T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN HERMİTYEN SUBMERSİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe ERDOĞAN

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Cumali YILDIRIM

OCAK 2022

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN HERMİTYEN SUBMERSİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe ERDOĞAN
(36183614016)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Cumali YILDIRIM

OCAK 2022

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezimin konusunun belirlenmesinde, araştırma aşamasında ve tamamlanma sürecinde bana yardımcı olan tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Cumali YILDIRIM' a bana ayırdığı zaman ve sağladığı destek için teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim-öğretim hayatımda maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen yüksek lisans tez aşamasında göstermiş oldukları anlayış için aileme minnettarım.

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Hemen Hemen Hermityen Submersiyonlar " başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ayşe ERDOĞAN

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
$\mathbb{R}^n$	: $n-$boyutlu Öklid uzayı
M	: Manifold
$T_P(M)$	: p noktasındaki tanjant uzayı
$T_P^*(M)$	: p noktasındaki kotanjant uzayı
R	: Riemann eğrilik tensörü
S	: Ricci tensör
$<,>$	: İç çarpım
$[,]$	: Lie parantez operatörü
D	: Distribüsyon
∇	: Lineer konneksiyon
F_*	: F dönüşümünün türev dönüşümü
F^*	: Geri-çağırma (pull-back) dönüşümü
$f^{-1}(p)$	: Vektör demetinin lifi
$\chi(M)$	: M manifoldunun teğet vektör alanlarının uzayı
ϕ	: Temel 2-form
T_UV, A_XY	: O'Neill tensörleri

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HEMEN HEMEN HERMİTYEN
SUBMERSİYONLAR

AYŞE ERDOĞAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

60+vi sayfa

2022

Danışman: Doç. Dr. Cumali YILDIRIM

Yüksek lisans tezi olarak sunulan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmıdır ve bu bölümde konuyla ilgili daha önce yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, tez boyunca diğer bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar, Riemann manifoldları ve kompleks manifoldlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Riemann submersiyon geometrisi sunulmuş olup ilk olarak O'Neill tarafından tanımlanan T ve A tensörleri tanıtılmakta ve bu tensörlerin genel özellikleri, geometrik anlamları ve bu tensörler üzerindeki kovaryant türevleri incelenmektedir.

Dördüncü bölümde, Hermityen manifold, hemen hemen Hermityen manifold ve altmanifoldları verildikten sonra hemen hemen Hermityen submersiyonlar incelenmiştir. Daha sonra Hermityen submersiyonlar ile Riemann submersiyonların temel tensörlerle ilişkisi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Rieman manifold, temel tensörler, kovaryant türev, Riemann submersiyon, hemen hemen Hermityen submersiyon

ABSTRACT

Master Thesis

ALMOST HERMITIAN
SUBMERSION

Ayşe ERDOĞAN

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

60+vi pages

2022

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Cumali YILDIRIM

This study, presented as a master sciencethesis, consists of five chapter.

The first chapter is the introduction and this chapter mentions previous work in the subject.

In the second chapter, the basic concepts, Riemannian manifolds and complex manifolds that will be used in the other chapters throughout the sciencethesis are given.

In the third chapter, Riemannian submersion geometry is presented, firstly T and A tensors defined by O'Neill are introduced and their general properties, geometric meanings and covariant derivatives of these tensors are examined.

In the fourth chapter, the Hermitian manifold and its almost Hermitian and submanifolds are examined. Then, the relationship of almost Hermitian submersions with the basic tensors of Riemannian submersions was studied.

Keywords: Riemannian manifold, basic tensor, Riemannian submersion, almost Hermitian submersions

1. GİRİŞ

Manifoldlar teorisinde manifoldların geometrisini incelemede en sık kullanılan yöntem iki manifold arasında uygun bir dönüşüm tanımlamaktır. Bu tür dönüşümler arasında en önemlileri immersiyonlar ve en çok çalışma alanı bulan submersiyonlardır. Submersiyonun kelime anlamı bir şeyi tamamen saklamak ya da örtmektir. Fakat geometrideki anlamı bir manifolddan başka bir manifolda uygun dönüşümlerle bazı yapıları aktarmaktır.

Riemann submersiyonlar ile ilgili çalışmalar O'Neill tarafından 1966 yılındaki makalesi ile başlatıldı [1]. Bu makalede immersiyonlardaki ikinci temel form ve şekil operatörüne karşılık, Riemann submersiyonlar için O'Neill tensörleri olarak adlandırılan T ve A temel tensörleri tanımlandıktan sonra incelenmiştir. Bunlara ek olarak iki manifold arasındaki submersiyonlardan yararlanarak eğrilikleri karşılaştırılmıştır.

Submersiyonlarla ilgili çalışmalardan sonra, kompleks durumda iki hemen hemen Hermityen manifold arasındaki holomorfik submersiyon kavramı 1976 yılında B. Watson tarafından tanımlanmış ve çalışılmıştır [2]. Watson hemen hemen Hermityen submersiyonda total manifold üzerindeki kompleks yapıyı taban manifoldu üzerine taşıdığını gösterdi. Elde edilen bu sonuç keyfi olarak alınan bir hemen hemen Hermityen manifold üzerinde bu tür yapıları oluşturmak için Riemann submersiyon kavramının kullanışlı olduğunu gösterdi.

21. yüzyılın ikinci yarısından itibaren manifoldlar teorisi büyük bir gelişme göstermiştir. Manifoldların farklı özelliklerini ortaya çıkaran dönüşümlerden en çok çalışma alanı bulan submersiyon kavramı başta matematik ve fizik olmak üzere, birçok bilim dalında uygulama alanı bulmuştur.

Bu tezde ikinci ve üçüncü bölümde dördüncü bölümde kullanacağımız temel kavramlar, Riemann manifoldlar, kompleks manifoldlar ve Riemann submersiyonlar tanımlanmış ve incelenmiştir. İki alt bölümden oluşan dördüncü bölümde, birinci alt bölümde hemen hemen Hermityen manifoldlar tanımlanmış ve bazı sınıfları verilmiştir. Hemen hemen Hermityen manifold ile altmanifoldlarının T konfigürasyon tensörü ile olan bağlantısı açıklanmıştır. İkinci altbölümde hemen hemen Hermityen submersiyonlar ve yapıları tanımlandıktan sonra Hermityen submersiyonlar ile Riemann submersiyonların T ve A temel tensörleri ile olan ilişkisi incelenmiştir. Bu yüksek lisans tezi ile ilgili amacımız bu alanda temel tanım ve sonuçları kavratmak, literatüre katkı sağlamak ve son olarak daha sonraki araştırmacılara önemli bir kaynak oluşturmaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.0.1. *M bir diferensiyellenebir manifold ve $p \in M$ için*

$$V_P : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \rightarrow V_p(f) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}|_p$$

dönüşümü için $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

1. $V_p(\lambda f + \mu g) = \lambda V_p(p) + \mu V_p(g)$ *(Lineerlik)*

2. $V_p(f.g) = V_p(f)g(p) + f(p)V_p(g)$ *(Leibniz kuralı)*

*V_P dönüşümü yukarıdaki özellikleri sağlıyorsa bu dönüşüme p noktasının M manifoldu üzerindeki **tanjant vektörü** denir [3].*

Tanım 2.0.2. *M diferensiyellenebilir manifoldunun $p \in M$ için tanjant vektörler kümesini*

$$T_P(M) = \{V_P : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}\}$$

ile tanımlayalım. Bu küme $\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$(+) : T_P(M) \times T_P(M) \rightarrow T_P(M)$$

$$(V_P, U_P) \rightarrow V_P + U_P : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(V_p + U_p)[f] = V_p[f] + U_p[f]$$

ve

$$(\cdot) : \mathbb{R} \times T_p(M) \rightarrow T_p(M)$$

$$(\lambda, V_p) \rightarrow \lambda V_p$$

öyle ki, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ için

$$(\lambda V_p)(f) = \lambda V_p(f)$$

*özelliklerini sağlar ise yani; toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle tanımlanan M manifoldunun p noktasındaki $T_p(M)$ vektör uzayına **tanjant uzayı** denir [3].*

Tanım 2.0.3. *M manifoldu difererensiyellenebilir olsun. M manifoldunda tanımlanan*

$$X : M \to \bigcup_{p\in M} T_p(M)$$

*X diferensiyellenebilir dönüşümüne **vektör alanı** denir. M manifoldunun diferensiyellenebilir bütün vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilir. Tanjant vektörler ile vektör alanının bağlantısı bize vektör alanının da $C^\infty(M,\mathbb{R})$ ile bağlantılı olduğunu gösterir. Bu bağlantı ise $X \in \chi(M)$, $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ ve $p \in M$ olmak üzere*

$$(Xf)(p) = X_P(f)$$

şeklindedir [4].

Tanım 2.0.4. *M ve N sırasıyla m ve n boyutlu manifoldlar ve $F : M \to N$ bir dönüşüm olmak üzere, $p \in M$ noktasındaki harita (U,ξ) ve $F(p) \in N$ noktasının komşuluğundaki harita (W,ψ) olsun. Eğer $\xi(U) \subset \mathbb{R}^m$ den $\psi(W) \subset \mathbb{R}^n$ kümesine olan $\psi \circ F \circ \xi^{-1}$ dönüşümü diferensiyellenebiliyorsa F dönüşümü $p \in M$ noktasında **diferensiyellenebilirdir** denir [5].*

Tanım 2.0.5. *M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $F : M \to N$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $X \in T_p(M)$ ve $g \in C^\infty(N,\mathbb{R})$ için $F_{*p}(X)$ vektörüne karşılık gelen $F_{*p} : T_p(M) \to T_{F(p)}(N)$ dönüşümü $F_{*p}(X)(g) = X(g \circ F)$ eşitliğini sağlıyorsa **türev dönüşümü** olarak tanımlanır [6].*

Sonuç 2.0.1. *$F : M^m \to N^n$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. F nin türev dönüşümü F_{*p} ve $p \in M^m$olmak üzere, M^m nin ve N^n nin sırasıyla tanjant uzaylarının standart bazları $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \cdots \frac{\partial}{\partial x_m}|_p, \right\}$ ve $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}|_{F(p)}, \cdots \frac{\partial}{\partial y_n}|_{F(p)} \right\}$ olsun. Buna göre F_{*p} lineer dönüşümünün matrisi,*

$$(J_*F)\,p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}|_p & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}|_p & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}|_p \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}|_p & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}|_p & \cdot & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}|_p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}|_p & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}|_p & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}|_p \end{pmatrix}_{n\times m}$$

*olur. Bu matrise **Jakobiyen matrisi** denir [7].*

Tanım 2.0.6. *M diferensiyellenebilir bir manifold ve $p \in M$ olmak üzere, $T_p(M)$ vektör uzayının kotanjant uzayı $T_p^*(M)$ nın elemanları, $T_p(M)$ den $\mathbb{R}$ ye lineer dönüşümlerdir. Bu uzaya M manifoldunun p noktasındaki **kotanjant uzayı** (dual uzayı) denir. Kotanjant uzayının elemanlarına da p noktasındaki **kotanjant vektörler** denir. M manifoldunun her bir p noktasına bir dual vektör karşılık getiren dönüşüme **kotanjant vektör alanı** (dual vektör alanı) veya **1-form** denir [8].*

Tanım 2.0.7. *$F : M \to N$ C^{∞} dönüşüm olsun. $F_* : T_p(M) \to T_{F(p)}(N)$ türev dönüşümü olmak üzere*

$$F^* : T_{F(p)}(N^*) \to T_p(M^*)$$

F_* dönüşümünün duali

$$F^*\left(\sigma_{F(p)}\right)(X_p) = \sigma_{F(p)}(F_*(X_p))$$

*ile tanımlanır. Bu dönüşüme **geri çağırma dönüşümü** (pull-back map) denir [5].*

Önerme 2.0.1. *Eğer ϕ bir $r-$form ise*

$$(d\phi)(X_0, X_1, ..., X_r) = \frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i X_i\left(\phi\left(X_0, ..., \hat{X}_i, ..., X_r\right)\right) + \frac{1}{r+1}\sum_{0\leq i<j\leq r}(-1)^{i+j}\phi\left(\left[X_i, X_j\right], X_0, ..., \hat{X}_i, ..., \hat{X}_j, ..., X_r\right) \tag{2.0.1}$$

burada ˆ sembolü, terimin ihmal edildiği anlamına gelir. $r = 1$ ve $r = 2$ durumları $X, Y, Z \in \chi(M)$ için, ϕ bir $1-$form ise,

$$2(d\phi)(X,Y) = \{X(\phi(Y)) - Y(\phi(X)) - \phi([X,Y])\} \tag{2.0.2}$$

ϕ 2-form ise,

$$3(d\phi) = X(\phi(Y,Z)) + Y(\phi(Z,X)) + Z(\phi(X,Y)) - \phi([X,Y],Z) - \phi([Y,Z],X) - \phi([Z,X],Y) \tag{2.0.3}$$

şeklindedir [9].

Tanım 2.0.8. *M ve N C^{∞} manifoldlar ve $F_* : T_p(M) \to T_{F(p)}(N)$ türev dönüşümü olmak üzere, $F_*T_p(M)$ nın boyutu r ise F_{*p} türev dönüşümünün p noktasındaki rankı r olarak tanımlanır [10].*

Önerme 2.0.2. *M ve N C^{∞} manifoldları sırasıyla m ve n boyutlu ve $F_* : T_p(M) \to T_{F(p)}(N)$ türev dönüşümü olsun. Bu durumda $\forall p \in M$ için $rankF = boyM = m$ ise F_{*p} birebirdir denir [10] .*

Tanım 2.0.9. *$F : M \to N$ bir C^{∞} dönüşüm olsun. Bu durumda $\forall p \in M$ için F_{*p} birebir ise F ye **immersiyon** ve M manifolduna da **immersed altmanifold** denir [10].*

Tanım 2.0.10. *$F : M \to N$ dönüşümü bir immersiyon olsun. Bu durumda F birebir ise F ye **imbedding** ve M manifolduna da **imbedded altmanifold** denir [10].*

Tanım 2.0.11. *$\mathbb{R}$ nin bir I açık aralığından M manifolduna giden diferensiyellenebilir bir $\alpha : I \longrightarrow M$ dönüşümüne M manifoldunda bir **eğri** ve $\forall t \in I$ için $\alpha_{*t}\left(\frac{d}{dt}\right) \neq 0$ ise **diferensiyellenebilir eğri** denir [6].*

Tanım 2.0.12. *M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde $X,Y \in \chi(M)$ olmak üzere*

$$[,] : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X,Y) \to [X,Y]$$

öyle ki, $\forall g \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ için

$$[X,Y]\, g = X(Yg) - Y(Xg)$$

*şeklinde tanımlanan $[,]$ dönüşümüne **Lie parantez operatörü** denir [6].*

Önerme 2.0.3. *M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde $X,Y,Z \in \chi(M)$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ ve $f,g \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ olmak üzere, Lie parantez operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar:*

a) $[X,Y] = -[Y,X]$

b) $[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda [X,Z] + \mu [Y,Z]$

c) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ (Jacobi özdeşliği)

d) $[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ [11].

Tanım 2.0.13. *$F : M \longrightarrow N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. X vektör alanı M manifoldu ve X_* vektör alanı N manifoldu üzerinde vektör alanları olmak üzere, $p \in M$ için $F_*(X) = X_* \circ F$ eşitliğinde X ile X_* vektör alanlarına $F-$bağlı vektör alanları denir [12].*

Lemma 2.0.1. *$F : M \longrightarrow N$ diferensiyellenebilir dönüşüm olmak üzere, X ile X_* ve Y ile Y_* $F-$bağlı vektör alanları ise $[X,Y]$ ile $[X_*,Y_*]$ $F-$bağlıdır [12].*

Tanım 2.0.14. *M manifoldu üzerinde X bir vektör alanı ve φ_t de $1-$parametreli dönüşümlerin grubu olsun. Eğer K tensör alanı M üzerinde bir tensör alanı ise X vektör alanına göre **Lie türevi***

$$(L_X K)_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[K_p - (\tilde{\varphi} K)_p \right], \; p \in M \tag{2.0.4}$$

ile tanımlanır, burada $\tilde{\varphi}$, $\tau\left(\varphi^{-1}(p)\right)$ tensör cebirinden $\tau(p)$ tensör cebirine izomorfizmadır ve

$$(\tilde{\varphi}\phi)_p = \tilde{\varphi}\phi_{\varphi^{-1}(p)}$$

ile tanımlıdır [5].

Lemma 2.0.2. *M manifoldu üzerinde X bir vektör alanı olmak üzere, L_X ifadesi X vektör alanına göre Lie türevi olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:*

1. L_X, $\tau(M)$ cebirinin bir türevidir, yani L_X lineer ve $K, K' \in \tau(M)$ için

$$L_X\left(K \otimes K'\right) = (L_X K) \otimes K^{'} + K \otimes \left(L_X K'\right)$$

   dır.

2. L_X, tensörün mertebesini korur, yani $L_X\left(T_r^S(M)\right) \subseteq T_r^S(M)$.

3. L_X ile daraltma operatörü değişimlidir.

4. $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için $L_X f = X(f)$.

5. $Y \in \Gamma(TM)$ için

$$L_X Y = [X, Y] \tag{2.0.5}$$

   [5].

Tanım 2.0.15. *M diferensiyellenebilir manifoldu m−boyutlu ve $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere*

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X, Y) \to \nabla_X Y$$

dönüşümü $Xp = (x_{1,...,}x_m) \in T_p(M)$ ve $Y = (y_1, ..., y_m)\,|_p$vektör alanı $y_j : M \to \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq m$ için y_j diferensiyellenebilirdir. Bu durumda

$$\nabla_X Y = X_p[y_1], ..., X_p[y_m]$$

şeklinde tanımlı ifadeye Y nin X e göre ***kovaryant türevi*** *denir [7].*

Tanım 2.0.16. *M diferensiyellenebilir bir manifold, $X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere*

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X, Y) \to \nabla_X Y$$

kovaryant türevi ∇ M üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa ***afin*** *veya* ***lineer konneksiyon*** *denir:*

1. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

2. $\nabla_{(fX+gY)} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

3. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ [11].

Tanım 2.0.17. *M diferensiyellenebilir bir manifold ve* ∇, *M de afin konneksiyon olmak üzere*

$$T : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M) \tag{2.0.6}$$
$$(X,Y) \to T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

şeklinde tanımlı $(1,2)$ *tipindeki tensör alanına* ***torsiyon tensörü****dür [11].*

Tanım 2.0.18. *M diferensiyellenebilir bir manifold ve* ∇, *M de afin konneksiyon olmak üzere*

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M) \tag{2.0.7}$$
$$(X,Y,Z) \to R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

şeklinde tanımlı $(1,3)$ *tipindeki tensör alanına* ***eğrilik tensörü****dür [11].*

Tanım 2.0.19. *M diferensiyellenebilir bir manifold ve* ∇, *M de afin konneksiyon olmak üzere*

$T = 0$ *olması durumunda* ∇ *afin konneksiyonu* ***torsiyonsuzdur*** **(***burulmasız***)** *denir.*

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

dır. $R = 0$ *olması durumunda ise M manifoldu* ***flattır*** *(düzlemsel) denir*

$$\nabla_{[X,Y]} Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$$

dır [5].

Lemma 2.0.3. *M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde* $X,Y,Z \in \chi(M)$ *olmak üzere*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

özdeşliği ***1.Bianchi Özdeşliğidir*** *[13].*

Lemma 2.0.4. *M diferensiyellenebilir manifoldu üzerindeki torsiyonsuz konneksiyonu* ∇ *ve R,* ∇ *torsiyonsuz konneksiyonunun eğrilik tensör alanı olsun. Buna göre* $X,Y,Z \in \chi(M)$ *olmak üzere*

$$(\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)(X,Y) = 0$$

özdeşliği ***2.Bianchi Özdeşliğidir*** *[13].*

Lemma 2.0.5. *M diferensiyellenebilir manifoldu üzerindeki afin konneksiyon ∇ ve T tensör alanı olsun. Buna göre $X,Y \in \chi(M)$ olmak üzere*

$$T(X,Y) = -T(Y,X)$$

eşitliği geçerlidir [13].

Lemma 2.0.6. *M diferensiyellenebilir manifoldu üzerindeki afin konneksiyonu ∇ ve R tensör alanı olsun. Buna göre $X,Y,Z \in \chi(M)$ olmak üzere*

$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$$

eşitliği geçerlidir [13].

Tanım 2.0.20. *M $m-$boyutlu bir manifold olmak üzere, $p \in M$ için*

$$D : M \to \bigcup T_p(M)$$

$$D_p \subset T_p(M),\ boy(D_p) = r$$

*olarak tanımlı $r-$boyutlu D_p altuzayını karşılık getiren D dönüşümüne **distribüsyon** (dağılım) denir. X vektör alanı için $X_p \in D_p$ ise X vektör alanına D **distribüsyonuna aittir** denir [10].*

Tanım 2.0.21. *M $m-$boyutlu diferensiyellenebilir manifold, D distribüsyonu $r-$boyutlu ve $r \leq m$ olsun. Eğer $X,Y \in \Gamma(D)$ için $[X,Y] \in \Gamma(D)$ ise D distribüsyonuna **involutive**dir denir [10].*

Tanım 2.0.22. *M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde D, r-boyutlu bir distribüsyon olsun. N, M manifoldunun bir altmanifoldu olmak üzere, N altmanifoldunun her p noktasında D_p ile tanjant uzayı aynı ise N ye D distribüsyonunun **integral manifoldu** denir. Yani*

$$F : N \to M$$

$$F_* T_p(N) = D_p$$

*dır. Burada F immersiyon ve birebir olduğundan imbeddingdir. Ayrıca D distribüsyonunun N altmanifoldunu kapsayan başka bir integral manifoldu yoksa bu manifolda distribüsyonun **maksimal integral manifoldu** veya leaf denir [10].*

Teorem 2.0.1. *M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde D, $r-$boyutlu distribüsyon olsun. Buna göre her involutive distribüsyon integrallenebilirdir [10].*

Tanım 2.0.23. *M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde ∇ afin konneksiyon olsun. Buna göre $X,Y \in \Gamma(D)$ olmak üzere*

$$\nabla_X Y \in \Gamma(D)$$

*ise D **distribüsyonuna paraleldir** denir [10].*

2.1 Riemann Manifoldları

Tanım 2.1.1. *M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde X,Y,Z vektör alanlarının kümesi ve $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M,\mathbb{R})$$

*ile tanımlı $(0,2)$ tipindeki tensör alanı aşağıdaki şartları sağlıyorsa g bilineer dönüşümüne **Riemann metriği** (metrik tensör) ve Riemann metriği g ile birlikte (M,g) olarak ifade edilen manifolda da **Riemann manifoldu** denir:*

1. $g(X,Y) = g(Y,X)$

2. $\forall X$ *ve* $X \neq 0$ *için* $g(X,X) > 0$

3. $g(\lambda X + \mu Y, Z) = \lambda g(X,Z) + \mu g(Y,Z)$

   $g(X, \lambda Y + \mu Z) = \lambda g(X,Y) + \mu g(X,Z)$ [13].

Tanım 2.1.2. *Riemann manifoldu M olmak üzere, $X_p \in T_p(M)$ tanjant vektörünün uzunluğu*

$$\|X_p\| = \sqrt{\langle X,X \rangle_p}$$

şeklindedir [14].

Tanım 2.1.3. *Riemann manifoldu M ve $p \in M$ için sıfırdan farklı $X_P, Y_P \in T_p(M)$ tanjant vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere*

$$\langle X_p, Y_p \rangle = \|X_p\| \ \|Y_p\| \ \cos\theta, \ 0 \leq \theta \leq \pi$$

şeklindedir [14].

Tanım 2.1.4. *Riemann manifoldu M nin Riemann metriği $\langle , \rangle$ olsun. T vektör alanı $\{([a,b],\alpha)\}$ atlası ile verilirse $\alpha([a.b]) \subset M$ eğrisinin **yay uzunluğu***

$$|\alpha|_a^b = \int_a^b \sqrt{(T(t), T(t))} dt, \ t \in I$$

şeklindedir [14].

Tanım 2.1.5. *M Riemann manifoldu üzerinde ∇ lineer konneksiyon ve her $X,Y,Z \in \chi(M)$ olmak üzere*

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

eşitliğinde ∇ lineer konneksiyonuna ***metrik konneksiyon*** *(Riemann metriği) denir [6].*

Tanım 2.1.6. *M Riemann manifoldu üzerindeki ∇ lineer koneksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa* ***Riemann konneksiyonu*** *veya* ***Levi-Civita konneksiyonu*** *olarak adlandırılır. Buna göre $X,Y,Z \in \chi(M)$ olmak üzere*

1. *∇ simetriktir.*

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

2. *∇ Riemann metriği ile bağlantılıdır.*

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

Riemann metriğinden

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \tag{2.1.1}$$

$$Y\langle Z,X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \tag{2.1.2}$$

$$Z\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle \tag{2.1.3}$$

eşitlikleri geçerlidir. Denklem (2.1.1) ve (2.1.2) toplanır ve (2.1.3) çıkarılır, ∇ nın simetrik özelliğinden

$$2\langle Z, \nabla_Y X\rangle = \begin{array}{c} \{X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle \\ -\langle [X,Z], Y\rangle - \langle [Y,Z], X\rangle - \langle [X,Y], Z\rangle\} \end{array} \tag{2.1.4}$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitliğe ***Koszul formülü*** *denir [11].*

Tanım 2.1.7. *Riemann manifoldu M nin U komşuluğunda $x^1,\ldots,x^n$ koordinat sistemi ve koordinat sisteminin belirlediği ortonormal çatı alanı $\{X_1,\ldots,X_n\}$ olsun.*

$$\nabla_{X_k} X j = \sum_{i=1}^{n} \Gamma^i_{jk} X_i$$

olmak üzere

$$\Gamma^i_{jk} : U \overset{C^\infty}{\to} \mathbb{R}$$

fonksiyonlarına ***Christoffel sembolleri*** *denir [14].*

Tanım 2.1.8. *M bir Riemann manifoldu olmak üzere*

$$K:\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\to C^{\infty}(M,\mathbb{R})$$

$$(X,Y,U,V)\to K(X,Y,U,V)=g(R(X,Y)U,V)$$

şeklinde ifade edilen 4. basamaktan kovaryant tensör M üzerinde ***Riemann-Christoffel eğrilik tensörü****dür [14].*

Teorem 2.1.1. *M bir Riemann manifoldu, K Riemann eğrilik tensörü ve* ∇ *Riemann konneksiyonu olmak üzere, aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:*

1. $K(X,Y,U,V)=-K(Y,X,U,V)$,

2. $K(X,Y,U,V)=-K(X,Y,V,U)$,

3. $K(X,Y,U,V)=K(U,V,X,Y)$ *[14].*

Tanım 2.1.9. $\overline{M}$ *Riemann manifoldu ve* $p\in\overline{M}$ *için* $T_p\left(\overline{M}\right)$ *tanjant uzayının 2-boyutlu bir altuzayı M olsun. M nin bir tabanı* $\{X,Y\}$ *olmak üzere*

$$K(M)=\frac{g(R(X,Y)X,Y)}{g(X,X)\,g(Y,Y)-g(X,Y)^2}$$

şeklinde ifade edilen ve reel sayıya karşılık gelen $K(M)$ *ye M nin* ***kesit eğriliği*** *denir ve* $K(M)$ *değeri* $\bar{K}(X,Y)$ *ile gösterilir [14].*

Teorem 2.1.2. $\overline{M}$ *Riemann manifoldu ve* $p\in\overline{M}$ *için* $T_p\left(\overline{M}\right)$ *tanjant uzayının 2-boyutlu bir altuzayı M olmak üzere, M nin kesit eğriliği* $\bar{K}(X,Y)$ *için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:*

1. $\bar{K}(X,Y)=\bar{K}(Y,X)$,

2. $\bar{K}(X,Y)=\bar{K}(\lambda X,\mu Y)$, $\lambda\neq0$, $\mu\neq0$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

3. $\bar{K}(X,Y)=\bar{K}(X+\lambda Y,Y)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

4. $\bar{K}(X,Y)=\bar{K}(\lambda X+\mu Y,\alpha X+\beta Y)$, $\lambda\beta-\mu\alpha\neq0$ *[14].*

Tanım 2.1.10. *M* $m-$*boyutlu Riemann manifoldu olsun. M üzerindeki ortonormal vektör alanları* $z_1,\ldots,z_m$ *ve* $X,Y\in\chi(M)$ *olmak üzere*

$$S:\chi(M)\times\chi(M)\to C^{\infty}(M,\mathbb{R})$$

$$(X,Y) \to S(X,Y) = izR(.,X)Y$$

olarak tanımlı $(2,0)$*-mertebeli dönüşüm*

$$S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(z_i,X)Y,z_i)$$

olarak ifade edilen tensör alanına ***Ricci tensörü*** *denir [5].*

Tanım 2.1.11. *M $m-$boyutlu Riemann manifoldu ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı $T_p(M)$ olsun. $x = z_m$ $T_p(M)$ de bir birim vektör ve $\{z_1,...,z_{m-1}\}$ ortonormal bir çatı ve x ortogonal olmak üzere*

$$Ric_p(x) = \frac{1}{m-1}\sum_i \langle R(x,z_i)x,z_i \rangle,\ i = 1,...,m$$

$$K(p) = \frac{1}{m}\sum_j Ric_p(z_j) = \frac{1}{m-1}\sum_{ij} \langle R(z_i,z_j)z_i,z_j \rangle,\ j = 1,...,m$$

kesit eğriliklerinin toplamına sırasıyla ***Ricci eğriliği*** *ve p noktasındaki* ***skaler eğrilik*** *denir [11].*

Tanım 2.1.12. *M, $\overline{M}$ Riemann manifoldunun altmanifoldu olsun. Buna göre M nin* ***ortalama eğrilik vektör alanı***

$$H = \sum_{i=1}^{n} T_{E_i}E_i \tag{2.1.5}$$

olarak tanımlanır. Bu tanımda $\{E_1,...,E_n\}$, $\chi(M)$ üzerinde ortonormal bazdır. Eğer $H = 0$ ise M, $\overline{M}$ nin ***minimal bir altmanifoldu*** *ve $T = 0$ ise M, $\overline{M}$ nin* ***tamamen jeodezik altmanifoldudur*** *[15].*

2.2 Kompleks Manifoldlar

Tanım 2.2.1. *V bir reel vektör uzayı olmak üzere, V nin kompleksleştirilmesi olan $V^{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ vektör uzayına V nin* ***kompleksleştirilmiş uzayı*** *denir. $V^{\mathbb{C}}$ üzerinde aşağıdaki işlemleri tanımlayabiliriz:*

1. *$X + iY \in V^{\mathbb{C}}$ için gerek ve yeter şart $X,Y \in V$,*

2. *$(X_1 + iY_1) + (X_2 + iY_2) = X_1 + X_2 + i(Y_1 + Y_2)$ $(X_1,X_2,Y_1,Y_2 \in V)$,*

3. *$(\lambda + i\mu)(X + iY) = \lambda X - \mu Y + i(\mu X + \lambda Y)$ $(X,Y \in V;\ \lambda,\mu \in R)$ [16].*

Tanım 2.2.2. *V bir reel vektör uzayı ve I birim dönüşüm olsun.*

$$J : V \to V$$

J lineer endomorfizm dönüşümü V üzerinde $J^2 = -I$ eşitliğini sağlıyorsa J ye bir ***kompleks yapı*** *denir [16].*

V reel vektör uzayı ve J kompleks yapı olsun. Kompleks bir $\sigma = \lambda + i\mu$ sayısının V nin X elemanı ile çarpımını şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\sigma X = (\lambda + i\mu) X = \lambda X + \mu JX.$$

O zaman V $\mathbb{C}\,(kompleks)$ üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu da V nin reel boyutunun çift olduğunu gösterir. Tersi durumunda, n-boyutlu kompleks bir V vektör uzayı verildiğinde J lineer endomorfizmi tüm X elemanları için

$$JX = iX$$

olarak tanımlanır ve V reel vektör uzayı $2n$-boyutlu olarak göz önüne alındığında V nin kompleks bir yapısı J olur [16].

Tanım 2.2.3. $\mathbb{C}^n = \left\{ \left(z^1, ..., z^n \right) \right\}$ *ise, burada* $z^k = x + iy^k$, $(k = 1, ..., n)$ $\mathbb{R}^{2n} = \left\{ \left(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n \right) \right\}$ *olmak üzere*

$$J_0 : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$$

$$J_0 \left(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n \right) = \left(y^1, ..., y^n, -x^1, ..., -x^n \right)$$

dönüşümü tanımlanabilir. J_0, $\mathbb{R}^{2n}$ *üzerindeki* ***kanonik kompleks yapı*** *olarak adlandırılır ve matris olarak ifadesi*

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

dır. Kanonik kompleks yapı bazen

$$J_0 \left(x^1, y^1 ..., x^n, y^n \right) = \left(-y^1, x^1 ..., -y^n, x^n \right)$$

şeklinde de tanımlanır [16].

Örnek 2.2.1. $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *bir kompleks yapı ve* $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ *olmak üzere* $J\,(X)$ *eşitliğini hesaplarsak*

$$J(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

Önerme 2.2.1. *V $2n$-boyutlu bir reel vektör uzayı ve J, V üzerinde kompleks yapısı olsun. Buna göre $\{X_1, ..., X_n\}$ lineer bağımsız vektörler ise $\{X_1, ..., X_n, JX_1, ..., JX_n\}$ V için bir bazdır [13].*

Teorem 2.2.1. *V $2n$-boyutlu bir reel vektör uzayı ve J, V üzerinde kompleks yapısı olsun. V nin bir bazı $\{X_1,...,X_n,JX_1,...,JX_n\}$ ise*

$$Z_k = \frac{1}{2}(X_k - iJX_k),\ \overline{Z_k} = \frac{1}{2}(X_k + iJX_k)$$

dır. $V^{\mathbb{C}}$ nin bir bazı da $\left\{Z_1,...,Z_n,\overline{Z}_1,...,\overline{Z}_n\right\}$ $(k=1,...,n)$ olmak üzere

$$JZ_k = iZ_k,\ J\overline{Z_k} = -i\overline{Z_k}$$

eşitliği geçerlidir [13].

İspat:

$$Z_k = \frac{1}{2}(X_k - iJX_k),\overline{Z_k} = \frac{1}{2}(X_k + iJX_k)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} J(Z_k) &= \frac{1}{2}\left(JX_k - iJ^2X_k\right) \\ &= \frac{1}{2}(JX_k + iX_k) \\ &= i\left(\frac{1}{2}(X_k - iJX_k)\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$J(Z_k) = iZ_k \tag{2.2.1}$$

elde edilir. Benzer olarak

$$J\overline{Z_k} = -i\overline{Z_k} \tag{2.2.2}$$

elde edilir. Böylece denklem (2.2.1) ve (2.2.2) den $V^{\mathbb{C}}$ nin iki alt kümesi

$$\begin{aligned} V^{1,0} &= \left\{Z \in V^C : JZ = iZ\right\} \\ V^{0,1} &= \left\{Z \in V^C : JZ = -iZ\right\} \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

ile ifade edilebilir.

Tanım 2.2.4. *V reel vektör uzayının kotanjant uzayı V^* ın kompleksleştirilmişi $V^{*\mathbb{C}}$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} V^{*\mathbb{C}} = \omega_1 + i\omega_2 : V \to \mathbb{C},\ X \in V \text{ için} \\ X \to (\omega_1 + i\omega_2)(X) = \omega_1(X) + i\omega_2(X) \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

ile tanımlıdır [16].

Teorem 2.2.2. *V reel vektör uzayının kompleks yapısı J olsun. Buna göre V nin kotanjant uzayı V^* olmak üzere*

$$\begin{aligned} J^* : V^* &\to V^* \\ \omega &\to J^*(\omega)(X) = \omega(J(X)) \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

ile tanımlıdır [16].

Tanım 2.2.5. *V reel vektör uzayının kotanjant uzayı V^* ın kompleksleştirilmişi $V^{*\mathbb{C}}$ olsun. Böylece*

$$J^*(\omega) = i\omega \tag{2.2.6}$$

ile tanımlanan ω elemanına $(1,0)$ ***tipli*** *denir ve bu formdaki altuzayı $V_{1,0}$ ile tanımlanır. $V^{*\mathbb{C}}$ nın*

$$J^*(\omega) = -i\omega \tag{2.2.7}$$

ile tanımlanan ω elemanına $(0,1)$ ***tipli*** *denir ve bu formdaki altuzayı $V_{0,1}$ ile tanımlanır [16].*

Tanım 2.2.6. *$\mathbb{C}^n$ ile R^{2n} özdeş olduğundan $\mathbb{C}^n$ $2n-$boyutlu bir afin uzay gibi alınabilir. Buna göre bir p noktasında $\mathbb{C}^n$ nin tanjant ve kotanjant uzayları sırasıyla $T_{R^{2n}}(p)$, $T^*_{R^{2n}}(p)$*

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \frac{\partial}{\partial y_1}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_k}|_p, \frac{\partial}{\partial y_k}|_p \right\} \tag{2.2.8}$$

ve

$$\left\{ dx^1|_p, dy^1|_p, ..., dx^k|_p, dy^k|_p \right\} \tag{2.2.9}$$

standart bazlarına sahiptir. $z^k = x^k + iy^k$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_k}|_p &= \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_k}|_p - i\frac{\partial}{\partial y_k}|_p \right\} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}|_p &= \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_k}|_p + i\frac{\partial}{\partial y_k}|_p \right\} \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

ve

$$\begin{aligned} dz^k|_p &= dx^k|_p + idy^k|_p \\ d\bar{z}^k|_p &= dx^k|_p - idy^k|_p \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k}|_p &= \left\{ \frac{\partial}{\partial z_k}|_p + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}|_p \right\} \\ \frac{\partial}{\partial y_k}|_p &= i\left\{ \frac{\partial}{\partial z_k}|_p - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}|_p \right\} \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

ve

$$
\begin{aligned}
dx^k|_p &= \frac{1}{2}\left\{dz^k|_p + d\bar{z}^k|_p\right\}\\
dy^k|_p &= \frac{1}{2i}\left\{dz^k|_p - d\bar{z}^k|_p\right\}
\end{aligned}
\tag{2.2.13}
$$

olur. Böylece $T_{R^{2n}}(p)$, $T^*_{R^{2n}}(p)$ *uzaylarının standart bazları sırasıyla* $\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}|_p, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_k}|_p, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}|_p\right\}$, $\left\{dz^1|_p, d\bar{z}^1|_p, dz^k|_p, d\bar{z}^k|_p\right\}$ *dır [10].*

Tanım 2.2.7. *Kompleks düzlem* $\mathbb{C}^n$ *nin açık bir* U *altkümesinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon* f *olsun. Eğer* $f(p) = \Phi(p) + i\Psi(p)$ *fonksiyonu reel ve imajiner kısımları* $\mathbb{C}^1$ *sınıfından ise* f *ye* $\mathbb{C}^1$ ***sınıfındandır*** *denir [10].*

Tanım 2.2.8. $\mathbb{C}^n$ *nin açık bir* U *altkümesinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon* f *olsun.* $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$ *için* $p = z_0 \in D$ *noktasında*

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z_k) - f\left(z_{0_k}\right)}{\Delta z_k}$$

limit değeri her k *için var ve* z_k *ya* Δx_k, Δy_k *dan bağımsız ise kompleks değerli* f *fonksiyonuna* U *üzerinde* ***holomorfiktir*** *denir. Bu durumda*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = \frac{\partial \Psi}{\partial y_k} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \tag{2.2.14}$$

Cauchy-Riemann denklemlerine sahip oluruz [10].

Tanım 2.2.9. *M reel* $2n-$*boyutlu Hausdorf uzayı ve* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$*, M nin açık bir kümesi olsun. Bu durumda her* $p \in M$ *için*

$$\zeta_\alpha : U_\alpha \subset M \to W_\alpha \subset \mathbb{C}^n$$

homeomorfizması var ve $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ *olmak üzere*

$$\zeta_{\alpha\beta} = \eta_\alpha \circ \eta_\beta^{-1} : \eta_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \to \eta_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$$

$$\zeta_{\beta\alpha} = \eta_\beta \circ \eta_\alpha^{-1} : \eta_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \to \eta_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$$

dönüşümleri holomorfik ise M ye bir ***kompleks manifold*** *denir [10].*

Tanım 2.2.10. *M reel* $2n-$*boyutlu bir kompleks manifold ve* $\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial y_k}\right\}$, $T_p(M)$ *nin bir bazı olmak üzere*

$$
\begin{aligned}
J_p &: T_p(M) \to T_p(M)\\
J_p\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) &= \frac{\partial}{\partial y_k}\\
J_p\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) &= -\frac{\partial}{\partial x_k}
\end{aligned}
\tag{2.2.15}
$$

ile tanımlanan J dönüşümüne $T_p(M)$ *üzerinde* ***kompleks yapı****dır denir [17].*

Tanım 2.2.11. *M reel $2n-$boyutlu bir kompleks manifoldunun kotanjant uzayı $T_p^*(M)$ olsun. $p \in U \subset M$ olmak üzere $\left\{dx^k, dy^k\right\}$ $T_p^*(M)$ nin bir bazıdır. Bu durumda*

$$J_p^* : T_p^*(M) \to T_p^*(M)$$

$$J_p^*\left(dx^k\right) = -dy^k$$
$$J_p^*\left(dy^k\right) = dx^k$$

*ile tanımlanan J^* dönüşümüne $T_p^*(M)$ üzerinde **kompleks yapı**dır denir [17].*

Tanım 2.2.12. *M bir manifold ve $T_p(M)$, p noktasındaki tanjant uzayı olsun. $T_p^{\mathbb{C}}(M)$, $T_p(M)$ tanjant uzayının kompleksleştirilmişidir ve bu uzayın elemanlarına p noktasındaki **kompleks tanjant vektörler** denir [18].*

Tanım 2.2.13. *M reel $2n-$boyutlu bir kompleks manifoldunun tanjat uzayı $T_p(M)$ nin kompleksleştirilmişi $T_p^{\mathbb{C}}(M)$ olsun. $T_p^{\mathbb{C}}(M)$ nin bir bazı $\left\{\frac{\partial}{\partial z_k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right\}$ olmak üzere*

$$J_p\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right) = i\frac{\partial}{\partial z_k}$$
$$J_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right) = -i\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$$

*ile tanımlanan dönüşüme $T_p^{\mathbb{C}}(M)$ üzerinde bir **kompleks yapı**dır denir [13].*

Tanım 2.2.14. *M reel $2n-$boyutlu bir kompleks manifold üzerindeki tensör alanı J, M nin her p noktasında*

$$J_p : T_p(M) \to T_p(M)$$

*lineer dönüşümü $J^2 = -I$ eşitliğini sağlıyorsa J kompleks yapıya $T_p(M)$ üzerinde **hemen hemen kompleks yapı** denir. (M, J) ikilisine de **hemen hemen kompleks manifold** denir [18].*

Örnek 2.2.2. $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *bir kompleks ve $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6$ olmak üzere, $J(J(X))$ eşitliğini hesaplayalım:*

$$J(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_6 \\ x_5 \\ x_4 \\ -x_3 \\ -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

$$J(J(X)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_6 \\ x_5 \\ x_4 \\ -x_3 \\ -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \\ -x_5 \\ -x_6 \end{pmatrix}$$

$$J(J(X)) = -X$$

elde edilir. Buradan $J^2 = -I$ olduğu görülür. Böylece J tensör alanı hemen hemen kompleks yapıdır.

Teorem 2.2.3. *M kompleks manifold olmak üzere, kompleks her manifold M üzerinde hemen hemen kompleks bir yapı taşır [13].*

İspat: $\{z^1, ..., z^n\}$, M nin U komşuluğunda kompleks bir koordinat sistemi olsun. Bu durumda $z^j = x^j + iy^j$ $j = 1, ..., n$ dir. $T_p(M)$ nin bir endomorfizması olan J yi tanımlayalım.

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial y^j},\ J\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^j}$$

J nin tanımının, kompleks lokal koordinat sisteminin seçimine bağlı olmadığını gösterelim.

$T_p(M)$ nin kompleksleştirilmişi $T_p^{\mathbb{C}}(M)$ olsun. J yi $T_p^{\mathbb{C}}(M)$ ye genişletirsek

$$J\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right) = i\frac{\partial}{\partial z^j},\ J\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j}\right) = -i\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j}$$

buradan

$$\frac{\partial}{\partial z^j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} - i\frac{\partial}{\partial y^j}\right),\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}^j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} + i\frac{\partial}{\partial y^j}\right)$$

dır.

Şimdi $\{w^1, ..., w^n\}$ M nin U komşuluğunda başka bir kompleks lokal koordinat sistemi olsun. $w^k = u^k + iv^k$, $k = 1, ..., n$ $T_p(M)$ nin bir endomorfizması olan J' yi tanımlayalım.

$$J'\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right) = \frac{\partial}{\partial v^k},\ J'\left(\frac{\partial}{\partial v^k}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)$$

J' yi $T_p^{\mathbb{C}}(M)$ ye genişletirsek

$$J'\left(\frac{\partial}{\partial w^k}\right) = i\frac{\partial}{\partial w^k},\ J'\left(\frac{\partial}{\partial \overline{w}^k}\right) = -i\frac{\partial}{\partial \overline{w}^k}$$

olur. M bir kompleks manifold olduğundan lokal koordinat sistemleri arasında holomorfik f fonksiyonu vardır.

Böylece

$$\frac{\partial}{\partial w^k}=\sum_j \frac{\partial f^j}{\partial w^k}(p)\frac{\partial}{\partial z^j},\frac{\partial}{\partial \overline{w}^k}=\sum_j \frac{\partial \overline{f}^j}{\partial \overline{w}^k}(p)\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j}$$

Dolayısıyla $\frac{\partial}{\partial w^k}$ ve $\frac{\partial}{\partial \overline{w}^k}$ sırasıyla $\frac{\partial}{\partial z^j}$ ve $\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j}$ nin lineer bileşimi olduğundan

$$J\left(\frac{\partial}{\partial w^k}\right)=i\frac{\partial}{\partial w^k},\ J\left(\frac{\partial}{\partial \overline{w}^k}\right)=-i\frac{\partial}{\partial \overline{w}^k}$$

bulunur. Sonuç olarak, J ve $J^{'}$ aynıdır ve J lokal koordinat sisteminden bağımsızdır. $J^2=-I$ olduğu açıktır.

Tanım 2.2.15. *M ve $M^{'}$ kompleks manifoldlar olmak üzere*

$$f:(M,J)\to\left(M',J'\right)$$

*dönüşümü $f_*\circ J=J^{'}\circ f_*$ ise f dönüşümüne **hemen hemen kompleks**tir denir [18].*

Önerme 2.2.2. *M ve $M^{'}$ kompleks manifoldlar olmak üzere*

$$f:(M,J)\to\left(M',J'\right)$$

dönüşümünün holomorfik olması için gerek ve yeter şart f dönüşümünün hemen hemen kompleks olmasıdır [18].

İspat: J ve $J^{'}$ sırasıyla M ve $M^{'}$ manifoldlarının kompleks yapıları ve $p\in M$ için $f(p)\in M^{'}$ noktalarının komşuluklarında tanımlanan lokal koordiant sistemleri sırasıyla $\{z_1,...,z_n\}$ ve $\{w_1,...,w_n\}$ olsun. $w_k=u_k+iv_k$ olmak üzere

$$f_*u_j=\alpha^j\left(x^1,...,x^n,y^1,...,y^n\right)$$
$$f_*v_j=\beta^j\left(x^1,...,x^n,y^1,...,y^n\right)$$

şeklinde tanımlanırsa

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)=\sum_j\left\{\left(\frac{\partial \alpha^j}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial u_j}+\left(\frac{\partial \beta^j}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial v_j}\right\} \tag{2.2.16}$$
$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)=\sum_j\left\{\left(\frac{\partial \alpha^j}{\partial y_k}\right)\frac{\partial}{\partial u_j}+\left(\frac{\partial \beta^j}{\partial y_k}\right)\frac{\partial}{\partial v_j}\right\}$$

elde edilir. (2.2.16) denklemlerine J uygulanırsa

$$f_*J\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)=\sum_j\left\{\left(\frac{\partial \alpha^j}{\partial y_k}\right)\frac{\partial}{\partial u_j}+\left(\frac{\partial \beta^j}{\partial y_k}\right)\frac{\partial}{\partial v_j}\right\} \tag{2.2.17}$$
$$f_*J\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)=-\sum_j\left\{\left(\frac{\partial \alpha^j}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial u_j}+\left(\frac{\partial \beta^j}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial v_j}\right\}$$

$f_* \circ J$ (2.2.17) denklemi elde edilir. $J^{'} \circ f_*$ uygulanırsa

$$J^{'} f_* \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \sum_j \left\{ \left(\frac{\partial \alpha^j}{\partial x_k}\right) \frac{\partial}{\partial v_j} - \left(\frac{\partial \beta^j}{\partial x_k}\right) \frac{\partial}{\partial u_j} \right\} \tag{2.2.18}$$

$$J^{'} f_* \left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = \sum_j \left\{ \left(\frac{\partial \alpha^j}{\partial y_k}\right) \frac{\partial}{\partial v_j} - \left(\frac{\partial \beta^j}{\partial x_k}\right) \frac{\partial}{\partial u_j} \right\}$$

elde edilir. $f_* \circ J = J^{'} \circ f_*$ eşitliği göz önüne alınırsa (2.2.17) ve (2.2.18) denklemlerinden

$$\frac{\partial \alpha^j}{\partial x_k} = \frac{\partial \beta^j}{\partial y_k} \text{ ve } \frac{\partial \alpha^j}{\partial y_k} = -\frac{\partial \beta^j}{\partial x_k}$$

olur. Bunlar Cauchy-Riemann denklemleridir.

Tanım 2.2.16. *$D^r(M)$, M manifoldunun $r-$formlarının uzayı olsun. $D^r(M)$ nin kompleksleştirilmişi $\mathbb{C}^r(M)$ nin reel $r-$formları $\omega_1, \omega_2 \in D^r(M)$ için $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ olmak üzere, $\omega \in \mathbb{C}^r(M)$ ye **kompleks** $r-$**form** (anti-simetrik $r-$lineer dönüşüm) denir. M manifoldu üzerinde kompleks $r-$form ω, $p \in M$ de $\Lambda^r T_p^{*C}(M)$*

$$T_p^{\mathbb{C}}(M) \times ... \times T_p^{\mathbb{C}}(M) \to \mathbb{C}$$

şeklinde gösterilir [13].

Tanım 2.2.17. *Kompleks $r-$formun daha genelleştirilmişi olarak kompleks tensör alanını reel tensör alanlarının kompleksleştirilmişi olarak tanımlayabiliriz. Yani (r,s) mertebeli bir kompleks tensör alanı*

$$T^{\mathbb{C}}|_p = \underbrace{T_p^{\mathbb{C}}(M) \times ... \times T_p^{\mathbb{C}}(M)}_{r-tane} \times \underbrace{T_p^{*\mathbb{C}}(M) \times ... \times T_p^{*\mathbb{C}}(M)}_{s-tane} \to \mathbb{C}$$

dir. $T_p^{*\mathbb{C}}(M)$ için $\mathbb{C}(M)$ ifade edilirse, M üzerinde kompleks diferensiyel formların uzayı

$$\mathbb{C}(M) = \mathbb{C}^r(M) = \sum_{p,q=0}^{n} \mathbb{C}^{p,q}(M), \; \mathbb{C}^r(M) = \sum_{p+q=r} \mathbb{C}^{p,q}(M)$$

*dir. $\mathbb{C}^{p,q}(M)$ uzayının elemanına (p,q) **tipinde kompleks form** denir [13].*

Tanım 2.2.18. *M kompleks manifold olmak üzere, kompleks $r-$form ω $(1,0)$ tipinde ise $Z \in T_p^{0,1}(M)$ için gerek ve yeter şart $\omega(Z) = 0$ ve aynı şekilde ω $(0,1)$ tipinde ise $Z \in T_p^{1,0}(M)$ için $\omega(Z) = 0$ dır [13].*

Tanım 2.2.19. *(M,J) hemen hemen kompleks bir manifold ve $X,Y \in \chi(M)$ olmak üzere*

$$N(X,Y) = [JX,JY] - J[X,JY] - J[JX,Y] - [X,Y] \tag{2.2.19}$$

*olarak ifade edilen $(1,2)$ tipindeki tensör alanına **Nijenhuis** (veya torsiyon) **tensör alanı** denir [16].*

Teorem 2.2.4. (M,J) *hemen hemen kompleks manifoldu üzerindeki J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilirdir gerek ve yeter şart Nijenhuis tensör alanı sıfırdır [16].*

İspat: $\left(x^1,...,x^n\right)$ M üzerinde lokal koordinat sistemi olsun. Bununla ilgili olarak N nin N^i_{jk} bileşenleri,

$$N^i_{jk} = \sum_{h=1}^{2n} \left(J^h_j \partial_h J^i_k - J^h_k \partial_h J^i_j - J^i_h \partial_j J^h_k + J^i_h \partial_k J^h_j\right)$$

burada J^i_j, J nin bileşenlerini belirtir. J, M üzerinden kompleks bir yapı ve J nin bileşenleri sabit olduğundan $N^i_{jk} = 0$ dır.

Tanım 2.2.20. (M,J) *hemen hemen kompleks manifoldu üzerindeki J hemen hemen kompleks bir yapı olmak üzere, her X vektör alanı için*

$$L_X J = 0$$

olması durumunda L_X ifadesi X e göre Lie türevidir ve X vektör alanına J hemen hemen kompleks yapısının ***infinitesimal otomorfizmi*** *denir [13].*

Önerme 2.2.3. (M,J) *hemen hemen kompleks bir manifoldu üzerindeki J hemen hemen kompleks bir yapı olmak üzere, X vektör alanı infinitesimal otomorfizmdir gerek ve yeter şart her X,Y vektör alanları için*

$$[X,JY] = J[X,Y]$$

eşitliği geçerlidir [13].

İspat: (2.0.5) denkleminden M manifoldu üzerindeki X ve Y vektör alanları için

$$\begin{aligned}(L_X J)Y &= L_X JY - JL_X Y \\ &= [X,JY] - J[X,Y]\end{aligned}$$

J infinitesimal otomorfizm olduğundan ispat tamamlanır.

Önerme 2.2.4. (M,J) *hemen hemen kompleks manifoldu üzerindeki J hemen hemen kompleks bir yapı olsun. Bu durumda M manifoldu üzerindeki X vektör alanı J hemen hemen kompleks yapısının infinitesimal otomorfizmi olmak üzere, JX J nin infinitesimal otomorfizmidir $\forall Y \in \chi(M)$ için gerek ve yeter şart $N(X,Y) = 0$ olmasıdır [13].*

İspat: $\Longrightarrow)JX$, J nin infinitesimal otomorfizmi olduğundan

$$[JX,JY] = J[JX,Y]$$

dır. X, J nin infinitesimal otomorfizmi olduğundan da

$$[X, JY] = J[X, Y]$$

olur. Bu ifadeye J uygulanırsa

$$J[X, JY] = -[X, Y] \tag{2.2.20}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} N(X, Y) &= J[JX, Y] + [X, Y] - J[JX, Y] - [X, Y] \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

$\Longleftarrow$)X, J nin infinitesimal otomorfizmi olduğundan denklem (2.2.20) ve Nijenhuis tensör alanı tanımında kullanılırsa

$$[JX, JY] + [X, Y] - J[JX, Y] - [X, Y] = 0$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

3. RİEMANN SUBMERSİYONLAR

Bu bölümde submersiyon, Riemann submersiyon, O'Neill temel tensörleri, temel tensörlerin geometrik anlamı, kovaryant türevleri ve eğrilikler üzerinde yapılan çalışmalar incelendi.

Tanım 3.0.1. (M^m, g_m) *ve* (N^n, g_n) *Riemann manifoldları*

$$F : (M^m, g_m) \to (N^n, g_n)$$

diferensiyellenebilir örten dönüşümü için

$$rank F_{*p} = boy N$$

eşitliğinde F *dönüşümüne* $p \in M$ *noktasında* ***submersiyon*** *(sığdırma) denir [19].*

Tanım 3.0.2. (M^m, g_m) *ve* (N^n, g_n) *Riemann manifoldları ve*

$$F : (M^m, g_m) \to (N^n, g_n)$$

submersiyon olsun. F_* *çekirdeğinde bulunan liflere teğettir ve* $x \in N$ *için* $F^{-1}(x) = F_x$ *kümesi* M *nin* $r = m - n$ *boyutlu bir altmanifoldudur ve bu altmanifoldlara* ***submersiyonun lifleri*** *denir.*

(M^m, g_m) *Riemann manifoldu herhangi bir* $p \in M$ *için* $\mathscr{V}$ *integrallenebilir distribüsyonu*

$$\mathscr{V}_p = çek F_{*p}$$

olarak tanımlanır. $\mathscr{V}_p$ *distribüsyonuna* ***dikey distribüsyonu*** *(vertical) denir. Dikey distribüsyona ortogonal olan*

$$\mathscr{H}_p = (\mathscr{V}_P)^{\perp}$$

ile tanımlı $\mathscr{H}_p$ *distribüsyonuna da* ***yatay distribüsyonu*** *(horizontal) denir [19].*

Teorem 3.0.1. $F : M \to N$ *submersiyon ve* $p \in M$ *için* $\mathscr{V}_p$, *M manifoldunun dikey distribüsyonu olmak üzere,* $F(p) = x$ *ve her* $\mathscr{V}_p$ *dikey distribüsyonu* $F^{-1}(x)$ *in tanjant uzayı ile çakışır [20].*

İspat:

$$\alpha : [0,1] \to F^{-1}(x)$$

bir eğri ve v, $T_p F^{-1}(x)$ de bir vektör olmak üzere

$$\alpha(0) = p,\ \alpha'(0) = v$$

olsun. $t \in [0,1]$ için $(F \circ \alpha)_* = x$ olduğundan

$$F_* \alpha'(0) = (F \circ \alpha)_* \left(\frac{d}{dt} \right) = 0$$

dır. Ayrıca

$$v = \alpha'(0) \in \mathscr{V} p$$

dir. Böylece $T_p F^{-1}(x)$, $\mathscr{V}_p$ dikey distribüsyonunun $r = m - n$ boyutlu altuzayına dönüşür.

Tanım 3.0.3. *$F : M \to N$ submersiyon olsun. M manifoldu üzerindeki dikey distribüsyona ait olan X vektör alanına* ***dikey vektör alanı*** *denir ve $\chi^v(M)$ ile gösterilir [20].*

Tanım 3.0.4. *$F : M \to N$ submersiyon olsun. M manifoldu üzerindeki yatay distribüsyona ait olan X vektör alanına* ***yatay vektör alanı*** *denir ve $\chi^h(M)$ ile gösterilir. $\mathscr{H}$, Riemann metriği g tarafindan belirlenen $\mathscr{V}$ nin tamamlayan distribüsyonu olsun. Bu durumda $p \in M$ noktasında $T_p(M) = \mathscr{V}_p \oplus \mathscr{H}_p$ ortogonal ayrışımı vardır [20].*

Tanım 3.0.5. *$F : (M,g) \to (N,g')$ submersiyon olsun. $\chi^c(M)$, M üzerinde izdüşürülebilir vektör alanlarını göstersin. Buna göre M manifoldu üzerindeki X yatay vektör alanı ile N manifoldu üzerindeki X_* vektör alanı $F-$bağlı ise*

$$\chi^b(M) = \chi^c(M) \cap \chi^h(M)$$

uzayı ***temel (basic) vektör alanıdır*** *[20].*

Tanım 3.0.6. *$F : (M,g) \to (N,g')$ örten diferensiyellenebilir submersiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa F ye* ***Riemann Submersiyonu*** *denir:*

1. *F dönüşümü maksimal ranka sahiptir.*

2. *F_* dönüşümü yatay vektör uzunlıuklarını korur. Yani*

$$g_p(X,Y) = g'_{F(p)}(F_{*p}X, F_{*p}Y) \; X,Y \in \mathscr{H}_p, \; p \in M$$

ve F_{*p} türev dönüşümü $\mathscr{H}_p$ üzerinde lineer izometridir [19].

Örnek 3.0.1.

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + x_4, -x_2 + x_3)$$

tarafindan tanımlanan bir dönüşüm olsun. F dönüşümünün Riemann submersiyon olduğunu gösterelim. Öncelikle doğrudan işlemlerle submersiyon olduğunu gösterelim.

$$F_* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $rank F_* = 2 = boy\mathbb{R}^2$ *dır. Böylece F bir submersiyondur.*

$$çek F_* = \mathscr{V} = Span\{V_1 = (1,0,0.1), V_2 = (0,1,1,0)\}$$

ve

$$\mathscr{V}^{\perp} = \mathscr{H} = Span\{H_1 = (-1,0,0,1), H_2 = (0,-1,1,0)\}$$

elde edilir. Ayrıca $\mathbb{R}^4$*ve* $\mathbb{R}^2$ *üzerindeki metrik tensörler* g *ve* g' *ile gösterilirse*

$$g(H_1,H_1) = g'(F_*H_1, F_*H_1) = 2$$

$$g(H_2,H_2) = g'(F_*H_2, F_*H_2) = 2$$

olur. Buna göre F dönüşümü bir Riemann submersiyondur.

Önerme 3.0.1. $F : (M^m, g_m) \to (N^n, g_n)$ *Riemann submersiyon, M ve N manifoldu üzerindeki Riemann konneksiyonları sırasıyla* ∇ *ve* ∇' *olsun. X ve Y M manifoldu üzerindeki temel vektör alanları,* X_* *ve* Y_* *N üzerindeki vektörlerle* $F-$*bağlı ise aşağıdakiler geçerlidir:*

1. $g_m(X,Y) = g_n(X_*,Y_*) \circ F$,
2. $\mathscr{H}[X,Y]$ *temel vektör alanı ile* $[X_*,Y_*]$ $F-$*bağlıdır.*
3. $\mathscr{H}(\nabla_X Y)$ *temel vektör alanı ile* $\nabla'_{X_*} Y_*$ $F-$*bağlıdır.*
4. *Herhangi bir* $U \in \chi^v(M)$ *için,* $[X,U]$ *dikey vektör alanıdır [20].*

3.1 Temel Tensörler

Tanım 3.1.1.

$$F : (M,g) \to (N,g')$$

Riemann submersiyon ve (M,g) *manifoldunun Riemann konneksiyonu* ∇ *olsun.*

$$T(E,F) = T_E F = \mathscr{H}\nabla_{\mathscr{V}E}\mathscr{V}F + \mathscr{V}\nabla_{\mathscr{V}E}\mathscr{H}F \tag{3.1.1}$$

şeklinde tanımlanan tensöre T temel tensör alanı denir ve $E,F \in \chi(M)$ *için aşağıdaki özellikleri sağlar:*

1. T_E lineer operatördür.

2. T_E yatay ve dikey altuzaylarının rollerini değiştirir.

3. $T_E = T_{\mathscr{V}E}$, T dikey vektör alanıdır [1].

Tanım 3.1.2.

$$F : (M,g) \to \left(N,g'\right)$$

Riemann submersiyon ve (M,g) manifoldunun Riemann konneksiyonu ∇ olsun.

$$A(E,F) = A_E F = \mathscr{V}\nabla_{\mathscr{H}E}\mathscr{H}F + \mathscr{H}\nabla_{\mathscr{H}E}\mathscr{V}F \tag{3.1.2}$$

şeklinde tanımlanan tensöre A temel tensör alanı denir ve $E,F \in \chi(M)$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. A_E lineer operatördür.

2. A_E yatay ve dikey altuzaylarının rollerini değiştirir.

3. $A_E = A_{\mathscr{H}E}$, A yatay vektör alanıdır [1].

Lemma 3.1.1.

$$F : (M,g) \to \left(N,g'\right)$$

Riemann submersiyon, herhangi bir $E,F,G \in \chi(M)$ olmak üzere

$$g(T_E F, G) + g(T_E G, F) = 0 \tag{3.1.3}$$

$$g(A_E F, G) + g(A_E G, F) = 0 \tag{3.1.4}$$

dır. Yani A_E ve T_E, g metriğine göre anti-simetrik operatörlerdir [20].

Tanım 3.1.3. *(M,g) bir Riemann manifoldu olmak üzere, $p \in M$ için $U,V \in T_p(M)$ için $T_E F(p)$ ve $A_E F(p)$ M üzerindeki E,F vektör alanlarının seçiminden bağımsız olduğundan $E(p) = U$, $F(p) = V$ dır. Buna göre $T_p(M)$ üzerindeki T_U ve A_U lineer operatörleri olarak göz önüne alınabildiğinden $T_E F(p) = T_U V$, $A_E F(p) = A_U V$ olarak tanımlanır [20].*

Önerme 3.1.1.

$$F : (M,g) \to \left(N,g'\right)$$

Riemann submersiyon olmak üzere

1. $U,V \in \chi^{v}(M)$ *için*

$$T_U V = T_V U \tag{3.1.5}$$

2. $X,Y \in \chi^{h}(M)$ *için*

$$A_X Y = -A_Y X \tag{3.1.6}$$

3. $\mathscr{V}$ *yatay distribüsyon üzerine olan izdüşüm olmak üzere*

$$A_X Y = \frac{1}{2}\mathscr{V}[X,Y] \tag{3.1.7}$$

eşitlikleri geçerlidir [5].

Lİflerin geometrik özellikleri ^ sembolü ile gösterilecektir. Dikey vektör alanları U ve V için kovaryant türev $\hat{\nabla}_V U = \mathscr{V}\nabla_V U$ dır. Buna göre aşağıdaki lemma ile T ve A temel tensörlerinin çeşitli kovaryant türevlerle ilişkisini verebiliriz.

Önerme 3.1.2.

$$F : (M,g) \to \left(N,g'\right)$$

Riemann submersiyon olmak üzere, X,Y *yatay vektör alanları ve* U,V *dikey vektör alanları için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:*

1. $\nabla_U V = T_U V + \hat{\nabla}_U V$

2. $\nabla_U X = \mathscr{H}\nabla_U X + T_U X,$

3. $\nabla_X U = A_X U + \mathscr{V}\nabla_X U,$

4. $\nabla_X Y = \mathscr{H}\nabla_X Y + A_X Y$ *dir.*

Yukarıdaki eşitliklere ek olarak temel vektör alanı X *olmak üzere,* $[X,U]$ *dikey vektör alanı olduğundan*

$$\mathscr{H}\nabla_U X = \mathscr{H}\nabla_X U = A_X U$$

eşitliği geçerlidir [1].

3.2 T ve A Temel Tensörlerin Geometrik Anlamı

Teorem 3.2.1. (M,g) *Riemann manifoldu üzerindeki yatay distribüsyon* $\mathscr{H}$,

$$F:(M,g)\to\left(N,g'\right)$$

Riemann submersiyon olsun. Buna göre $\mathscr{H}$ *yatay distribüsyonu integrallenebilirdir gerek ve yeter şart* $A=0$ *olmasıdır [21].*

İspat: $X,Y\in\chi^{h}(M)$ için A temel tensörünün tanımından

$$A_XY=\mathscr{V}\nabla_XY$$

ve

$$A_XY-A_YX=\mathscr{V}[X,Y]$$

dır ve (3.1.6) dan

$$2A_XY=\mathscr{V}[X,Y]$$

olur. Buradan $A_XY=0$ ise $\mathscr{H}$ integrallenebilirdir. Tersine $\mathscr{H}$ integrallenebilirse $A_XY=0$ dır. Burada $U\in\chi^{v}(M)$ için (3.1.4) den

$$g(A_XY,U)=-g(A_XU,Y)=0$$

olur. Bu ise $A_XU=O$ demektir. Yani A_X, M üzerinde sıfırdır. Diğer taraftan $E\in\chi(M)$ için $A_E=A_{\mathscr{H}E}$ olduğundan

$$A_U=0$$

eşitliğinden $A=0$ olduğu gösterilmiş olur.

Tanım 3.2.1. (M,g) *Riemann manifoldu üzerindeki yatay distribüsyon* $\mathscr{H}$ *ve dikey distribüsyon* $\mathscr{V}$ *üzerine olan izdüşümleri sırasıyla* v *ve* h,

$$F:(M,g)\to\left(N,g'\right)$$

Riemann submersiyon ve $E,F\in\chi(M)$ *olmak üzere*

$$\overline{\nabla}_EF=v(\nabla_EvF)+h(\nabla_EhF) \tag{3.2.1}$$

olarak tanımlı konneksiyona ***Schouten konneksiyonu*** *denir [20].*

Lemma 3.2.1.

$$F:(M,g)\to\left(N,g'\right)$$

Riemann submersiyon ve $E,F \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\nabla_E F = \overline{\nabla}_E F + T_E F + A_E F \tag{3.2.2}$$

dır [20].

Önerme 3.2.1.

$$F : (M,g) \to \left(N,g'\right)$$

Riemann submersiyon olsun. Buna göre $x \in N$ için herhangi bir $F^{-1}(x)$ lifi üzerinde bulunan $\overline{\nabla}$ Schouten konneksiyonu ile g Riemann metrik tensöründen indirgenen metrik tarafından belirlenen Riemann konneksiyonu çakışır [20].

İspat: $U,V \in \chi^v(M)$ için Schouten konneksiyonun tanımından

$$\overline{\nabla}_U V = v(\nabla_U vV) + h(\nabla_U hV) \tag{3.2.3}$$

dır. Burada U ve V dikey vektör alanları olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_U V &= v(\nabla_U V) \\ T_U V &= h(\nabla_U V),\ A_U V = 0 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

ve (3.2.2) denkleminden

$$\nabla_U V = \overline{\nabla}_U V + T_U V \tag{3.2.5}$$

ifadesi elde edilir. Böylece T nin kısıtlanması olan (3.2.5) denklemi $\chi^v(M) \times \chi^v(M)$ herhangi bir lifin ikinci temel formuna karşılık gelmektedir. Bu denkleme **Gauss dönüşümü** ve T ifadesine de **ikinci temel form** denir.

3.3 Temel Tensörlerin Kovaryant Türevleri

Tanım 3.3.1. *(M,g) bir Riemann manifoldu ve E,F,H vektör alanları olmak üzere*

$$(\nabla_E A)_F H = (\nabla_E A)(F,H) = \nabla_E (A_F H) - A_{\nabla_E F}(H) - A_F(\nabla_E H)$$

ve

$$(\nabla_E T)_F H = (\nabla_E T)(F,H) = \nabla_E (T_F H) - T_{\nabla_E F}(H) - T_F(\nabla_E H)$$

*olarak tanımlı ifadeler sırasıyla A ve T temel tensörlerinin **kovaryant türevleridir** [21].*

Lemma 3.3.1.

$$F:(M,g)\to\left(N,g'\right)$$

Riemann submersiyon, ∇A ve ∇T $(1,1)$-mertebeli tensör alanları olsun. Buna göre $X,Y\in\chi^h(M)$ ve $U,V\in\chi^v(M)$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

1. $(\nabla_U A)_V=-A_{T_U V}$,

2. $(\nabla_X T)_Y=-T_{A_X Y}$,

3. $(\nabla_X A)_V=-A_{A_X V}$,

4. $(\nabla_U T)_Y=-T_{T_U Y}$ *[1].*

İspat: 1.E, M üzerinde keyfi bir vektör alanı olmak üzere, A temel tensörün kovaryant türev tanımından

$$(\nabla_U A)_V E=\nabla_U(A_V E)-A_{\nabla_U V}(E)-A_V(\nabla_U E)$$

$A_X=A_{\mathscr{H}X}$ yatay tensör alanı ve $V\in\chi^v(M)$ için $A_V=A_{\mathscr{H}V}=0$ olduğundan

$$(\nabla_U A)_V E=-A_{\nabla_U V}(E)$$

elde edilir. Burada Önerme (3.2.1) den

$$\begin{aligned}(\nabla_U A)_V E&=A_{(T_U V+\mathscr{V}\nabla_U V)}(E)\\&=A_{T_U V}(E)\end{aligned}$$

ve $A_V=A_{\mathscr{H}V}=0$ kullanılırsa

$$(\nabla_U A)_V E=-A_{T_U V}(E)$$

elde edilir. 2, 3 ve 4 ispatı benzer şekilde gösterilebilir.

Lemma 3.3.2.

$$F:(M,g)\to\left(N,g'\right)$$

Riemann submersiyon ve ∇A ve ∇T $(1,1)$-mertebeli tensör alanları olsun. Buna göre $X\in\chi^h(M)$ ve $U,V,W\in\chi^v(M)$ için

$$g\left((\nabla_U A)_X,W\right)=g\left(T_U V,A_X W\right)-g\left(T_U W,A_X V\right)$$

dir [1].

İspat: Tanım (3.3.1), Önerme(3.1.2), Lemma (3.1.1) den

$$g\left((\nabla_U A)_X, W\right) = g\left(\nabla_U\left(A_X V\right), W\right) - g\left(A_{\nabla_U X}\left(V\right), W\right) - g\left(A_X\left(\nabla_U V\right), W\right)$$

eşitliği sırasıyla düzenlenirse

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_U\left(A_X V\right), W\right) &= g\left(\mathscr{H}\nabla_U A_X V + T_U\left(A_X V\right), W\right) \\ &= g\left(\mathscr{H}\nabla_U A_X V, W\right) + g(T_U\left(A_X V\right), W) \\ &= g(T_U\left(A_X V\right), W) \\ &= -g\left(T_U W, A_X V\right) \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} g\left(A_{\nabla_U X}\left(V\right), W\right) &= g\left(A_{\mathscr{H}\nabla_U X} V + A_{T_U X} V, W\right) \\ &= g\left(A_{\mathscr{H}\nabla_U X} V, W\right) + g(A_{T_U X} V, W) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak

$$\begin{aligned} g\left(A_X\left(\nabla_U V\right), W\right) &= g\left(A_X\left(T_U V\right) + A_X\left(\mathscr{V}\nabla_U V\right), W\right) \\ &= g(A_X\left(T_U V\right), W) \\ &= -g\left(T_U V, A_X W\right) \end{aligned}$$

bulunur. Bulunanlar sırasıyla A tensör alanının kovaryant türev denkleminde yerine yazılırsa

$$= g\left(T_U V, A_X W\right) - g\left(T_U W, A_X V\right).$$

Lemma 3.3.3.

$$F : (M, g) \to \left(N, g'\right)$$

Riemann submersiyon, $E \in \chi\left(M\right), X, Y \in \chi^h\left(M\right)$ *ve* $U, V \in \chi^v\left(M\right)$ *olmak üzere*

$$g\left((\nabla_E T)_U V, X\right) = g\left((\nabla_E T)_V U, X\right)$$

dır. Bu ifade ∇T *tensör alanının dikey distribüsyon üzerinde simetrik ve*

$$g\left((\nabla_E A)_X Y, V\right) = -g\left((\nabla_E A)_Y X, V\right)$$

ifadesi ∇A *tensör alanının yatay distribüsyon üzerinde anti-simetrik olduğunu gösterir [1].*

İspat: Tanım (3.3.1)

$$g\left((\nabla_E T)_U V, X\right) = g\left(\nabla_E \left(T_U V\right), X\right) - g\left(T_{\nabla_E U}\left(V\right), X\right) - g\left(T_U\left(\nabla_E V\right), X\right)$$

eşitliğinde denklem (3.1.5) ve önerme (3.1.2) den

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_E\left(T_U V\right), X\right) &= g\left(\mathscr{H}\nabla_E T_U V + \mathscr{V}\nabla_E T_U V, X\right) \\ &= g(\nabla_E T_V U, X) \end{aligned}$$

elde edilir ve elde ettiklerimiz T tensör alanının kovaryant türev denkleminde yerine yazılırsa

$$g\left((\nabla_E T)_V U, X\right)$$

eşitliği elde edilir. Diğeri de benzer şekilde ∇A tensör alanının yatay distribüsyon üzerinde anti-simetrik olduğu gösterilir.

Lemma 3.3.4.

$$F : (M, g) \to \left(N, g'\right)$$

Riemann submersiyon olsun. Buna göre U dikey vektör alanı ve σ ifadesi X, Y ve Z yatay vektör alanları üzerindeki toplamı ifade ediyor ise,

$$\sigma\left((\nabla_Z A)_X Y, U\right) = \sigma\left(A_X Y, T_U Z\right)$$

dır [1].

İspat: Bu denklem tensör denklemi olduğundan X, Y ve Z vektör alanlarını temel ve $[X,Y]$, $[Y,Z]$, $[Z,X]$ braketlerini dikey kabul edersek

$$\frac{1}{2}\mathscr{V}\left[X,Y\right] = A_X Y$$

özdeşliği ve önerme (3.1.2) den

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g\left(\left[\left[X,Y\right],Z\right],U\right) &= g\left(\left[A_X Y, Z\right],U\right) \\ g\left(\left[A_X Y, Z\right],U\right) &= g\left(\nabla_{A_X Y} Z, U\right) - g\left(\nabla_Z A_X Y, U\right) \\ &= g\left(\mathscr{H}\nabla_{A_X Y} Z + T_{A_X Y} Z, U\right) \\ &= g(T_{A_X Y} Z, U) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik (3.1.3) den yani T nin g metriğine göre anti-simetrikliğinden

$$g\left(\nabla_{A_X Y} Z, U\right) = -g\left(Z, T_{A_X Y} U\right)$$

elde edilir. (3.1.5) den T, dikey distribüsyon üzerinde simetrik olduğundan

$$g\left(\nabla_{A_X Y} Z, U\right) = -g\left(Z, T_U\left(A_X Y\right)\right)$$

olur. Tekrar g metriğine göre anti-simetriklik kullanılırsa

$$g\left(\nabla_{A_X Y} Z, U\right) = g\left(T_U Z, A_X Y\right)$$

dır. Buna göre son durumda

$$\frac{1}{2} g\left(\left[\left[X,Y\right],Z\right],U\right) = g\left(T_U Z, A_X Y\right) - g\left(\nabla_Z A_X Y, U\right)$$

denklemine Jacobi özdeşliği uygulanırsa

$$\sigma g\left(\nabla_Z\left(A_X Y\right), U\right) = \ \sigma g\left(T_U Z, A_X Y\right)$$

elde edilir.

$$\sigma g\left(\left(\nabla_Z A\right)_X Y, U\right) = \sigma g\left(\nabla_Z\left(A_X Y\right), U\right)$$

eşitliği gösterilirse ispat tamamlanmış olur.

$$g\left(\nabla_Z\left(A_X Y\right), U\right) - g\left(\left(\nabla_Z A\right)_X Y, U\right) = g\left(A_{\nabla_Z X} Y, U\right) + g\left(A_X \nabla_Z Y, U\right).$$

Önerme (3.1.2) den eşitliğin sağ tarafı 0 olacağından

$$\sigma g\left(\left(\nabla_Z A\right)_X Y, U\right) = \sigma g\left(\nabla_Z\left(A_X Y\right), U\right).$$

Önerme 3.3.1.

$$F : (M,g) \to \left(N, g'\right)$$

Riemann submersiyon olsun. Eğer

1. *A yatay tensör alanı paralel ise $A = 0$ dır.*

2. *T dikey tensör alanı paralel ise $T = 0$ dır [20].*

İspat: X, herhangi bir yatay vektör ve W, herhangi bir dikey vektör alanı için A tensör alanının kovaryant türev tanımı,(3.1.6) ve (3.1.4) den

$$g\left(\left(\nabla_X A\right)_W X, W\right) = g\left(\nabla_X\left(A_W X\right), W\right) - g(A_{\nabla_X W} X, W) - g(A_W \nabla_X X, W\right)$$

dır. A tensör alanı yatay distribüsyon üzerinde tanımlı olduğundan

$$g\left(\left(\nabla_X A\right)_W X, W\right) = -g(A_{\nabla_X W} X, W)$$

eşitliği Önerme (3.1.2) (3) den

$$\begin{aligned}
&= -g\left(A_{(A_X W + \mathscr{V}\nabla_X W)}X, W\right) \\
&= -g\left(A_{A_X W}X, W\right) - g\left(A_{\mathscr{V}\nabla_X W}, W\right) \\
&= -g\left(A_{A_X W}X, W\right) \\
&= g\left(A_X A_X W, W\right) \\
&= -g\left(A_X W, A_X W\right)
\end{aligned}$$

dır. Bu durumda A yatay tensör alanı paralel ise A_X dikey distribüsyon üzerinde $A_X W = 0$ dır. (3.1.4) den Y yatay vektör alanı için

$$g\left(A_X W, Y\right) = -g\left(A_X Y, W\right) = 0$$

eşitliğinden $A_X Y$ dikey distribüsyona ait vektör alanı ve W keyfi bir dikey vektör alanı olduğundan $A_X Y = 0$ dır. Bu durumda M üzerinde $A_X = 0$ dır. Diğer taraftan $A_E = A_{\mathscr{H}E}$ olduğundan $A_W = A_{\mathscr{H}W} = 0$ dır. Böylece eğer A paralel ise $A = 0$ dır. İkinci eşitlik de benzer şekilde gösterilebilir.

3.4 Eğrilikler

Tanım 3.4.1. *(M,g) ve (N,g') Riemann manifoldları ve (M,g) manifoldunun yatay distribüsyonu $\mathscr{H}$ olsun. Buna göre $p \in M$ için $R'_{f(p)}\left(f_{*p}X_p, f_{*p}Y_p,\ f_{*p}Z_p\right)$ vektörünün* ***yatay gönderileni*** *(lifti) $R^*_p\left(X_p, Y_p\right)Z_p$ olmak üzere, (N,g') manifoldunun R'* ***Riemann eğriliği,*** *herhangi bir $X,Y,Z \in \chi^h(M)$ için*

$$f_{*p}\left(R^*\left(X,Y\right)Z\right) = R'\left(f_{*p}X_p, f_{*p}Y_p, f_{*p}Z_p\right)$$

şeklindedir [20].

Teorem 3.4.1.

$$f : (M,g) \to \left(N,g'\right)$$

Riemann submersiyon olmak üzere, $R,\hat{R}$ sırasıyla M ve $\left(f^{-1}(x), \hat{g}_x\right)$ lifinin Riemann eğrilik tensörleri olsun. Herhangi bir $U,V,W,F \in \chi^v(M)$ ve $X \in \chi^h(M)$ için

$$g\left(R\left(U,V\right)W,F\right) = g(\hat{R}(U,V)W,F) + g\left(T_U W, T_V F\right) - g\left(T_V W, T_U F\right) \tag{3.4.1}$$

$$g\left(R\left(U,V\right)W,X\right)=g\left(\left(\nabla_{U}T\right)_{V}W,X\right)-g\left(\left(\nabla_{V}T\right)_{U}W,X\right) \tag{3.4.2}$$

şeklindeki (3.4.1) ve (3.4.2) denklemleri submersiyonlar için Gauss ve Codazzi denklemleri olarak gözönüne alınabilir [5].

İspat: U,V,W ve F herhangi bir vektör dikey vektör alanları için

$$R\left(U,V\right)W=\nabla_{U}\nabla_{V}W-\nabla_{V}\nabla_{U}W-\nabla_{[U,V]}W \tag{3.4.3}$$

dır. Lemma (3.1.1) ve önerme (3.1.2) den

$$\begin{aligned}\nabla_{U}\nabla_{V}W&=\nabla_{U}\left(T_{V}W+\hat{\nabla}_{V}W\right)\\&=\mathscr{H}\nabla_{U}T_{V}W+T_{U}T_{V}W\\&+T_{U}\hat{\nabla}_{V}W+\hat{\nabla}_{U}\hat{\nabla}_{V}W\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

ve benzer olarak

$$\begin{aligned}\nabla_{V}\nabla_{U}W&=\mathscr{H}\nabla_{V}T_{U}W+T_{V}T_{U}W\\&+T_{V}\hat{\nabla}_{U}W+\hat{\nabla}_{V}\hat{\nabla}_{U}W\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

ve

$$\begin{aligned}\nabla_{[U,V]}W&=T_{[U,V]}W+\hat{\nabla}_{[U,V]}W\\&=\mathscr{H}\nabla_{[U,V]}W+\hat{\nabla}_{[U,V]}W\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

dır. (3.4.4), (3.4.5) ve (3.4.6) denklemleri (3.4.3) eşitliğinde yazılırsa

$$\begin{aligned}R\left(U,V\right)W&=\mathscr{H}\nabla_{U}T_{V}W+T_{U}T_{V}W+T_{U}\hat{\nabla}_{V}W\\&+\hat{\nabla}_{V}\hat{\nabla}_{U}W-\mathscr{H}\nabla_{V}T_{U}W-T_{V}T_{U}W\\&-T_{V}\hat{\nabla}_{U}W-\hat{\nabla}_{V}\hat{\nabla}_{U}W-\mathscr{H}\nabla_{[U,V]}W\\&-\hat{\nabla}_{[U,V]}W.\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

(3.4.7) denkleminin her iki tarafı F dikey vektör alanı ile skaler çarpılırsa

$$\begin{aligned} g(R(U,V)W,F) &= g(\hat{\nabla}_U\hat{\nabla}_V W - \hat{\nabla}_V\hat{\nabla}_U W - \hat{\nabla}_{[U,V]}W,F) \\ &+ g(T_U T_V W,F) - g(T_V T_U W,F) \end{aligned}$$

denkleminden (3.4.1) elde edilir. (3.4.2) denklemi de benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.4.2.

$$f:(M,g)\to\left(N,g'\right)$$

Riemann submersiyon, $R,\acute{R}$ sırasıyla (M,g) ve (N,g') manifoldlarının Riemann eğrilik tensörleri olsun. Buna göre herhangi bir $X,Y,Z,H\in\chi^h(M)$ ve $U,V\in\chi^v(M)$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,H) &= g\left(\acute{R}(X,Y)Z,H\right) + 2g(A_X Y,A_Z H) \\ &- g(A_Y Z,A_X H) + g(A_X Z,A_Y H) \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,U) &= g(({\nabla}_Z A)_X Y,U) + g(A_X Y,T_U Z) \\ &- g(A_Y Z,T_U X) - g(A_Z X,T_U Y) \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)U,V) &= g(({\nabla}_U A)_X Y,V) - g(({\nabla}_V A)_X Y,U) \\ &+ g(A_X U,A_Y V) - g(A_X V,A_Y U) \\ &- g(T_U X,T_V Y) + g(T_V X,T_U Y) \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

$$\begin{aligned} g(R(X,U)Y,V) &= g(({\nabla}_X T)_U V,Y) + g(({\nabla}_U A)_X Y,V) \\ &- g(T_U X,T_V Y) + g(A_X U,A_Y V) \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

dır [20].

İspat: (3.4.8) denklemini ispatlayalım. Bu denklem tensör denklemi olduğundan X,Y,Z temel vektör alanlarını ve $[X,Y]$, $[Y,Z]$, $[Z,X]$ Lie parantez operatörlerini dikey kabul edebiliriz.

$$[X,Y] = 2A_XY$$

ve önerme (3.0.1) den $\mathscr{H}\nabla_XY$ temel vektör alanı ile $\acute{\nabla}_{X_*}Y_*$ f-bağlı olduğundan $\acute{\nabla}_{X_*}Y_*$ vektör alanının yatay gönderilenini $\acute{\nabla}_XY$ şeklinde yazabiliriz. Önerme (3.1.2) den

$$\begin{aligned}\nabla_YZ &= \mathscr{H}\nabla_YZ + A_YZ\\ &= \acute{\nabla}_YZ + A_YZ\end{aligned}$$

elde edilir. (2.0.7) denklemi ve Önerme (3.1.2) den

$$\begin{aligned}\nabla_X\nabla_YZ &= \nabla_X\left(\acute{\nabla}_YZ + A_YZ\right)\\ &= \acute{\nabla}_X\acute{\nabla}_YZ + A_X\acute{\nabla}_YZ + A_XA_YZ + \mathscr{V}\nabla_XA_YZ\end{aligned}$$

elde edilir ve benzer olarak

$$\nabla_Y\nabla_XZ = \acute{\nabla}_Y\acute{\nabla}_XZ + A_Y\acute{\nabla}_XZ + A_YA_XZ + \mathscr{V}\nabla_YA_XZ$$

ve

$$\begin{aligned}\nabla_{[X,Y]}Z &= \mathscr{H}\nabla_{[X,Y]}Z + T_{[X,Y]}Z\\ &= 2\mathscr{H}\nabla_{A_XY}Z + 2T_{A_XY}Z\\ &= 2A_ZA_XY + 2T_{A_XY}Z\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_YZ - \nabla_Y\nabla_XZ - \nabla_{[X,Y]}Z\\ &= \acute{R}(X,Y)Z + A_XA_YZ - A_YA_XZ - 2A_ZA_XY - 2T_{A_XY}Z\\ &\quad + \mathscr{V}\nabla_XA_YZ - \mathscr{V}\nabla_YA_XZ + A_X\acute{\nabla}_YZ - A_Y\acute{\nabla}_XZ\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

olur. Böylece $\mathscr{H}[X,Y] = 0$ olduğundan

$$f_*[X,Y] = 0 \Longrightarrow \acute{\nabla}_{[X,Y]}Z = 0.$$

(3.4.12) denkleminin sağ ve sol tarafı H yatay vektör alanı ile skaler çarpılırsa

$$\begin{aligned}g(R(X,Y)Z,H) &= g\left(\acute{R}(X,Y)Z,H\right) + 2g(A_ZH,A_XY)\\ &\quad - g(A_YA_XZ,H) + g(A_XA_YZ,H)\\ &= g\left(\acute{R}(X,Y)Z,H\right) + 2g(A_ZH,A_XY)\\ &\quad + g(A_YH,A_XZ) - g(A_XH,A_YZ)\end{aligned}$$

(3.4.8) denklemi gösterilmiş olur.

Teorem 3.4.3.

$$f:(M,g)\to\left(N,g'\right)$$

Riemann submersiyonu olmak üzere, $K,\acute{K},\hat{K}$ sırası ile M, N ve $\left(f^{-1}(x),\hat{g}_x\right)$ lifinin kesit eğrilikleri olsun. Bu durumda X, Y ortonormal yatay vektörleri ve V,W ortonormal dikey vektörleri için

1. $K(V,W)=\hat{K}(V,W)+\|T_VW\|^2-g(T_VV,T_WW)$,
2. $K(X,Y)=\acute{K}\left(\acute{X},\acute{Y}\right)\circ f-3\|A_XY\|^2$,
3. $K(X,W)=g\left((\nabla_XT)_W W,X\right)+\|T_WX\|^2-\|A_XW\|^2$ *dır [5].*

4. HEMEN HEMEN HERMİTYEN SUBMERSİYONLAR

Bu bölümde birinci kısımda hemen hemen Hermityen manifoldlar ve altmanifoldları, ikinci kısımda ise hemen hemen Hermityen submersiyonlar incelendi.

4.1 Hemen Hemen Hermityen Manifoldlar ve Altmanifoldları

Tanım 4.1.1. *(M,J) hemen hemen kompleks manifold üzerindeki Riemann metriği g ve $X,Y \in \chi(M)$ olmak üzere*

$$g(JX,JY) = g(X,Y)$$

*şeklinde tanımlı g fonksiyonuna **Hermityen metrik** ve g Hermityen metriği ile birlikte (M,J,g) ifadesine de **hemen hemen Hermityen manifold** denir [13].*

Önerme 4.1.1. *M parakompakt manifold ise her hemen hemen kompleks manifold Hermityen metriğe sahiptir [13].*

İspat: M parakompakt olduğundan üzerinde g Riemann metriği vardır ve $X,Y \in \chi(M)$ olmak üzere

$$h(X,Y) = g(X,Y) + g(JX,JY) \tag{4.1.1}$$

olarak tanımlanırsa

$$h(JX,JY) = g(JX,JY) + g(-X,-Y)$$

dır. g pozitif tanımlı olduğundan

$$h(JX,JY) = g(JX,JY) + g(X,Y) \tag{4.1.2}$$

olur. (4.1.1) ve (4.1.2) den ispat tamamlanır.

(M,J) hemen hemen kompleks manifoldu üzerindeki g Hermityen metriği ikinci mertebeden kovaryant simetrik tensör alanına (iç çarpım) genişletilebilir. Bu durumda g tensör alanı aşağıdaki özelliklere sahiptir:

a) $Z,W \in \chi(M) \Longrightarrow g\left(\overline{Z},\overline{W}\right) = g\left(\overline{Z,W}\right)$

b) $0 \neq Z \in \chi(M) \Longrightarrow g\left(Z,\overline{Z}\right) > 0$

c) $Z \in \chi^{1,0}(M), W \in \chi^{0,1}(M) \Longrightarrow g\left(Z,\overline{W}\right) = 0$

d) $g(Z_j, \overline{Z}_k) = g(\overline{Z_k, \overline{Z_j}})$ [13].

Tanım 4.1.2. *(M, J, g) hemen hemen Hermityen manifold ve $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere*

$$\phi(X,Y) = g(X, JY) \tag{4.1.3}$$

*şeklinde tanımlı olan tensöre **temel** $2-$**form** veya **Kähler form** denir [13].*

Lemma 4.1.1. *(M, J, g) hemen hemen Hermityen manifold olsun. Buna göre Riemann konneksiyonunun kovaryant türevi ∇, temel $2-$form ϕ, Nijenhuis tensör alanı N ve $X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere*

$$2g((\nabla_X J)Y, Z) = 3d\phi(X, JY, JZ) - 3d\phi(X, Y, Z) + g(JX, N(Y, Z))$$

eşitliği geçerlidir [13].

İspat:

$$(\nabla_X J)Y = \nabla_X JY - J\nabla_X Y \tag{4.1.4}$$

ifadesi aşağıda kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\nabla_X J)JY &= \nabla_X J^2 Y - J((\nabla_X J)Y + J\nabla_X Y) \\ &= -\nabla_X Y - J(\nabla_X J)Y - J^2\nabla_X Y \\ &= -J(\nabla_X J)Y\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

$\phi-$temel 2-form ve Riemann konneksiyonundan

$$\begin{aligned}(\nabla_X \phi)(Y, Z) &= X(g(Y, JZ)) - g(Y, J\nabla_X Z) - g(\nabla_X Y, JZ) \\ &= g(Y, (\nabla_X J)Z)\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}N(Y, Z) &= [JY, JZ] - J[Y, JZ] - J[JY, Z] - [Y, Z] \\ &= (\nabla_{JY} JZ - \nabla_{JZ} JY) - J(\nabla_Y JZ - \nabla_{JZ} Y) \\ &\quad - J(\nabla_{JY} Z - \nabla_Z JY) - (\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) \\ &= (\nabla_{JY} J)Z + J\nabla_{JY} Z - (\nabla_{JZ} J)Y - J\nabla_{JZ} Y \\ &\quad - J(\nabla_Y J)Z - J^2\nabla_Y Z + J\nabla_{JZ} Y \\ &\quad - J\nabla_{JY} Z + J(\nabla_Z J)Y + J^2\nabla_Z Y - \nabla_Y Z + \nabla_Z Y \\ &= (\nabla_{JY} J)Z - (\nabla_{JZ} J)Y + J(\nabla_Z J)Y - J(\nabla_Y J)Z\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

ve ϕ 2-form denkleminden

$$\begin{aligned}3d\phi\,(X,Y,Z) &= X\,(\phi\,(Y,Z)) + Y\,(\phi\,(Z,X)) + Z\,(\phi\,(X,Y))\\ &\quad - \phi\,([X,Y]\,,Z) - \phi\,([Y,Z]\,,X) - \phi\,([Z,X]\,,Y)\\ &= X\,(g\,(Y,JZ)) + Y\,(g\,(Z,JX)) + Z\,(g\,(X,JY))\\ &\quad - g\,([X,Y]\,,JZ) - g\,([Y,Z]\,,JX) - g\,([Z,X]\,,JY)\end{aligned}$$

gerekli işlemler yapılırsa

$$3d\phi\,(X,Y,Z) = g\,(X,(\nabla_Z J)\,Y) + g\,(Y,(\nabla_X J)\,Z) + g\,(Z,(\nabla_Y J)\,X) \tag{4.1.8}$$

elde edilir. Benzer olarak

$$3d\phi\,(X,JY,JZ) = g\,(X,(\nabla_{JZ} J)\,JY) + g\,(JY,(\nabla_X J)\,JZ) + g\,(JZ,(\nabla_{JY} J)\,X) \tag{4.1.9}$$

dır. (4.1.6), (4.1.7),(4.1.8), (4.1.9) ve (4.1.5) denklemlerinden

$$\begin{aligned}3d\phi\,(X,Y,Z) - 3d\phi\,(X,JY,JZ) &= g\,(Y,(\nabla_X J)\,Z) + g\,(Y,(\nabla_X J)\,Z)\\ &\quad + g\,(Z,(\nabla_Y J)\,X) - g\,(JZ,(\nabla_{JY} J)\,X)\\ &\quad + g\,(X,(\nabla_Z J)\,Y) - g\,(X,(\nabla_{JZ} J)\,JY)\end{aligned}$$

elde edilir.

$$g\,(Y,(\nabla_X J)\,Z) = -g\,((\nabla_X J)\,Y,Z)$$

olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}3d\phi\,(X,Y,Z) - 3d\phi\,(X,JY,JZ) &= -2g\,((\nabla_X J)\,Y,Z) - g\,(J\,(\nabla_Y J)\,Z,JX)\\ &\quad + g\,((\nabla_{JY} J)\,Z,JX) + g\,(JX,J\,(\nabla_Z J)\,Y) - g\,((\nabla_{JZ} J)\,Y,JX)\\ &= -2g\,((\nabla_X J)\,Y,Z) + g\,(JX,N\,(Y,Z))\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.1.1. *M hemen hemen kompleks manifoldu üzerinde J kompleks yapı ve g Hermityen metrik olsun. ∇, g tarafından tanımlanan Riemann konneksiyonunun kovaryant türevi olmak üzere, aşağıdaki denklemler birbirine denktir:*

a) $\nabla J = 0$,

b) $\nabla \phi = 0$,

c) *Hemen hemen kompleks yapı torsiyonsuzdur ve temel* $2-$*form* ϕ *kapalıdır, yani* $N=0$ *ve* $d\phi=0$ *[13].*

İspat: (4.1.6) dan $X,Y,Z\in\chi(M)$ olmak üzere

$$(\nabla_X\phi)(Y,Z)=g(Y,(\nabla_X J)Z)$$

$\nabla J=0$ gerek ve yeter şart $\nabla\phi=0$ dır. Buradan $a\Leftrightarrow b$ dır.

$\nabla\phi=0$ ve (4.1.8) den $d\phi=0$ ve $d\phi=0$ ise $N=0$ dır. Buradan $b\Leftrightarrow c$ dır.

Lemma (4.1.1) den $\nabla J=0$ ve bundan dolayı $\nabla\phi=0$. Buradan $c\Leftrightarrow b$ dir.

Hemen hemen Hermityen manifoldların bazı sınıflarını tanımlayalım. O zaman (M,J,g) hemen hemen Hermityen manifold ise aşağıdaki tanımları verebiliriz.

Tanım 4.1.3. (M,J) *hemen hemen kompleks manifold ve* $X\in\chi(M)$ *olmak üzere*

$$\nabla_X J=0$$

şeklinde tanımlanan M manifolduna ***Kähler manifoldu*** *denir [2].*

Tanım 4.1.4. (M,J) *hemen hemen kompleks manifold ve Kähler formu kapalı yani;* $d\phi=0$ *ise M manifolduna* ***hemen hemen Kähler manifoldu*** *denir [2].*

Tanım 4.1.5. (M,J) *hemen hemen kompleks manifold ve* $X,Y\in\chi(M)$ *olmak üzere*

$$(\nabla_X J)Y+(\nabla_Y J)X=0$$

eşitliğinde M ye ***nearly Kähler manifold*** *denir. X ve Y eşitliğinde*

$$(\nabla_X J)X=0$$

ise ***hemen hemen Tachibana****dır [2].*

Tanım 4.1.6. (M,J) *hemen hemen kompleks manifold ve* $X,Y\in\chi(M)$ *olmak üzere*

$$(\nabla_X J)Y+(\nabla_{JX} J)JY=0$$

eşitliğinde M ye ***quasi-Kähler manifold*** *denir [13].*

Tanım 4.1.7. (M,J) *hemen hemen kompleks manifold ve M nin bazı* $\{E_1,...,E_n,JE_1,...,JE_n\}$ *olmak üzere*

$$\delta\phi(X)=-\sum_{i=1}^{n}\{(\nabla_{E_i}\phi)(E_i,X)+(\nabla_{JE_i}\phi)(JE_i,X)\}$$

eşitliği geçerlidir. Buradan $\delta\phi=0$ *ise M manifolduna* ***hemen hemen semi-Kähler manifold*** *ve diğer taraftan ayrıca* $N=0$ *ise M manifolduna* ***semi-Kähler manifold*** *denir [13].*

Tanım 4.1.8. *(M,J) hemen hemen kompleks manifold ve Nijenhuis tensörü 0 ise M manifolduna* ***Hermityen manifold*** *denir [2].*

M ve $\overline{M}$ Riemann manifoldları ve M, $\overline{M}$ ye immersed (gömülmüş) altmanifoldudur ve M ye $\overline{M}$ den indirgenen Riemann yapısını verir. $\overline{\chi}(M)$, $\overline{M}$ ve $\chi(M)$, M üzerindeki vektör alanları olsun. $\chi(M)$ ye dik ve tamamlayan vektör alanları (ortogonal) $\chi(M)^{\perp}$ olsun. Böylece doğrudan toplam ayrışması $\overline{\chi}(M) = \chi(M) \oplus \chi(M)^{\perp}$ dir [2].

Tanım 4.1.9. *M ve $\overline{M}$ Riemann manifoldlarının ∇ ve $\overline{\nabla}$ sırasıyla Riemann konneksiyonları olsun. Altmanifold M nin immersiyon konfigürasyon tensörü ve $X,Y \in \chi(M)$, $Z \in \chi(M)^{\perp}$ olmak üzere*

$$T : \chi(M) \times \overline{\chi}(M) \to \overline{\chi}(M)$$
$$T_X Y = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$$

ve

$$P : \overline{\chi}(M) \to \chi(M)$$
$$T_X Z = P\overline{\nabla}_X Z \; X \in \chi(M)$$

ortogonal izdüşüm dönüşümüdür [15].

Önerme 4.1.2. *M Riemann manifoldu, $\overline{M}$ ye gömülmüş (immersed) bir altmanifold olsun. $X,Y \in \chi(M)$ için konfigürasyon tensörü aşadaki özelliklere sahiptir.*

a) *T_X, altuzay $\chi(M)$ ve $\chi(M)^{\perp}$ vektör alanlarını tersine çevirir,*

b) $T_X Y = T_Y X$,

c) *T_X anti-simetrik lineer operatörlerdir,*

d) *$P\overline{R}_{XY} = R_{XY} - [T_X, T_Y]$ burada R_{XY} ve $\overline{R}_{XY}$ sırasıyla M ve $\overline{M}$ nin üzerindeki eğrilik tensörleridir [2].*

İspat: b) $X,Y \in \chi(M)$ olmak üzere, konfigürasyon tensörü

$$T_X Y = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$$

ve

$$T_Y X = \overline{\nabla}_Y X - \nabla_Y X$$

taraf tarafa çıkarılırsa

$$T_X Y - T_Y X = \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X + \nabla_Y X - \nabla_X Y$$

$M \subset \overline{M}$ olduğundan ∇, M nin indirgenen metrik tarafından belirlenen Riemann konneksiyonu olduğundan

$$\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X = [X,Y] = \nabla_Y X - \nabla_X Y$$

eşitliğinden

$$T_X Y - T_Y X = 0$$
$$T_X Y = T_Y X$$

gösterilmiş olur.

c) $M \subset \overline{M}$ olduğundan ∇, M nin indirgenen metrik tarafından belirlenen Riemann konneksiyonu olduğundan $X \in \chi(M)$ ve $Y,Z \in \overline{\chi}(M)$ için

$$\left\langle \overline{\nabla}_X Y, Z \right\rangle + \left\langle Y, \overline{\nabla}_X Z \right\rangle = X \langle Y,Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle - \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

ve

$$\begin{aligned} X \langle Y,Z \rangle &= \left\langle \overline{\nabla}_X Y, Z \right\rangle + \left\langle Y, \overline{\nabla}_X Z \right\rangle \\ &= \langle T_X Y + \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, T_X Z + \nabla_X Z \rangle \\ 0 &= \langle T_X Y, Z \rangle + \langle Y, T_X Z \rangle \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\langle T_X Y, Z \rangle = -\langle T_X Z, Y \rangle \tag{4.1.10}$$

elde edilir.

d) $X,Y \in \chi(M)$ için, Gauss dönüşümü, eğrilik tensörü ve P ortogonal izdüşüm dönüşümünden

$$\begin{aligned} P\overline{R}_{XY} &= P\left(\overline{\nabla}_{[X,Y]} - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y + \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X\right) \\ &= P\overline{\nabla}_{[X,Y]} - P\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y + P\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \\ &= \nabla_{[X,Y]} - P\overline{\nabla}_X (\nabla_Y + T_Y) + P\overline{\nabla}_Y (\nabla_X + T_X) \\ &= \nabla_{[X,Y]} - P\overline{\nabla}_X \nabla_Y - P\overline{\nabla}_X T_Y + P\overline{\nabla}_Y \nabla_X + P\overline{\nabla}_Y T_X \\ &= \nabla_{[X,Y]} - \nabla_X \nabla_Y + \nabla_Y \nabla_X - P(\nabla_X + T_X) T_Y + P(\nabla_Y + T_Y) T_X \\ &= \nabla_{[X,Y]} - \nabla_X \nabla_Y + \nabla_Y \nabla_X - P\nabla_X T_Y - PT_X T_Y + P\nabla_Y T_X + PT_Y T_X \\ &= R_{XY} - P[T_X, T_Y] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. a) iddiasını da b) ve c) den gösterebiliriz.

Tanım 4.1.10. *$\overline{M}$ ve M hemen hemen Hermityen manifoldlar ve M, $\overline{M}$ ne gömülmüş (immersed) olsun. $X \in \chi(M)$ ve $JX \in \chi(M)$ için J, $\overline{M}$ nin hemen hemen kompleks yapısı ise M, $\overline{M}$ nin* ***hemen hemen Hermityen altmanifoldu****dur. Bu nedenle $\overline{M}$ ve M hemen hemen kompeks yapıları $\chi(M)$ üzerinde olduğundan her ikisinin de hemen hemen kompleks yapılarını J ile gösterebiliriz [15].*

Önerme 4.1.3. *M, $\overline{M}$ nin Kähler altmanifoldu ve $X,Y \in \chi(M)$, $Z \in \chi(M)^{\perp}$ olmak üzere*

1. $T_X JY = JT_X Y$,

2. $T_X JZ = JT_X Z$,

3. $T_{JX} Z = -JT_X Z$ *[15].*

İspat: 1) T konfigürasyon tensörü tanımından

$$\begin{aligned} T_X JY &= \overline{\nabla}_X JY - \nabla_X JY \\ &= J\overline{\nabla}_X Y - J\nabla_X Y \\ &= JT_X Y \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. 2) eşitliği de benzer şekilde gösterilir.

3) Önerme (4.1.2) (b) ve (4.1.10) denkleminden

$$\begin{aligned} \langle T_{JX} Z, Y \rangle &= -\langle T_{JX} Y, Z \rangle \\ &= -\langle T_Y JX, Z \rangle \\ &= -J\langle T_Y X, Z \rangle \\ &= -J\langle T_X Z, Y \rangle \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Önerme 4.1.4. *M, $\overline{M}$ nin hemen hemen Hermityen bir altmanifoldudur. Eğer*

a) *$\overline{M}$ quasi-Kähler ise M de quasi-Kählerdir.*

b) *$\overline{M}$ hemen hemen Kähler ise M de hemen hemen Kählerdir.*

c) *$\overline{M}$ hemen hemen Tachibana ise M de hemen hemen Tachibanadır.*

d) $\overline{M}$ *Kähler ise M de Kählerdir.*

e) $\overline{M}$ *Hermityen ise M de Hermityendir [2].*

İspat: a) $\overline{M}$ quasi-Kähler olsun.(4.1.4) denklemi ve T konfigürasyon tensöründen

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\overline{\nabla}_X J\right) Y + \left(\overline{\nabla}_{JX} J\right) JY \\ &= \overline{\nabla}_X JY - J\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_{JX} Y - J\overline{\nabla}_{JX} JY \\ &= T_X JY + \nabla_X JY - JT_X Y - J\nabla_X Y - T_{JX} Y - \nabla_{JX} Y - JT_{JX} JY - J\nabla_{JX} JY \end{aligned}$$

eşitliği ve önerme (4.1.3) den

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_X JY - J\nabla_X Y - \nabla_{JX} Y - J\nabla_{JX} JY \\ 0 &= (\nabla_X J) Y + (\nabla_{JX} J) JY \end{aligned}$$

elde edilir. $M \subset \overline{M}$ olduğundan $\overline{M}$ quasi-Kähler ise M de quasi-Kählerdir.

b) $\overline{M}$ hemen hemen Kähler olduğundan $d\phi = 0$ dır. (4.1.4), (4.1.8) denklemleri ve T konfigürasyon tensöründen

$$\begin{aligned} 0 &= g\left(Y, \left(\overline{\nabla}_X J\right) Z\right) + g\left(Z, \left(\overline{\nabla}_Y J\right) X\right) + g\left(X, \left(\overline{\nabla}_Z J\right) Y\right) \\ &= g\left(Y, \overline{\nabla}_X JZ - J\overline{\nabla}_X Z\right) + g\left(Z, \overline{\nabla}_Y JX - J\overline{\nabla}_Y X\right) + g\left(X, \overline{\nabla}_Z JY - J\overline{\nabla}_Z Y\right) \\ &= g\left(Y, \nabla_X JZ + T_X JZ - J\left(\nabla_X Z + T_X Z\right)\right) \\ &+ g\left(Z, \nabla_Y JX + T_Y JX - J\left(\nabla_Y X + T_Y X\right)\right) \\ &+ g\left(X, \nabla_Z JY + T_Z JY - J\left(\nabla_Z Y + T_Z Y\right)\right) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğe tekrar (4.1.4) denklemi uygulanırsa

$$\begin{aligned} 0 &= g\left(Y, \nabla_X JZ - J\nabla_X Z + T_X JZ - J\nabla_X Z - JT_X Z\right) \\ &+ g\left(Y, (\nabla_X J) Z + T_X JZ - JT_X Z\right) \\ &+ g\left(Z, (\nabla_Y J) X + T_Y JX - JT_Y X\right) \\ &+ g\left(X, (\nabla_Z J) Y + T_Z JY - JT_Z Y\right) \end{aligned}$$

eşitliği önerme (4.1.3) den

$$0 = g\left(Y, (\nabla_X J) Z\right) + g\left(Z, (\nabla_Y J) X\right) + g\left(X, (\nabla_Z J) Y\right)$$

elde edilir. $M \subset \overline{M}$ olduğundan $\overline{M}$ hemen hemen Kähler ise M de hemen hemen Kählerdir.

c) $\overline{M}$ hemen hemen Tachibana olduğundan $\left(\overline{\nabla}_X J\right) X = 0$ dır. (4.1.4) denklemi ve T konfigürasyon tensöründen

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(\overline{\nabla}_X J\right) X \\
&= \overline{\nabla}_X JX - J\overline{\nabla}_X X \\
& T_X JX + \nabla_X JX - JT_X X - \nabla_X X \\
&= (\nabla_X J) X + T_X JX - JT_X X
\end{aligned}
$$

eşitliği önerme (4.1.3) den

$$0 = (\nabla_X J) X$$

eşitliği elde edilir. $M \subset \overline{M}$ olduğundan $\overline{M}$ hemen hemen Tachibana ise M de hemen hemen Tachibanadır.

d) $\overline{M}$ hemen hemen Kähler olduğundan $\overline{\nabla}_X J = 0$ dır. (4.1.4) denkleminde ve T konfigürasyon tensöründen

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(\overline{\nabla}_X J\right) Y \\
&= \overline{\nabla}_X JY - J\overline{\nabla}_X Y \\
&= T_X JY + \nabla_X JY - JT_X Y - J\nabla_X Y \\
&= (\nabla_X J) Y + T_X JY - JT_X Y
\end{aligned}
$$

eşitliği önerme (4.1.3) den

$$0 = (\nabla_X J) Y$$

eşitliği elde edilir. $M \subset \overline{M}$ olduğundan $\overline{M}$ Kähler ise M de Kählerdir.

e) $\overline{M}$ Hermityen manifold ise $N = 0$ dır. (4.1.7) ve (4.1.4) denklemleri ve T konfigürasyon tensöründen $X, Y \in \chi(M)$ için

$$
\begin{aligned}
N(X,Y) &= \left(\overline{\nabla}_{JX} J\right) Y - \left(\overline{\nabla}_{JY} J\right) X + J\left(\overline{\nabla}_Y J\right) X - J\left(\overline{\nabla}_X J\right) Y \\
0 &= \overline{\nabla}_{JX} JY - J\overline{\nabla}_{JX} Y - \overline{\nabla}_{JY} JX + J\overline{\nabla}_{JY} X \\
& - J\overline{\nabla}_X JY - \overline{\nabla}_X Y + J\overline{\nabla}_Y JX + \overline{\nabla}_Y X \\
&= T_{JX} JY + \nabla_{JX} JY - JT_{JX} Y - J\nabla_{JX} Y - T_{JY} JX - \nabla_{JY} JX \\
& + JT_{JY} X + J\nabla_{JY} X - JT_X JY - J\nabla_X JY - T_X Y - \nabla_X Y \\
& + JT_Y JX + J\nabla_Y JX + T_Y X + \nabla_Y X
\end{aligned}
$$

eşitliği ve Önerme (4.1.3) den

$$(\nabla_{JX}J)Y-(\nabla_{JY}J)X-J(\nabla_X J)Y+J(\nabla_Y J)X=0$$

eşitliğinden $M\subset\overline{M}$ olduğundan $\overline{M}$ Hermityen ise M de Hermityendir.

Önerme 4.1.5. *M, quasi-Kähler manifold $\overline{M}$ nin hemen hemen Hermityen bir altmanifoldudur. Buna göre $X,Y\in\chi(M)$ için*

$$T_XY+T_{JX}JY=0$$

dır [15].

İspat: $\overline{M}$ quasi-Kähler manifold olduğundan $\left(\overline{\nabla}_XJ\right)Y+\left(\overline{\nabla}_{JX}J\right)JY=0$ dır. (4.1.4) denklemi ve T konfigürasyon tanımından

$$\begin{aligned}0&=\left(\overline{\nabla}_XJ\right)Y+\left(\overline{\nabla}_{JX}J\right)JY\\&=\overline{\nabla}_XJY-J\overline{\nabla}_XY-\overline{\nabla}_{JX}Y-J\overline{\nabla}_{JX}JY\\&=T_XJY+\nabla_XJY-JT_XY-J\nabla_XY\\&-T_{JX}Y-\nabla_{JX}Y-JT_{JX}JY-J\nabla_{JX}JY\end{aligned}$$

eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned}0&=(\nabla_XJ)Y+(\nabla_{JX}J)JY+T_XJY\\&-T_{JX}Y-J(T_XY+T_{JX}JY)\end{aligned}$$

M quasi-Kähler manifold ve önerme (4.1.3) den sağ taraf sol tarafa eşit olduğundan

$$T_XY+T_{JX}JY=0.$$

Tanım 4.1.11. *M, $\overline{M}$ nin hemen hemen Hermityen bir altmanifoldu olsun. $\overline{M}$ hemen hemen Hermityen manifoldu M hemen hemen Hermityen altmanifolduna göre ko-türevi $\widetilde{\delta}\Phi$ ye*

$$\widetilde{\delta}\phi(X)=-\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\overline{\nabla}_{E_i}\phi\right)(E_i,X)+\left(\overline{\nabla}_{JE_i}\phi\right)(JE_i,X)\right\}$$

kısmi kotürev *denir. Burada $\{E_1,...,E_n,JE_1,...,JE_n\}$ $\chi(M)$ için lokal J bazı ve $X\in\overline{\chi}(M)$ dir [2].*

Önerme 4.1.6. *$\widetilde{\delta}\phi$ kısmi kotürev ve $X\in\chi(M)^{\perp}$ olmak üzere*

$$\widetilde{\delta}\phi(X)=\langle JH,X\rangle$$

dır [15].

İspat: ϕ Kähler formu ve H ortalama eğrilik vektör alanı (2.1.5) denkleminden

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta}\phi(X) &= -\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\overline{\nabla}_{E_i}J\right)(E_i,X)+\left(\overline{\nabla}_{JE_i}J\right)(JE_i,X)\right\}\\ &= -\sum_{i=1}^{n}\left\langle T_{E_i}JE_i - JT_{E_i}E_i - T_{JE_i}E_i - JT_{E_i}E_i, X\right\rangle\\ &= \langle JH, X\rangle\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.1.2. *M, $\overline{M}$ nin hemen hemen Hermityen bir altmanifoldu olsun. Buna göre M minimal bir altmanifolddur gerek ve yeter şart $X \in \chi(M)^{\perp}$ olmak üzere*

$$\widetilde{\delta}\phi(X) = 0$$

eşitliği geçerlidir [2].

İspat: Önerme (4.1.6) dan ispatlanabilir.

Teorem 4.1.3. *Bir quasi-Kähler altmanifoldu minimaldir [15].*

İspat: Önerme (4.1.5) den

$$H = \sum_{i=1}^{n}\{T_{E_i}E_i + T_{JE_i}JE_i\} = 0$$

eşitliğinden quasi-Kähler altmanifoldu minimaldir.

4.2 Hemen Hemen Hermityen Submersiyonlar

Tanım 4.2.1. *$\left(M^{2m}, g, J\right)$ ve $\left(B^{2n}, h, J'\right)$ Hermityen manifoldlar olsun. $f : M \to B$ örten bir diferensiyellenebilir dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa **Riemann submersiyonu** olarak adlandırılır. f Riemann submersiyonu f ye ek olarak (3) eklenirse f dönüşümüne **hemen hemen Hermityen submersiyon** olarak adlandırılır.*

1. *f dönüşümü maksimal ranka sahiptir.*

2. *$f_*|_{(çek f_*)^{\perp}}$ lineer izometridir.*

3. *f hemen hemen kompleks dönüşüm ise*

$$f_* \circ J = J' \circ f_*$$

[2].

Tanım 4.2.2. $f:\left(M^{2m},g,J\right)\rightarrow\left(B^{2n},h,J'\right)$ *hemen hemen Hermityen submersiyon olsun.* f_* *çekirdeğinde bulunan M üzerindeki liflere teğettir* $\left(y\in B\text{ için, } F_y=f^{-1}(y)\right)$ *ve dikey (vertical) vektörler denir. Herhangi bir* $p\in M$ *için* $\mathscr{V}$ *integrallenebilir distribüsyonu*

$$\mathscr{V}_p=çek f_{*p}$$

ile tanımlanan $\mathscr{V}_p$ *ye* ***dikey distribüsyon*** *denir. Dikey distribüsyona ortogonal olan*

$$\mathscr{H}_p=\ (\mathscr{V}_P)^{\perp}$$

ile tanımlı distribüsyona ***yatay distribüsyon*** *denir. Total uzay M nin teğet demetindeki dikey ve yatay distribüsyonlar sırasıyla* $V(M)$ *ve* $H(M)$ *ile gösterilir ve ortogonal olan bir ayrışmaya sahip olduğundan*

$$T(M)=V(M)\oplus H(M)$$

dır. Ortogonal olan projeksiyon dönüşümü sırasıyla

$$\mathscr{V}:T(M)\rightarrow V(M)$$

ve

$$\mathscr{H}:T(M)\rightarrow H(M)$$

ile gösterilir [2].

Örnek 4.2.1.

$$f:\mathbb{R}^4\rightarrow\mathbb{R}^2$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1+x_3,-x_2+x_4)$$

tarafindan tanımlanan bir dönüşüm olsun. f *dönüşümünün hemen hemen Hermityen Submersiyon olduğunu gösterelim.*

1. *Bu dönüşümün öncelikle submersiyon olduğunu gösterelim. Doğrudan işlemlerle*

$$f_*=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

elde edilir. $rank f_*=boy\mathbb{R}^2=2$ *olduğundan* f *dönüşümü submersiyondur.*

2. *Riemann submersiyon olduğunu gösterelim.* $f_*|_{(çekF_*)^{\perp}}$ *lineer izometri midir ?*

$$çek f_*=\mathscr{V}_p=Span\{V_1=(1,0,1,0\ ),V_2=(0,1,0,1)\}$$

ve

$$(çekf_*)^{\perp} = \mathscr{H}_p = Span\{H_1 = (1,0,-1,0)\,,\ H_2 = (0,1,0,-1)\}$$

alınabilir.

$$g_1(H_1,H_1) = g_1(f_*H_1, f_*H_1) = 2$$

ve

$$g_2(H_2,H_2) = g_2(f_*H_2, f_*H_2) = 2$$

olduğundan $f_*|_{(çekF_*)^{\perp}}$ *lineer izometridir. Buradan* f *dönüşümü Riemann submersiyondur.*

3. f *dönüşümünün hemen hemen kompleks olduğunu gösterelim.* $\mathbb{R}^4$ *ve* $\mathbb{R}^2$ *üzerinde tanımlanan kompleks yapılar sırasıyla* J *ve* J' *göz önüne alınırsa*

$$J(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-x_2,x_1,-x_4,x_3)$$

ve

$$J'(x_1,x_2) = (-x_2,x_1)$$

$J' \circ f_*H_1 = -\sqrt{2}\partial y_2$ *ve* $f_* \circ JH_1 = -\sqrt{2}\partial y_2$ *olduğundan* $f_* \circ JH_1 = J' \circ f_*H_1$ *eşitliğinden* f *dönüşümü hemen hemen Hermityen submersiyondur.*

Önerme 4.2.1. $f : (M^{2m}, g, J) \to (B^{2n}, h, J')$ *hemen hemen Hermityen submersiyon olsun. Buna göre* f *tarafından belirlenen yatay ve dikey distribüsyonlar* J ***invaryanttır*** *(değişmez). Yani* $J\{V(M)\} = V(M)$ *ve* $J\{H(M)\} = H(M)$ *[20].*

İspat: $U \in V(M)$ için f hemen hemen kompleks olduğundan $f_* \circ JU = J' \circ f_*U = 0$ dır. Bu nedenle $JU \in V(M)$ dır. $X \in H(M)$ ve $JU \in V(M)$ için $g(JX,U) = -g(X,JU) = 0$ olacağından $JX \in H(M)$ elde edilir.

Önerme 4.2.2. $f : (M^{2m}, g, J) \to (B^{2n}, h, J')$ *hemen hemen Hermityen submersiyon olsun. Buna göre* F *lifleri,* $2m-2n$ *boyutundaki* M *nin hemen hemen kompleks bir şekilde gömülü altmanifoldlarıdır [2].*

İspat: Dikey distribüsyon $J-$invaryant ve tamamen integrallanebilir olduğundan M den indirgenen hemen hemen kompleks yapı ile bir F_y lifi hemen hemen kompleks bir şekilde gömülür. Yani $V \in V(M)$ için $f_* \circ JV = J' \circ f_*V = 0$ $JV = 0$ elde edilir. $p \in M$ için $T_pf^{-1}(y)$; $\mathscr{V}_p =$çek$f_{*p} = T_pf^{-1}(y)$ eşitliğinden $\mathscr{V}_p =$çek$f_{*p} = T_pf^{-1}(y) = 2m-2n$ M nin hemen hemen kompleks bir şekilde gömülü altmanifoldlarıdır.

Tanım 4.2.3. *$f:\left(M^{2m},g,J\right)\to\left(B^{2n},h,J'\right)$ hemen hemen Hermityen submersiyon olsun. X yatay vektör alanı M üzerinde ve X_* vektör alanı B üzerinde vektör alanları $f-$bağlıysa X vektör alanına **temel** (basic) **vektör alanı** denir [2].*

Önerme 4.2.3. *$f:\left(M^{2m},g,J\right)\to\left(B^{2n},h,J'\right)$ hemen hemen Hermityen submersiyon ve X,Y M üzerinde temel vektör alanları olsun. O zaman*

a) $g(X,Y)=h(X_*,Y_*)\circ f$;

b) *JX temel vektör alanı ile $J'X_*$ $f-$bağlıdır,*

c) *$\mathscr{H}[X,Y]$ temel vektör alanı ile $[X_*,Y_*]$ $f-$bağlıdır,*

d) *$\mathscr{H}\nabla_X Y$ temel vektör alanı ile $\nabla'_{X_*}Y_*$ ile $f-$bağlıdır [2].*

İspat: a) $p\in M$ ve X,Y temel vektör alanları için

$$\begin{aligned} g_p(X,Y) &= h_{f(p)}(f_*X,f_*Y) \\ &= h_{f(p)}(X_*\circ f,Y_*\circ f) \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$g_p(X,Y)=h_{f(p)}(X_*,Y_*)\circ f$$

elde edilir.

b) Önerme (4.2.1) ve f hemen hemen kompleks dönüşüm olduğundan

$$\begin{aligned} f_*JX &= J'f_*X_* \\ f_*JX &= J'X_*\circ f \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan JX temel vektör alanı $J'X_*$ ile $f-$bağlıdır.

c) X,Y temel vektör alanları için

$$\begin{aligned} f_*[X,Y] &= f_*\mathscr{H}[X,Y]+f_*\mathscr{V}[X,Y] \\ &= f_*\mathscr{H}[X,Y] \\ &= [f_*X,f_*Y] \\ &= [X_*,Y_*]\circ f \end{aligned}$$

elde edilir.

d) f bir lineer izometri, $X(g(Y,Z)) = X(h(Y_*,Z_*)) \circ f$ ve $\mathscr{H}[X,Y]$ ile $[X_*,Y_*]$ $f-$bağlı olduğundan (2.1.4) Koszul eşitliğinden X_*,Y_*,Z_* vektör alanlarının yatay liftleri (gönderileni) X,Y,Z olmak üzere

$$2g(\nabla_X Y,Z) = \begin{array}{c} X_*(h(Y_*,Z_*)) + Y_*(h(Z_*,X_*)) - Z_*(h(X_*,Y_*)) \\ -h([X_*,Z_*],Y_*) - h([Y_*,Z_*],X_*) - h([X_*,Y_*],Z_*) \end{array}$$

elde edilir. Burada sağ taraf B manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu ∇' için Koszul eşitliği olduğundan

$$2g(\mathscr{H}\nabla_X Y,Z) + 2g(\mathscr{V}\nabla_X Y,Z) = 2h(\mathscr{H}\nabla_{X_*}Y_*,Z_*)\circ f + 2h(\mathscr{V}\nabla_{X_*}Y_*,Z_*)\circ f$$
$$2g(\mathscr{H}\nabla_X Y,Z) = 2h(\mathscr{H}\nabla_{X_*}Y_*,Z_*)\circ f$$

eşitliği elde edilir. Buradan $\mathscr{H}\nabla_X Y$ ile $\nabla'_{X_*}Y_*$ $f-$bağlıdır.

Total uzay M üzerinde tanımlanan belirli bir yapının, lif altmanifoldları (F_y) ve taban manifoldu (B) üzerindeki etkisini inceleyelim.

Teorem 4.2.1. *$f : \left(M^{2m},g,J\right) \to \left(B^{2n},h,J'\right)$ hemen hemen Hermityen submersiyon olsun. Eğer*

a) *M quasi-Kähler ise F_y de quasi-Kählerdir.*

b) *M hemen hemen Kähler ise F_y de hemen hemen Kählerdir.*

c) *M hemen hemen Tachibana ise F_y de hemen hemen Tachibanadır.*

d) *M Kähler ise F_y de Kählerdir.*

e) *M Hermityen ise F_y de Hermityendir [2].*

İspat: $f : M \to B$ hemen hemen Hermityen submersiyon olsun. $y \in B$ için $F_y = f^{-1}(y)$ üzerindeki lif, (M,g) hemen hemen Hermityen manifoldunun $r = 2m-2n$-boyutlu altmanifoldu olduğundan önerme (4.1.4) ün ispatı gibi gösterilebilir. d) yi ispatlayalım diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

d) Sırasıyla M Kähler ve F_y altmanifoldunun konneksiyonu ∇ ve $\hat{\nabla}$ olsun. M Kähler ise $\nabla_X J = 0$ dır. F_y altmanifoldunun $\hat{\nabla}_X J = 0$ olduğunu gösterelim. (4.1.4) denkleminden ve T konfigürasyon tensöründen

$$\begin{aligned}(\nabla_X J)Y &= \nabla_X JY - J\nabla_X Y \\ &= T_X JY + \hat{\nabla}_X JY - JT_X Y - J\hat{\nabla}_X Y \\ &= \left(\hat{\nabla}_X J\right)Y + T_X JY - JT_X Y\end{aligned}$$

Önerme (4.1.3) den

$$\left(\hat{\nabla}_X J\right) Y = 0$$

eşitliği elde edilir. $F_y \subset M$ olduğundan M Kähler ise F_y de Kählerdir.

Teorem 4.2.2. $f : \left(M^{2m}, g, J\right) \to \left(B^{2n}, h, J'\right)$ *hemen hemen Hermityen submersiyon olsun. Eğer*

a) *M quasi-Kähler ise B de quasi-Kähler,*

b) *M hemen hemen Kähler ise B de hemen hemen Kähler,*

c) *M hemen hemen Tachibana ise B de hemen hemen Tachibana,*

d) *M Kähler ise B de Kähler,*

e) *M Hermityen ise B de Hermityendir [2].*

İspat: İlk olarak Kähler formu ϕ nin $\phi = f_* \phi'$ temel vektör alanları üzerinde olduğunu gösteriyoruz. Eğer M manifoldu üzerindeki X, Y temel vektör alanları B manifoldu üzerindeki X_*, Y_*vektör alanlarına $f-$*bağlı* ise o zaman

$$\phi(X,Y) = g(X,JY) = h(f_*X, f_*Y) = h(X_* \circ f, Y_* \circ f) = h(X_*, Y_*) \circ f$$

eşitliğinden

$$\phi(X,Y) = f_* \phi'(X,Y)$$

elde edilir

b) Öncelikle b) iddasını ispatlayalım. $\phi'(X,Y) = f_* \phi'(X,Y)$ f_* diferensiyel formlarda d ile değiştiğinden $d\phi(X,Y) = f_* d'\phi'(X,Y) = 0$ olduğunu görebiliriz. Buna göre M hemen hemen Kähler ise $d\phi(X,Y) = 0$ dır. f Riemann submersiyon olduğundan f_* lineer izometridir. Buradan $d\phi(X,Y) = 0$ ise $d'\phi'(X,Y) = 0$ dır. Bu nedenle M hemen hemen Kähler ise B de hemen hemen Kählerdir.

a) b) de olduğu gibi f_* ın diferensiyel formların ikinci derecesini (Kähler formu) koruduğunu göstermek yeterlidir. M quasi-Kähler ise $(\nabla_X J)Y + (\nabla_{JX} J)JY = 0$ dır. Önerme (4.2.3) den $\left(\nabla'_{X_*} J'\right) Y_* + \left(\nabla'_{JX_*} J'\right) J'Y_* = 0$ eşitliğinden M quasi-Kähler ise B de quasi-Kählerdir.

c) M hemen hemen Tachibana ise $(\nabla_X J)X = 0$ dır. Önerme (4.2.3) c) den M üzerindeki $\mathscr{H}\nabla_X Y$ ile B üzerindeki $\nabla'_{X_*} Y_*$ $f-$bağlı olduğundan $(\nabla_X J)X = 0$ ise $\left(\nabla'_{X_*} J'\right) X_* = 0$ dır. Buradan M hemen hemen Tachibana ise B de hemen hemen Tachibanadır.

e) M Hermityen ise $N(X,Y)=0$ dır. Denklem (4.1.7) ve Önerme (4.2.3) c) den $\mathscr{H}\nabla_X Y$ ile B üzerindeki $\nabla'_{X_*} Y_*$ $f-$bağlı olduğundan $N(X,Y)=0$ ise $\acute{N}(X_*,Y_*)=0$ dır. Buradan M Hermityen ise B de Hermityendir.

d) Son olarak d) iddiası b) ve e) den gelir. $d\phi=0$ ise M hemen hemen Kähler ve $N=0$ ise M Hermityendir. Buradan Lemma (4.1.1) den $\nabla_X J=0$ elde edilir. M üzerindeki $\nabla_X J$ ile $\nabla'_{X_*} J'$ $f-$bağlı olduğundan M Kähler ise B de Kählerdir.

Teorem 4.2.3. *$f:\left(M^{2m},g,J\right)\to\left(B^{2n},h,J'\right)$ quasi-Kähler submersiyon olsun. Buna göre $U,V\in\chi^v(M)$ ve $X,Y\in\chi^h(M)$ olmak üzere*

a) $T_U JV=T_{JU}V$,

b) $T_{JU}X=-JT_U X$,

c) $A_X JX=0$,

d) $A_X JY=-A_Y JX$ *dir [2].*

İspat: a) Lifler holomorfik altmanifold olduğundan ve T konfigürasyon tensörü üzerinde ikinci temel form olarak hareket ettiğinden quasi-Kähler submersiyon tanımından ve

$$\left(\overline{\nabla}_U J\right)V=\overline{\nabla}_U JV-J\overline{\nabla}_U V$$

denkleminden

$$0=\overline{\nabla}_U JV-J\overline{\nabla}_U V-\overline{\nabla}_{JU}V-J\overline{\nabla}_{JU}JV \tag{4.2.1}$$

elde edilir. Elde edilen denklemde T konfigürasyon tensörü yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}0&=T_U JV+\nabla_U JV-JT_U V-J\nabla_U V\\&\quad-T_{JU}V-\nabla_{JU}V-JT_{JU}JV-J\nabla_{JU}JV\\&=(\nabla_U J)V+(\nabla_{JU}J)JV\\&\quad+T_U JV-JT_U V-T_{JU}V-JT_{JU}JV\end{aligned}$$

denklemini düzenlersek

$$0=T_U JV-JT_U V-T_{JU}V-JT_{JU}JV \tag{4.2.2}$$

denklemi ve önerme (4.2.1) den $T_U JV=T_{JU}V$ eşitliği elde edilir.

b) Denklem (3.1.3), Önerme (4.2.1) ve g Hermityen metrik tanımından

$$g\left(T_{JU}X,W\right)=-g\left(T_{JU}V,X\right)=-g\left(JT_{U}X,V\right)$$

buradan $T_{JU}X=-JT_{U}X$ eşitliği elde edilir.

c) A temel tensör tanımından $X\in\chi^{h}\left(M\right)$ için $A_{X}X=\mathscr{V}\overline{\nabla}_{X}X$ dir. Denklem (4.2.1) de dikey kısmını kullanarak

$$0=A_{X}JX-A_{JX}X-JA_{X}X-JA_{JX}JX$$

buradan A yatay tensör alanı paralel olduğundan $A_{X}JX=0$ eşitliği elde edilir.

d) $X,Y\in\chi^{h}\left(M\right)$ için c) eşitliğine benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 4.2.4. *$f:\left(M^{2m},g,J\right)\rightarrow\left(B^{2n},h,J'\right)$ quasi-Kähler submersiyon olsun. Buna göre $X,Y\in\chi^{h}\left(M\right)$ olmak üzere*

a) *$A_{JX}Y=A_{X}JY$,*

b) *$A_{JX}V=-JA_{X}V=A_{X}JV$ dir [20].*

İspat: a) A temel tensörü tanımından ve denklem (4.2.1) de dikey kısmını kullanarak

$$0=A_{X}JY-JA_{X}Y-A_{JX}Y-JA_{JX}JY$$

denkleminden $A_{JX}Y=A_{X}JY$ eşitliği elde edilir.

b) $X\in\chi^{h}\left(M\right)$ ve $V\in\chi^{v}\left(M\right)$ için a) eşitliğine benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 4.2.5. *$f:\left(M^{2m},g,J\right)\rightarrow\left(B^{2n},h,J'\right)$ nearly-Kähler submersiyon olsun. Bu durumda yatay distribüsyon integrallenebilir ve tamamen jeodeziktir [20].*

İspat: X temel vektör alanı ve V dikey vektör alanı M üzerinde olmak üzere, önerme (3.0.1) ve A temel tensörünün tanımından $[X,V]=0$ olduğundan $\nabla_{X}V=\nabla_{V}X=A_{X}V$ eşitliği elde edilir. Önerme (3.1.2) $\nabla_{V}X=A_{X}V+T_{V}X$ denkleminden

$$\begin{aligned}(\nabla_{V}J)X&=\nabla_{V}JX-J\nabla_{V}X\\&=A_{X}JV-JA_{X}V.\end{aligned}$$

Diğer taraftan, f nearly-Kähler submersiyon olduğundan $\left(\nabla_{X}J\right)V=-\left(\nabla_{V}J\right)X$ anlamına gelir. Teorem (4.2.4) b) eşitliğinin yatay kısmı kullanılarak, $-2JA_{X}V=2JA_{X}V$ elde ederiz. Bundan dolayı $A=0$ yani yatay distribüsyon integrallenebilir ve tamamen jeodeziktir.

Teorem 4.2.6. *$f : \left(M^{2m}, g, J\right) \to \left(B^{2n}, h, J'\right)$ hemen hemen Tachibana submersiyon olsun. Bu durumda $X \in \chi^h(M)$ ve $V, W \in \chi^v(M)$ olmak üzere*

a) $T_V JW = JT_V W$,

b) $T_{JV} W = JT_V W$,

c) $T_V JX = JT_V X$ *dir [2].*

İspat: a) ve b) eşitliklerini göstermek için $V \in \chi^v(M)$ için f hemen hemen Tachibana submersiyon olduğundan $(\nabla_V J)V = 0$ dır. Bundan dolayı $T_V JV = JT_V V$ eşitliğini göstermek yeterlidir. T konfigürasyon tensörü ve $\nabla_V JV = (\nabla_V J) + J\nabla_V V$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} T_V JV &= \overline{\nabla}_V JV - \nabla_V JV \\ &= \left(\overline{\nabla}_V J\right) V + J\overline{\nabla}_V V - (\nabla_V J) V - J\nabla_V V \\ &= J\left(\overline{\nabla}_V V + \nabla_V V\right) \\ &= JT_V V \end{aligned}$$

$T_{JV} = JT_V V$ elde edilir. Önerme (4.2.1) den $J-$invaryant olduğundan $T_{JV} = JT_V V = T_{JV} V$ eşitliğinden a) ve b) iddiaları gösterilmiş olur.

c) iddiası da a) ve b) iddaları gibi gösterilebilir.

Teorem 4.2.7. *$f : \left(M^{2m}, g, J\right) \to \left(B^{2n}, h, J'\right)$ Kähler submersiyon olsun. Bu durumda V dikey vektör alanı ve E herhangi bir vektör alanı olmak üzere*

$$T_V JE = JT_V E$$

dır [2].

İspat: T konfigürasyon tensörü ve f Kähler submersiyon olduğundan

$$\begin{aligned} T_V JE &= \overline{\nabla}_V JE - \nabla_V JE \\ &= \left(\overline{\nabla}_V J\right) E + J\overline{\nabla}_V E - (\nabla_V J) E - J\nabla_V E \\ &= J\left(\overline{\nabla}_V E + \nabla_V E\right) \\ &= JT_V E. \end{aligned}$$

KAYNAKLAR

[1] **O'Neill, B.** (1966). The Fundamental Equations of a Submersion., *13*(4).

[2] **Watson, B.** (1976). Almost Hermitian Submersions, J Differential Geometry.

[3] **Hacısalihoğlu, H.H.** (1980). *Diferensiyel Geometri'ye Giriş*, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

[4] **Hacısalihoğlu, H.H.** (1994). *Diferensiyel Geometri*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

[5] **Şahin, B.** (2012). *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*, Nobel Yayıncılık.

[6] **Sabuncuoğlu, A.** (2014). *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayıncılık.

[7] **Hacısalihoğlu, H.H.** (1993). *Diferensiyel Geometri*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

[8] **Hacısalihoğlu, H. H. & Sabuncuoğlu, A.** (1983). *Diferensiyel Geometri*, Milli Eğitim Basımevi.

[9] **Kobayashi, S. & Nomizu, K.** (1963). *Foundations Differential Geometry*, İnterscience Publisher.

[10] **Şahin, B.** (1996). *CR-Alt Manifoldların Geometrisi* (Yüksek Lisans Tezi). İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[11] **Carmo, M.P.D.** (1992). *Riemannian Geometry*, Birkhäuser.

[12] **O'Neill, B.** (1983). *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press.

[13] **Yano, K. & Kon, M.** (1985). *Stcructures on Manifolds*, World Publishing Co Pte Ltd.

[14] **Hacısalihoğlu, H.H.** (1983). *Diferensiyel Geometri*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

[15] **Gray, A.** (1965). Minimal Varieties and Almost Hermitian Submanifolds.

[16] **Martin, D.** (2002). *Manifold Theory: An Introduction for Mathematical Physicists*, Horwood Publishing Chichester.

[17] **Boggess, A.** (1991). *CR manifolds and the Tangential Cauchy-Riemann Complex*, CRC Press, Boca Raton.

[18] **Kobayashi, S. & Nomizu, K.** (1969). *Foundations of Differential Geometry*, İnterscience Publishers.

[19] **Şahin, B.** (2017). *Riemannian Submersions, Riemannian Maps in Hermitian Geometry, and their Applications*, Academic Press.

[20] **Falcitelli, M. Ianus S. & Pastore, A.** (2004). *Riemannian Submersions and Related Topic*, World Scientific.

[21] **Gündüzalp, Y.** (2007). *Riemann Submersiyonların Geometrisi Üzerine* (Yüksek Lisans Tezi). İnönü Üniversitesi Fen Fakültesi.

ÖZGEÇMİŞ

Ad–Soyad : Ayşe ERDOĞAN

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2014, İnönü Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği