters of the surface.

Keywords: Channel surfaces, Gaussian map, Gaussian curvature, Mean curvature

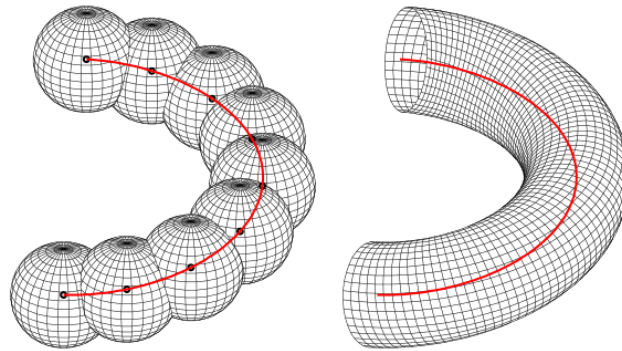
1. GİRİŞ

Kanal yüzeyleri, ilk olarak 1850 yılında Fransız matematikçi Gaspard Monge tarafından tanımlanmıştır. Değişken yarıçaplı hareketli bir kürenin zarfına kanal yüzeyi denir.



Şekil 1.1 Kürelerin zarfı olarak kanal yüzeyi.

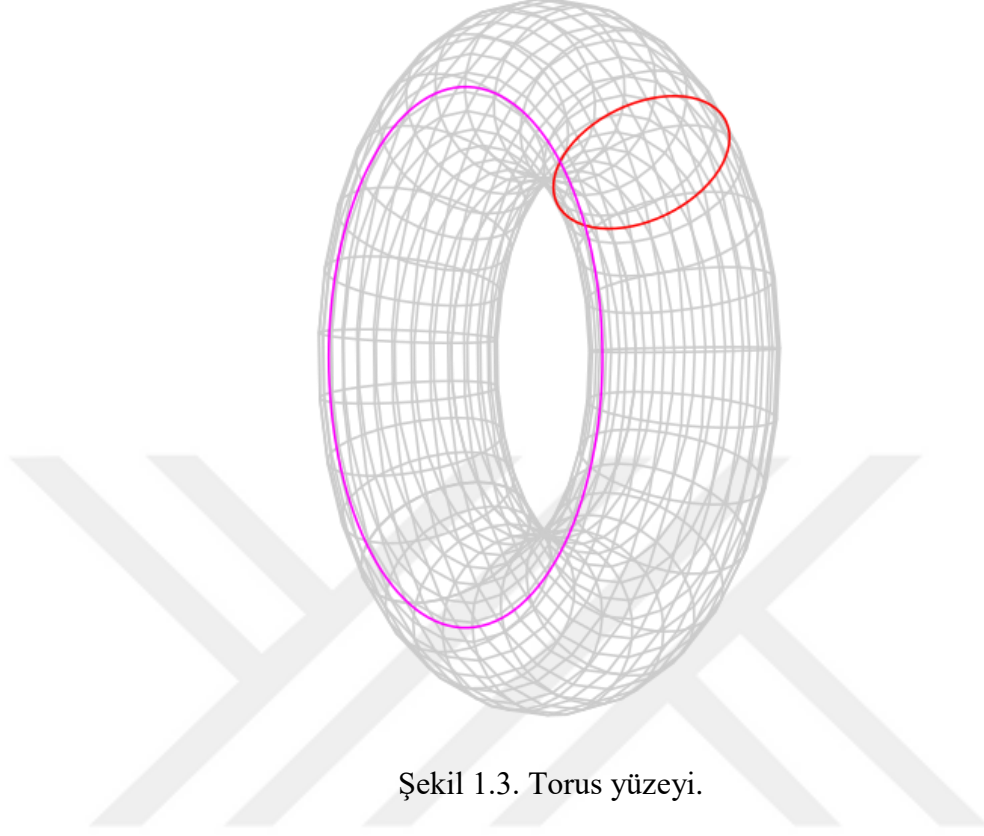
Bu kürelerin merkezlerinin yörüngesi bir helis ve yarıçap fonksiyonu sabit ise, meydana gelen yüzey helisel kanal yüzeyi, kürelerin merkezlerinin yörüngesi bir doğru ise, meydana gelen yüzey bir dönele yüzey olur. Kanal yüzeyini oluşturan hareketli kürenin yarıçap fonksiyonu sabit ise, kanal yüzeyine tüp ya da boru yüzeyi adı verilir.



Şekil 1.2 Boru yüzeyi.

Kanal yüzeyleri, günlük hayatta karşımıza çıkan boru, halat, direk ve 3-boyutlu dökümleri temsil etmede kullanılırlar. Yine kanal yüzeyleri, bilgisayar destekli tasarım ve

üretim için katıların ve yüzeylerin modellenmesinde de sıklıkla kullanılmaktadır. Temsili örnekler olarak, doğal kuadrikler, tüp yüzeyleri ve toruslar verilebilir.



Şekil 1.3. Torus yüzeyi.

Ayrıca kanal yüzeyleri uzun ve ince nesnelerin, insan iç organlarının yüzey modellenmesinde CAD/CAM ve grafiklerde oldukça sık kullanılmaktadır.

Kanal yüzeyleri ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda kanal yüzeylerinin Öklid uzay E^3 ve Minkowski uzay E_1^3 de kanal yüzeyleri ile ilgili özellikler farklı çatılar alınarak incelenmiş, kanal yüzeylerinin Gauss ve ortalama eğrilikleri ile ilgili bağıntılar elde edilmiştir.

Ayrıca 2016 yılında [13], 2018 yılında [18] ve 2019 yılında [20] numaralı çalışmalarda yazarlar Öklid uzayında ve Minkowski uzayında bir kanal yüzeyinin Gauss dönüşümü ve weingarten dönüşümünü hesaplayarak, bu yüzeyler ile ilgili sınıflandırmalar yapmıştır ve bazı karakterizasyonlar vermişlerdir.

Bu tez çalışmasında, kanal yüzeyleri ile ilgili çalışacaklar için bir kaynak oluşturulmaya çalışılmıştır. Öklid uzayında ve Minkowski uzayında bir M kanal yüzeyinin temel formları, Gauss dönüşümü hesaplanarak yüzeyin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği incelenmiş ve yüzey ile ilgili bir sınıflandırma yapılmıştır.

Birinci bölüm, giriş bölümüdür. Burada kanal yüzeyleri ile ilgili genel bilgiler verilmiştir

İkinci bölümde, tez çalışmasının daha iyi anlaşılabilmesi için Öklid ve Minkowski uzayında eğriler ve yüzeyler ile ilgili temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır ve iki alt kısma ayrılmıştır. Birinci alt kısımda tezin anlaşılması için E^3 de eğriler ve yüzeyler ile ilgili bilinen kavramlara ayrılmıştır. İkinci kısımda ise E_1^3 de eğriler ve yüzeylerle bilinen tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Öklid uzay E^3 de $\Delta G = f(G + C)$ şartını sağlayan kanal yüzeyleri incelenmiştir. Kanal yüzeyinin Gauss dönüşümü ayrıntılı bir şekilde hesaplanarak yüzeyin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Minkowski uzay E_1^3 de merkez eğrisinin birinci çeşit spacelike, ikinci çeşit spacelike, timelike ve null eğrisi olduğu kanal yüzeylerin Gauss dönüşümü üçüncü bölüme benzer şekilde hesaplanmış ve karakterizasyonlar verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm, iki alt kısma ayrılmıştır. Birinci alt kısımda tezin anlaşılması için E^3 de eğriler ve yüzeyler ile ilgili bilinen kavramlara ayrılmıştır. İkinci kısımda ise E_1^3 de eğriler ve yüzeylerle bilinen tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Öklid Uzayında Eğriler ve Yüzeyler

Tanım 2.1.1: $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere

$$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

olarak tanımlanan diferansiyellenebilir fonksiyona \mathbb{R}^3 uzayında bir eğri denir [1].

Tanım 2.1.2: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ bir eğri olmak üzere

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} \Big|_{\alpha(t_0)}$$

vektörüne $\alpha(t_0) \in I$ noktasında α nın teğet vektörü denir [3].

Tanım 2.1.3: Her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisine regüler eğri denir [1].

Tanım 2.1.4: Bir $t \in I$ için, $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler parametrik eğrisinin t_0 noktasından t noktasına kadar olan yay uzunluğu

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt$$

olarak verilir. Burada

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(\alpha'_1(t))^2 + (\alpha'_2(t))^2 + (\alpha'_3(t))^2}$$

ifadesine α eğrisinin uzunluğu(boyu) denir. Bu durumda s ye eğrinin yay parametresi adı verilir. Eğer $\|\alpha'(t)\| = 1$ ise α eğrisine birim hızlı eğri denir[1].

Tanım 2.1.5: \mathbb{R}^3 uzayında $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler bir eğri olsun. α diferansiyellenebilir olduğundan α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)$ türevlerinden bahsedebiliriz. $\|\alpha'(s)\| \neq 0$ olduğundan

$$t(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}$$

vektörüne α eğrisinin birim teğet vektör alanı,

$$b(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}$$

vektörüne α eğrisinin binormal vektör alanı denir.

$$n(s) = b(s) \wedge t(s)$$

vektörüne de α eğrisinin birim normal vektör alanı denir. $\{t(s), n(s), b(s)\}$ kümesine de α eğrisinin Frenet çatısı adı verilir. Diferansiyellenebilir bir eğrinin incelenmesinde eğrinin eğriliği ve burulması(torsiyonu) oldukça önemlidir. Buna göre eğrinin eğriliği ve burulmasını α eğrisinin türevleri cinsinden aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz

$$\kappa(s) = \frac{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3}$$

ve

$$\tau(s) = \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|^2}$$

dir [2].

Teorem 2.1.1: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet vektörleri ile bu vektörlerin türevleri arasında aşağıdaki bağıntı vardır

$$\begin{aligned}t' &= \kappa n \\n' &= -\kappa t + \tau b \\b' &= -\tau n\end{aligned}$$

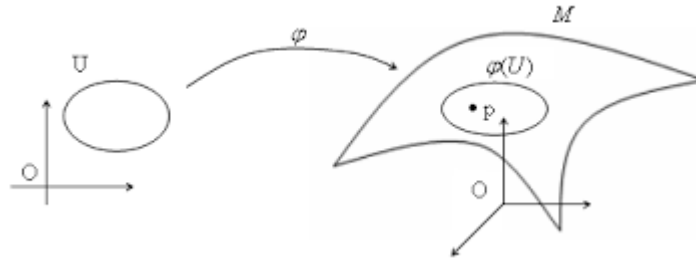
ya da Matris formunda

$$\begin{bmatrix}t' \\n' \\b'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \kappa & 0 \\-\kappa & 0 & \tau \\0 & -\tau & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}t \\n \\b\end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu bağıntılara Frenet formülleri adı verilir.

Tanım 2.1.6: \mathbb{R}^3 de bir küme M olsun. Her $p \in M$ noktasının bir komşuluğu V ve $U \subset \mathbb{R}^2$ bir açık alt küme verilsin. $f: U \rightarrow V \cap M$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa M ye bir regüler yüzey denir.

- i) f dönüşümü U üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, yani f nin her mertebeden kısmi türevleri var ve süreklidir.
- ii) f bir homeomorfizmdir. (f sürekli, bire bir, örten ve tersi de süreklidir.)
- iii) $\forall q \in U$ için $df_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferansiyeli bire-birdir [1].



Şekil 2.1. Yüzey

Örnek 2.1.1: $F: E^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$ dönüşümü diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$M = \{(x, y, z) \in E^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$$

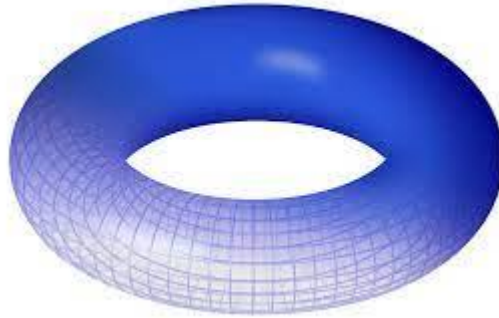
kümesi r yarıçaplı, merkezi orjin olan küre regüler bir yüzeydir [2].

Tanım 2.1.7: M bir regüler yüzey olsun. $P \in E^3$ noktasında E^3 uzayının $T_p(M)$ teğet düzlemine dik bir birim vektör vardır. Bu vektörlere p noktasındaki yüzeyin birim normal vektörü denir. p noktasından geçen ve p noktasındaki bir birim normal vektörü içeren doğruya p noktasındaki normal vektör alanı denir ve

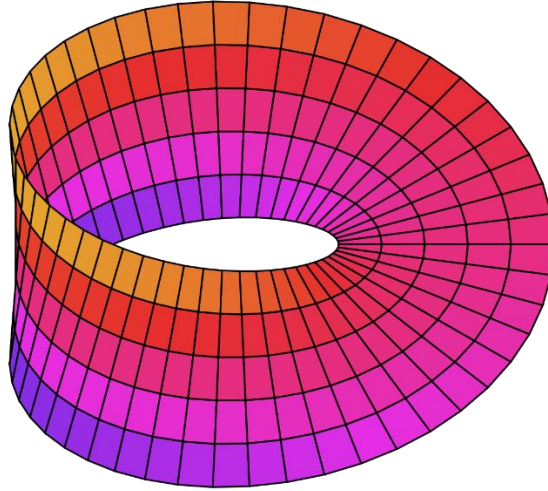
$$N(q) = \frac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|}(q)$$

şeklinde ifade edilir. Böylece diferansiyellenebilir bir $N: f(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümünü elde edilir. Bu dönüşüm her $q \in f(U)$ noktasına bir birim normal vektör karşılık getiriyorsa N dönüşümüne $f(U)$ üzerinde diferansiyellenebilir bir birim normal vektör alanıdır denir [1].

Tanım 2.1.8: E^3 Öklid uzayında bir yüzey M olsun. M üzerinde tanımlanan diferansiyellenebilir birim normal vektör alanına M yüzeyinin bir yönü denir. M yüzeyinde iki tane yön vardır. Bir yüzey üzerinde yön seçilmiş ise bu yüzeye yönlendirilmiş yüzey denir. Bunun yanında Mobius şeridi ve Klein şişesi gibi yüzeyler yönlendirilemezler. Bunlara da yönlendirilemez yüzeyler denir. [1].



Şekil 2.2. Torus (Yönlendirilebilir yüzey)



Şekil 2.3. Möbius şeridi (Yönlendirilemez yüzey)

Tanım 2.1.9: M , E^3 de $x(u,v)$ parametresiyle tanımlanan bir yüzey ve $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ birim küresi verilsin

$$N: M \rightarrow S^2 \subset E^3$$

$$p \rightarrow N(p) = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}$$

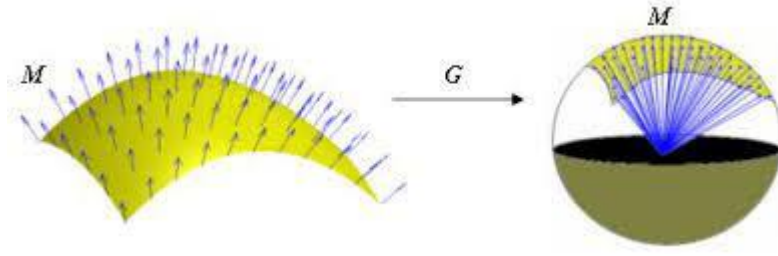
dönüşümüne M yüzeyinin Gauss Dönüşümü denir. Gauss dönüşümünün diferansiyellenebilir olduğu açıktır.

$$dN_p: T_p(M) \rightarrow T_{N(p)}(S^2)$$

türev dönüşümü bir lineer dönüşümdür. Yani $T_p(M)$ ile $T_{N(p)}(S^2)$ paralel düzlemlerdir[4]. E^3 de M bir yüzey ve M nin birim normal vektör alanı N olsun. $p \in M$ noktasında

$$dN_p(e_1) = -k_1 e_1, \quad dN_p(e_2) = -k_2 e_2$$

olacak şekilde $T_p(M)$ nin $\{e_1, e_2\}$ ortonormal bazı vardır. Burada k_1 ve k_2 p noktasında Gauss dönüşümünün ekstremum değerleridir. Ayrıca $k_1 \geq k_2$ dir[1].



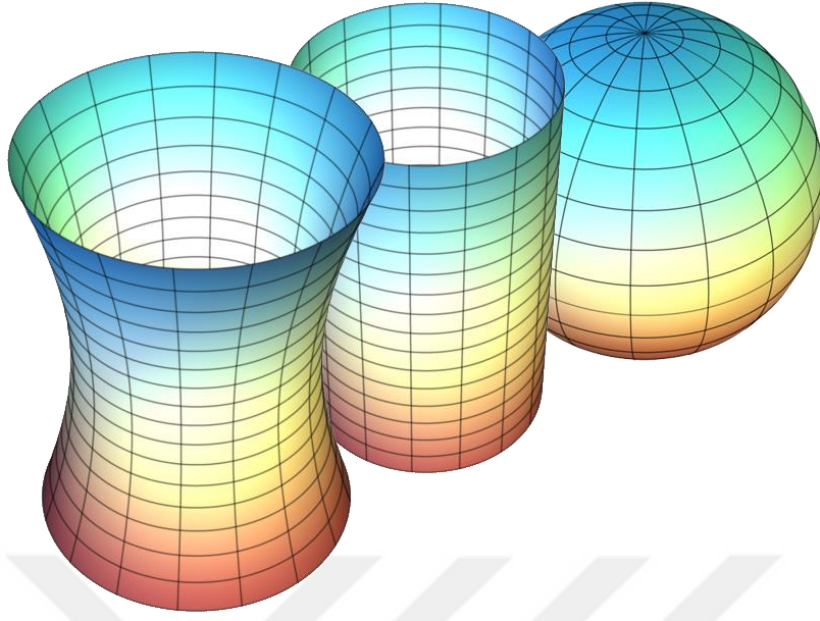
Şekil 2.4. Gauss dönüşümü

Tanım 2.1.10: E^3 de bir yüzey M olsun. dN_p değerine yüzeyin şekil operatörü denir ve S gösterilir. M nin bir p noktasına karşılık gelen $S(p)$ nin karakteristik değerine M nin bu noktadaki asli eğrilikleri denir ve k_1, k_2 ile gösterilir. Bu asli eğriliklere karşılık gelen vektörlere de M nin asli eğrilik doğrultuları denir. Buna göre M yüzeyinin şekil operatörünün matrisi

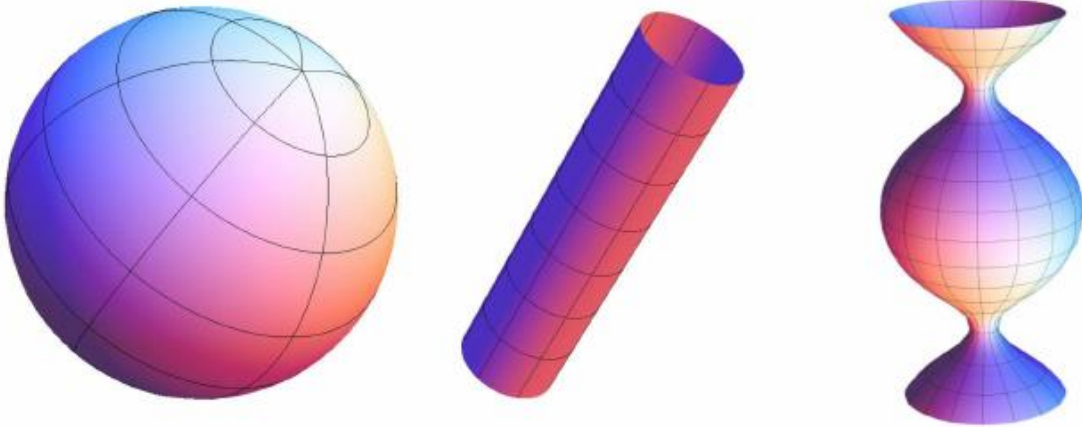
$$S(p) = \begin{vmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{vmatrix}$$

dir [1].

Tanım 2.1.11: E^3 de bir yüzey M ve M nin p noktasındaki şekil operatörü $S(p)$ olsun. $\det S(p) = k_1(p)k_2(p)$ değerine M yüzeyinin p noktasında Gauss eğriliği denir ve K ile gösterilir. $\text{iz}S(p) = \frac{k_1(p)+k_2(p)}{2}$ değerine de M yüzeyinin p noktasındaki ortalama eğriliği denir ve H ile gösterilir [1].

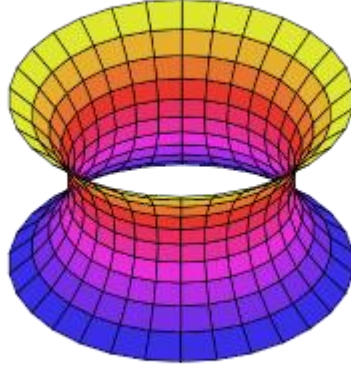


Şekil 2.5. Hiperboloid (Negatif Gauss Eğriliği), Silindir (Sıfır Gauss Eğriliği), Küre (Pozitif Gauss Eğriliği)



Şekil 2.6. Ortalama eğriliği sabit yüzeyler: Küre, Silindir, Unduloid.

Tanım 2.1.12: : E^3 de regüler bir yüzey M olsun. M nin her noktasında $H(p) = 0$ ise yüzeye minimal yüzey denir.[2].



Şekil 2.7. Katenoid (Minimal yüzey)

Tanım 2.1.13: M bir yüzey olsun. M yüzeyinin p noktasında Gauss eğriliği $K(p)$, ortalama eğriliği $H(p)$ ve asli eğrilikleri de sırasıyla $k_1(p)$, $k_2(p)$ olmak üzere p noktasına,

$K(p) > 0$	ise eliptik
$K(p) < 0$	ise hiperbolik
$K(p) = 0$ ve $H(p) \neq 0$	ise parabolik
$k_1(p) = k_2(p)$	ise umbilik
$k_1(p) = k_2(p) \neq 0$	ise doğrusal umbilik
$k_1(p) = k_2(p) = 0$	ise seviye

denir [3].

Tanım 2.1.14: $M \subset E^3$ de bir yüzey olsun. $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesini $C^\infty(M, \mathbb{R})$, M yüzeyinin vektör alanlarının kümesini de $\kappa(M)$ ile gösterelim.

$$\nabla f: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \kappa(M)$$

$$f \rightarrow \nabla f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

dönüşümüne M yüzeyinin gradient operatörü denir ve $\nabla f = \text{grad}f$ ile gösterilir. M üzerinde $\{x_1, x_2, x_3\}$ koordinat sistemini göz önüne alalım. Bu koordinat sistemine karşılık gelen $\kappa(M)$ nin ortonormal bazı $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$ olsun. $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$ ve $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ olmak üzere, M yüzeyinin gradient operatörünü

$$(\text{grad}f)^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$f \rightarrow \nabla f = \text{grad}(f) = \sum_{i=1}^3 g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

şeklinde ifade edebiliriz [4].

Tanım 2.1.15: E^3 de bir yüzey M ve $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ bir diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $X \in \kappa(M)$ vektör alanı $X = \sum_{i=1}^3 f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ve $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$ olmak üzere,

$$\text{div}: \kappa(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$: X \rightarrow \text{div}(X) = \langle \nabla, X \rangle = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

şeklinde tanımlanan operatöre, divergens operatörü denir [4].

Tanım 2.1.16: E^3 de bir yüzey M ve $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ bir diferansiyellenebilir fonksiyon olsun.

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad}f)$$

olarak tanımlanan

$$\Delta: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

operatöre f nin Laplace operatörü denir. M yüzeyinin lokal koordinat sistemi $\{x_1, x_2, x_3\}$ ve $x = (f_1, f_2, f_3) \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\nabla f = \text{grad}(f) = \left(g^{1j} \frac{\partial f}{\partial x_j}, g^{2j} \frac{\partial f}{\partial x_j}, g^{3j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

vektör alanı alınırsa

$$\Delta f = \text{div}(\nabla f) = \text{div}(X) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

veya $g^{ij} \neq g_{ij}$ olduğundan $\frac{\partial g^{ij}}{\partial x_i} = 0$ olacağından

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^3 g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

elde edilir. Buradan

$$\Delta f = g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

olarak alırsak

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

elde edilir[4].

Önerme 2.1.2: E^3 de bir yüzey M ve M nin Gauss eğriliği K , ortalama eğriliği H ve asli eğrilikleri sırasıyla k_1 ve k_2 olmak üzere

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \text{ ve } k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

bağıntıları vardır [4].

Tanım 2.1.17: E^3 de M yüzeyi

$$x: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow E^3$$

$$(u, v) \rightarrow x(u, v)$$

şeklinde parametrik olarak verilsin. M yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$E = \langle x_u, x_u \rangle$$

$$F = \langle x_u, x_v \rangle$$

$$G = \langle x_v, x_v \rangle$$

dir. M yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları da

$$e = \langle N, x_{uu} \rangle = \left\langle \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}, x_{uu} \right\rangle$$

$$f = \langle N, x_{uv} \rangle = \left\langle \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}, x_{uv} \right\rangle$$

$$g = \langle N, x_{vv} \rangle = \left\langle \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}, x_{vv} \right\rangle$$

ile verilir [5].

Teorem 2.1.2: $x: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ yüzeyi verilsin. x in Gauss ve ortalama eğrilikleri, birinci ve ikinci temel formları cinsinden

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

şeklinde yazılabilir[2].

Teorem 2.1.3: \mathbb{E}^3 de M yüzeyi $x(u, v)$ parametresiyle verilsin. M nin S şekil operatörü $\{x_u, x_v\}$ bazına göre aşağıdaki gibi elde edilir [6].

$$-S(x_u) = U_u = \frac{fF - eG}{EG - F^2} x_u + \frac{eF - fE}{EG - F^2} x_v$$

$$-S(x_v) = U_v = \frac{gF - fG}{EG - F^2} x_u + \frac{fF - gE}{EG - F^2} x_v.$$

İspat: x_u ile x_v lineer bağımsız olduklarından $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ fonksiyonları için,

$$-S(x_u) = U_u = a_{11}x_u + a_{12}x_v$$

$$-S(x_v) = U_v = a_{21}x_u + a_{22}x_v$$

denklemleri yazılabilir. Şimdi $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ katsayılarını hesaplayalım. Yukarıdaki denklemlerin sırasıyla x_u ve x_v ile çarpımı alınırsa,

$$-e = a_{11}E + a_{12}F$$

$$-f = a_{11}F + a_{12}G$$

$$-f = a_{21}E + a_{22}F$$

$$-g = a_{21}F + a_{22}G$$

elde edilir. Bu denklemler matris formunda yazılırsa,

$$-\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1}$$

bulunur. Burada

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}$$

olduğu için,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = -\frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} eG - fF & -eF + fE \\ fG - gF & -fF + gE \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad a_{12} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}$$

$$a_{21} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}$$

elde edilir.

Tanım 2.1.18: $F: E^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $F(x, y, z) = 0$ yüzeyini ele alalım. $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$F(x, y, z; \lambda) = 0$$

ise yüzeye 1-parametrelî yüzey ailesi denir. $k \geq 2$ için F, \mathbb{C}^k sınıfından olmak üzere

$$\frac{\partial F(x, y, z; \lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler λ ya göre çözülür ve λ yok edilirse $G(x, y, z) = 0$ yüzeyi elde edilir. Bu yüzeye λ parametresine göre yüzey ailesinin zarfı denir[7].

2.2. Minkowski Uzayında Eğriler ve Yüzeyler

Tanım 2.2.1: $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$: (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

olarak tanımlanan fonksiyona Lorentz metriği denir ve E_1^3 ile gösterilir[8].

Tanım 2.2.2: E_1^3 Minkowski uzayında herhangi bir vektör $x = (x_1, x_2, x_3)$ olmak üzere

- i) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ veya $\vec{x} = 0$ oluyorsa x vektörüne spacelike vektör,
- ii) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ ise x vektörüne timelike vektör,
- iii) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ veya $\vec{x} \neq 0$ ise x vektörüne null(lightlike) vektör

denir.

Teorem 2.2.1: E_1^3 uzayında spacelike, timelike ve null vektörleri arasında aşağıdaki bağıntı vardır:

- i) İki timelike vektör asla ortogonal olamaz,
- ii) Bir timelike vektör, bir null vektöre asla ortogonal olamaz,
- iii) İki null vektör ortogondur ancak ve ancak bu vektörler lineer bağımlıdır[9].

Tanım 2.2.3: E_1^3 uzayında $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ olsun. E_1^3 uzayında vektörel çarpım

$$a \wedge b = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

veya

$$a \wedge b = \begin{vmatrix} e_1 & -e_2 & -e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E_1^3$ için

- i) $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$,
 - ii) $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) + (\vec{a} \wedge \vec{c})$,
 - iii) $\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0$,
 - iv) $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = -\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{b} \wedge \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c} \rangle$,
 - v) $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = -\langle \vec{a} \wedge \vec{c} \rangle \vec{b} + \langle \vec{b} \wedge \vec{c} \rangle \vec{a}$,
 - vi) $\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c} \rangle = -\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$,
 - vii) $\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{x} \wedge \vec{y} \rangle = - \begin{vmatrix} \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle \\ \langle \vec{a}, \vec{y} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{y} \rangle \end{vmatrix} = -\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle \langle \vec{b}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{y} \rangle \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle$
- (E_1^3 de bir Lagrange özdeşliği)
- viii) $\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b} \rangle = -\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a} \wedge \vec{b} \rangle^2$,
 - ix) $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})(\vec{x}\vec{y}\vec{z}) = - \begin{vmatrix} \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle & \langle \vec{c}, \vec{x} \rangle \\ \langle \vec{a}, \vec{y} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{y} \rangle & \langle \vec{c}, \vec{y} \rangle \\ \langle \vec{a}, \vec{z} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{z} \rangle & \langle \vec{c}, \vec{z} \rangle \end{vmatrix}$,
 - x) $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}$ ve \vec{b} nın lineer bağımlı olmasıdır[2].

Tanım 2.2.4: $\alpha: I \rightarrow E_1^3$, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ diferansiyellenbilir fonksiyonuna E_1^3 uzayında bir eğri denir.

$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t))$ olmak üzere spacelike, timelike ve null eğrileri aşağıdaki şartları sağlar[8]:

- i) $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle > 0$ ise α ya spacelike,
- ii) $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle < 0$ ise α ya timelike,
- iii) $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 0$ ise α ya null eğri denir.

Tanım 2.2.5: E_1^3 Minkowski uzayında diferansiyellenebilir birim hızlı bir eğri α olsun.

$T = \alpha'(s)$ vektörüne birim teğet vektör alanı, $N = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ vektörüne asli normal vektör alanı ve $B = T \wedge N$ vektörüne de binormal vektör alanı denir. $\kappa = \|\alpha''\|$ fonksiyonuna eğrinin eğriliği adı verilir. Yukarıda tanımlanan T, N, B vektörleri ile türevleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$T' = \alpha'' = \kappa N$$

$$N' = \langle N', T \rangle T + \langle N', N \rangle N + \langle N', B \rangle B = -\kappa T + \tau B$$

$$B' = \langle B', T \rangle T + \langle B', N \rangle N + \langle B', B \rangle B = -\tau N$$

Burada, $\tau = \langle N', B \rangle$ fonksiyonuna α nın burulması denir. Bu denklemlere Minkowski uzayında Frenet formülleri denir. Yukarıdaki bağıntıları matris formunda,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır[10].

Tanım 2.2.6: E_1^3 uzayında

$$S_1^2 = \{X \in E_1^3 \mid \langle X, X \rangle = 1\}$$

kümesine pseudo-küre,

$$H^2 = \{X \in E_1^3 \mid \langle X, X \rangle = -1\}$$

kümesine de hiperbolik uzay adı verilir[8].

Tanım 2.2.7: M , E_1^3 uzayında bir yüzey olsun. M nin Gauss eğriliği K ve birinci temel formun katsayıları E, F ve G olmak üzere

$$K = \frac{1}{|EG - F^2|^2} \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v & 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F & \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G & \frac{1}{2}G_u & F & G \end{array} \right\}$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntıya E_1^3 de Brioschi formülü denir[10].

Tanım 2.2.16: M , E_1^3 de açılabilir olamayan bir yüzey olsun. M nin ikinci Gauss eğriliği K_{II} , M nin ikinci temel formun katsayıları olan e, f , ve g cinsinden aşağıdaki şekilde yazılır:

$$K_{II} = \frac{1}{|eg - f^2|^2} \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} f_{uv} - \frac{1}{2}e_{vv} - \frac{1}{2}g_{uu} & \frac{1}{2}e_u & f_u - \frac{1}{2}e_v & 0 & \frac{1}{2}e_v & \frac{1}{2}g_u \\ f_v - \frac{1}{2}g_u & e & f & \frac{1}{2}e_v & e & f \\ \frac{1}{2}g_v & f & g & \frac{1}{2}g_u & f & g \end{array} \right\}$$

bu formüle M yüzeyi K_{II} için Brioschi formülü adı verilir[10].



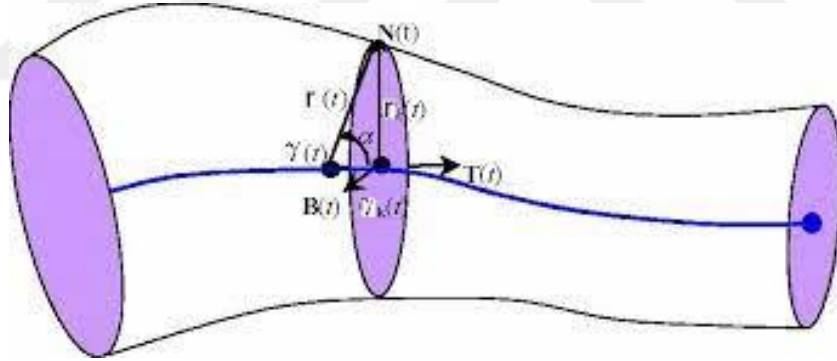
3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KANAL YÜZEYLERİ

Bu bölümde Öklid uzay E^3 de Frenet çatisı yardımıyla elde edilen kanal yüzeyinin parametrizasyonu ve kanal yüzeyinin bazı geometrik özellikleri incelenmiştir.

E^3 de $c(s)$ merkez eğrisiyle elde edilen $x(s, \theta)$ kanal yüzeyi, yarıçap fonksiyonu $r(s)$ olan kürelerin birleşimidir. Eğer $r(s)$ sabit ise boru yüzeyi (tüp) elde edilir. Bunlar şekillerin yapılandırılmasında veya robotların hareket çizgilerinin planlanmasında kullanılır.

Kanal yüzeyleri uzun ince nesnelere, insan iç organlarını göstermekte, yüzey modellenmesinde, CG/CAD, CAD ve grafiklerde fayda sağlar [11,12].

Tanım 3.1(Kanal Yüzeyi): E^3 de kanal yüzeyi 1-parametrelili küre ailesinin zarfı olarak tanımlanır ya da , kürelerin merkez noktalarının geometrik yeri olan $C(t)$ eğrisi ve kürenin yarıçap fonksiyonu $r(t)$ olan değişken yarıçaplı hareketli bir kürenin zarfı olarak tanımlanır [9].



Şekil 3.1. Yarıçapı $r(t)$ olan bir kanal yüzeyi.

Tanım 3.2: $S^2(t)$ kürelerinin merkezlerinin yörüngesi olan $C(t)$ eğrisine kanal yüzeyinin merkez eğrisi ya da spine eğrisi, $r = r(t)$ fonksiyonuna ise kanal yüzeyinin yarıçap fonksiyonu denir [6].

Teorem 3.1: M kanal yüzeyi katenoid olması için gerek yeter şartı minimal olmasıdır.[13]

Tanım 3.3: Bir $c(s)$ merkez eğrisi etrafında genelleştirilmiş tüpün parametrizasyonu

$$x(s, \theta) = c(s) + u(\theta)(\cos \theta n(s) + \sin \theta b(s)), 0 \leq \theta < 2\pi$$

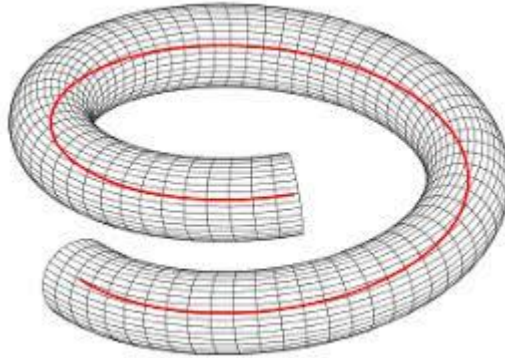
şeklindedir. Burada $u(\theta) (> 0)$ iki kez türevlenebilir bir fonksiyon ve $u(\theta) = u(2\pi)$ dir [14].

3-boyutlu Öklid uzay E^3 de bir M kanal yüzeyi $\theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in [0, \pi)$ ve $\varphi(s)$ bir diferansiyellenebilir fonksiyon için $-r'(s) = \cos\varphi$ olmak üzere

$$x(s, \theta) = c(s) + r(s) \{ \sin\varphi(s)\cos\theta N(s) + \sin\varphi(s)\sin\theta B(s) + \cos\varphi(s) T(s) \} \quad (3.1)$$

şeklinde verilir. Burada $c(s)$ eğrisi yay uzunluğu s ile parametreleştirilmiş merkez eğrisidir ve $r(s)$ ise M nin yarıçap fonksiyonudur. Ayrıca $\{T, N, B\}$ vektör alanı üçlüsüne $c(s)$ eğrisi üzerindeki Frenet çatısı denir ve sırasıyla teğet vektör alanı, asli normal vektör alanı ve binormal vektör alanı olarak adlandırılır [13].

Sonuç 3.1: Eğer $c(s)$ bir doğru olarak alınırsa M bir dönel yüzey olur. Ayrıca $r(s)$ sabit ise o zaman M yüzeyi bir tüptür (veya boru yüzeyidir).



Şekil 3.2. Tüp yüzeyi

Şimdi (3.1) ile adlandırılan kanal yüzeyini Frenet elemanları yardımı ile, yüzeyin gauss dönüşümünü ve Weingarten dönüşümüne karşılık gelen matrisi hesaplayalım:

(3.1) denkleminin s ye göre kısmi türevi,

$$x_s = \frac{\partial x}{\partial s} = c' + r' \sin \varphi \cos \theta N + r' \sin \varphi \sin \theta B + r' \cos \varphi T + r \cos \varphi \varphi' \cos \theta N \\ + r \cos \varphi \varphi' \sin \theta B - r \sin \varphi \varphi' T + r \sin \varphi \cos \theta N' + r \sin \varphi \sin \theta B' + r \cos \varphi T'$$

dir. T' , N' , B' değerleri yerine yazılırsa,

$$= T + r' \sin \varphi \cos \theta N + r' \sin \varphi \sin \theta B + r' \cos \varphi T + r \cos \varphi \varphi' \cos \theta N \\ + r \cos \varphi \varphi' \sin \theta B - r \sin \varphi \varphi' T - r \kappa \sin \varphi \cos \theta T + r \tau \sin \varphi \cos \theta B + r \kappa \cos \varphi N - r \tau \sin \varphi \sin \theta N$$

veya

$$= (\sin^2 \varphi - r r'' - r \kappa \sin \varphi \cos \theta) T \\ + (r' \sin \varphi \cos \theta - r r' \kappa - r \tau \sin \varphi \sin \theta - r r' \varphi' \cos \theta) N \\ + (r' \sin \varphi \sin \theta + r \tau \sin \varphi \cos \theta - r r' \varphi' \sin \theta) B$$

elde edilir. Burada

$$x_s^1 = \sin^2 \varphi - r r'' - r \kappa \sin \varphi \cos \theta \\ x_s^2 = r' \sin \varphi \cos \theta - r r' \kappa - r \tau \sin \varphi \sin \theta - r r' \varphi' \cos \theta \\ x_s^3 = r' \sin \varphi \sin \theta + r \tau \sin \varphi \cos \theta - r r' \varphi' \sin \theta \quad (3.2)$$

denilirse,

$$x_s = \frac{\partial x}{\partial s} = x_s^1 T + x_s^2 N + x_s^3 B$$

olarak ifade edilebilir.

Şimdi de (3.1) in θ ya göre kısmi türevini hesaplayalım;

$$x_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \varphi \sin \theta N + r \sin \varphi \cos \theta B$$

olarak bulunur. Burada,

$$\begin{aligned}x_{\theta}^1 &= -r\sin\varphi\sin\theta, \\x_{\theta}^2 &= r\sin\varphi\cos\theta\end{aligned}\quad (3.3)$$

denilirse;

$$x_{\theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} = x_{\theta}^1 N + x_{\theta}^2 B$$

olarak ifade edilebilir. x_s ve x_{θ} bağıntıları yardımıyla yüzeyin birinci temel formunun katsayıları aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}E = g_{11} = \langle x_s, x_s \rangle &= \sin^2\varphi\sin^2\theta - rr''\sin^2\varphi - r\kappa\sin\varphi\sin^2\theta\cos\theta - rr''\sin^2\varphi + r^2r''^2 \\&+ r^2r''\kappa\sin\varphi\cos\theta - r\kappa\sin\varphi\sin^2\theta\cos\theta + r^2r''\kappa\sin\varphi\cos\theta + r^2\kappa^2\sin^2\theta \\&+ r'^2\sin^2\varphi\cos^2\theta - rr'^2\kappa\sin\varphi\cos\theta \\&- rr'\tau\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta - rr'^2\varphi'\sin\varphi\cos^2\theta - rr'^2\kappa\sin\varphi\cos\theta + r^2r'^2\kappa^2 \\&+ r^2r'\kappa\tau\sin\varphi\sin\theta + r^2r'^2\kappa\varphi'\cos\theta - rr'\tau\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta \\&+ r^2r'\kappa\tau\sin\varphi\sin\theta + r^2\tau^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2r'\tau\varphi'\sin\varphi\sin\theta\cos\theta \\&- rr'^2\varphi'\sin\varphi\cos^2\theta + r^2r'^2\varphi'\kappa\cos\theta + r^2r'\tau\varphi'\sin\varphi\sin\theta\cos\theta \\&+ r^2r'^2\varphi'^2\cos^2\theta + r'^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + rr'\tau\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta \\&- rr'^2\varphi'\sin\varphi\sin^2\theta + rr'\tau\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta + r^2\tau^2\sin^2\varphi\cos^2\theta \\&- r^2r'\tau\varphi'\sin\varphi\sin\theta\cos\theta - rr'^2\varphi'\sin\varphi\sin^2\theta - r^2r'\tau\varphi'\sin\varphi\sin\theta\cos\theta \\&+ r^2r'^2\varphi'^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= r^2\kappa^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + r^2r'^2\kappa^2 + r^2\tau^2\sin^2\varphi + r^2\varphi'^2 + 2r^2\kappa\varphi'\cos\theta + 2r^2r'\kappa\tau\sin\varphi\sin\theta \\&- 2rr'' - 2r\kappa\sin\varphi\cos\theta + \sin^2\varphi\end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned}E &= r^2(\kappa^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + r'^2\kappa^2 + \tau^2\sin^2\varphi + \varphi'^2 + 2\kappa\varphi'\cos\theta \\&+ 2r'\kappa\tau\sin\varphi\sin\theta) - (2rr'' + 2r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)\end{aligned}\quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}F = g_{12} = \langle x_s, x_{\theta} \rangle &= -rr'\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta + r^2r'\kappa\sin\varphi\sin\theta \\&+ r^2\tau\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2\varphi'r'\sin\varphi\sin\theta\cos\theta + rr'\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta \\&+ r^2\tau\sin^2\varphi\cos^2\theta - r^2r'\varphi'\sin\varphi\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

dir. İşlemler yapılırsa

$$F = r^2\tau\sin^2\varphi + r^2r'\kappa\sin\varphi\sin\theta \quad (3.5)$$

bulunur.

$$G = g_{22} = \langle x_\theta, x_\theta \rangle = r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta = r^2\sin^2\varphi. \quad (3.6)$$

dır. Buradan

$$EG - F^2 = \|x_s \times x_\theta\|^2 = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 = r^2(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)^2 > 0$$

olduğundan

$$\|x_s \times x_\theta\| = \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} = r(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)$$

olur. Böylece (3.2) bağıntısından M nin \mathbb{G} Gauss dönüşümünü hesaplayabiliriz:

$$x_s \times x_\theta = \begin{bmatrix} T & N & B \\ x_s^1 & x_s^2 & x_s^3 \\ 0 & x_\theta^1 & x_\theta^2 \end{bmatrix} = (x_s^2x_\theta^2 - x_s^3x_\theta^1)T + (-x_s^1x_\theta^2)N + (x_s^1x_\theta^1)B$$

dır. Bu eşitlikte (3.2) ve (3.3) değerleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} (x_s^2x_\theta^2 - x_s^3x_\theta^1) &= rr'\sin^2\varphi\cos^2\theta - r^2r'\kappa\sin\varphi\cos\theta - r^2\tau\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta \\ &\quad - r^2\varphi'r'\sin\varphi\cos^2\theta + rr'\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2\tau\sin^2\varphi\cos\theta - r^2r'\varphi'\sin\varphi\sin^2\theta \\ &= rr'\sin^2\varphi - r^2r'\varphi'\sin\varphi - r^2r'\kappa\sin\varphi\cos\theta \\ &= -rr'(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-x_s^1x_\theta^2) &= -r\sin\varphi\cos\theta(\sin^2\varphi - rr'' - r\kappa\sin\varphi\cos\theta) \\ &= -r\sin^3\varphi\cos\theta - r^2r''\sin\varphi\cos\theta + r^2\kappa\sin^2\varphi\cos^2\theta \\ &= r\sin\varphi\cos\theta(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x_s^1x_\theta^1) &= -r\sin\varphi\sin\theta(\sin^2\varphi - rr'' - r\kappa\sin\varphi\cos\theta) \\ &= r\sin\varphi\sin\theta(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece M kanal yüzeyinin \mathbb{G} Gauss dönüşümü:

$$\begin{aligned}\mathbb{G} &= \frac{\mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_\theta}{\|\mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_\theta\|} \\ &= \frac{(-rr')(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)T + (r\sin\varphi\cos\theta)(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)N}{r(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)} \\ &\quad + \frac{r\sin\varphi\sin\theta(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)B}{r(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)}\end{aligned}$$

veya

$$\mathbb{G} = \frac{\mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_\theta}{\|\mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_\theta\|} = (\cos\varphi)T + (\sin\varphi\cos\theta)N + (\sin\varphi\sin\theta)B \quad (3.7)$$

olarak bulunur. Şimdi M nin ikinci temel formlarını hesaplayalım. Bunun için \mathbb{G} Gauss dönüşümünün s ve θ ya göre kısmi türevleri,

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_s &= -\varphi'\sin\varphi T + \cos\varphi T' + \cos\varphi\varphi'\cos\theta N + \sin\varphi\cos\theta N' + \cos\varphi\varphi'\sin\theta B \\ &\quad + \sin\varphi\sin\theta B'\end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_s &= -(r'' + \kappa\sin\varphi\cos\theta)T - (r'\kappa + r'\varphi'\cos\theta + \tau\sin\varphi\sin\theta)N \\ &\quad + (\tau\sin\varphi\cos\theta - r'\varphi'\sin\theta)B\end{aligned}$$

ve

$$\mathbb{G}_\theta = (-\sin\varphi\sin\theta)N + (\sin\varphi\cos\theta)B.$$

dır. Böylece M nin ikinci temel formlarını L , M ve N ile gösterirsek,

$$\begin{aligned}L = -\langle \mathbf{x}_s, \mathbb{G}_s \rangle &= -r(\kappa^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + r'^2\kappa^2\tau^2\sin^2\varphi + \varphi'^2 + 2\kappa\varphi'\cos\theta \\ &\quad + 2r'\kappa\tau\sin\varphi\sin\theta) + r'' + \kappa\sin\varphi\cos\theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M = -\langle \mathbf{x}_\theta, \mathbb{G}_s \rangle &= -(-r'\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta + rr'\kappa\sin\varphi\sin\theta - rr'\varphi'\sin\varphi\sin\theta\cos\theta \\ &\quad + r\tau\sin^2\varphi\sin^2\theta + rr'\varphi'\sin\varphi\sin\theta\cos\theta + r'\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta + r\tau\sin^2\varphi\cos^2\theta) \\ &= -r\tau\sin^2\varphi - rr'\kappa\sin\varphi\sin\theta\end{aligned}$$

ve

$$N = -\langle \mathbf{x}_\theta, \mathbb{G}_\theta \rangle = -(r\sin^2\varphi\sin^2\theta + r\sin^2\varphi\cos^2\theta) = -r\sin^2\varphi$$

şeklinde olur. Ayrıca yüzeyin üçüncü temel formunun katsayıları da aşağıdaki gibidir:

$$e = \langle \mathbb{G}_s, \mathbb{G}_s \rangle = r'^2 + \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + 2r'' \kappa \sin \varphi \cos \theta + r'^2 \kappa^2 + r'^2 \varphi'^2 \cos^2 \theta \\ + \tau^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + 2r'^2 \kappa \varphi' \cos \theta + 2r' \kappa \tau \sin \varphi \sin \theta \cos \theta + \tau^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \\ + r'^2 \varphi'^2 \sin^2 \theta - 2r' \tau \varphi' \sin \varphi \sin \theta \cos \theta$$

veya

$$e = \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r'^2 \kappa^2 + \tau^2 \sin^2 \varphi + \varphi'^2 + 2\kappa \varphi' \cos \theta + 2r' \kappa \tau \sin \varphi \sin \theta$$

dir.

$$f = r' \kappa \sin \varphi \sin \theta + r' \varphi' \sin \varphi \sin \theta \cos \theta + \tau \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \tau^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \\ - r' \varphi' \sin \varphi \sin \theta \cos \theta$$

veya

$$f = \langle \mathbb{G}_\theta, \mathbb{G}_s \rangle = \tau \sin^2 \varphi + r' \kappa \sin \varphi \sin \theta$$

dir. Buradan da

$$g = \langle \mathbb{G}_\theta, \mathbb{G}_\theta \rangle = (-\sin \varphi \sin \theta)(-\sin \varphi \sin \theta) + (\sin \varphi \cos \theta)(\sin \varphi \cos \theta) \\ = \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta$$

veya

$$g = \langle \mathbb{G}_\theta, \mathbb{G}_\theta \rangle = \sin^2 \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \sin^2 \varphi$$

olarak elde edilir.

Daha sonra yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği yüzeyin birinci ve ikinci temel formlarının katsayıları aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

olduğunu biliyoruz. Burada L, M, N, E, F, G ifadeleri yerine yazıldığında,

$$K = \frac{(-r\kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta - rr'^2 \kappa^2 - r\tau^2 \sin^2 \varphi - r\varphi'^2 - 2r\kappa \varphi' \cos \theta - 2rr' \kappa \tau \sin \varphi \sin \theta)}{r^2(rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2} \\ + \frac{+r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta)(-r\sin^2 \varphi) - (-r\tau \sin^2 \varphi - rr' \kappa \sin \varphi \sin \theta)^2}{r^2(rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2} \\ = \frac{r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + r^2 \tau^2 \sin^4 \varphi + r^2 \varphi'^2 \sin^2 \varphi + 2r^2 \kappa \varphi' \sin^2 \varphi \cos \theta}{r^2(rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2r^2 r' \kappa \tau \sin^3 \varphi \sin \theta - r r'' \sin^2 \varphi - r \kappa \sin^3 \varphi \cos \theta}{r^2 (r r'' + r \kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2} \\
& - \frac{(r^2 \tau^2 \sin^4 \varphi + 2r^2 r' \kappa \tau \sin^3 \varphi \sin \theta + r^2 \kappa^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \sin^2 \theta)}{r^2 (r r'' + r \kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2} \\
& = \frac{r^2 r''^2 + r^2 r'' \kappa \sin \varphi \cos \theta - r r'' \sin^2 \varphi + r^2 r'' \kappa \sin \varphi \cos \theta + r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta - r \kappa \sin^3 \varphi \cos \theta}{r^2 (r r'' + r \kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2} \\
& = \frac{(r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta)(r^2 r'' + r^2 \kappa \sin \varphi \cos \theta - r \sin^2 \varphi)}{r^2 (r r'' + r \kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2}
\end{aligned}$$

$$K = \frac{r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta}{r (r r'' + r \kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)} \quad (3.8)$$

dir. Ortalama eğriliği de,

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}$$

bağıntısından

$$H = \frac{\{(-r \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta - r r'^2 \kappa^2 - r \tau^2 \sin^2 \varphi - r \varphi'^2 - 2r \kappa \varphi' \cos \theta - 2r r' \kappa \tau \sin \varphi \sin \theta)\}}{2r^2 (r r'' + r \kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2}$$

$$+ \frac{+r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta)(r \sin^2 \varphi)\} - 2\{(-r \tau \sin^2 \varphi - r r' \kappa \sin \varphi \sin \theta)(r^2 \tau \sin^2 \varphi + r^2 r' \kappa \sin \varphi \sin \theta)\}}{2r^2 (r r'' + r \kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2}$$

$$+ \frac{\{(-r \sin^2 \varphi)(r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2 r'^2 \kappa^2 + r^2 \tau^2 \sin^2 \varphi + r^2 \varphi'^2 + 2r^2 \kappa \varphi' \cos \theta + 2r^2 r' \kappa \tau \sin \varphi \sin \theta)\}}{2r^2 (r r'' + r \kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2}$$

$$+ \frac{-2r r'' - 2r \kappa \sin \varphi \cos \theta + \sin^2 \varphi}{2r^2 (r r'' + r \kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2}$$

$$= \frac{-2r^3 r''^2 - 2r^3 r'' \kappa \sin \varphi \cos \theta + 2r^2 r'' \sin^2 \varphi - 2r^3 r'' \kappa \sin \varphi \cos \theta - 2r^3 \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta}{2r^2 (r r'' + r \kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2r^2\kappa\sin^3\varphi\cos\theta + r^2r''\sin^2\varphi + r^2\kappa\sin^3\varphi\cos\theta - r\sin^4\varphi}{2r^2(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)^2} \\
& = \frac{(2rr'' + 2r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)(-r^2r'' - r^2\kappa\sin\varphi\cos\theta + r\sin^2\varphi)}{2r^2(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)^2} \\
& \quad H = \frac{2rr'' + 2r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi}{-2r(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)} \tag{3.9}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Şimdi de Weingarten dönüşümüne karşılık gelen matrisin bileşenlerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
& \quad \quad \quad a_{11} = \frac{MF - LG}{EG - F^2} \\
a_{11} & = \frac{\{(-r\tau\sin^2\varphi - rr'\kappa\sin\varphi\sin\theta)(r^2\tau\sin^2\varphi + r^2r'\kappa\sin\varphi\sin\theta)\}}{r^2(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)^2} \\
& \quad \quad \quad - \frac{\{(-r\kappa^2\sin^2\varphi\cos^2\theta - rr'^2\kappa^2 - r\tau^2\sin^2\varphi - r\varphi'^2 - 2r\kappa\varphi'\cos\theta - 2rr'\kappa\tau\sin\varphi\sin\theta}{r^2(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)^2} \\
& \quad \quad \quad + \frac{\{r'' + \kappa\sin\varphi\cos\theta)(r^2\sin^2\varphi)\}}{r^2(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)^2} \\
& = \frac{-r^3r''^2 - r^3r''\kappa\sin\varphi\cos\theta + r^2r''\sin^2\varphi - r^3r''\kappa\sin\varphi\cos\theta - r^3\kappa^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + r^2\kappa\sin^3\varphi\cos\theta}{r^2(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)^2} \\
& \quad \quad \quad a_{11} = \frac{-r'' - \kappa\sin\varphi\cos\theta}{rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi} \tag{3.10}
\end{aligned}$$

$$a_{12} = \frac{LF - ME}{EG - F^2}$$

$$\begin{aligned}
a_{12} &= \frac{\{(-r\kappa^2\sin^2\varphi\cos^2\theta - rr'^2\kappa^2 - r\tau^2\sin^2\varphi - r\varphi'^2 - 2r\kappa\varphi'\cos\theta - 2rr'\kappa\tau\sin\varphi\sin\theta}{r^2(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)^2} \\
&+ \frac{+r'' + \kappa\sin\varphi\cos\theta)(r^2\tau\sin^2\varphi + r^2r'\kappa\sin\varphi\sin\theta)\} - \{(-r\tau\sin^2\varphi - rr'\kappa\sin\varphi\sin\theta)}{r^2(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)^2} \\
&\frac{(r^2\kappa^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + r^2r'^2\kappa^2 + r^2\tau^2\sin^2\varphi + r^2\varphi'^2 + 2r^2\kappa\varphi'\cos\theta}{r^2(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)^2} \\
&+ \frac{+2r^2r'\kappa\tau\sin\varphi\sin\theta - 2rr'' - 2r\kappa\sin\varphi\cos\theta + \sin^2\varphi)\}}{r^2(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)^2} \\
&= \frac{r^2r''\tau\sin^2\varphi + r^2\kappa\tau\sin^4\varphi\cos\theta - r\tau\sin^4\varphi + r^2r'r''\kappa\sin\varphi\sin\theta}{r^2(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)^2} \\
&+ \frac{r^2r'\kappa^2\sin^3\varphi\sin\theta\cos\theta - rr'\kappa\sin^3\varphi\sin\theta}{r^2(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)^2} \\
&= \frac{(\tau\sin^2\varphi + r'\kappa\sin^3\varphi\sin\theta)(r^2r'' + r^2\kappa\sin\varphi\cos\theta - r\sin^2\varphi)}{r^2(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)^2} \\
a_{12} &= \frac{\tau\sin^2\varphi + r'\kappa\sin\varphi\sin\theta}{r(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)} \tag{3.11}
\end{aligned}$$

$$a_{21} = \frac{NF - MG}{EG - F^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\{(-r\sin^2\varphi)(r^2\tau\sin^2\varphi + r^2r'\kappa\sin\varphi\sin\theta)\} - \{(-r\tau\sin^2\varphi - rr'\kappa\sin\varphi\sin\theta)(r^2\sin^2\varphi)}{r^2(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)^2} \\
&= \frac{(-r^3\tau\sin^4\varphi - r^3r'\sin^3\varphi\sin\theta) - (-r^3\tau\sin^4\varphi - r^3r'\sin^3\varphi\sin\theta)}{r^2(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)^2}
\end{aligned}$$

$$a_{21} = 0 \quad (3.12)$$

$$a_{22} = \frac{MF - NE}{EG - F^2}$$

$$= \frac{\{(-r\tau\sin^2\varphi - rr'\kappa\sin\varphi\sin\theta)(r^2\tau\sin^2\varphi + r^2r'\kappa\sin\varphi\sin\theta)\} - \{(-r\sin^2\varphi)$$

$$\frac{(r^2\kappa^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + r^2r'^2\kappa^2 + r^2\tau^2\sin^2\varphi + r^2\varphi'^2 + 2r^2\kappa\varphi'\cos\theta}{r^2(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)^2}$$

$$+ \frac{+2r^2r'\kappa\tau\sin\varphi\sin\theta - 2rr'' - 2r\kappa\sin\varphi\cos\theta + \sin^2\varphi}{r^2(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)^2}$$

$$= \frac{-r^3r''^2 - r^3\kappa^2\sin^2\varphi\cos^2\theta - r\sin^4\varphi - 2r^3r''\kappa\sin\varphi\cos\theta + 2r^2r''\sin^2\varphi + 2r^2\kappa\sin^3\varphi\cos\theta}{r^2(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)^2}$$

$$a_{22} = \frac{-r(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)^2}{r^2(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)^2} = -\frac{1}{r} \quad (3.13)$$

olarak elde edilir. Weingarten denklemlerindeki ifadeleri basitleştirelim. Buna göre,

$$P = rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi,$$

$$Q = r'' + \kappa\sin\varphi\cos\theta, \quad (3.14)$$

$$R = \tau\sin^2\varphi + r'\kappa\sin\varphi\sin\theta,$$

şeklinde alırsak, kanal yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri P, Q, R cinsinden sırasıyla

$$K = \frac{Q}{rP}, \quad (3.15)$$

$$H = \frac{2P + \sin^2\varphi}{-2rP}$$

olarak ifade edilir. Aynı şekilde Weingarten dönüşümüne karşılık gelen matris ise,

$$A_G = \begin{pmatrix} -\frac{Q}{P} & \frac{R}{rP} \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Buradan kanal yüzeyin asli eğrilikleri,

$$k_1 = -\frac{Q}{P} = -Kr, \quad k_2 = -\frac{1}{r}$$

dir.

Lemma 3.1: Kanal yüzeylerinin birinci, ikinci, üçüncü temel formları arasında (3.14) bağıntıları yardımıyla,

$$L = \frac{r^2(\kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r'^2 \kappa^2 + \tau^2 \sin^2 \varphi + \varphi'^2 + 2\kappa \varphi' \cos \theta + 2r' \kappa \tau \sin \varphi \sin \theta)}{-r}$$

$$L = \frac{-(2rr'' + 2r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)}{-r}$$

$$L = \frac{E + P}{-r}$$

$$M = \frac{r^2 \tau \sin^2 \varphi + r^2 r' \kappa \sin \varphi \sin \theta}{-r} = -r\tau \sin^2 \varphi - rr' \kappa \sin \varphi \sin \theta = \frac{F}{-r}$$

$$N = \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{-r} = -r \sin^2 \varphi = \frac{G}{-r}$$

$$e = \frac{L - Q}{-r}, \quad f = \frac{M}{-r}, \quad g = \frac{N}{-r}$$

şeklinde yazabiliriz.

$$P = rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi,$$

$$Q = r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta,$$

denirse,

$$EG - F^2 = r^2 P^2, \quad LN - M^2 = rPQ, \quad eg - f^2 = Q^2,$$

olur.

Gauss dönüşümünün hesaplanmasında, önemli bir yeri olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma 3.2: M, (n+1)-boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey olsun. Bu durumda M nin \mathbb{G} Gauss dönüşümünün laplasyanı,

$$\Delta_{\mathbb{G}} = \|A_{\mathbb{G}}\|^2 \mathbb{G} + n \nabla H$$

dir. Burada $\Delta_{\mathbb{G}}$, \mathbb{G} nin laplasyanı, ∇H , H ortalama eğriliğin gradienti, $A_{\mathbb{G}}$ M nin şekil operatörüdür ve $\|A_{\mathbb{G}}\|^2 = \text{iz}(A_{\mathbb{G}}A_{\mathbb{G}})$ ile ifade edilir [15,16].

Lemma 3.3: M, E^3 de bir kanal yüzeyi olmak üzere, f diferansiyellenebilir fonksiyonunun gradienti:

$$\nabla f = \frac{1}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} \{ (g_{22}f_y - g_{12}f_t) \partial_y + (-g_{12}f_y + g_{11}f_t) \partial_t \},$$

dir. Burada $\{y, t\}$ M nin yerel koordinat sistemidir ve bu durumda $\langle \partial_y, \partial_y \rangle = g_{11}$, $\langle \partial_y, \partial_t \rangle = g_{12}$ ve $\langle \partial_t, \partial_t \rangle = g_{22}$ dir. Burada f_y, f_t sırasıyla f nin y ve t ye göre kısmi türevleridir [17].

Şimdi kanal yüzeyinin Gauss dönüşümünün laplasyanını hesaplayalım:

İlk olarak Weingarten dönüşümü (3.14) bağımları cinsinden,

$$\|A_{\mathbb{G}}\|^2 = \frac{r^2 Q^2 + P^2 + R^2}{r^2 P^2}$$

dir. Burada kolaylık sağlaması açısından $D = r^2 Q^2 + P^2 + R^2$ şeklinde alınırsa,

$$\|A_{\mathbb{G}}\|^2 = \frac{r^2 Q^2 + P^2 + R^2}{r^2 P^2} = \frac{D}{r^2 P^2}$$

olur.

İkinci olarak Lemma 3.3 ile (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) bağıntıları yardımıyla ortalama eğriliğin gradienti,

$$\begin{aligned} \nabla H(x) &= \frac{1}{r^2 P^2} \{ (g_{22}H_s - g_{12}H_\theta) x_s^1 \} T \\ &+ \frac{1}{r^2 P^2} \{ (g_{22}H_s - g_{12}H_\theta) x_s^2 + (-g_{12}H_s + g_{11}H_\theta) x_\theta^1 \} N \\ &+ \frac{1}{r^2 P^2} \{ (g_{22}H_s - g_{12}H_\theta) x_s^3 + (-g_{12}H_s + g_{11}H_\theta) x_\theta^2 \} B \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. (3.9) bağıntısındaki ortalama eğriliğinin s ye göre türevi,

$$\begin{aligned}
H_s &= \frac{(2r'r'' + 2rr''' + 2r'\kappa\sin\varphi\cos\theta + 2r\kappa'\sin\varphi\cos\theta}{(-2rP)^2} \\
&+ \frac{+2r\kappa\cos\varphi\varphi'\cos\theta - 2\sin\varphi\varphi'\cos\varphi)(-2r^2r'' - 2r^2\kappa\sin\varphi\cos\theta + 2r\sin^2\varphi) - (2rr''}{(-2rP)^2} \\
&+ \frac{2r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi)(-4rr'r'' - 2r^2r''' - 4rr'\kappa\sin\varphi\cos\theta - 2r^2\kappa'\sin\varphi\cos\theta}{(-2rP)^2} \\
&+ \frac{-2r^2\kappa\cos\varphi\varphi'\cos\theta + 2r'\sin^2\varphi + 4r\sin\varphi\varphi'\cos\varphi}{(-2rP)^2} \\
H_s &= \frac{-4r^2r'r''^2 - 4r^2r'r''\kappa\sin\varphi\cos\theta + 4rr'r''\sin^2\varphi - 4r^3r''r''' - 4r^3r'''\kappa\sin\varphi\cos\theta}{4r^2P^2} \\
&+ \frac{+4r^2r''' \sin^2\varphi - 4r^2r'r''\kappa\sin\varphi\cos\theta - 4r^2r'\kappa^2 \sin^2\varphi\cos^2\theta + 4rr'\kappa \sin^3\varphi \cos\theta}{4r^2P^2} \\
&+ \frac{-4r^3r''\kappa'\sin\varphi\cos\theta - 4r^3\kappa\kappa' \sin^2\varphi\cos^2\theta + 4r^2\kappa' \sin^3\varphi \cos\theta - 4r^3r''\kappa\cos\varphi\varphi'\cos\theta}{4r^2P^2} \\
&+ \frac{-4r^3\kappa^2\sin\varphi\varphi'\cos\varphi\cos^2\theta + 4r^2\kappa \sin^2\varphi\cos\varphi\varphi'\cos\theta + 4r^2r''\sin\varphi\varphi'\cos\varphi}{4r^2P^2} \\
&+ \frac{+4r^2\kappa \sin^2\varphi\varphi'\cos\varphi\cos\theta - 4r \sin^3\varphi\varphi'\cos\varphi - (-8r^2r'r''^2 - 8r^2r'r''\kappa\sin\varphi\cos\theta)}{4r^2P^2} \\
&+ \frac{4rr'r'' \sin^2\varphi - 4r^3r''r''' - 4r^3r'''\kappa\sin\varphi\cos\theta + 2r^2r''' \sin^2\varphi - 8r^2r'r''\kappa\sin\varphi\cos\theta}{4r^2P^2} \\
&+ \frac{-8r^2r'\kappa^2 \sin^2\varphi\cos^2\theta + 4rr'\kappa \sin^3\varphi\cos\theta - 4r^3r''\kappa'\sin\varphi\cos\theta - 4r^3\kappa\kappa' \sin^2\varphi\cos^2\theta}{4r^2P^2} \\
&+ \frac{2r^2\kappa' \sin^3\varphi\cos\theta - 4r^3r''\kappa\varphi'\cos\varphi\cos\theta - 4r^3\kappa^2\sin\varphi\varphi'\cos\varphi\cos^2\theta + 2r^2\kappa \sin^2\varphi\varphi'\cos\varphi\cos\theta}{4r^2P^2}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{4rr'r'' \sin^2 \varphi + 4rr'\kappa \sin^3 \varphi \cos \theta - 2r' \sin^4 \varphi + 8r^2 r'' \sin \varphi \varphi' \cos \varphi + 8r^2 \kappa \sin^2 \varphi \varphi' \cos \varphi \cos \theta}{4r^2 P^2}$$

$$- \frac{4r \sin^3 \varphi \varphi' \cos \varphi}{4r^2 P^2}$$

dir. Buradan gerekli işlemler yapılırsa,

$$H_s = \frac{4r^2 r' \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta - 4rr'\kappa \sin^3 \varphi \cos \theta + 2r^2 \kappa' \sin^3 \varphi \cos \theta}{4r^2 P^2} + \frac{10r^2 r' r'' \kappa \sin \varphi \cos \theta - 4rr'r'' \sin^2 \varphi + 2r^2 r''' \sin^2 \varphi + 8r^2 r' r''^2 + 2r' \sin^4 \varphi}{4r^2 P^2}$$

$$H_s = \frac{2r^2 r' \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta - (2rr'\kappa - r^2 \kappa') \sin^3 \varphi \cos \theta + 5r^2 r' r'' \kappa \sin \varphi \cos \theta}{2r^2 P^2} + \frac{-2rr'r'' \sin^2 \varphi + 4r^2 r' r''^2 + r' \sin^4 \varphi}{2r^2 P^2}$$

olarak elde edilir. Ortalama eğriliğin θ ya göre türevi de,

$$H_\theta = \frac{(-2r\kappa \sin \varphi \sin \theta)(-2r^2 r'' - 2r^2 \kappa \sin \varphi \cos \theta + 2r \sin^2 \varphi)}{4r^2 P^2} - \frac{(2rr'' + 2r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)(2r^2 \kappa \sin \varphi \sin \theta)}{4r^2 P^2}$$

$$H_\theta = \frac{4r^3 r'' \kappa \sin \varphi \sin \theta + 4r^3 \kappa^2 \sin^2 \varphi \sin \varphi \sin \theta - 4r^2 \kappa \sin^3 \varphi \sin \theta}{4r^2 P^2}$$

$$- \frac{4r^3 r'' \kappa \sin \varphi \sin \theta + 4r^3 \kappa^2 \sin^2 \varphi \sin \varphi \cos \theta - 2r^2 \kappa \sin^3 \varphi \sin \theta}{4r^2 P^2}$$

$$H_\theta = - \frac{2r^2 \kappa \sin^3 \varphi \sin \theta}{4r^2 P^2} = \frac{\kappa \sin^3 \varphi \sin \theta}{2P^2}$$

olarak bulunur.

Yukarıda elde edilen bağıntıları Lemma 3.2 denkleminde $n = 2$ olacak şekilde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}\Delta G &= \frac{1}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} \{(r^2Q^2 + P^2 + R^2)\cos\varphi + 2x_s^1(g_{22}H_s - g_{12}H_\theta)\}T \\ &+ \frac{1}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} \left\{ \begin{aligned} &(r^2Q^2 + P^2 + R^2)\sin\varphi\cos\theta \\ &+ 2(x_s^2(g_{22}H_s - g_{12}H_\theta) + x_\theta^1(-g_{12}H_s + g_{11}H_\theta)) \end{aligned} \right\}N \\ &+ \frac{1}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} \left\{ \begin{aligned} &(r^2Q^2 + P^2 + R^2)\sin\varphi\sin\theta \\ &+ 2(x_s^3(g_{22}H_s - g_{12}H_\theta) + x_\theta^1(-g_{12}H_s + g_{11}H_\theta)) \end{aligned} \right\}B\end{aligned}$$

dir.

$$(g_{22}H_s - g_{12}H_\theta) = U, \quad (-g_{12}H_s + g_{11}H_\theta) = V$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}\Delta G &= \frac{1}{r^2p^2} (D\cos\varphi + 2x_s^1U)T \\ &+ \frac{1}{r^2p^2} (D\sin\varphi\cos\theta + 2(x_s^2U + x_\theta^1V))N \\ &+ \frac{1}{r^2p^2} (D\sin\varphi\sin\theta + 2(x_s^3U + x_\theta^1V))B\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki hesaplamalara göre aşağıdaki sonuçlar ve teoremler verilebilir:

Teorem 3.2: Harmonik Gauss dönüşümüne sahip kanal yüzeyi yoktur[18].

İspat: E^3 de M kanal yüzeyinin Gauss dönüşümü harmonik ise, lemma 3.2 den $\Delta G = 0$ dir.

Bu ise $\|A_G\|^2 = 0$ ve H nın sabit olmasını gerektirir. $\|A_G\|^2 = 0$ yani $\frac{r^2Q^2+P^2+R^2}{r^2p^2} = 0$ ise

bu takdirde $P = Q = R = 0$ demektir. Bu M nin regüler olması ile çelişir. O halde $\Delta G = 0$ olamaz. Yani harmonik Gauss dönüşümüne sahip kanal yüzeyi yoktur.

Teorem 3.3: Öklid uzay E^3 de, M yönlendirilmiş kanal yüzeyinin birinci çeşit noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olması için gerek ve yeter şart ortalama eğriliğinin sabit olmasıdır. Yani M aşağıdaki yüzeylerden birisi olur:

1) Katenoid;

$$2)x(s, \theta) = \pm \left\{ \left(r \sqrt{\frac{ar^2 + r - c}{ar^2 + r}} + \int \sqrt{\frac{ar^2 + r}{ar^2 + r - c}} dr \right), \sqrt{\frac{cr}{ar + 1}} \cos\theta, \sqrt{\frac{cr}{ar + 1}} \sin\theta \right\},$$

olacak şekilde ortalama eğriliği sabit ve sıfır olmayan döneel yüzeydir. Burada $a \neq 0$ ve $c > 0$ sabitleri için

$$r(s) = \frac{dr}{ds} = \pm \sqrt{\frac{ar^2 + r - c}{ar^2 + r}}$$

şeklinde bir fonksiyondur [18].

İspat: Lemma 3.2 den M kanal yüzeyi, sadece ortalama eğriliği sabit olduğu durumda birinci çeşit noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olduğu açıktır. M yüzeyi katenoid ise $H = 0$ ve $H = a(a \in \mathbb{R} - \{0\})$ olduğu zaman M bir döneel yüzeydir. Böylece (3.15) denklemini

$$H = \frac{2P + \sin^2\varphi}{-2rP} = a \quad (3.16)$$

olur. Gerçekten $P = rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi$ yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$2P + \sin^2\varphi + 2arP = 0$$

$$2(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi) + \sin^2\varphi + 2ar(rr'' + r\kappa\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi) = 0$$

$$2rr'' + 2r\kappa\sin\varphi\cos\theta - 2\sin^2\varphi + \sin^2\varphi + 2ar^2r'' + 2ar^2\kappa\sin\varphi\cos\theta - 2arsin^2\varphi = 0$$

$$2rr''(1 + ar) - \sin^2\varphi(1 + 2ar) + 2r\kappa\sin\varphi(1 + ar)\cos\theta = 0$$

elde edilir. Bu ifade $\cos\theta$ ya göre birinci dereceden bir polinom olduğundan

$$2rr''(1 + ar) - \sin^2\varphi(1 + 2ar) = 0$$

$$r\kappa\sin\varphi(1 + ar) = 0$$

elde edilir. Bu denklemde $r' = -\cos\varphi$ yazılırsa,

$$2rr''(1 + ar) - (1 - r'^2)(1 + 2ar) = 0$$

bulunur. Buradan s ye göre integral alınır.

$$\frac{dr}{ds} = \pm \sqrt{\frac{ar^2 + r - c}{ar^2 + r}} \quad (3.17)$$

olur ve burada $c > 0$ integral alma işleminin sabitidir. Bu takdirde,

$$\frac{ds}{dr} = \pm \sqrt{\frac{ar^2 + r}{ar^2 + r - c}}$$

dır. Bu durumda

$$r' = \pm \sqrt{\frac{ar^2 + r - c}{ar^2 + r}}$$

$$r'^2 = 1 - \frac{c}{ar^2 + r}$$

$$1 - r'^2 = \frac{c}{ar^2 + r}$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{c}{ar^2 + r}$$

$$r^2 \sin^2 \varphi = \frac{cr^2}{ar^2 + r}$$

$$r \sin \varphi = \sqrt{\frac{cr^2}{ar^2 + r}} = \sqrt{\frac{cr}{ar + 1}}$$

olarak hesaplanır. Eğer $c(s) = (s, 0, 0)$, $T = (1, 0, 0)$, $N = (0, 1, 0)$, $B = (0, 0, 1)$ göz önüne alalım. Bu takdirde M kanal yüzeyinin

$$x(s, \theta) = (r(s) \cos \varphi + s, r(s) \sin \varphi \cos \theta, r(s) \sin \varphi \sin \theta).$$

parametrik denklemini

$$x(s, \theta) = \pm \left\{ \left(r \sqrt{\frac{ar^2 + r - c}{ar^2 + r}} + \int \sqrt{\frac{ar^2 + r}{ar^2 + r - c}} dr \right), \sqrt{\frac{cr}{ar + 1}} \cos \theta, \sqrt{\frac{cr}{ar + 1}} \sin \theta \right\}.$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Sonuç 3.2: E^3 de, yönlendirilmiş kanal yüzeyi M birinci çeşit noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olsun. Bu durumda M nin Gauss dönüşümü \mathbb{G} olmak üzere:

$$\Delta \mathbb{G} = \frac{4a^2 r^2 + 4ar + 2}{r^2} \mathbb{G}, (a \in \mathbb{R})$$

dir.

İspat: Birinci çeşit noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olduğundan M için, $\Delta\mathbb{G} = f\mathbb{G}$ dir. Bu durumda M bir döneel yüzeydir. Buradan $\tau(s) \equiv 0$ alabiliriz. Böylece

$$f = \|A_{\mathbb{G}}\|^2 = \frac{r^2 Q^2 + P^2}{r^2 P^2}$$

denklemleri yazılabilir. (3.14) ve (3.16) bize şunu verir:

$$H = \frac{2P + \sin^2\varphi}{-2rP} = a$$

$$2ar = \frac{2P + \sin^2\varphi}{-P}$$

$$2ar + 1 = \frac{P + \sin^2\varphi}{-P}$$

$$(2ar + 1)^2 = \frac{P^2 + \sin^4\varphi + 2P \sin^2\varphi}{P^2}$$

$$(2ar + 1)^2 + 1 = \frac{2P^2 + \sin^4\varphi + 2P \sin^2\varphi}{P^2}$$

$$\frac{4a^2 r^2 + 4ar + 2}{r^2} = \frac{(P + \sin^2\varphi)^2 + P^2}{r^2 P^2} = \frac{r^2 Q^2 + P^2}{r^2 P^2}.$$

Böylece

$$f = \frac{4a^2 r^2 + 4ar + 2}{r^2}.$$

elde edilir.

Sonuç 3.3: 3-boyutlu Öklid uzay E^3 de, M yönlendirilmiş kanal yüzeyi birinci çeşit noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olsun. Yüzeyin bir dairesel silindir olması için gerek ve yeter şart $\lambda \neq 0$ sabit değeri için $\Delta\mathbb{G} = \lambda\mathbb{G}$ dir.

İspat: M yönlendirilmiş kanal yüzeyinin $\Delta\mathbb{G} = \lambda\mathbb{G} (\lambda \in \mathbb{R} - \{0\})$ sağladığını göz önüne alalım. Sonuç 2.3 te f yerine λ yazılırsa,

$$\lambda = \frac{4a^2 r^2 + 4ar + 2}{r^2}$$

olur. a ve λ sabit olduğu için r de sabittir. Böylece M bir dairesel silindirdir. Tersisi de açıktır. Şimdi f diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $C \in E^3$ sıfırdan farklı sabit bir vektör olmak üzere $\Delta\mathbb{G} = f(\mathbb{G} + C)$ şartını sağlayan kanal yüzeylerini inceleyelim.

Teorem 3.4: M yönlendirilmiş kanal yüzeyi, ikinci çeşit noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olması için gerek ve yeter şart

$$x(s, \theta) = (r(s)\cos\varphi + s, r(s)\sin\varphi\cos\theta, r(s)\sin\varphi\sin\theta).$$

parametresiyle verilen kanal yüzeyinin bir dönel yüzey olmasıdır[18].

İspat: $\Delta\mathbb{G} = f(\mathbb{G} + C)$ şartını sağlayan M yönlendirilmiş kanal yüzeyini göz önüne alalım.

$C \in E^3$ vektörünü, $C_i (i = 1,2,3)$ ler s nin bir fonksiyonu olmak üzere,

$$C = C_1T + C_2N + C_3$$

şeklinde alabiliriz. Burada $C_1 = \langle C, T \rangle$, $C_2 = \langle C, N \rangle$, $C_3 = \langle C, B \rangle$ dir. \mathbb{G} , $\Delta\mathbb{G}$ ve C değerleri

$\Delta\mathbb{G} = f(\mathbb{G} + C)$ de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \Delta\mathbb{G} &= \frac{1}{r^2P^2} (D\cos\varphi + 2x_s^1U)T \\ &+ \frac{1}{r^2P^2} (D\sin\varphi\cos\theta + 2(x_s^2U + x_\theta^1V))N \\ &+ \frac{1}{r^2P^2} (D\sin\varphi\sin\theta + 2(x_s^3U + x_\theta^2V))B \\ &= f(\cos\varphi + C_1)T + f(\sin\varphi\cos\theta + C_2)N + f(\sin\varphi\sin\theta + C_3)B \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} D\cos\varphi + 2x_s^1U &= r^2P^2 f(\cos\varphi + C_1), \\ D\sin\varphi\cos\theta + 2(x_s^2U + x_\theta^1V) &= r^2P^2 f(\sin\varphi\cos\theta + C_2), \\ D\sin\varphi\sin\theta + 2(x_s^3U + x_\theta^2V) &= r^2P^2 f(\sin\varphi\sin\theta + C_3), \end{aligned}$$

olur. Buradan da aşağıdakiler elde edilir:

$$f = \frac{D\cos\varphi + 2x_s^1U}{r^2P^2 (\cos\varphi + C_1)} \quad (3.18)$$

$$= \frac{D\sin\varphi\cos\theta + 2(x_s^2U + x_\theta^1V)}{r^2P^2 (\sin\varphi\cos\theta + C_2)} \quad (3.19)$$

$$= \frac{D\sin\varphi\sin\theta + 2(x_s^3U + x_\theta^2V)}{r^2P^2 (\sin\varphi\sin\theta + C_3)} \quad (3.20)$$

Şimdi (3.19) ve (3.20) bağıntılarından ,

$$\begin{aligned}
& D \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta + D \sin \varphi \sin \theta C_2 + 2U x_s^3 C_2 \\
& + 2U(r' \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta + r \tau \sin^2 \varphi \cos^2 \theta - r r' \varphi' \sin \varphi \sin \theta \cos \theta) \\
& + 2V(r \sin^2 \varphi \cos^2 \theta) + 2V x_\theta^2 C_2 \\
& = D \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta + D \sin \varphi \cos \theta C_3 + 2U x_s^2 C_3 \\
& + 2U(r' \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta - r r' \kappa \sin \varphi \sin \theta - r \tau \sin^2 \varphi \sin^2 \theta - r r' \varphi' \sin \varphi \sin \theta \cos \theta) + \\
& + 2V(-r \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) + 2V x_\theta^1 C_3
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $D = r^2 Q^2 + P^2 + R^2 = (P + \sin^2 \varphi)^2 + P^2 + R^2$ eşitliği ile denklem ,
 $2U(r \tau \sin^2 \varphi + r r' \kappa \sin \varphi \sin \theta + x_s^3 C_2 - x_s^2 C_3) + 2V(r \sin^2 \varphi + x_\theta^2 C_2 - x_\theta^1 C_3)$
 $= \sin \varphi (2P^2 + 2P \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi + R^2)(C_3 \cos \theta - C_2 \sin \theta)$

olarak yazılabilir. (3.2), (3.3), (3.14) bağıntıları yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& 2(g_{22} H_s - g_{12} H_\theta)(r \tau \sin^2 \varphi + r r' \kappa \sin \varphi \sin \theta + x_s^3 C_2 - x_s^2 C_3) + 2(g_{11} H_\theta - g_{12} H_s) \\
& (r \sin^2 \varphi + r \sin \varphi \cos \theta C_2 + r \sin \varphi \sin \theta C_3) \\
& = \sin \varphi [(r r'' + r \kappa \sin \varphi \cos \theta)^2 + (r r'' + r \kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2 \\
& + (\tau \sin^2 \varphi + r' \kappa \sin \varphi \sin \theta)^2] (C_3 \cos \theta - C_2 \sin \theta)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

olur. (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) bağıntılarından (3.21) denklemiyle,

$$\begin{cases} r^4 \kappa^4 \sin^5 \varphi (2r^2 - r'^2) C_3 = 0 , \\ r^4 \kappa^4 \sin^5 \varphi (2r^2 - r'^2) C_2 = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Şimdi M nin bir açık alt kümesini $\mathcal{O} = \{p \in M \mid \kappa(p) \neq 0\} \neq \emptyset$ göz önüne alalım. \mathcal{O} üzerinde $r \neq 0$ ve $\sin \varphi \neq 0$ olursa, $C_2 = C_3 = 0$ veya $2r^2 - r'^2 = 0$ olur. O halde (3.21) bağıntısında $C_2 = C_3 = 0$ yazılırsa,

$$r^2 (\tau \sin^2 \varphi + r' \kappa \sin \varphi \sin \theta)^2 = g_{11} \sin^2 \varphi$$

ya da

$$\begin{aligned}
& r^2 (\tau \sin^2 \varphi + r' \kappa \sin \varphi \sin \theta)^2 \\
& = [r^2 (\kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r'^2 \kappa^2 + \tau^2 \sin^2 \varphi + \varphi'^2 + 2\kappa \varphi' \cos \theta + 2r' \kappa \tau \sin \varphi \sin \theta) \\
& - (2r r'' + 2r \kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)] \sin^2 \varphi
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde iki tarafın da $\cos \theta$ nın en büyük üssünün katsayıları karşılaştırılırsa $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Diğer yandan eğer $2r^2 - r'^2 = 0$ ise (3.21) denklemi,

$$r' C_3 (-2rr'r'' \sin^2 \varphi + r^2 r''' \sin^2 \varphi + 4r^2 r' r''^2 + r' \sin^4 \varphi) = 0$$

olarak ifade edilir. Buradan (3.21) bağıntısında $2r^2 - r'^2 = 0$ alındığında,

$$C_3 (24r^4 - 6r^2 + 1) = 0$$

dır. Açıkça görüldüğü gibi $(24r^4 - 6r^2 + 1) \neq 0$ olduğundan $C_3 = 0$ elde edilir. $C_3 = 0$ göz önüne alınırsa $C_2 = 0$ elde edilir ve bu ise \mathcal{O} kümesinin boş olduğu yani $\kappa \equiv 0$ olur. O halde M dönel yüzeydir.

Şimdi $c(s) = (s, 0, 0)$, $T = (1, 0, 0)$, $N = (0, 1, 0)$, $B = (0, 0, 1)$ yi göz önüne alalım. Bu takdirde M yüzeyini,

$$x(s, \theta) = (r(s)\cos\varphi + s, r(s)\sin\varphi\cos\theta, r(s)\sin\varphi\sin\theta).$$

şeklinde ifade edebiliriz. Buna göre $C_i (i = 1, 2, 3)$ sabittir ve $c(s)$ nin burulma fonksiyonu 0 olur. $\kappa = 0$ olduğu zaman denklem,

$$f = \frac{(2P^2 + 2P \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi) \cos \varphi - 2r^2 \sin^2 \varphi P H_s}{r^2 P^2 (\cos \varphi + C_1)} \quad (3.22)$$

şeklinde olur. Daha sonra

$$D \sin \varphi \cos \theta + 2r^2 \sin^2 \varphi H_s (r' \sin \varphi \cos \theta - r r' \varphi' \cos \theta)$$

$$= r^2 P^2 f (\sin \varphi \cos \theta + C_2),$$

$$D \sin \varphi \sin \theta + 2r^2 \sin^2 \varphi H_s (r' \sin \varphi \sin \theta - r r' \varphi' \sin \theta)$$

$$= r^2 P^2 f (\sin \varphi \sin \theta + C_3),$$

eşitliği elde edilir. Burada $r \neq 0$, $P \neq 0$ ve $f = f(s)$ olduğu için $C_2 = C_3 = 0$ olur ve

$$D \sin \varphi + 2r^2 \sin^2 \varphi H_s (r' \sin \varphi - r r' \varphi') = r^2 P^2 f \sin \varphi$$

denklemini sadeleştirilirse aşağıdaki elde edilir:

$$f = \frac{(2P^2 + 2P \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi) + 2r^2 H_s P \cos \varphi}{r^2 P^2} \quad (3.23)$$

(3.22) ile (3.23) birlikte göz önüne alınırsa,

$$2r^2 H_s P (1 - C_1 r') + C_1 (2P^2 + 2P \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi) = 0 \quad (3.24)$$

olur veya (3.16) bağıntısında ile

$$2P + \sin^2 \varphi + 2r P H = 0$$

$$2P = -\frac{\sin^2 \varphi}{1 + rH}$$

yerine yazıldığında

$$r^2 H_s (1 - C_1 r') = C_1 (r r'' - 1 + r'^2) (2r^2 H^2 + 2rH + 1),$$

elde edilir. Burada C_1 sıfır olmayan bir sabittir. Ayrıca (3.24), (3.23) bağıntıları ile de,

$$f = \frac{-2H_s}{C_1 P}$$

olur. $f \neq 0$ olduğu için ortalama eğriliği sabit olamaz. $\Delta \mathbb{G} = f(\mathbb{G} + C)$ de $f \neq 0$ ve $C_1 \neq 0$ olduğundan $C = (C_1, 0, 0)$ dir. Buradan da şu sonuçlar verilebilir:

Sonuç 3.4: M yönlendirilmiş kanal yüzeyi, ikinci çeşit noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olduğunu kabul edelim. Böylece yüzeyin Gauss dönüşümü olan \mathbb{G} için,

$$\Delta \mathbb{G} = f(\mathbb{G} + C)$$

dir. $f \neq 0$, $C_1 \neq 0$ ve C_1 sabit olduğundan $C = (C_1, 0, 0)$ olur.

Sonuç 3.5: M yönlendirilmiş kanal yüzeyi, dönel yüzey olduğu durumda ikinci çeşit noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahiptir; yani

$$x(s, \theta) = (r(s) + s, r(s) \sin \varphi \cos \theta, r(s) \sin \varphi \sin \theta)$$

ile verilen yüzeyin bir dönel olması için gerek ve yeter şart sıfır olmayan λ sabiti ve C sabit vektörü için, $\Delta \mathbb{G} = f(\mathbb{G} + C)$ dir.

Yukarıda elde edilen sonuçlar ile kanal yüzeyinin yarıçap fonksiyonu sabit alınırsa aşağıdaki teoremler verilebilir:

Teorem 3.5: Harmonik Gauss dönüşümüne sahip yönlendirilmiş tüpler yoktur [18].

Teorem 3.6: Bir yönlendirilmiş kanal yüzeyi birinci çeşit noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olması için gerek ve yeter şart bir dairesel silindir olmasıdır [18].

Teorem 3.7: İkinci çeşit noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne veya noktasal 1-tipli (birinci çeşit veya ikinci çeşit) Gauss dönüşümüne sahip olan yönlendirilmiş tüpler yoktur [18].

Teorem 3.8: İkinci gauss eğriliği K_{II} ve ortalama eğriliği H olmak üzere, açılabilir olmayan kanal yüzeyi aşağıdaki denklemi sağlar[15]:

$$K_{II} = H + \frac{R}{4r^2P^2Q^2}.$$

Burada $R = \sum_{k=0}^2 u_k \cos^k \theta$ ve $u_k (k = 0, 1, 2)$ nın katsayıları aşağıdaki gibidir:

$$u_0 = 2rr'^2r''^2 \sinh^2 \varphi - r\kappa^2 \sinh^6 \varphi + rr'r''' \sinh^4 \varphi + r'^2r'' \sinh^4 \varphi \\ + rr'\kappa \sinh^5 \varphi \sin \theta ;$$

$$u_1 = rr'^2r'' \kappa \sinh^3 \varphi + r'^2 \kappa \sinh^5 \varphi + rr'\kappa' \sinh^5 \varphi ;$$

$$u_2 = r\kappa^2 \sinh^6 \varphi.$$

Gauss eğriliğinin türevleri sırasıyla,

$$K_s = \frac{(r''' + \kappa' \sin \varphi \cos \theta + \kappa \cos \varphi \sin \theta)(r^2 r'' + r^2 \kappa \sin \varphi \cos \theta - r \sinh^2 \varphi) - (r'' \\ r^2 (rr'' + r \kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2}{r^2 (rr'' + r \kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2} \\ + \frac{\kappa \sin \varphi \cos \theta (2rr'r'' + r^2 r''' + 2rr' \kappa \sin \varphi \cos \theta + r^2 \kappa' \sin \varphi \cos \theta - r^2 \kappa \cos \varphi \cos \theta)}{r^2 (rr'' + r \kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2} \\ + \frac{-r' \sin^2 \varphi - 2r \sin \varphi \cos \varphi}{r^2 (rr'' + r \kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2} \\ K_s = \frac{(r^2 r'' r''' + r^2 r''' \kappa \sin \varphi \cos \theta - rr''' \sin^2 \varphi + r^2 r'' \kappa' \sin \varphi \cos \theta + r' \kappa \kappa' \sin^2 \varphi \cos^2 \theta)}{r^2 P^2} \\ + \frac{-r \kappa' \sin^3 \varphi \cos \theta + r^2 r'' \kappa \cos \varphi \cos \theta + r^2 \kappa^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta - r \kappa \sin^2 \varphi \cos \varphi \cos \theta)}{r^2 P^2} \\ - \frac{(2rr'r''^2 + r^2 r'' r''' + 2rr'r'' \kappa \sin \varphi \cos \theta + r^2 r'' \kappa' \sin \varphi \cos \theta + r^2 r'' \kappa \cos \varphi \cos \theta)}{r^2 P^2} \\ - \frac{2rr'r'' \sin \varphi \cos \varphi + 2rr'r'' \kappa \sin \varphi \cos \theta + r^2 r''' \kappa \sin \varphi \cos \theta + 2rr' \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta}{r^2 P^2}$$

$$+ \frac{r^2 \kappa \kappa' \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2 \kappa^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta - r' \kappa \sin^3 \varphi \cos \theta - 2r \kappa \sin^2 \varphi \cos \varphi \cos \theta}{r^2 P^2}$$

$$K_s = \frac{-2rr' \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + (r' \kappa - r \kappa') \sin^3 \varphi \cos \theta - 5rr' r'' \kappa \sin \varphi \cos \theta + r' r'' \sin^2 \varphi}{r^2 P^2}$$

$$+ \frac{-rr''' \sin^2 \varphi - 4rr' r''^2}{r^2 P^2},$$

$$K_\theta = \frac{[(-\kappa \sin \varphi \sin \theta)(r^2 r'' + r^2 \kappa \sin \varphi \cos \theta - r \sin^2 \varphi)] - [(r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta)(-r^2 \kappa \sin \varphi \sin \theta)]}{r^2 P^2}$$

$$= \frac{(-r^2 r'' \kappa \sin \varphi \sin \theta - r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta + r \kappa \sin^3 \varphi \sin \theta) - (-r^2 r'' \kappa \sin \varphi \sin \theta - r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta)}{r^2 P^2}$$

$$K_\theta = \frac{r \kappa \sin^3 \varphi \sin \theta}{r^2 P^2} = \frac{\kappa \sin^3 \varphi \sin \theta}{r P^2}$$

olarak elde edilir. Son olarak, K_{II} ikinci gauss eğriliğinin kısmi türevleri de sırasıyla,

$$(K_{II})_s = H_s + \frac{1}{4r^4 P^4 Q^4} \left\{ \frac{\partial R}{\partial s} (r^2 P^2 Q^2) - R \frac{\partial (r^2 P^2 Q^2)}{\partial s} \right\},$$

$$(K_{II})_\theta = H_\theta + \frac{1}{4r^4 P^4 Q^4} \left\{ \frac{\partial R}{\partial \theta} (r^2 P^2 Q^2) - R \frac{\partial (r^2 P^2 Q^2)}{\partial \theta} \right\}$$

olarak hesaplanır. Burada,

$$\frac{\partial R}{\partial s} = \sum_{k=0}^2 \frac{\partial u_k}{\partial s} \cos^k \theta;$$

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = (-2u_2 \sin \theta + rr' \kappa \sin^5 \varphi) \cos \theta - u_1 \sin \theta;$$

$$\frac{\partial(r^2 P^2 Q^2)}{\partial s} = \sum_{j=0}^4 \frac{\partial v_j}{\partial s} \cos^j \theta;$$

$$\frac{\partial(r^2 P^2 Q^2)}{\partial \theta} = -\sin \theta \sum_{j=1}^4 j v_j \cos^{j-1} \theta$$

dir.



4. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA KANAL YÜZEYLERİ

Bu bölümde, Minkowski uzay E_1^3 de bir M kanal yüzeyinin Gauss dönüşümü hesaplanacaktır. Bu dönüşüm yardımıyla kanal yüzeyleri ile ilgili sınıflandırmalar yapılacaktır.

Tanım 4.1: 3-boyutlu Minkowski uzay E_1^3 de M kanal yüzeyi, pseudohiperbolik küre ailesinin bir zarfıdır. $\{T, N, B\}$ vektör alanı üçlüsü $c(s)$ eğrisi üzerindeki Frenet çatısıdır. M kanal yüzeyinin parametrik denklemi aşağıdaki şekilde verilir:

$$x(s, \theta) = c(s) + \lambda(s, \theta)T(s) + \mu(s, \theta)N(s) + \omega(s, \theta)B(s) \quad (4.1)$$

Burada λ , μ ve ω s ve θ nin diferansiyel fonksiyonlarıdır ve $\|x(s, \theta) - c(s)\|^2 = \varepsilon r^2(s)$, ($\varepsilon = \pm 1$ veya 0) dir. $c(s)$ eğrisi merkez eğrisidir ve $r(s)$ yarıçap fonksiyonudur[19].

Önerme 4.1: $c(s)$ eğrisi yay uzunluğu s ile parametreleştirilmiş merkez eğrisi ve $c(s)$ eğrisi üzerindeki Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere,

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

$$N'(s) = -\varepsilon_1\kappa(s)T(s) + \varepsilon_2\tau(s)B(s)$$

$$B'(s) = \tau(s)N(s)$$

yazılabilir. Burada T teğet vektör alanı, N ve B vektörleri de sırasıyla normal vektör alanı, binormal vektör alanıdır. $c(s)$ merkez eğrisinin timelike eğrisi olduğu durumda $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$, $c(s)$ merkez eğrisinin birinci tip spacelike eğrisi olduğu durumda $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ ve $c(s)$ merkez eğrisinin ikinci tip spacelike eğrisi olduğu durumda $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -1$ olarak alınır. $\kappa(s)$ ile $\tau(s)$ fonksiyonları sırasıyla $c(s)$ eğrisinin eğriliği ve torsiyonu olarak adlandırılır[13].

$c(s)$ merkez eğrisinin birinci çeşit spacelike eğrisi olduğu durumu inceleyelim. Tanım 4.1 de bu değerler,

$$\begin{aligned}\lambda(s) &= r(s)r'(s), \\ \mu(s, \theta) &= r(s)\sqrt{1+r'^2(s)}\sinh\theta, \\ \omega(s, \theta) &= r(s)\sqrt{1+r'^2(s)}\cosh\theta,\end{aligned}$$

yerine yazılırsa birinci çeşit spacelike merkez eğrisi için M_-^{11} yüzeyinin parametrik denklemi,

$$x(s, \theta) = c(s) + r(s)(r'(s)T + \sqrt{1+r'^2(s)}\sinh\theta N + \sqrt{1+r'^2(s)}\cosh\theta B)$$

dir. Burada $c(s)$ eğrisinin yay uzunluğu s ile parametreleştirilmiş merkez eğrisidir ve $r'(s) = \sinh\varphi$ dir. Buna göre M_-^{11} kanal yüzeyinin parametrik denklemi,

$$x(s, \theta) = c(s) + r(s)(\sinh\theta T + \cosh\varphi\sinh\theta N + \cosh\varphi\cosh\theta B) \quad (4.2)$$

dir. Şimdi bu yüzeyi Frenet elemanları yardımı ile birinci, ikinci temel formlarını ve Gauss dönüşümünü hesaplayalım:

$$\begin{aligned}x_s = \frac{\partial x}{\partial s} &= c' + r'\sinh\varphi T + r'\cosh\varphi\sinh\theta N + r'\cosh\varphi\cosh\theta B + r\cosh\varphi\varphi'T \\ &+ r\sinh\varphi\varphi'\sinh\theta N + r\sinh\varphi\varphi'\cosh\theta B + r\sinh\varphi T' \\ &+ r\cosh\varphi\sinh\theta N' + r\cosh\varphi\cosh\theta B'\end{aligned} \quad (4.3)$$

dir. Önerme 4.1 deki T', N', B' değerleri (4.3) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}x_s &= T(1 + r'\sinh\varphi + r\cosh\varphi\varphi' - r\kappa\cosh\varphi\sinh\theta) + N(r'\cosh\varphi\sinh\theta \\ &+ r\sinh\varphi\varphi'\sinh\theta + r\kappa\sinh\varphi + r\tau\cosh\varphi\cosh\theta) + B(r'\cosh\varphi\cosh\theta \\ &+ r\sinh\varphi\varphi'\cosh\theta + r\tau\cosh\varphi\sinh\theta)\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\begin{aligned}x_s^1 &= rr'' + \sinh^2\varphi - r\kappa\cosh\varphi\sinh\theta \\ x_s^2 &= r'\cosh\varphi\sinh\theta + rr'\varphi'\sinh\theta + rr'\kappa + r\tau\cosh\varphi\cosh\theta \\ x_s^3 &= r'\cosh\varphi\cosh\theta + r\tau\cosh\varphi\sinh\theta + rr'\varphi'\cosh\theta\end{aligned} \quad (4.4)$$

denilirse (4.3) denklemi,

$$x_s = \frac{\partial x}{\partial s} = x_s^1 T + x_s^2 N + x_s^3 B$$

şeklindedir.

$$x_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} = r \cosh \varphi \cosh \theta N + r \cosh \varphi \sinh \theta B$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} x_\theta^1 &= r \cosh \varphi \cosh \theta, \\ x_\theta^2 &= \cosh \varphi \sinh \theta, \end{aligned} \quad (4.5)$$

denilirse,

$$x_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} = x_\theta^1 N + x_\theta^2 B$$

olarak ifade edilebilir. Yukarıdaki (4.4), (4.5) bağıntıları göz önüne alınırsa birinci temel formun katsayıları aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$E = \langle x_s, x_s \rangle = r^2 \varphi'^2 + \cosh^2 \varphi + r^2 \kappa^2 \sinh^2 \theta + 2rr'' - 2r^2 \kappa \varphi' \sinh \theta - 2r \kappa \cosh \varphi \sinh \theta + r^2 r'^2 \kappa^2 \cosh^2 \varphi + r^2 \tau^2 \cosh^2 \varphi + 2r^2 r' \kappa \tau \cosh \varphi \cosh \theta$$

$$E = r^2 (\kappa^2 \cosh^2 \varphi \sinh^2 \theta + r'^2 \kappa^2 + \varphi'^2 + \tau^2 \cosh^2 \varphi - 2\varphi' \kappa \sinh \theta + 2r' \kappa \tau \cosh \varphi \cosh \theta) + \cosh^2 \varphi + 2(rr'' - r \kappa \cosh \varphi \sinh \theta)$$

$$F = \langle x_s, x_\theta \rangle = rr' \cosh^2 \varphi \sinh \theta \cosh \theta + r^2 \varphi' \sinh \varphi \cosh \varphi \sinh \theta \cosh \theta + r^2 \kappa \sinh \varphi \cosh \varphi \cosh \theta + r^2 \tau \cosh^2 \varphi \cosh^2 \theta - (rr' \cosh^2 \varphi \sinh \theta \cosh \theta + r^2 \varphi' \sinh \varphi \cosh \varphi \sinh \theta \cosh \theta + r^2 \tau \cosh^2 \varphi \sinh^2 \theta)$$

$$F = r^2 r' \kappa \cosh \varphi \cosh \theta + r^2 \tau \cosh^2 \varphi$$

$$G = \langle x_\theta, x_\theta \rangle = r^2 \cosh^2 \varphi \cosh^2 \theta - r^2 \cosh^2 \varphi \sinh^2 \theta = r^2 \cosh^2 \varphi$$

olur. Buradan

$$EG - F^2 = r^4 r''^2 + r^4 \kappa^2 \cosh^2 \varphi \sinh^2 \theta + r^2 \cosh^4 \varphi - 2r^4 r'' \kappa \cosh \varphi \sinh \theta - 2r^3 \kappa \cosh^3 \varphi \sinh \theta + 2r^3 r'' \cosh^2 \varphi$$

$$EG - F^2 = r^2 (rr'' - r \kappa \cosh \varphi \sinh \theta + \cosh^2 \varphi)^2$$

olur. Buradan

$$\|x_s \times x_\theta\| = \sqrt{EG - F^2} = r(rr'' - r\kappa \cosh\varphi \sinh\theta + \cosh^2\varphi)$$

bulunur. Şimdi M_-^{11} nin \mathbb{G} Gauss dönüşümünü hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \mathbb{G} &= \frac{x_s \times x_\theta}{\|x_s \times x_\theta\|} \\ &= \frac{rr'(rr'' - r\kappa \cosh\varphi \sinh\theta + \cosh^2\varphi)T + r\cosh\varphi \sinh\theta(rr'' - r\kappa \cosh\varphi \sinh\theta + \cosh^2\varphi)N}{(rr'' - r\kappa \cosh\varphi \sinh\theta + \cosh^2\varphi)} \\ &\quad + \frac{r\cosh\varphi \cosh\theta(rr'' - r\kappa \cosh\varphi \sinh\theta + \cosh^2\varphi)B}{(rr'' - r\kappa \cosh\varphi \sinh\theta + \cosh^2\varphi)} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Şimdi de ikinci temel form için \mathbb{G} Gauss dönüşümünün s ve θ ya göre kısmi türevi:

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_s &= \cosh\varphi\varphi'T + \sinh\varphi T' + \sinh\varphi\varphi'\sinh\theta N + \cosh\varphi \sinh\theta N' + \sinh\varphi\varphi'\cosh\theta B \\ &\quad + \cosh\varphi \cosh\theta B' \\ &= \cosh\varphi\varphi'T + \kappa \sinh\varphi N + \sinh\varphi\varphi'\sinh\theta N - \kappa \cosh\varphi \sinh\theta T + \tau \cosh\varphi \sinh\theta B \\ &\quad + \sinh\varphi\varphi'\cosh\theta B + \tau \cosh\varphi \cosh\theta N \\ &= T(r'' - \kappa \cosh\varphi \sinh\theta) + N(r'\kappa + r'\varphi'\sinh\theta + \tau \cosh\varphi \cosh\theta) \\ &\quad + B(\tau \cosh\varphi \sinh\theta + r'\varphi'\cosh\theta) \end{aligned}$$

$$\mathbb{G}_\theta = \cosh\varphi \cosh\theta N + r\cosh\varphi \sinh\theta B$$

dir. Yüzeyin ikinci temel formları da aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} L = \langle x_s, \mathbb{G}_s \rangle &= -rr'^2\kappa^2 \cosh^2\theta - r\tau^2 \cosh^2\varphi - 2rr'\kappa\tau \cosh\varphi \cosh\theta - r\varphi'^2 + r\kappa\varphi'\sinh\theta \\ &\quad - r'' + \kappa \cosh\varphi \sinh\theta + r\kappa\varphi'\sinh\theta - r\kappa^2 \sinh^2\theta \\ &= -r'' + \kappa \cosh\varphi \sinh\theta - r\kappa^2 \cosh^2\varphi \sinh^2\theta - rr'^2\kappa^2 - r\varphi'^2 - r\tau^2 \cosh^2\varphi \\ &\quad + 2r\varphi'\kappa \sinh\theta - 2rr'\kappa\tau \cosh\varphi \cosh\theta \end{aligned}$$

$$L = \langle x_s, \mathbb{G}_s \rangle = -r(\kappa^2 \cosh^2 \varphi \sinh^2 \theta + r'^2 \kappa^2 + \varphi'^2 + \tau^2 \cosh^2 \varphi - 2\varphi' \kappa \sinh \theta + 2r' \kappa \tau \cosh \varphi \cosh \theta - (r'' - \kappa \cosh \varphi \sinh \theta)),$$

$$M = \langle x_\theta, \mathbb{G}_s \rangle = -rr' \kappa \cosh \varphi \cosh \theta - r\tau \cosh^2 \varphi,$$

$$N = \langle x_\theta, \mathbb{G}_\theta \rangle = -(r \cosh^2 \varphi \cosh^2 \theta - r \cosh^2 \varphi \sinh^2 \theta) = -r \cosh^2 \varphi.$$

Önerme 4.2 : M^{11} kanal yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$L = \frac{E - P_1}{-r}, \quad M = \frac{F}{-r}, \quad N = \frac{G}{-r}$$

ve

$$P_1 = rr'' - r\kappa \cosh \varphi \sinh \theta + \cosh^2 \varphi = rQ_1 + \cosh^2 \varphi, \\ Q_1 = r'' - \kappa \cosh \varphi \sinh \theta$$

alınırsa,

$$EG - F^2 = r^2 P_1^2, \quad LN - M^2 = -r P_1 Q_1$$

şeklindedir. Yukarıdaki bağıntılar yerine yazıldığında,

$$L = \frac{r^2(\kappa^2 \cosh^2 \varphi \sinh^2 \theta + r'^2 \kappa^2 + \varphi'^2 + \tau^2 \cosh^2 \varphi - 2\varphi' \kappa \sinh \theta + 2r' \kappa \tau \cosh \varphi \cosh \theta)}{-r} \\ + \frac{\cosh^2 \varphi + 2(rr'' - r\kappa \cosh \varphi \sinh \theta) - (rr'' - r\kappa \cosh \varphi \sinh \theta + \cosh^2 \varphi)}{-r}$$

$$L = -r(\kappa^2 \cosh^2 \varphi \sinh^2 \theta + r'^2 \kappa^2 + \varphi'^2 + \tau^2 \cosh^2 \varphi - 2\varphi' \kappa \sinh \theta + 2r' \kappa \tau \cosh \varphi \cosh \theta) \\ - (r'' - \kappa \cosh \varphi \sinh \theta)$$

$$M = \frac{r^2 r' \kappa \cosh \varphi \cosh \theta - r^2 \tau \cosh^2 \varphi}{-r} = -rr' \kappa \cosh \varphi \cosh \theta - r\tau \cosh^2 \varphi$$

$$N = \frac{r^2 \cosh^2 \varphi}{-r} = -r \cosh^2 \varphi$$

$$\begin{aligned} LN - M^2 &= \frac{E - P_1}{-r} \cdot \frac{G}{-r} - \left(\frac{F}{-r} \right)^2 = \frac{EG - P_1G - F^2}{r^2} = \frac{r^2P_1^2 - P_1r^2\cosh^2\varphi}{r^2} \\ &= P_1(P_1 - \cosh^2\varphi) = -rP_1Q_1 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda Önerme 4.2 yardımıyla M_1^{11} in gauss eğriliği K ile ortalama eğriliği H aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{rP_1Q_1}{r^2P_1^2} = -\frac{Q_1}{rP_1'} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} H &= -\frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = \frac{EG - F^2 + EG - F^2 - P_1G}{2r^2(EG - F^2)} = \frac{2r^2P_1^2 - r^2P_1\cosh^2\varphi}{2r^4P_1^2} \\ &= \frac{r^2P_1(2P_1 - \cosh^2\varphi)}{2r^4P_1^2} = \frac{2P_1 - \cosh^2\varphi}{2r^2P_1}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Şimdi ise $c(s)$ merkez eğrisinin ikinci çeşit spacelike eğrisi olduğu durumu inceleyelim. O halde (4.1) deki ifadeler,

$$\lambda(s) = r(s)r'(s)$$

$$\mu(s, \theta) = r(s)\sqrt{1 + r'^2(s)}\cosh\theta$$

$$\omega(s, \theta) = r(s)\sqrt{1 + r'^2(s)}\sinh\theta$$

olarak alınırsa M_1^{12} kanal yüzeyinin parametrik denklemi:

$$x(s, \theta) = c(s) + r(s)(r'(s)T + \sqrt{1 + r'^2(s)}\cosh\theta N + \sqrt{1 + r'^2(s)}\sinh\theta B)$$

şeklindedir. Burada $c(s)$ eğrisinin yay uzunluğu s ile parametreleştirilmiş merkez eğrisidir ve $r'(s) = \sinh\varphi$ dir. M_1^{12} kanal yüzeyinin yeniden düzenlenmiş halde yazılışı aşağıdaki gibidir:

$$x(s, \theta) = c(s) + r(s)(\sinh\varphi T + \cosh\varphi\cosh\theta N + \cosh\varphi\sinh\theta B) \quad (4.8)$$

Kanal yüzeyini Frenet elemanları yardımı ile, yüzeyin birinci, ikinci temel formlarını ve Gauss dönüşümünü hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
x_s = \frac{\partial x}{\partial s} = c' + r' \sinh \varphi T + r' \cosh \varphi \cosh \theta N + r' \cosh \varphi \sinh \theta B + r \cosh \varphi \varphi' T \\
+ r \sinh \varphi \varphi' \cosh \theta N + r \sinh \varphi \varphi' \sinh \theta B + r \sinh \varphi T' \\
+ r \cosh \varphi \cosh \theta N' + r \cosh \varphi \sinh \theta B'
\end{aligned} \quad (4.9)$$

dir. Önerme 4.1 deki T' , N' , B' değerleri (4.9) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
x_s = T(1 + r' \sinh \varphi + r \cosh \varphi \varphi' - r \kappa \cosh \varphi \sinh \theta) + N(r' \cosh \varphi \sinh \theta \\
+ r \sinh \varphi \varphi' \sinh \theta + r \kappa \sinh \varphi + r \tau \cosh \varphi \cosh \theta) + B(r' \cosh \varphi \cosh \theta \\
+ r \sinh \varphi \varphi' \cosh \theta + r \tau \cosh \varphi \sinh \theta)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\begin{aligned}
x_s^1 &= rr'' + \cosh^2 \varphi - r \kappa \cosh \varphi \cosh \theta \\
x_s^2 &= r' \cosh \varphi \cosh \theta + rr' \kappa + rr' \varphi' \cosh \theta + rr' \kappa + r \tau \cosh \varphi \sinh \theta \\
x_s^3 &= r' \cosh \varphi \sinh \theta + r \tau \cosh \varphi \cosh \theta + rr' \varphi' \sinh \theta
\end{aligned} \quad (4.10)$$

denilirse (4.9) denklemi,

$$x_s = \frac{\partial x}{\partial s} = x_s^1 T + x_s^2 N + x_s^3 B$$

$$x_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} = r \cosh \varphi \sinh \theta N + r \cosh \varphi \cosh \theta B$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
x_\theta^1 &= r \cosh \varphi \sinh \theta, \\
x_\theta^2 &= r \cosh \varphi \cosh \theta,
\end{aligned} \quad (4.11)$$

denilirse,

$$x_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} = x_\theta^1 N + x_\theta^2 B$$

olarak ifade edilebilir. Yukarıdaki (4.10), (4.11) numaralı bağıntıları göz önüne alınırsa birinci temel formun katsayıları aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$E = \langle x_s, x_s \rangle = r^2 \varphi'^2 + \cosh^2 \varphi + r^2 \kappa^2 \cosh^2 \theta + 2rr'' + 2r^2 \kappa \varphi' \cosh \theta + 2r\kappa \cosh \varphi \cosh \theta \\ + r'^2 \kappa^2 \sinh^2 \theta + r^2 \tau^2 \cosh^2 \varphi - 2r^2 r' \kappa \tau \cosh \varphi \sinh \theta$$

$$E = r^2 (\varphi'^2 + \kappa^2 \cosh^2 \varphi + \tau^2 \cosh^2 \varphi + 2\varphi' \kappa \cosh \theta + \tau^2 \cosh^2 \varphi) + 2rr'' + \cosh^2 \varphi \\ + r'^2 \kappa^2 \sinh^2 \theta - 2r^2 r' \kappa \tau \cosh \varphi \sinh \theta + 2r\kappa \cosh \varphi \cosh \theta$$

$$F = \langle x_s, x_\theta \rangle = r^2 \tau \cosh^2 \varphi - r^2 r' \kappa \cosh \varphi \sinh \theta = r^2 (\tau \cosh^2 \varphi - r' \kappa \cosh \varphi \sinh \theta)$$

$$G = \langle x_\theta, x_\theta \rangle = r^2 \cosh^2 \varphi \sinh^2 \theta - r^2 \cosh^2 \varphi \cosh^2 \theta = r^2 \cosh^2 \varphi$$

olur. Buradan

$$EG - F^2 = r^4 r''^2 + r^4 \kappa^2 \cosh^2 \varphi \cosh^2 \theta + r^2 \cosh^4 \varphi + 2r^4 r'' \kappa \cosh \varphi \cosh \theta \\ + 2r^3 \kappa \cosh^3 \varphi \cosh \theta + 2r^3 r'' \cosh^2 \varphi \\ EG - F^2 = r^2 (rr'' + r\kappa \cosh \varphi \cosh \theta + \cosh^2 \varphi)^2$$

olur. Buradan da,

$$\|x_s \times x_\theta\| = \sqrt{EG - F^2} = r(rr'' + r\kappa \cosh \varphi \cosh \theta + \cosh^2 \varphi)$$

bulunur.

Şimdi M_-^{12} nin \mathbb{G} Gauss dönüşümünü hesaplayalım:

$$\mathbb{G} = \frac{x_s \times x_\theta}{\|x_s \times x_\theta\|} \\ = \frac{-rr'(rr'' + r\kappa \cosh \varphi \cosh \theta + \cosh^2 \varphi)T - r \cosh \varphi \cosh \theta (rr'' + r\kappa \cosh \varphi \cosh \theta + \cosh^2 \varphi)N \\ - \frac{r \cosh \varphi \sinh \theta (rr'' + r\kappa \cosh \varphi \cosh \theta + \cosh^2 \varphi)B}{r(rr'' + r\kappa \cosh \varphi \cosh \theta + \cosh^2 \varphi)}}{r(rr'' + r\kappa \cosh \varphi \cosh \theta + \cosh^2 \varphi)}$$

$$\mathbb{G} = \frac{x_s \times x_\theta}{\|x_s \times x_\theta\|} = -\sinh \varphi T - \cosh \varphi \cosh \theta N - \cosh \varphi \sinh \theta B$$

olarak bulunur. Şimdi de ikinci temel form için \mathbb{G} gauss dönüşümünün s ye ve θ ya göre kısmi türevi:

$$\mathbb{G}_s = \cosh \varphi \varphi' T + \sinh \varphi T' + \sinh \varphi \varphi' \cosh \theta N + \cosh \varphi \cosh \theta N' + \sinh \varphi \varphi' \sinh \theta B \\ + \cosh \varphi \sinh \theta B'$$

$$= \cosh\varphi\varphi'T - \kappa\sinh\varphi N + \sinh\varphi\varphi'\cosh\theta N - \kappa\cosh\varphi\cosh\theta T - \tau\cosh\varphi\cosh\theta B \\ - \sinh\varphi\varphi'\sinh\theta B + \tau\cosh\varphi\sinh\theta N$$

$$= T(-r'' - \kappa\cosh\varphi\sinh\theta) + N(r'\kappa - r'\varphi'\cosh\theta + \tau\cosh\varphi\sinh\theta) \\ + B(-\tau\cosh\varphi\cosh\theta - r'\varphi'\sinh\theta)$$

$$\mathbb{G}_\theta = -\cosh\varphi\sinh\theta N - \cosh\varphi\cosh\theta B$$

Yüzeyin ikinci temel formları da aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$L = -\langle x_s, \mathbb{G}_s \rangle = -r'^2\kappa^2\sinh^2\theta - r\tau^2\cosh^2\varphi + 2r'\kappa\tau\cosh\varphi\sinh\theta - r\varphi'^2 - 2r\kappa\varphi'\cosh\theta \\ - r'' + \kappa\cosh\varphi\cosh\theta - r\kappa^2\cosh^2\theta$$

$$M = -\langle x_\theta, \mathbb{G}_s \rangle = rr'\kappa\cosh\varphi\sinh\theta - r\tau\cosh^2\varphi$$

$$N = -\langle x_\theta, \mathbb{G}_\theta \rangle = r\cosh^2\varphi\sinh^2\theta - r\cosh^2\varphi\cosh^2\theta = -r\cosh^2\varphi.$$

Önerme 4.3: M_{-}^{12} kanal yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$L = \frac{E - P_2}{-r}, \quad M = \frac{F}{-r}, \quad N = \frac{G}{-r}$$

ve

$$P_2 = rr'' + r\kappa\cosh\varphi\cosh\theta + \cosh^2\varphi = r\mathbb{Q}_2 + \cosh^2\varphi, \\ \mathbb{Q}_2 = r'' + \kappa\cosh\varphi\cosh\theta$$

alınırsa,

$$EG - F^2 = r^2P_2^2, \quad LN - M^2 = -rP_2\mathbb{Q}_2$$

dir. Yukarıdaki bağıntılar yerine yazıldığında,

$$L = \frac{(r^2\varphi'^2 + \cosh^2\varphi + r^2\kappa^2\cosh^2\theta + 2rr'' + 2r\kappa\cosh\varphi\cosh\theta + 2r^2\kappa\varphi'\cosh\theta)}{-r} \\ + \frac{r^2\tau^2\cosh^2\varphi + r'^2\kappa^2\sinh^2\theta - 2r^2r'\kappa\tau\cosh\varphi\sinh\theta - (rr'' + r\kappa\cosh\varphi\cosh\theta + \cosh^2\varphi)}{-r}$$

$$L = -r\tau^2\cosh^2\varphi - r'^2\kappa^2\sinh^2\theta + 2r^2r'\kappa\tau\cosh\varphi\sinh\theta - r\varphi'^2 - r'' - 2r\kappa\varphi'\cosh\theta \\ - \kappa\cosh\varphi\cosh\theta - r\kappa^2\cosh^2\theta$$

$$M = \frac{r^2(\tau \cosh^2 \varphi - r' \kappa \cosh \varphi \sinh \theta)}{-r} = -r \tau \cosh^2 \varphi + r r' \kappa \cosh \varphi \sinh \theta$$

$$N = \frac{r^2 \cosh^2 \varphi}{-r} = -r \cosh^2 \varphi$$

$$\begin{aligned} LN - M^2 &= \frac{E - P_2}{-r} \cdot \frac{G}{-r} - \left(\frac{F}{-r} \right)^2 = \frac{EG - P_2 G - F^2}{r^2} = \frac{r^2 P_2^2 - P_2 r^2 \cosh^2 \varphi}{r^2} \\ &= P_2 (P_2 - \cosh^2 \varphi) = -r P_2 Q_2 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda Önerme 4.3 yardımıyla M_{-}^{12} kanal yüzeyinin K gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{r P_2 Q_2}{r^2 P_2^2} = -\frac{Q_2}{r P_2} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} H &= -\frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = \frac{EG - F^2 + EG - F^2 - P_2 G}{2r^2(EG - F^2)} = \frac{2r^2 P_2^2 - r^2 P_2 \cosh^2 \varphi}{2r^4 P_2^2} \\ &= \frac{r^2 P_2 (2P_2 - \cosh^2 \varphi)}{2r^4 P_2^2} = \frac{2P_2 - \cosh^2 \varphi}{2r^2 P_2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Teorem 4.1: M_{-}^{11} ve M_{-}^{12} kanal yüzeylerinin Gauss eğriliği K , ortalama eğriliği H olmak üzere,

$$H = -\frac{1}{2} \left(Kr - \frac{1}{r} \right)$$

bağıntısı vardır[22].

İspat: M_{-}^{11} kanal yüzeyi için (4.6) ve (4.7) bağıntıları kullanılarak teorem ispatlanır.

Teorem 4.2: $M_{-}^{11}(M_{-}^{12})$ kanal yüzeyinin açılabilir bir yüzey olması için, dairesel bir silindirin veya dairesel bir koninin bir parçasına eşdeğer olmalıdır[20].

İspat: M_{-}^{11} kanal yüzeyi açılabilir ise $K = 0$ olmalıdır. Bu nedenle (4.6) bağıntısı ile,

$$r'' - \kappa \cosh \varphi \sinh \theta = 0$$

olur. Buradan $r'' = 0$ ve $\kappa = 0$ dır. c_1 ve c_2 sabit olmak üzere $r(s) = c_1s + c_2$ dir. M_-^{11} kanal yüzeyi sırasıyla dairesel bir silindir ($c_1 = 0$) veya dairesel bir koni ($c_1 \neq 0$) olur.

Teorem 4.3: $M_-^{11}(M_-^{12})$ kanal yüzeyi minimal ise,

$$x(s, \theta) = (r(s)(\sinh\varphi(s) + s, r(s)\cosh\varphi(s)\sinh\theta, r(s)\cosh\varphi(s)\cosh\theta)$$

olacak şekilde bir dönel yüzeyin parçasıdır[20].

İspat: $M_-^{11}(M_-^{12})$ kanal yüzeyi minimal ise $H = 0$ olmalıdır. (4.7) bağıntısı ile,

$$2P_1 - \cosh^2\varphi = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$2rr'' - 2r\kappa\cosh\varphi\sinh\theta + \cosh^2\varphi = 0$$

olur. Böylece $r\kappa\cosh\varphi = 0$ ve $2rr'' + \cosh^2\varphi = 0$ elde edilir. $r \neq 0$, $\cosh\varphi \neq 0$ olduğundan $\kappa = 0$ ve M_-^{11} bir dönel yüzeydir. $2rr'' + \cosh^2\varphi = 0$ denklemi çözüldüğünde

$$s = c_2 \pm \int \frac{r}{\sqrt{c_1 - r}} dr, \quad (c_1 > r, c_2 \in \mathbb{R})$$

elde edilir. Tersisi de açıktır.

$c(s)$ merkez eğrisinin timelike eğrisi olduğu durumu inceleyelim. O halde Tanım 4.1 de,

$$\lambda(s) = r(s)r'(s)$$

$$\mu(s, \theta) = r(s)\sqrt{r'^2(s) - 1}\cos\theta$$

$$\omega(s, \theta) = r(s)\sqrt{r'^2(s) - 1}\sin\theta$$

değerleri yerine yazılırsa M_-^2 yüzeyinin parametrik denklemi,

$$x(s, \theta) = c(s) + r(s)(-r'(s)T + \sqrt{r'^2(s) - 1}\cos\theta N + \sqrt{r'^2(s) - 1}\sin\theta B)$$

şeklindedir. Burada $c(s)$ eğrisinin yay uzunluğu s ile parametreleştirilmiş merkez eğrisidir ve $-r'(s) = \cosh\varphi$ dir. Buna göre M_-^2 kanal yüzeyinin parametrik denklemi,

$$x(s, \theta) = c(s) + r(s)(\cosh\varphi T + \sinh\varphi\cos\theta N + \sinh\varphi\sin\theta B) \quad (4.14)$$

dir. Şimdi bu yüzeyi Frenet elemanları yardımı ile birinci, ikinci temel formlarını ve gauss dönüşümünü hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
x_s = \frac{\partial x}{\partial s} = c' + r' \cosh \varphi T + r' \sinh \varphi \cos \theta N + r' \sinh \varphi \sin \theta B + r \sinh \varphi \varphi' T & \quad (4.15) \\
+ r \cosh \varphi \varphi' \cos \theta N + r \cosh \varphi \varphi' \sin \theta B + r \cosh \varphi T' & \\
+ r \sinh \varphi \cos \theta N' + r \sinh \varphi \sin \theta B' &
\end{aligned}$$

dir. Önerme 4.1 deki T' , N' , B' değerleri (4.15) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
x_s = T(1 + r' \cosh \varphi + r \sinh \varphi \varphi' - r \kappa \sinh \varphi \cos \theta) + N(r' \sinh \varphi \cos \theta + r \cosh \varphi \varphi' \cos \theta & \\
+ r \kappa \cosh \varphi + r \tau \sinh \varphi \sin \theta) + B(r' \sinh \varphi \sin \theta + r \cosh \varphi \varphi' \sin \theta & \\
- r \tau \sinh \varphi \cos \theta) &
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
x_s^1 &= -rr'' - \sinh^2 \varphi + r \kappa \sinh \varphi \cos \theta \\
x_s^2 &= r' \sinh \varphi \cos \theta - rr' \varphi' \cos \theta - rr' \kappa + r \tau \sinh \varphi \sin \theta \\
x_s^3 &= r' \sinh \varphi \sin \theta - r \tau \sinh \varphi \cos \theta - rr' \varphi' \sin \theta
\end{aligned} \quad (4.16)$$

denilirse (4.15) denklemi,

$$x_s = \frac{\partial x}{\partial s} = x_s^1 T + x_s^2 N + x_s^3 B$$

$$x_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sinh \varphi \sin \theta N + r \sinh \varphi \cos \theta B$$

denklemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
x_\theta^1 &= -r \sinh \varphi \sin \theta, \\
x_\theta^2 &= r \sinh \varphi \cos \theta,
\end{aligned} \quad (4.17)$$

denilirse,

$$x_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} = x_\theta^1 N + x_\theta^2 B$$

olarak ifade edilebilir. Yukarıdaki (4.16), (4.17) numaralı bağıntılar göz önüne alınırsa birinci temel formun katsayıları aşağıdaki ifade edilebilir:

$$E = \langle x_s, x_s \rangle = r^2 \varphi'^2 + \sinh^2 \varphi + r^2 \kappa^2 \cos^2 \theta + 2r r'' - 2r^2 \kappa \varphi' \cos \theta - 2r \kappa \sinh \varphi \cos \theta \\ + r^2 r'^2 \kappa^2 \sinh^2 \varphi + r^2 \tau^2 \sinh^2 \varphi + 2r^2 r' \kappa \tau \sinh \varphi \sin \theta$$

$$F = r^2 r' \kappa \sinh \varphi \sin \theta + r^2 \tau \sinh^2 \varphi$$

$$G = \langle x_\theta, x_\theta \rangle = r^2 \sinh^2 \varphi \sin^2 \theta - r^2 \sinh^2 \varphi \cos^2 \theta = r^2 \sinh^2 \varphi$$

olur. Buradan

$$EG - F^2 = r^4 r''^2 + r^4 \kappa^2 \sinh^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2 \sinh^4 \varphi - 2r^4 r'' \kappa \sinh \varphi \cos \theta \\ - 2r^3 \kappa \sinh^3 \varphi \cos \theta + 2r^3 r'' \sinh^2 \varphi \\ EG - F^2 = r^2 (r r'' - r \kappa \sinh \varphi \cos \theta + \sinh^2 \varphi)^2$$

olur. Böylece,

$$\|x_s \times x_\theta\| = \sqrt{EG - F^2} = r(r r'' - r \kappa \sinh \varphi \cos \theta + \sinh^2 \varphi)$$

bulunur.

Şimdi M_2^- nin \mathbb{G} Gauss dönüşümünü hesaplayalım:

$$\mathbb{G} = \frac{x_s \times x_\theta}{\|x_s \times x_\theta\|} \\ = \frac{r r' (r r'' - r \kappa \sinh \varphi \cos \theta + \sinh^2 \varphi) T - r \sinh \varphi \cos \theta (r r'' - r \kappa \sinh \varphi \cos \theta + \sinh^2 \varphi) N \\ r (r r'' - r \kappa \sinh \varphi \cos \theta + \sinh^2 \varphi)}{r (r r'' - r \kappa \sinh \varphi \cos \theta + \sinh^2 \varphi)} \\ = - \frac{r \sinh \varphi \sin \theta (r r'' - r \kappa \sinh \varphi \cos \theta + \cosh^2 \varphi) B}{r (r r'' - r \kappa \sinh \varphi \cos \theta + \sinh^2 \varphi)}$$

veya

$$\mathbb{G} = \frac{x_s \times x_\theta}{\|x_s \times x_\theta\|} = -\cosh \varphi T - \sinh \varphi \cos \theta N - \sinh \varphi \sin \theta B$$

olarak bulunur. Şimdi de ikinci temel form için \mathbb{G} gauss dönüşümünün s ye ve θ ya göre kısmi türevi:

$$\mathbb{G}_s = -\sinh \varphi \varphi' T - \cosh \varphi T' - \cosh \varphi \varphi' \cos \theta N - \sinh \varphi \cos \theta N' - \cosh \varphi \varphi' \sin \theta B \\ - \sinh \varphi \sin \theta B' \\ = -\sinh \varphi \varphi' T - \kappa \cosh \varphi N - \cosh \varphi \varphi' \cos \theta N - \kappa \sinh \varphi \cos \theta T + \tau \sinh \varphi \cos \theta B \\ - \cosh \varphi \varphi' \sin \theta B - \tau \sinh \varphi \sin \theta N$$

$$\mathbb{G}_\theta = \sinh\varphi \sin\theta N - \sinh\varphi \cos\theta B$$

dir. Yüzeyin ikinci temel formları da aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$L = -\langle x_s, \mathbb{G}_s \rangle = -r'' + \kappa \sinh\varphi \cos\theta - rr'^2 \kappa^2 \sin^2\theta - r\kappa^2 \cos^2\theta - r\varphi'^2 \\ - r\tau^2 \sinh^2\varphi + 2r\varphi' \kappa \cos\theta - 2rr' \kappa \tau \sinh\varphi \sin\theta$$

$$M = -\langle x_\theta, \mathbb{G}_s \rangle = -rr' \kappa \sinh\varphi \sin\theta - r\tau \sinh^2\varphi$$

$$N = -\langle x_\theta, \mathbb{G}_\theta \rangle = -(r \sinh^2\varphi \sin^2\theta - r \sinh^2\varphi \cos^2\theta) = -r \sinh^2\varphi.$$

Önerme 4.4 : M^2 kanal yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$L = \frac{E - P_3}{-r}, \quad M = \frac{F}{-r}, \quad N = \frac{G}{-r}$$

ve

$$P_3 = rr'' - r\kappa \sinh\varphi \cos\theta + \sinh^2\varphi = rQ_3 + \sinh^2\varphi,$$

$$Q_3 = r'' - \kappa \sinh\varphi \cos\theta$$

alınırsa

$$EG - F^2 = r^2 P_3^2, \quad LN - M^2 = r^2 P_3 Q_3$$

olur. Yukarıdaki eşitlikler yerine yazıldığında,

$$L = \frac{r^2(\kappa^2 \cos^2\theta + r'^2 \kappa^2 \sin^2\theta + \varphi'^2 + \tau^2 \sinh^2\varphi - 2\varphi' \kappa \cos\theta + 2r' \kappa \tau \sinh\varphi \sin\theta)}{-r} \\ + \frac{\sinh^2\varphi + 2(rr'' - r\kappa \sinh\varphi \cos\theta) - (rr'' - r\kappa \sinh\varphi \cos\theta + \sinh^2\varphi)}{-r}$$

$$L = -r\varphi'^2 - r\kappa^2 \cos^2\theta + 2r\varphi' \kappa \cos\theta - r\tau^2 \sinh^2\varphi - rr'^2 \kappa^2 \sin^2\theta \\ - 2rr' \kappa \tau \sinh\varphi \sin\theta - (r'' - \kappa \sinh\varphi \cos\theta)$$

$$M = \frac{r^2 r' \kappa \sinh\varphi \sin\theta + r^2 \tau \sinh^2\varphi}{-r} = -rr' \kappa \sinh\varphi \sin\theta - r\tau \sinh^2\varphi$$

$$N = \frac{r^2 \sinh^2 \varphi}{-r} = -r \sinh^2 \varphi$$

$$\begin{aligned} LN - M^2 &= \frac{E - P_3}{-r} \cdot \frac{G}{-r} - \left(\frac{F}{-r} \right)^2 = \frac{EG - P_3 G - F^2}{r^2} = \frac{r^2 P_3^2 - P_3 r^2 \sinh^2 \varphi}{r^2} \\ &= P_3 (P_3 - \sinh^2 \varphi) = r P_3 Q_3 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanmıştır. Önerme 4.4 yardımıyla M^2 nin Gauss eğriliği K ile ortalama eğriliği H için,

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{r P_3 Q_3}{r^2 P_3^2} = -\frac{Q_3}{r P_3}, \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} H &= -\frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = \frac{EG - F^2 + EG - F^2 - P_3 G}{2r^2(EG - F^2)} = \frac{2r^2 P_3^2 - r^2 P_3 \sinh^2 \varphi}{2r^4 P_3^2} \\ &= \frac{r^2 P_3 (2P_3 - \cosh^2 \varphi)}{2r^4 P_3^2} = \frac{2P_3 - \sinh^2 \varphi}{2r^2 P_3}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

bağıntıları verilebilir.

Teorem 4.4 : M^2 nin Gauss eğriliği K , ortalama eğriliği H arasında,

$$H = -\frac{1}{2} \left(Kr - \frac{1}{r} \right)$$

bağıntısı vardır[20].

İspat: M^2 kanal yüzeyi için (4.18) ve (4.19) bağıntıları kullanılarak, teorem ispatlanır.

Sonuç 4.1: M^2 kanal yüzeyi, sıfırdan farklı sabit gauss eğriliği olan bir kanal yüzeyi olsun.

O halde pozitif sabit gauss eğriliği olan bir döneel yüzey parametrik denklemi,

$$x(s, \theta) = (r(s) \sinh \varphi(s) \sin \theta, r(s) \sinh \varphi(s) \cos \theta, r(s) \cosh \varphi(s) + s),$$

burada $r(s)$ için,

$$s = c_2 \pm \int \sqrt{\frac{r^2 + b}{r^2 + b + c_1}} dr, \quad (c_1 > -r^2 - b, c_2 \in \mathbb{R})$$

dir.

Böylece aşağıdaki sonuç ve teoremleri verilebilir:

Sonuç 4.2: M_-^2 kanal yüzeyinin sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğine sahip değildir.

Teorem 4.5: M_-^2 kanal yüzeyi bir dairesel koni ise, açılabilir bir yüzeydir[20].

İspat: M_-^2 kanal yüzeyi açılabilir ise, $K \equiv 0$ olmalıdır. (4.18) bağıntısı ile $\mathbb{Q}_3 \equiv 0$ elde edilir. Daha sonra buradan,

$$r'' - \kappa \sinh \varphi \cos \theta = 0$$

olur. Buradan $r'' = 0$ ve $\kappa = 0$ dir. c_1 ve c_2 sabit olmak üzere $r(s) = c_1 s + c_2$ dir. Eğer $|c_1| \leq 1$ olursa denklemini bir çelişki ifade eder. Bu nedenle, M_-^2 kanal yüzeyi bir dairesel koni ($|c_1| > 1$) olur.

Teorem 4.6: Aşağıdaki M_-^2 kanal yüzeyi minimal ise,

$$x(s, \theta) = (r(s)(\sinh \varphi(s) \sin \theta, r(s) \sinh \varphi(s) \cos \theta, r(s) \cosh \varphi(s) + s)$$

olacak şekilde bir dönel yüzeyin parçasıdır. Buradaki $r(s)$ için,

$$s = c_2 \pm \int \sqrt{\frac{r}{c_1 - r}} dr, \quad (c_1 > r, c_2 \in \mathbb{R})$$

sağlanır[20].

Şimdi de $c(s)$ merkez eğrisinin null tipinde spacelike eğrisi olduğu durumu inceleyelim. O halde Tanım 4.1 de,

$$\lambda(s) = r(s)r'(s) \quad (4.20)$$

$$2\mu(s, \theta)\omega(s, \theta) = -r^2(s)(1 + r'^2(s))$$

değerleri yerine yazılırsa M_-^{13} yüzeyinin parametrik denklemi,

$$x(s, \theta) = c(s) + r(s)r'(s)T + \mu(s, \theta)N + \omega(s, \theta)B \quad (4.21)$$

ile verilir. Şimdi bu yüzeyi Frenet elemanları yardımı ile birinci, ikinci temel formlarını ve gauss dönüşümünü hesaplayalım:

$$x_s = \frac{\partial x}{\partial s} = c' + r'^2 T + rr'' T + rr' T' + \mu_s N + \mu N' + \omega_s B + \omega B' \quad (4.22)$$

dir. T' , N' , B' değerleri (4.22) de yerine yazılırsa,

$$x_s = T(1 + r'^2 + rr'' - \omega) + N(rr' + \mu + \mu\kappa) + B(\omega_s - \omega\kappa)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned} U_1(s, \theta) &= 1 + r'^2 + rr'' - \omega, \\ V_1(s, \theta) &= rr' + \mu + \mu\kappa, \\ W_1(s, \theta) &= \omega_s - \omega\kappa \end{aligned} \quad (4.23)$$

denilirse (4.22) denklemi,

$$x_s = U_1(s, \theta)T + V_1(s, \theta)N + W_1(s, \theta)B$$

elde edilir. (4.20) numaralı bağıntıdan

$$\begin{aligned} \mu_\theta &= -\frac{\mu\omega_\theta}{\omega} \\ \mu_s &= \frac{-rr'(U_1 + \omega) - \mu\omega_s}{\omega} \end{aligned} \quad (4.24)$$

denilirse,

$$x_\theta = \mu_\theta N + \omega_\theta B \quad (4.25)$$

olarak ifade edilebilir. Yukarıdaki (4.23), (4.25) numaralı bağıntılar göz önüne alınırsa birinci temel formun katsayıları aşağıdaki ifade edilebilir:

$$E = U_1^2 + V_1 W_1 + V_1 W_1 = U_1^2 + 2V_1 W_1,$$

$$F = \mu_\theta W_1 + \omega_\theta V_1,$$

$$G = 2\mu_\theta \omega_\theta.$$

Buradan

$$EG - F^2 = \frac{r^2 \omega_\theta^2 U_1^2}{\omega^2}$$

olur. M^3 ün \mathbb{G} Gauss dönüşümü:

$$\mathbb{G} = \frac{x_s \times x_\theta}{\|x_s \times x_\theta\|} = -\frac{1}{r}(rr'T + \mu N + \omega B)$$

olarak bulunur. Şimdi de ikinci temel form için \mathbb{G} gauss dönüşümünün s ve θ ya göre kısmi türevi:

$$\mathbb{G}_s = \frac{1}{r^2} \{ (rr'^2 - rU_1 + r)T + (r'\mu - rV_1)N + (r'\omega - rW_1)B \},$$

$$\mathbb{G}_\theta = -\frac{1}{r}(\mu_\theta N + \omega_\theta B)$$

dir. Yüzeyin ikinci temel formları da aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$L = \frac{1}{r}(U_1^2 - U_1 + 2V_1W_1),$$

$$M = \frac{\omega_\theta}{\omega r}(\omega V_1 - \mu W_1),$$

$$N = \frac{2\mu_\theta \omega_\theta}{r}.$$

Önerme 4.5 : M^{13} kanal yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$L = \frac{E - U_1}{r}, \quad M = \frac{F}{r}, \quad N = \frac{G}{r}$$

ve

$$Y_1 = 1 + r'^2 - U_1 = \omega - rr''$$

alınırsa,

$$EG - F^2 = \frac{r^2 \omega_\theta^2 U_1^2}{\omega^2}, \quad LN - M^2 = -\frac{\omega_\theta^2 U_1 Y_1}{\omega^2}$$

olur. Yukarıdaki eşitlikler yerine yazıldığında,

$$L = \frac{U_1^2 + 2V_1W_1 - U_1}{r} = \frac{1}{r}(U_1^2 - U_1 + 2V_1W_1),$$

$$M = \frac{\mu_\theta W_1 + \omega_\theta V_1}{r} = \frac{\omega_\theta}{\omega r}(\omega V_1 - \mu W_1),$$

$$N = \frac{2\mu_\theta \omega_\theta}{r}$$

sağlandığı görülür. Önerme 4.5 yardımıyla M_-^{13} ün Gauss eğriliği K ile ortalama eğriliği H için aşağıdaki bağıntılar verilebilir.

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{Y_1}{r^2 U_1}, \quad (4.26)$$

$$H = -\frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = \frac{Y_1 - U_1}{2rU_1}. \quad (4.27)$$

Son olarak $c(s)$ merkez eğrisinin null eğrisi olduğu durumu inceleyelim. O halde Tanım 4.1 de,

$$\omega(s) = r(s)r'(s), \quad (4.28)$$

$$2\lambda(s, \theta)r(s)r'(s) + \mu^2(s, \theta) = -r^2(s)$$

değerleri yerine yazılırsa M_-^3 yüzeyinin parametrik denklemi,

$$x(s, \theta) = c(s) + \lambda(s, \theta)T + \mu(s, \theta)N + r(s)r'(s)B \quad (4.29)$$

dir.

Önerme 4.6 : M_-^3 kanal yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$L = \frac{E - W_2}{r}, \quad M = \frac{F}{r}, \quad N = \frac{G}{r}$$

ve

$$EG - F^2 = \frac{r^2 \lambda_\theta^2 W_2^2}{\mu^2}, \quad LN - M^2 = -\frac{\lambda_\theta^2 W_2 Y_2}{\mu^2}$$

burada

$$W_2 = rr'' - r'^2 - \mu, \quad Y_2 = W_2 - r'^2 = rr'' - \mu$$

şeklindedir. Bu eşitlikler Önerme 4.5 deki gibi sağlanmaktadır.

Böylece Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{Y_1}{r^2 U_1}, \quad (4.30)$$

$$H = -\frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = \frac{Y_1 - U_1}{2rU_1}. \quad (4.31)$$

Teorem 4.7 : M^3 ün Gauss eğriliği K ile ortalama eğriliği H arasında,

$$H = \frac{1}{2} \left(Kr - \frac{1}{r} \right)$$

bağıntısı vardır[20].

İspat: M^3 kanal yüzeyi için (4.30) ve (4.31) bağıntıları kullanılarak, teorem ispatlanır.

KAYNAKÇA

- [1] Do Carmo, M.P. (1976). Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., translated from the Portuguese.
- [2] Hacısalihoğlu, H.H. (2000). Diferensiyel Geometri, ciltCilt I,II, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları.
- [3] Kühnel, W. (2006). Differential geometry : curves - surfaces - manifolds, American Mathematical Society, Providence, R.I.
- [4] O'Neill, B. (2006). Elementary differential geometry, Elsevier Academic Press, Amsterdam Boston.
- [5] Hacısalihoğlu, H.H. (1994). Diferensiyel Geometri. (2.Cilt, 2.Baskı). Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınevi, Ankara, Türkiye.
- [6] Gray, A. (1998). Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. Second ed. CrcPress, 1053 p.,USA
- [7] Hacısalihođlu, H.H. (2005). 2 ve 3 Boyutlu Uzaylarda Analitik Geometri. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 453 s., Ankara.
- [8] O'Neill, B. (2006). Elementary Diferential Geometry. Revised second ed. Academic Press, 503 p.,USA.
- [9] Greub, W. H. (1981). Linear Algebra, New York Heidelberg Berlin.
- [10] Sodsiri, W. (2005). Ruled surfaces of weingarten type in minkowski 3-space (Doktora Tezi).Katholieke University Leuven Belgium.
- [11] Günter, A. (1994).Canal surface versus normal ringedsurface, CAGD, 11, 475-476.
- [12] Johnstone. (1993). A new intersection algorihm of cylides and swept surface using circle decomposition CAGD 11, 1-24.
- [13] Kim, Y.H., Liu, H., & Qian, J. (2016). Some characterizations of canal surfaces. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 53(2), 461–477.
- [14] Gross, A. (1994). Analyzing generalized tubes. Spie, 422-433.
- [15] Chen, B.-Y., Piccinni, P. (1987). Submanifolds with finite type Gauss map. Bull. Aust. Math. Soc. 35, 161–186
- [16] Dursun, U. (2007). Hypersurfaces with pointwise 1-type Gauss map. Taiwan. J. Math. 11, 1407–1416

- [17] Kim, Y.H., Turgay, N.C. (2013). Classification of helicoidal surfaces with L_1 -pointwise 1-type Gauss map. *Bull. Korean Math. Soc.* 50, 1345–1356
- [18] Qian, J., & Kim, Y. H. (2018). Some Classification of Canal Surfaces with the Gauss Map. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 42(6), 3261 -3272.
- [19] Fu, X., Jung, S. D., Qian, J., & Su, M. (2019). Geometric characterizations of canal surfaces in Minkowski 3-space I. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 56(4), 867-883.
- [20] Qian, J., Su, M., Fu, X., & Jung, S. D. (2019). Geometric characterizations of canal surfaces in Minkowski 3-space II. *Mathematics*, 7(8), 703



ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Hilal ŞAHİN

ÖĞRENİM DURUMU

- **Lisans** : 2018, İnönü Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği

